

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ НАЧАЛЬНОГО ОТРЕЗКА ДЛЯ БЛОЧНЫХ МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ НА SIMDСТРУКТУРАХ

Дмитриева О.А.

Кафедра ПМИИ ДонГТУ

E-mail: dmitriv@r5.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Dmitriewa O. Increase of calculation effectiveness of starting piece for block multisteps task decision methods Cauchy on SIMD structures. Under decision of systems of usual differential equations on parallel calculable systems multisteps algorithms can be more effective under the same exactness or more exact one under calculation's volume. However attached to their realization the decisions in previous points (that more, than more exact method) are necessary, whereas on starting stage is it is known only an starting value. The effective variants of acquisition of accelerative values by the way of combined use onesteps and multisteps block methods are proposed in this article. The disrersal schemes and complication estimations of offered methods are described. The recommendations, allowing to raise effectiveness of parallel calculable type structures SIMD are given.

Введение

С развитием параллельных вычислительных систем особое внимание уделяется теоретическим работам по построению новых алгоритмов решения обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности и их практической реализации. Однако, в большинстве своем, новые методы не всегда являются корректными и эффективными, лишь некоторые из них обладают численной устойчивостью. К последним можно отнести блочные многоточечные методы интегрирования дифференциальных уравнений, предложенные в работах [1,2]. Эти методы являются многшаговыми, т.е. новое значение x_n выражается через найденные ранее значения x_{n-2}, x_{n-1} . В сравнении с одношаговыми методами, где новое значение x_n выражается только через значение x_{n-1} , многшаговые алгоритмы могут быть более эффективными при той же точности или более точными при том же объеме вычислений. Однако при их реализации приходится сталкиваться с серьезными трудностями. Во-первых, для многшагового метода необходимы решения в предшествующих точках (тем больше, чем выше порядок метода), тогда как на первом шаге интегрирования известно лишь начальное значение для уравнения или вектор начальных значений для системы дифференциальных уравнений. Во-вторых, известные многшаговые методы могут применяться только с постоянным шагом при интегрировании от t_0 до T . И, если со вторым недостатком блочные методы успешно справляются, то проблема получения значений на начальном отрезке (назовем эти значения разгонными, а процесс вычисления этих значений - разгонкой) остается.

Реализация процесса разгонки одношаговыми методами

При нахождении стартовых значений существенным является то, что они должны быть вычислены с той же степенью точности, с которой будет работать

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

λ -точечным блочным разностным методом [1].

$$2a^e Fnj = f('n + i^{\tau \cdot u}('n + \dot{n})).$$

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad (3)$$

Из условия сходимости многошагового многоточечного блочного метода (2) можем получить шаг h обеспечивающий порядок погрешности используемого метода $O(h^{2k})$, где k - количество точек в блоке.

$\|4_C$ -нормаматрицы Аразмерности $k \times k$ скомпонентами $a_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, k$.

В качестве одношагового выберем метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности (больший порядок точности могут обеспечить только одношаговые методы, использующие, например, контроль погрешности на шаге и т.п., что автоматически влечет за собой дополнительные сложности реализации). Тогда исходный шаг, с которым необходимо начинать вычисления по методу Рунге-Кутты будет определяться из отношения $X_p^* = \tau; \dots$, откуда следует, что $Z_{pyale} = V \wedge l \ll \dots$ в случае четырехточечного блочного метода ЭТО соотношение примет вид $T_{yfac} = T_{uochol}^2$, при

этом видно, что с ростом размерности блока к размерность шага x_{Runge} будет уменьшаться, а это, несомненно, повлечет за собой увеличение количества вспомогательных расчетов. В реальных задачах для того, чтобы вычислить значения в k начальных точках с шагом $t_{\text{шаг}}$ может потребоваться такое количество точек, найденных с шагом x_{Runge} , что число операций, затраченных на разгонку, превысит трудоемкость решения всей задачи блочным методом.

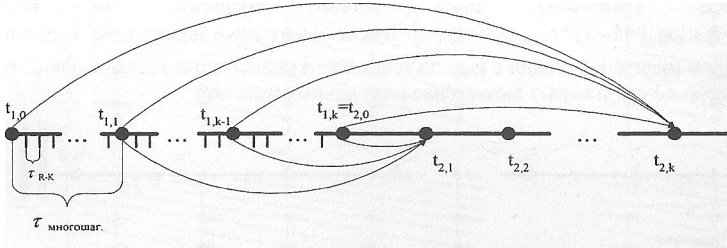


Рис. 1 Схема нахождения разгоночных значений с помощью методов Рунге-Кутты

Оценим время вычисления начального отрезка рассмотренным алгоритмом. Обозначим через $t/-$ время вычисления значения функции $f(t,x)$, (а t_{mul} - время выполнения операций сложения и умножения соответственно. Тогда трудоемкость разгонки будет определяться как

$$T_{\text{Рунге-Кутты}} = k * \frac{\tau_{\text{многошаг.}}}{\tau_{\text{Рунге}}} * (4t_f + 8t_{add} + 9t_{mult})$$

Если учитывать только время вычислений правой части уравнений, т.к. времена выполнения арифметических операций и обмена значительно меньше времени вычисления правой части $t_{add} \sim I_{\text{ниж}} \ll t_f$, то

$$T_{\text{Рунге-Кутты}} = \frac{4 * k * \tau_{\text{многошаг.}}}{\tau_{\text{Рунге}}}$$

Процесс разгонки, построенный на комбинировании одношагового и многошагового многоточечного блочного методов

Рассмотренный выше алгоритм по своей сути является последовательным, поскольку при его реализации на параллельной вычислительной системе будет задействован только один процессорный элемент, в то время как оставшиеся будут простаивать. В качестве подхода, применимого для реализации в многопроцессорных системах и значительно сокращающего количество операций, можно предложить следующий. Будем использовать одношаговый метод не на всем интервале, а только в начальной его части для вычисления опорных значений, количество которых будет зависеть от размерности блока. Размерность линейки процессорных элементов в SIMD структуре должна совпадать с размерностью блока либо превосходить ее. Тогда для блока размерностью k достаточно просчитать значения в $2*(k-1)$ точках одношаговым

методом рис. 2 а) с величиной шага $\tau_{\text{Рунге-Кутты}}$, а затем можно начать использовать многошаговый многоточечный метод с шагом, равным $2 \cdot \tau_{\text{Рунге-Кутты}}$ (рис. 2 б).

Для следующего блока шаг будет определяться уже как $4 \cdot \tau_{\text{Рунге-Кутты}}$ и т.д., до тех пор, пока не будет просчитано значение в точке $t_{0+fl-1} \cdot \tau_{\text{многошаг}}$ (рис. 2 в). Общее число точек, значение в которых должно быть посчитано с помощью метода Рунге-Кутты можно определить как $k \cdot m_{\text{многошаг}} / \tau_{\text{Рунге-Кутты}}$. С помощью комбинированного подхода количество точек можно сократить до величины $2(i-1) + \log J(k-1) \cdot m_{\text{многошаг}} / \tau_{\text{Рунге-Кутты}}$. Также необходимо принять во внимание тот факт, что значения функции в каждой точке блока вычисляются одновременно, что еще примерно в 4 раз ускоряет вычисление разгонных значений.

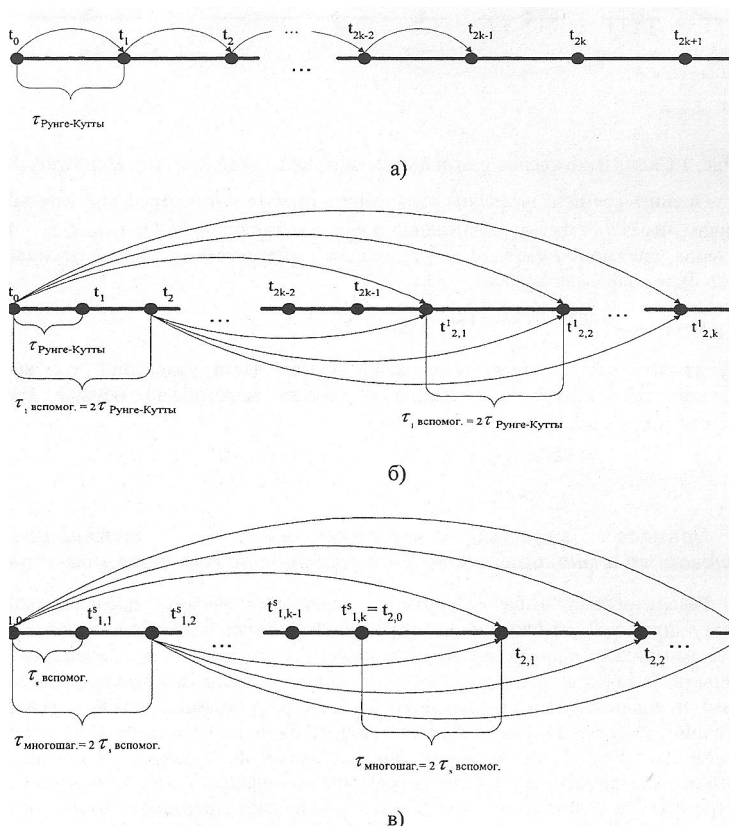


Рис. 2 Схема работы комбинированного метода, использующего одношаговый метод Рунге-Кутты и многошаговый многоточечный блочный метод

Время, необходимое для вычисления разгоночных значений, будет определяться количеством вычислений правой части

$$T_{\text{Рунге-Кутты+многошаг.}} = 2 * (k-1) * 4t_f + \log_2 \left[\frac{\tau_{\text{многошаг.}}}{\tau_{\text{Рунге}}} \right] * (k+1)t_f$$

В работе [1] было доказано, что наилучшие оценки эффективности блочных методов достигаются на линейках процессорных элементов с топологией ID-top. Именно для такого способа коммутации процессорных элементов в SIMD-структурах приведена схема отображения рассмотренного алгоритма.

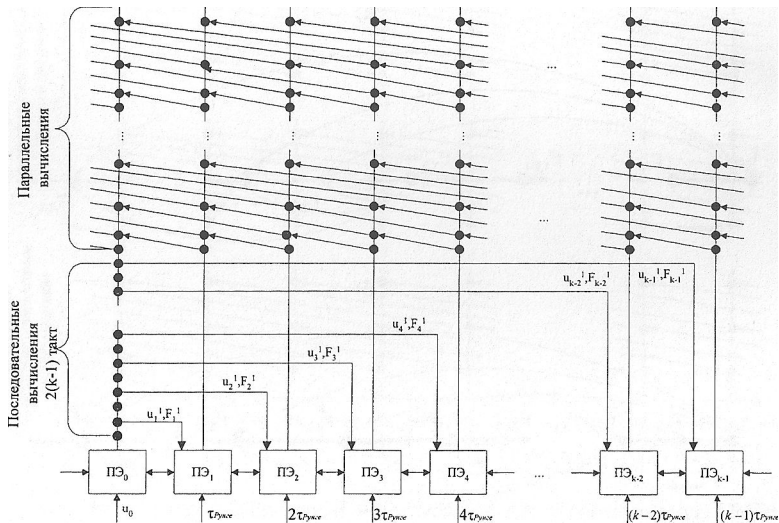


Рис. 3 Отображение алгоритма на параллельную вычислительную SIMD-структуру с топологией ID-top

Разгонка, построенная на комбинации одношаговых и многошаговых многоточечных блочных методов

В качестве еще одного подхода к решению проблемы вычисления начального отрезка можно предложить использование первоначально одношагового многоточечного блочного метода [2].

$$\frac{u_{n,i} - u_{n,0}}{i\tau} = b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{i,j} F_{n,j}, \quad i = \overline{1, k}, \quad n = \overline{1, 2, \dots} \quad (5)$$

Соотношение между длинами шагов для одношагового и многошагового блочных методов будет выглядеть следующим образом $T_0^k \wedge_{0\text{шаг}} = T_{\text{ттошаг}}^{1k}$, отсюда,

$T_{\text{одношаг.}} = \wedge^k V^T_{\text{многошаг.}}$ После однократного применения одношагового многоточечного блочного метода (рис. 3 а) можно начать вычисления многошаговым многоточечным методом (рис. 3 б), удваивая шаг при переходе к расчету значений в новом блоке.

После каждого просчета значений многшаговш многоточным блочным методом шаг будет удваиваться фис. 3 в,г).

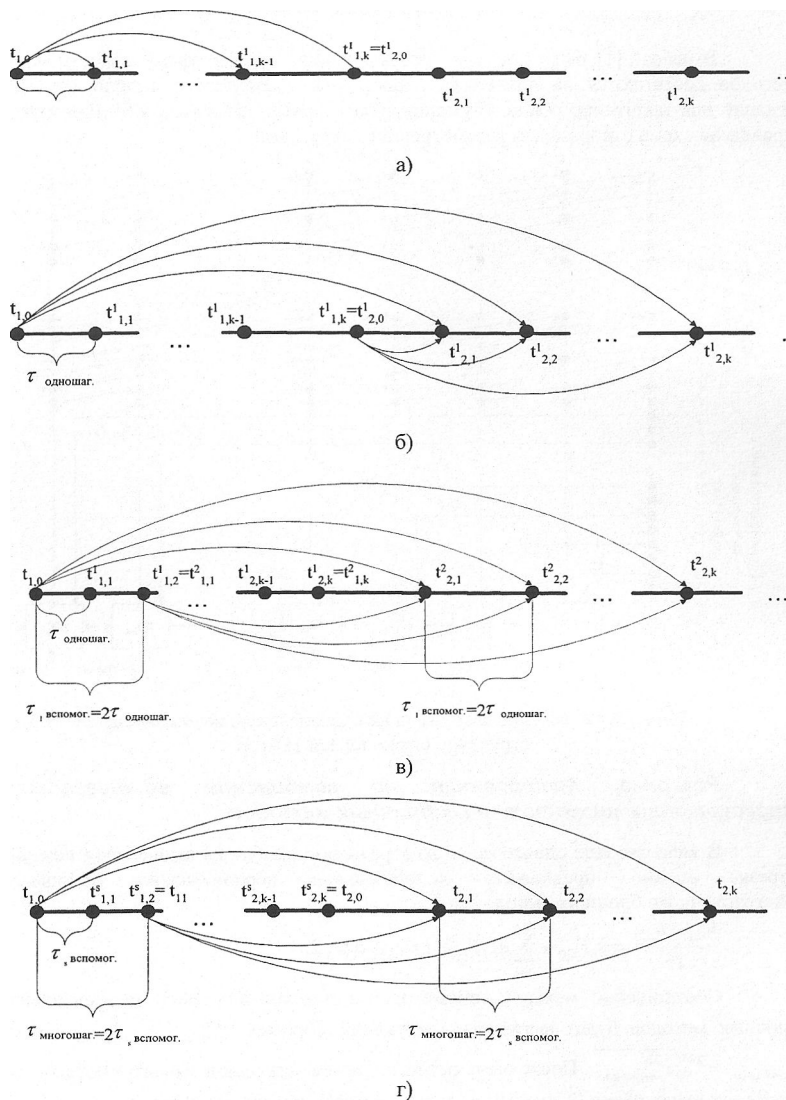


Рис. 4 Схема работы комбинированного метода, использующего одношаговый многоточный и многшаговый многоточный блочные методы

Процесс расчета завершится, когда вспомогательный шаг, полученный путем последовательных удвоений, сравняется с шагом $\Delta_{\text{многошаг}}$. Исходя из этого, коэффициент, связывающий размерности шагов используемых блочных методов, должен быть пропорционален степени двойки, так как проще сделать лишнюю итерацию на этапе разгонки, чем потом выполнять расчеты с шагом, заведомо меньше допустимого. Схема отображения предложенного алгоритма на параллельную структуру приведена на рис. 5.

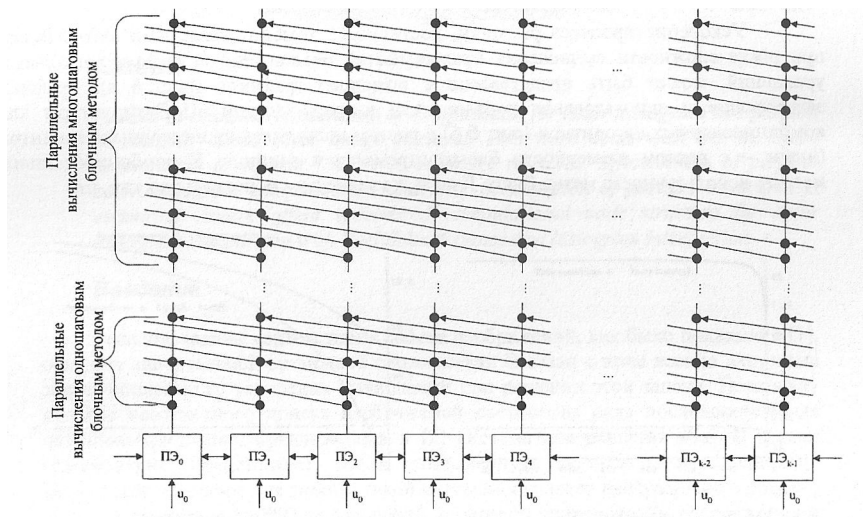


Рис. 5 Отображение алгоритма на параллельную вычислительную SIMD-структуру с топологией ID-тор

Трудоемкость последнего алгоритма определим как

$$T_{\text{одношаг}+\text{многошаг}} = k * t_f + \log_2 \left[\frac{\tau_{\text{многошаг}}}{\tau_{\text{одношаг}}} \right] * (k+1) t_f.$$

Заключение

В качестве иллюстрации вычисления значений на начальном отрезке выберем умеренно устойчивую задачу [1], решение которой одношаговыми методами приводит к значительным вычислительным погрешностям.

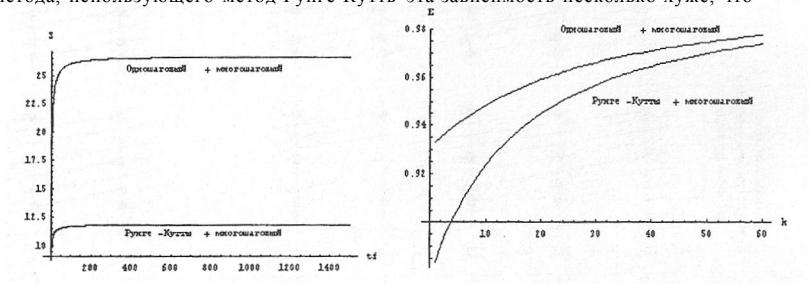
$$x' = -10(t-1)x, \quad x(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 2. \quad (6)$$

Найдем разгоночные значения для многошагового многоточечного блочного метода с размерностью блока $k=4$. Шаг интегрирования $\Delta_{\text{многошаг}}$ выберем из условия (4). Значение константы Липшица найдем из уравнения (6) как $\text{Sup} |df/cf|$ на отрезке интегрирования $0 < t < 2$. Примем $L=10$. Норма матрицы для многоточечного четырехточечного метода $\|A\| = 0,9857$, тогда $\tau_0 - \frac{4}{4 \cdot 0,9857} = 0.02536$, выберем

$x_{\text{шаг}} \wedge \tau_0 = 0.025$. Исходя из полученных ранее соотношений $x_{\text{Рунге}} = 0.000625$, $T_{\text{одн}} \ll 0.0027$. Поскольку коэффициент, связывающий размерности шагов блочных методов, должен быть пропорционален степени двойки, переопределим шаг τ , $\tau = \tau_{\text{многошаг}} / 2^5 = 0.00156$.

Тогда время работы рассмотренных выше алгоритмов разгонки будет вычисляться как $T_{\text{Рунге-Кутты}} \approx 640 / T_{\text{Рунге-Кутты}} \approx 54$ и $T_{\text{многошаг}} = 24 / f'_{\text{Рунге-Кутты}} + \text{многошаг} \cdot f'_{\text{одношаг}} + \text{многошаг} \cdot J'$

Ускорение процесса разгонки, достигаемое комбинированными алгоритмами при росте сложности вычисления правых частей обыкновенных дифференциальных уравнений, может быть представлено с помощью графиков (рис. 6 а). Графики эффективности использования параллельной вычислительной SIMD-структуры для комбинированных алгоритмов (рис. 6 б) с ростом количества процессорных элементов (иначе - с ростом размерности блока) стремятся к единице. У комбинированного метода, использующего метод Рунге-Кутты эта зависимость несколько хуже, что



а) ускорение

б) эффективность

Рис. 6 Характеристики параллелизма комбинированных методов вычисления начального отрезка на SIMD-структурах

объясняется наличием участка, на котором вычисления проходятся последовательно. Но, тем не менее, полученные характеристики параллелизма достаточно убедительно свидетельствуют о высокой эффективности предложенных методов.

Литература

1. Дмитриева О.А. Параллельные блочные многошаговые алгоритмы численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности. /Наукові праці Донецького державного технічного університету. Серія: Проблеми моделювання та автоматизації проектування динамічних систем, випуск 15: -Донець:, 2000. С. 53-58.
2. Фельдман Л. П. Сходимость и оценка погрешности параллельных одношаговых блочных методов моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами //Наукові праці Донецького державного технічного університету. Серія: Проблеми моделювання та автоматизації проектування динамічних систем, випуск 15: - Донець:, 2000. С. 12-16.
3. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. - М.: Гостехиздат, 1946, 282 с.