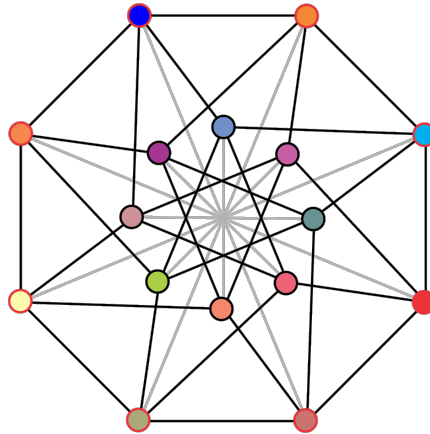


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА ТЕХНОЛОГІЙ**

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І ІНФОРМАТИКИ



**Методичні вказівки до лабораторних робіт
за курсом «ДИСКРЕТНИЙ АНАЛІЗ»
для студентів, що навчаються за спеціальністю
121 Інженерія програмного забезпечення
денної форми навчання**

Покровськ-2020

УДК 519.1:519.85](072)

М 67

Методичні вказівки до лабораторних робіт за курсом "Дискретний аналіз" для студентів, що навчаються за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення денної форми навчання / Укл.: І.А. Назарова. - Покровськ: ДонНТУ, 2020. - 67с.

Методичні вказівки містять коротку довідку з теоретичного матеріалу, приклади розв'язання задач та завдання до виконання лабораторних робіт, питання до самоконтролю з курсу "Дискретний аналіз".

Укладач: Назарова І.А., к.т.н., доцент кафедри прикладної математики та інформатики

Рецензент Ковальов С.О., к.т.н., доцент кафедри комп'ютерної інженерії

Відповідальний за випуск: О.А. Дмитрієва, професор, д.т.н., завідувач кафедрою "Прикладна математика і інформатика"

Розглянуто на засіданні кафедри прикладної математики і інформатики, протокол №2 від 18.02.19р.

Затверджено навчально-методичним відділом ДВНЗ «ДонНТУ», протокол № 8 від 25.02.2020р.

ДВНЗ «ДонНТУ», 2020р.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
Лабораторна робота № 1 Ейлереві та гамільтонові графи	6
1.1 Теоретична довідка.....	6
1.2 Приклади розв'язання задач.....	11
1.3 Завдання до лабораторної роботи	17
1.4 Питання для самоконтролю.....	18
Лабораторна робота № 2 Планарність графів	20
2.1 Теоретична довідка.....	20
2.2 Приклади розв'язання задач.....	24
2.3 Завдання до лабораторної роботи	32
2.4 Питання для самоконтролю.....	33
Лабораторна робота № 3 Розфарбування	34
3.1 Теоретична довідка.....	34
3.2 Приклади розв'язання задач.....	39
3.3 Завдання до лабораторної роботи	43
3.4 Питання для самоконтролю.....	44
Лабораторна робота № 4 Орієнтовані графи (орграфи).....	45
4.1 Теоретична довідка.....	45
4.2 Приклади розв'язання задач.....	50
4.3 Завдання до лабораторної роботи	57
4.4 Питання для самоконтролю.....	58
Лабораторна робота № 5 Цикломатика	59
5.1 Теоретична довідка.....	59

5.2 Приклади розв'язання задач.....	61
5.3 Завдання до лабораторної роботи	65
5.4 Питання для самоконтролю.....	65
Список рекомендованої літератури.....	67

ВСТУП

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт складено для курсу “Дискретний аналіз” навчального плану бакалаврів та призначено для студентів, що навчаються за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення галузі знань 12 Інформаційні технології денної форми навчання.

Методичні вказівки містять основні теоретичні засади дискретного аналізу у вигляді короткої довідки для одного з базових розділів курсу, таких як теорія графів, приклади застосування теорії на конкретних завданнях, а також контрольні питання за темами та варіанти завдань до виконання лабораторних робіт.

Методичні вказівки містять матеріал за такими розділами теорії графів, як ейлереві та гамільтонові графи, планарність, розфарбування графів, орієнтовані графи, цикломатика.

Матеріал, що викладено у вказівках, має своєю метою формування знань та вмінь студента в області теорії та засобів дискретного аналізу, що є фундаментальними для розробки дискретних математичних моделей складних динамічних систем та процесів, засобів обчислювальної техніки, інформаційно-управляючих систем та систем штучного інтелекту.

Лабораторна робота №1 ЕЙЛЕРЕВІ ТА ГАМІЛЬТОНОВІ ГРАФИ

Ціль роботи: засвоєння теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок в знаходженні ейлеревих і гамільтонових циклів в неорієнтованих графах, вирішення задач «китайського листоноші» і комівояжера.

1.1 Теоретична довідка

Ейлереві графи

Ейлерів цикл – цикл, що містить кожне ребро графа.

Ейлерів граф – граф, що містить ейлерів цикл.

Ейлеревим ланцюгом з кінцевими вершинами **(a,b)** називається ланцюг, що починається у вершині **a**, закінчується у вершині **b** і містить кожне ребро вхідного графа рівно один раз.

Напівейлерів граф – граф, що містить ейлерів ланцюг.

Теорема про існування ейлерева циклу в неорграфі (критерій ейлеревості – необхідні й достатні умови): зв'язний неорієнтований простий граф **G** є ейлеревим тоді й тільки тоді, коли степені усіх його вершин парні.

Наслідок №1. Для зв'язного простого неорграфу **G** множину ребер можна розбити на прості цикли, якщо граф – ейлерів.

Наслідок №2 – **критерій існування ейлерева ланцюга у неорграфі**. Для того, щоб зв'язний простий неорграф **G** покривався єдиним ейлеревим ланцюгом, необхідно й достатньо, щоб він містив рівно 2 вершин з непарним степенем. Тоді ланцюг починається в одній із цих вершин і закінчується в іншій.

Алгоритми побудови ейлеревих маршрутів

Дано: зв'язний простий неорграф $G = (V, E)$, $|V| = p$, $|E| = q$, що містить ейлерів цикл або ланцюг (тобто виконуються умови відповідного критерію).

Треба перенумерувати ребра вхідного графа від **1** до **q** таким чином, щоб номер ребра вказував, яким при рахуванні це ребро ввійде в ейлерів цикл або ланцюг.

Алгоритм № 1 (Флері) пошуку ейлерева цикла

1. Беремо довільну вершину $v \in V$ і довільне ребро $e = \{u, v\} \in E$. Привласнюємо ребру e номер 1. Викреслюємо це ребро зі списку ребер і переходимо до вершини v .

2. Нехай w – поточна вершина і k номер, останнього викресленого ребра. Вибираємо довільне ребро інцидентне вершині w , причому міст і ребро, що повертає нас у початкову вершину v , вибираємо тільки в крайньому випадку, якщо інших можливостей вибору ребра не існує. Привласнюємо ребру номер $k + 1$ і викреслюємо його.

Процес триває доти, поки усі ребра не викреслені.

Алгоритм №1 побудови ейлерева ланцюга

Передбачається, що неорграф зв'язний, простий і задовольняє умовам критерія Ейлера для ланцюга – в графі є рівно 2 вершини з непарним степенем.

Якщо вони несуміжні – з'єднати ребром. Якщо суміжні, додати вершину і два ребра. В отриманому графі буде ейлерів цикл, бо степені усіх вершин графа є парними. Побудувати його і видалити додані елементи, отримаємо ейлерів ланцюг.

Алгоритм №2 побудови ейлерового цикла

Передбачається, що граф зв'язний і задовольняє умовам критерія Ейлера. Всі ребра графа не мають індексів.

1. Покласти $i:=1$. Побудувати простий цикл з початком в деякій вершині (нехай це буде вершина v_s).

2. Усім ребрам побудованого цикла привласнити індекс i . Якщо в графі ребер без індекса більше нема, то до п. 4, інакше до п. 3.

3. Покласти $i:=i+1$, серед ребер без індекса вибрати ребро, суміжне одному з ребер з індексом. Побудувати простий цикл з ще не помічених ребер такий, що містить вибране ребро, і перейти до п. 2.

4. Побудувати ейлерів цикл з початком в v_s на кожному кроці вибирати ребро з найбільшим індексом. Якщо таких ребер декілька, то вибрати будь-яке з них.

Алгоритм №2 побудови ейлерева ланцюга

1. Якщо потрібно побудувати ейлерів ланцюг, то спочатку будується простий ланцюг між вершинами з непарними степенями. Нехай він починається у вершині v_s , ребрам цього ланцюга присвоїти індекси $i:=1$.

2. Якщо ребер без індекса більше немає, то до п. 4, інакше до п. 3.

3. Покласти $i:=i+1$, серед ребер без індекса вибрати ребро, суміжне одному з ребер з індексом. Побудувати простий цикл з ще не помічених ребер, що містить вибране ребро, привласнити ребрам цього цикла індекс i і перейти до п. 2.

4. Побудувати ейлерів ланцюг з початком в v_s послідовним обходом ребер графа. На кожному кроці вибирати ребро з найбільшим індексом. Якщо таких ребер декілька, то брати будь-яке з них.

Задача «китайського листиноші» – це узагальнення задачі про пошук ейлерового цикла в графі.

Нехай є зв'язний зважений граф, кожному ребру якого приписано деяке число, що називають вагою ребра (часто, але не завжди, в додатках вага – це довжина ребра). Потрібно знайти такий маршрут (цикл/ланцюг), при якому кожне ребро графа проходиться принаймні один раз і сумарна вага усіх ребер, що увійшли до маршрута, є мінімальною. Зауважимо, що якщо граф є ейлеровим, то розв'язання задачі «китайського листиноші» співпадає із задачею побудови ейлерова цикла/ланцюга.

Гамільтонові графи

Гамільтонів цикл – простий цикл, що містить кожну вершину графа. Гамільтонів граф – граф, що містить гамільтонів цикл. Гамільтонів ланцюг – простий ланцюг, що містить кожну вершину графа.

Достатні умови існування гамільтонова цикла в графі: теореми Дірака та Оре.

Теорема Дірака: якщо число вершин графа p і для будь-якої вершини виконується умова: $\forall v_i \in V, i = \overline{1, p}, \deg v_i \geq \frac{p}{2}$, то граф G – гамільтонів.

Теорема Оре: якщо число вершин графа p і для будь-яких двох несуміжних вершин u і v виконується нерівність: $\deg u + \deg v \geq p$, $A(u, v) \in E$, то граф G – гамільтонів

Дерево повного перебору – універсальний спосіб визначення гамільтоновості графа. Для його генерації використовують ідею ярусного представлення графа, при умові, що вершина не може повторюватися тільки у гілці, бо будується гамільтонів ланцюг. Якщо гамільтонів ланцюг

існує, остається перевірити, чи є замикаюче ребро, чи ні. Дерево повного перебору вершин це громіздкий метод, і може використовуватись лише для ілюстрації ідеї побудови гамільтонова цикла.

Алгоритм перебору Робертса і Флореса пошуку усіх гамільтонових циклів заданого графа G .

Ідея алгоритма:

- вибирається деяка початкова вершина графа G хай v_1 , ця вершина утворює перший елемент множини $S: S = \{v_1\}$;

- множина S на кожному кроці зберігатиме вже знайдені вершини гамільтонова ланцюга;

- до S додається перша вершина в стовпці, відповідному v_1 , нехай ця вершина a ;

- потім до S додається перша можлива вершина в стовпці a , хай це вершина b : $S = \{v_1, a, b\}$ і так далі.

Під можливою розуміється вершина, яка ще не належить S . Існує 2 принципи, що перешкоджають включенню деякої вершини на кроці r в множину S . Нехай множина S має вигляд: $S = \{v_1, a, b, \dots, v_{r-1}, v_r\}$.

1. У стовпці v_r немає можливих вершин (множину S не можна розширити).

2. Ланцюг, визначений послідовністю вершин S , має довжину $p - 1$, де p – кількість вершин графа, тобто він є гамільтоновим ланцюгом.

У випадку 2 також 2 варіанти:

- 2а) У графі G існує ребро $\{v_r, v_1\}$, знайдений гамільтонів цикл.

- 2б) У графі G не існує ребра $\{v_r, v_1\}$, гамільтонів цикл не може бути одержаний.

Якщо потрібні всі гамільтонові цикли, то у випадку 2а обробити гамільтонів цикл і до кроку повернення. У випадку 1 і 2б слід перейти до кроку повернення.

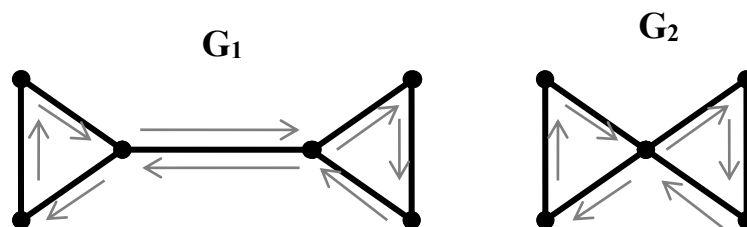
Крок повернення полягає у видаленні останньої включеної вершини із S , після чого S матиме вигляд: $S = \{v_1, a, b, \dots, v_{r-1}\}$ і додавання до S першої можливої вершини, наступної за v_r у стовпці v_{r-1} . Якщо не існує ніякої можливої вершини, то робиться наступний крок повернення. Пошук закінчується тоді і тільки тоді, коли S складається з однієї вершини і не існує ніякої можливої вершини, яку можна було додати в S , крок повернення робить S порожньою. Це означає, що усі гамільтонові цикли знайдені і алгоритм закінчує роботу.

Задача комівояжера – це узагальнення задачі про пошук гамільтонова цикла в графі. Побудувати маршрут (цикл, ланцюг) в зваженому графі G із мінімальною вагою, що проходить, принаймні, один раз по кожній вершині графа. Якщо такий маршрут існує (цикл, ланцюг), то задача зводиться до задачі про пошук гамільтонова маршрута в графі.

1.2 Приклади розв'язання задач

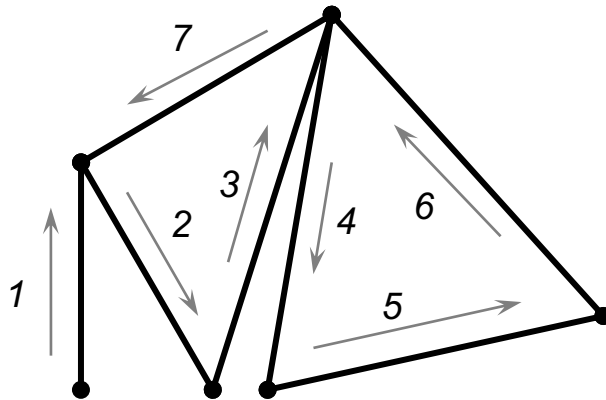
Задача 1. Привести приклади ейлерового та не ейлерового графів.

Розв'язання. На наступному рисунку проілюстровано, що граф G_1 не містить ейлерів цикл, тому й граф не є ейлеревим. Граф G_2 містить ейлерів цикл, тому й граф є ейлеревим.

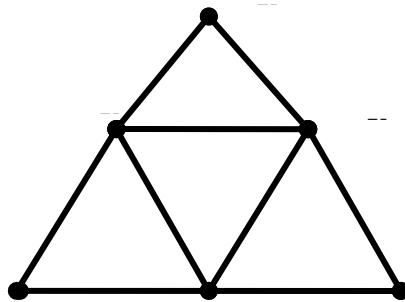


Задача 2. Привести приклад графа з ейлеревим ланцюгом.

Розв'язання. На рисунку проілюстровано ейлерів ланцюг графа.



Задача 3. Нехай маємо граф $G = (V, E)$, $|V| = 6$, $|E| = 8$, що зображений на наступному рисунку. Знайти ейлерів цикл за алгоритмом Флері.



Розв'язання. Граф G є зв'язним та ейлеревим за теоремою Ейлера, бо кожна вершина в ньому має парний степінь.

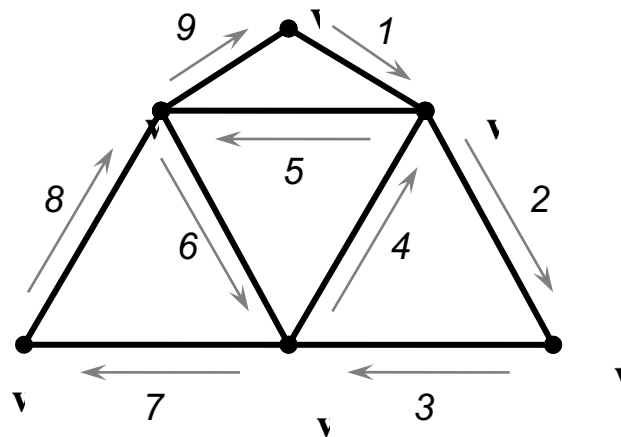
Опишемо покрокове виконання алгоритму Флері.

1. Вибираємо вершину v_1 та ребро $\{v_1, v_2\}$, привласнюємо ребру номер 1. Викреслюємо це ребро із списку ребер та переходимо у вершину v_2 .

2. Вибираємо ребро $\{v_2, v_3\}$, привласнюємо ребру номер 2. Викреслюємо це ребро із списку ребер та переходимо у вершину v_3 .

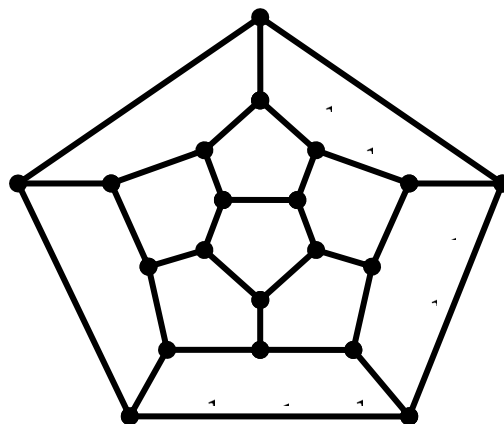
3. Вибираємо ребро $\{v_3, v_4\}$ (ребро $\{v_3, v_4\}$ є міст, але іншої можливості на цьому кроці немає), привласнюємо ребру номер 3. Викреслюємо це ребро із списку ребер та переходимо у вершину v_4 .

4. Продовжуючи цю процедуру із вершини v_4 за скінчене число кроків, пронумеруємо усі ребра графа, тобто побудуємо ейлерів цикл.



Задача 4. Привести приклад гамільтонова графа.

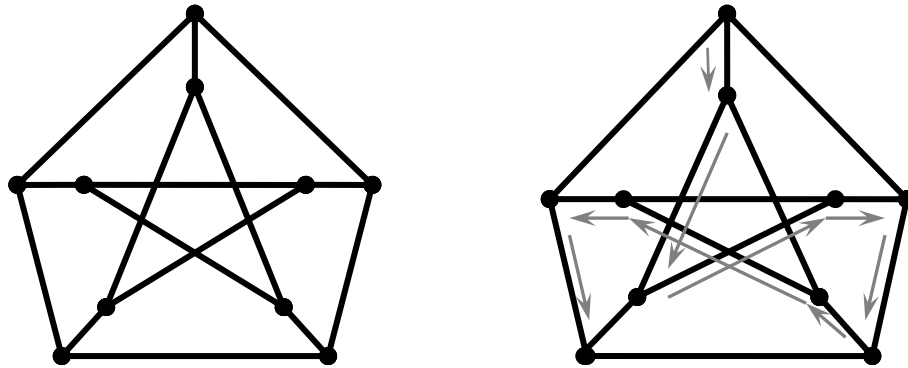
Розв'язання. На наступному рисунку проілюстровано один із відомих розв'язків задачі «навколосвітня подорож».



Номера вершин дають гамільтонів цикл графа.

Задача 5. Привести приклад графа, що містить гамільтонів ланцюг, але не містить гамільтонів цикла.

Розв'язання. На наступному рисунку приведено граф Петерсена, який не має гамільтонів цикла, але містить гамільтонів ланцюг.



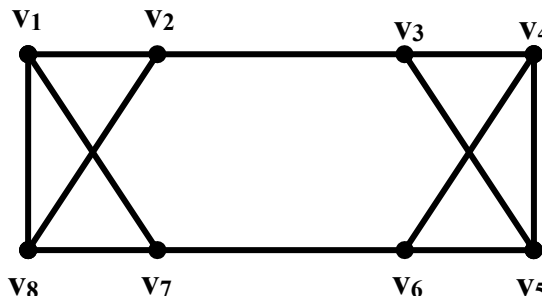
Задача 7. Привести приклад графа для якого не виконуються достатні умови існування гамільтонів графа, але граф є гамільтоновим.

Розв'язання. На наступному рисунку приведено приклад графа $G = (V, E), |V| = p = 8$, для якого не виконуються достатні умови теореми Дірака, але граф є гамільтоновим, бо містить і не один гамільтонів цикл.

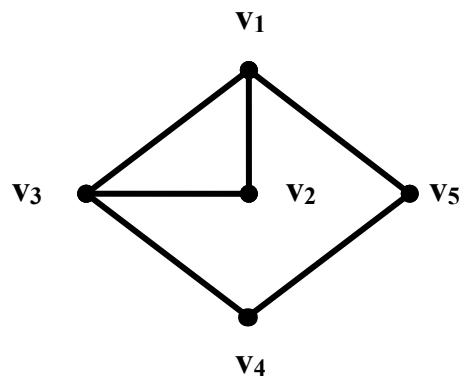
Наприклад, $\Gamma_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_1)$,

$\Gamma_2 = (v_1, v_8, v_7, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$,

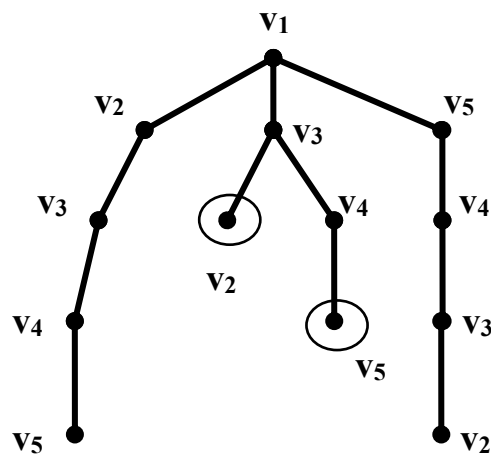
$$p = 8, \deg v_i = 3, i = \overline{1, 8}, \quad 3 \not\geq \frac{8}{2} = 4.$$



Задача 8. Побудувати усі гамільтонові цикли графа G .



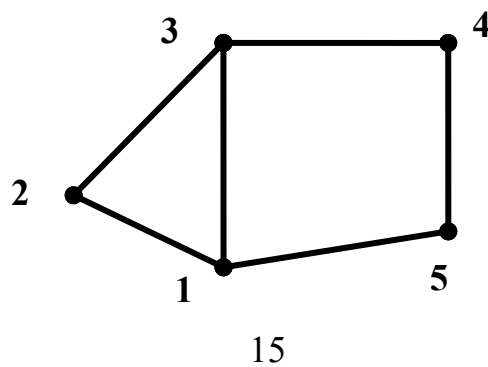
Розв'язання. Дерево повного перебору для графа G .



Гамільтонові цикли: $\Gamma_1 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$.

$\Gamma_2 = (v_1, v_5, v_4, v_3, v_2, v_1)$.

Задача 9. Побудувати усі гамільтонові цикли графа $G = (V, E)$, якщо такі існують за алгоритмом Робертса-Флореса.



Розв'язання. Проілюструємо покрокове виконання алгоритма Робертса і Флореса.

1. $S = \{1\}$.
2. $S = \{1,2\}$.
3. $S = \{1,2,3\}$.
4. $S = \{1,2,3,4\}$.
5. $S = \{1,2,3,4,5\}$ гамільтонів ланцюг.
6. У графі G існує замикаюче ребро $\{5,1\} \Rightarrow S = \{1,2,3,4,5,1\} \in \Gamma_1$.
7. Крок повернення: $S = \{1,2,3,4\}$.
8. Крок повернення: $S = \{1,2,3\}$.
9. Крок повернення: $S = \{1,2\}$.
10. Крок повернення: $S = \{1\}$.
11. $S = \{1,3\}$.
12. $S = \{1,3,2\}$.
13. Крок повернення: $S = \{1,3\}$.
14. $S = \{1,3,4\}$.
15. $S = \{1,3,4,5\}$.
16. Крок повернення: $S = \{1,3,4\}$.
17. Крок повернення: $S = \{1,3\}$.
18. Крок повернення: $S = \{1\}$.
19. $S = \{1,5\}$.
20. $S = \{1,5,4\}$.
21. $S = \{1,5,4,3\}$.

22. $S = \{1,5,4,3,2\}$, $\exists \{2,1\} \in E \Rightarrow S = \{1,5,4,3,2,1\} \in \Gamma_2$.

23. Крок повернення: $S = \{1,5,4,3\}$.

24. Крок повернення: $S = \{1,5,4\}$.

25. Крок повернення: $S = \{1,5\}$.

26. Крок повернення: $S = \{1\}$.

27) Крок повернення: $S = \emptyset$. Кінець алгоритму.

У графі G два гамільтонові цикли: $\{1,2,3,4,5,1\}$; $\{1,5,4,3,2,1\}$.

1.3 Завдання до лабораторної роботи

1. Використовуючи алгоритм генерації варіанту GV (додаток А), побудувати два неорієнтованих графа $G_1: GV(13, \{5,6\})$ та $G_2: GV(7, \{3,4\})$.

2. Визначити, чи є граф G_1 ейлеревим. Якщо граф G_1 – є ейлеревим, то

- побудувати ейлерів ланцюг за двома алгоритмами;
- побудувати ейлерів цикл за двома алгоритмами;
- вирішити задачу «китайського листоноші», видаливши мінімальне число ребер, що зробить його не ейлеревим (в якості ваги для ребер взяти 1).

3. Якщо G_1 не є ейлеревим, то:

- побудувати ейлерів ланцюг в графі G_1 , якщо він існує;
- вирішити задачу «китайського листоноші» (в якості ваги для ребер взяти 1);
- додати мінімальне число ребер, які роблять його ейлеревим і знайти ейлерів цикл та ланцюг за двома алгоритмами.

4. Визначити, чи є граф G_2 гамільтоновим.

5. Якщо граф G_2 – гамільтонів, то:
- побудувати гамільтонові цикли, використовуючи дерево повного перебору;
 - побудувати гамільтонові цикли, використовуючи алгоритм Робертса-Флореса;
 - вирішити для нього задачу комівояжера, видаливши мінімальне число ребер, щоб граф не був гамільтоновим (в якості ваги для ребер взяти 1).
6. Якщо граф не є гамільтоновим, то:
- вирішити задачу комівояжера (в якості ваги для ребер взяти 1);
 - додати мінімальне число ребер, які роблять його гамільтоновим; побудувати гамільтонів цикл, використовуючи дерево повного перебору і алгоритм Робертса-Флореса.
7. Привести приклади гамільтонових графів, які не задовольняють теоремам Оре і Дірака.

1.4 Питання для самоконтролю

1. Дати постановку та розв'язання задачі про Кенігсберзькі мости.
2. Дати визначення ейлерова цикла, графа.
3. Сформулювати критерій існування в графі ейлерового цикла.
4. Наслідки із теореми Ейлера. Дати визначення ейлерова ланцюга.
5. Записати алгоритми генерації ейлерового цикла та ланцюга в ейлеревому графі.
6. Дати постановку задачі про «китайського поштаря».
7. Дати постановку задачі «кругосвітня подорож».

8. Який граф називається гамільтоновим? Дати визначення гамільтонових цикла та ланцюга.

9. Сформулювати теореми Оре, Дірака. Що таке достатні умови існування гамільтонова циклу?

10. Навести приклад графа для якого не виконуються умови теорем Оре чи Дірака, але граф містить гамільтонів цикл.

11. Для чого потрібно дерево повного перебору?

12. Записати алгоритм Робертса та Флореса.

13. Що визначається вирішенням задачі комівояжеру? Яка складність алгоритмів розв'язання задачі комівояжеру?

ЛІТЕРАТУРА: [1-2,4-5].

Лабораторна робота №2

ПЛАНАРНІСТЬ ГРАФІВ

Ціль роботи: засвоєння теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок в визначенні планарності графів за критеріями Понтрягіна-Куратовського та Вагнера, опанування алгоритмом плоскої укладки графів.

2.1 Теоретична довідка

Плоским називають такий граф G у якого вершини – точки площини, а ребра – безперервні плоскі лінії без перетину та самоперетину, причому з'єднуються вершини так, що ніякі два ребра не мають спільних точок, окрім інцидентних їм обох вершин.

Планарний граф – це граф, що є ізоморфним плоскому.

Жорданова крива – це неперервна спрямлена лінія, яка не має самоперетину.

Про планарні графи кажуть, що вони мають плоску укладку або укладаються на площині.

Гранню плоского графа називається максимальна за включенням кількість точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, що не перетинає ребра графа.

Межа грані – це множина вершин та ребер, які належать одній грані.

Довільний плоский граф має одну єдину необмежену грань. Цю грань називають зовнішньою, інші – внутрішніми.

Слідство з теореми Жордано: будь-які дві вершини, які належать грані можуть бути з'єднані ланцюгом довільної довжини таким чином, що вибрана грань розіб'ється на дві грані.

Теорема Ейлера для плоских графів: нехай зв'язний плоский граф $G = (V, E)$ має p вершин, $|V| = p$, q – ребер, $|E| = q$ та f – граней плоскої укладки.

Для будь-якого зв'язного плоского графа G вірне співвідношення:
 $p - q + f = 2$.

Графи K_5 та $K_{3,3}$ – непланарні.

Операція підрозбиття ребер: у довільному графі G видаляється ребро $e = \{u, v\}$ і додається 2 нових $e_1 = \{u, a\}$, $e_2 = \{a, v\}$, де a – нова вершина, що не належить графові G . Ребро $\{u, v\}$ графа G підрозбивається вершиною a на два ребра та отримується новий граф:
 $G' = G - \{u, v\} + \{u, a\} + \{a, v\}$.

Операція стягнення ребер – ототожнення суміжних вершин ребра (операція протилежна підрозбиттю ребер).

Два графи називаються **гомеоморфними** один одному, якщо вони можуть бути отримані з одного й того ж графа підрозбиттям його ребер.

Критерій планарності Понтрягіна-Куратовського: граф є планарним тоді й тільки тоді, коли він не містить підграфів гомеоморфних K_5 або $K_{3,3}$.

Критерій планарності Вагнера: граф є планарним тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів, які стягуються до K_5 або $K_{3,3}$.

Алгоритм плоскої укладки – алгоритм γ .

Алгоритм γ плоскої укладки графа G являє собою процес послідовного приєднання до деякого вже укладеного підграфа $\tilde{G}$ графа G нового ланцюга, обидва кінці якого належать $\tilde{G}$. Цей ланцюг розбиває

одну з граней графа $\tilde{G}$ на дві. При цьому в якості початкового плоского графа обирається будь-який простий цикл вхідного графа. Процес продовжується до того часу, доки не буде отримана плоска укладка графа G або приєднання деякого ланцюга виявляється неможливим, в цьому разі граф G є непланарним.

Нехай G граф G та побудована деяка плоска укладка підграфа $\tilde{G}$ графа G .

Сегментом відносно поточної плоскої укладки або просто сегментом $\tilde{G}$ будемо називати підграф вхідного графа G одного з наступних видів:

1) ребро $e = \{u, v\}$ вхідного графа G таке, що не належить поточній плоскій укладці, $e \notin \tilde{G}$, але кінцеві вершини ребра u, v вже є в плоскій укладці;

2) зв'язна компонента графа $G - \tilde{G}$, доповнена всіма ребрами графа G , інцидентними вершинам взятої компоненти та кінцевими вершинами цих ребер.

Контактна вершина – це вершина v сегмента S відносно $\tilde{G}$, якщо вона належить множині вершин поточної плоскої укладки.

Допустимою гранню для сегмента S називається така грань Γ графа $\tilde{G}$, яка містить усі контактні вершини сегмента S .

Позначимо $\Gamma(S_i)$ – множину усіх допустимих граней сегменту S_i .

Простий ланцюг α сегмента S , який містить 2 різні контактні вершини і не містить інших контактних вершин, називається α -ланцюгом.

Простий α -ланцюг проходить з контактної вершини крізь неконтактні і повертається до контактної вершини.

Алгоритм γ :

0. Виберемо деякий простий цикл C графа G і укладемо його на площині (краще обирати максимальний простий цикл графа G , що доставляє оточення).

1. Знайдемо грані графа $\tilde{G}$ та множину сегментів S відносно поточної $\tilde{G}$. Якщо множина сегментів порожня, перейти до п. 7.

2. Для кожного сегмента S знайдемо множини допустимих граней.

3. Якщо існує сегмент S для якого $\Gamma(S) = \emptyset$ (множина граней порожня), то граф G не є планарним, вихід з алгоритму, інакше перехід до п. 4.

4. Якщо існує сегмент S , для якого рівно одна допустима грань ($|\Gamma(S)| = 1$), то перейдемо до п. 6, інакше п. 5.

5. Для деякого сегмента S обираємо довільну допустиму грань Γ .

6. Помістимо довільний α -ланцюг L , який належить S до грані Γ , замінимо $\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$ та перейдемо до п. 1. Побудована часткова плоска укладка графа G .

7. Побудована плоска укладка графа G .

Граф G укладається у простір L , якщо існує таке відображення вершин та ребер графа G відповідно у точки та жорданові криві цього простору, що різним вершинам відповідають різні точки простору, а криві, що відповідають різним ребрам, перетинаються тільки у інцидентних цим ребрам вершинах. Наведені нижче характеристики графів представляють ту чи іншу міру непланарності.

Кількість схрещувань графа G – це мінімальна кількість перетину двох ребер при зображенні графа G на площині, позначають $Cr(G)$. Поняття пересічення відноситься до пересічення рівно двох ребер. Кількість схрещувань дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли граф є планарним.

Перекрученість G – це мінімальна кількість ребер, видалення яких призводить до планарного графа, $Sk(G)$.

Товщина G – максимальна кількість його планарних підграфів, об'єднання яких дає граф G , позначають $t(G)$. Вочевидь, що товщина планарного графа дорівнює одиниці.

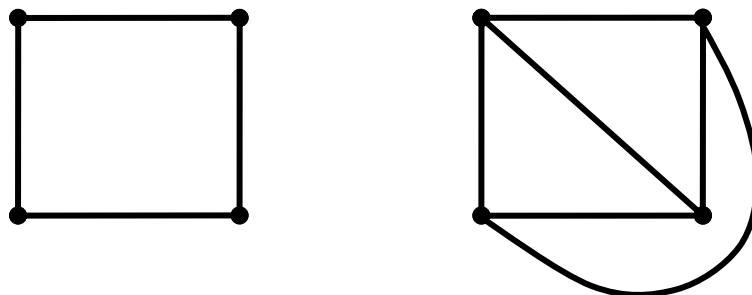
Рід графа G – це мінімальна кількість ручок, які необхідно додати до сфери, щоб можна було укласти граф без перетину та самоперетину ребер.

Графи, які не можна укласти на площині/сфері, але можна укласти на торі (сфері із однією ручкою), називають тороїдальними.

2.2 Приклади розв'язання задач

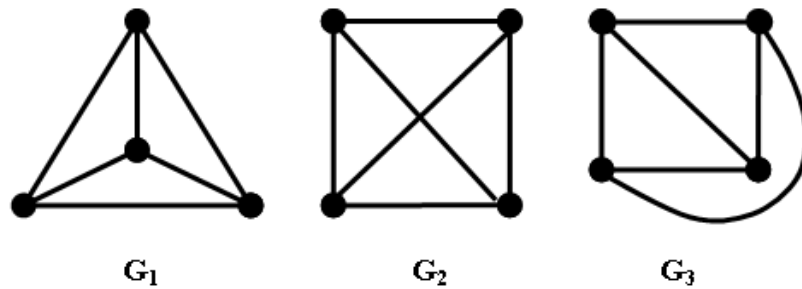
Задача 1. Привести приклади плоскої укладки простого цикла та повного графа порядку 4.

Розв'язання. На наступному рисунку наведено зображення плоскої укладки простого цикла C_4 та повного графа K_4 .



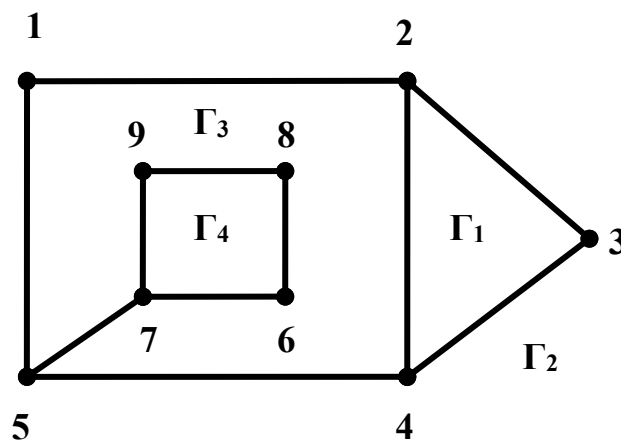
Задача 2. Виявити, чи є повний граф порядку 4 – плоским або планарним?

Розв'язання. На наступному рисунку наведено три зображення графа K_4 . Графи G_1, G_3 є плоскими за визначенням, а граф G_2 є планарним, бо ізоморфний плоскому графу.



Задача 3. Для наступного плоского графа визначити кількість та множину граней, вписати межі граней.

Розв'язання. Заданий плоский граф має одну необмежену зовнішню грань та 3 – внутрішні грані.



Межі граней:

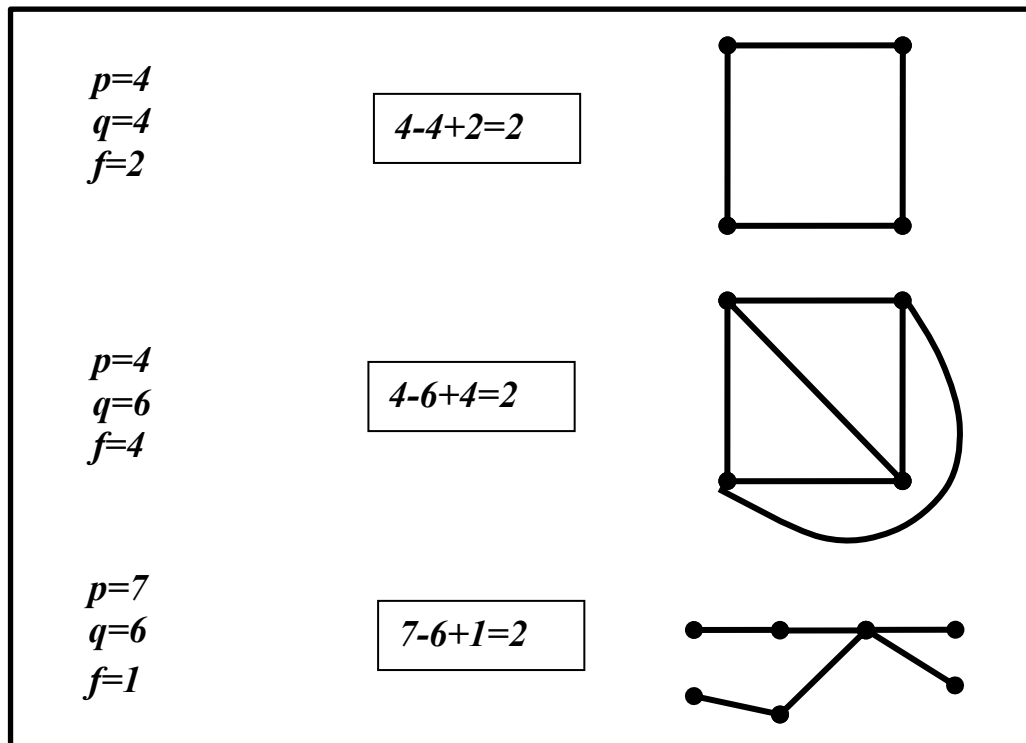
$$\Gamma_1 = \{2, 3, 4\} \text{ або } \{23, 24, 34\}. \quad \Gamma_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{12, 23, 34, 45, 15\}.$$

$$\Gamma_3 = \{1\} \{1, 2, 4, 5\} \rightarrow \{12, 15, 24, 45\}$$

$$2) \{5, 6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{57, 67, 68, 79, 89\}. \quad \Gamma_4 = \{6, 7, 8, 9\} \rightarrow \{67, 68, 79, 89\}.$$

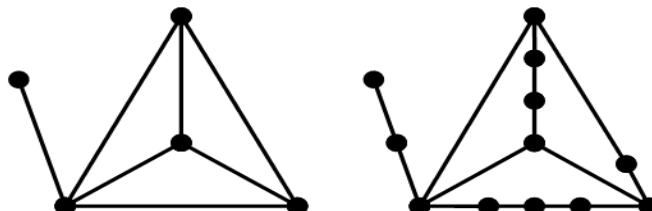
Задача 4. Навести ілюстрацію виконання теореми Ейлера для плоских графів на прикладі дерева, простого цикла та повного графа.

Розв'язання. На наступному рисунку показано, що кількість граней плоского графа залежить тільки від кількості його вершин та ребер для дерева на 7 вершинах, простого цикла та повного графа на 4 вершинах.

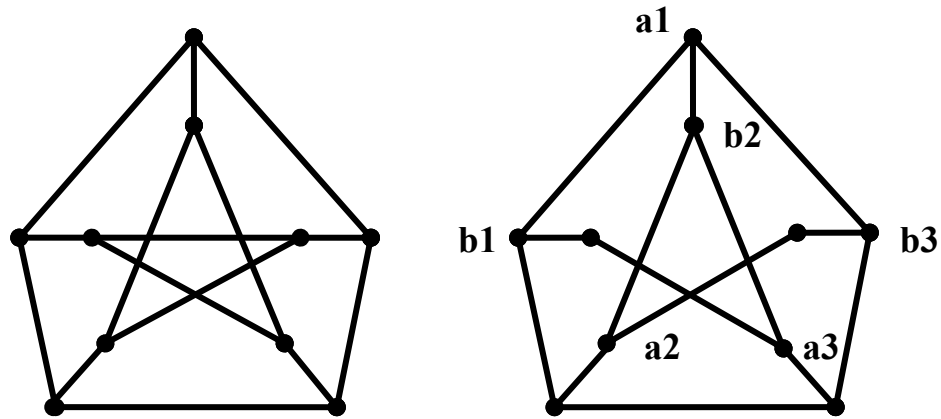


Задача 5. Навести приклади гомеоморфних графів.

Розв'язання. Наступні графи є гомеоморфними за визначенням, бо вони можуть бути отримані з одного й того ж графа застосуванням операції підрозбиття ребер.

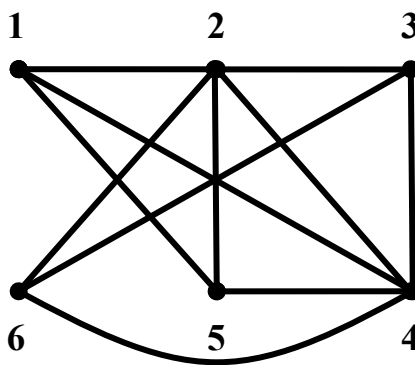


Задача 6. Визначити планарність наступних графів.

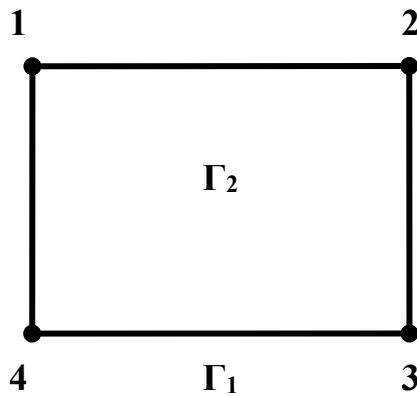


Розв'язання. Граф Петерсена (зліва на рисунку) вочевидь стягується до K_5 , тому є непланарним за критерієм Вагнера. Граф справа від графа Петерсена є гомеоморфним до $K_{3,3}$, тому також є непланарним за критерієм Понтрягіна-Куратовського (3 вершини однієї долі позначені: $a1, a2, a3$, 3 вершини іншої долі: $b1, b2, b3$).

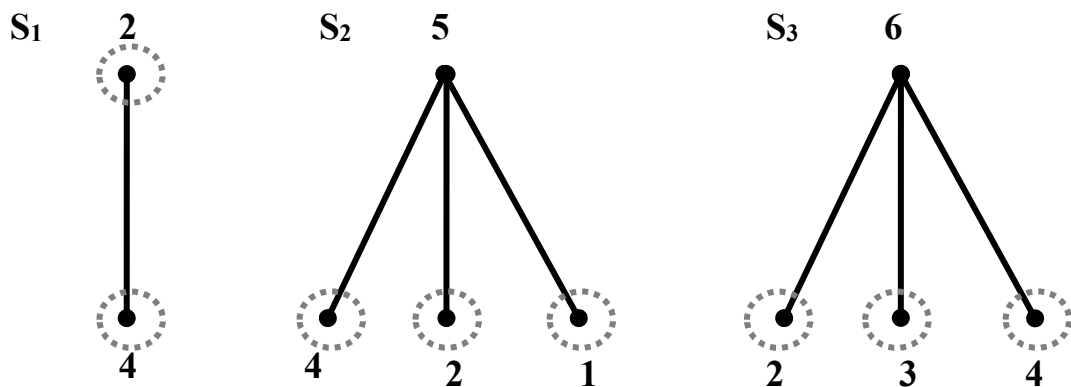
Задача 7. Визначити планарність та побудувати плоску укладку графа G . Привести покрокове виконання алгоритму плоскої укладки.



Розв'язання. Крок 1. Виберемо в графі довільний простий цикл та укладемо його на площині. Визначимо для нього множину граней.

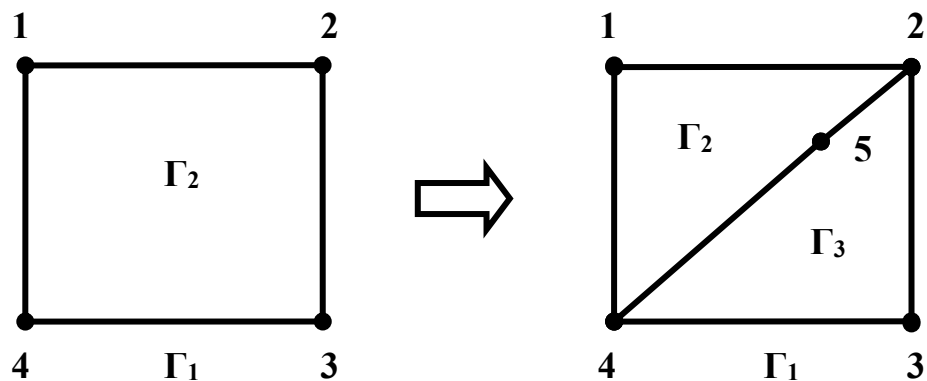


Визначимо множину сегментів відносно поточної плоскої укладки.

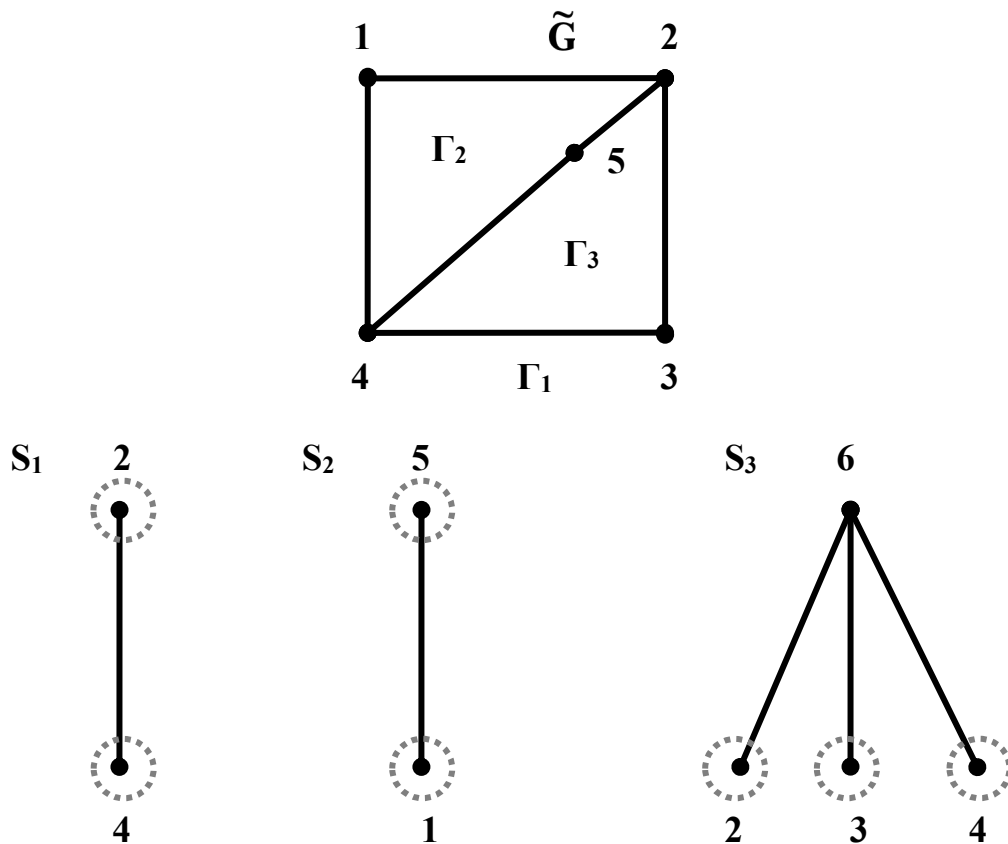


Множина сегментів не порожня. Визначимо для кожного сегменту множину допустимих граней: $\Gamma(S_1) = \Gamma(S_2) = \Gamma(S_3) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$.

Виберемо сегмент **S2** і α -ланцюг = {4, 5, 2}, укладемо його до однієї з допустимих граней, нехай це буде Γ_2 .



Крок 2. Для нової поточної плоскої укладки визначаємо нові множини граней і сегментів.



Для кожного сегменту визначимо множини допустимих граней:

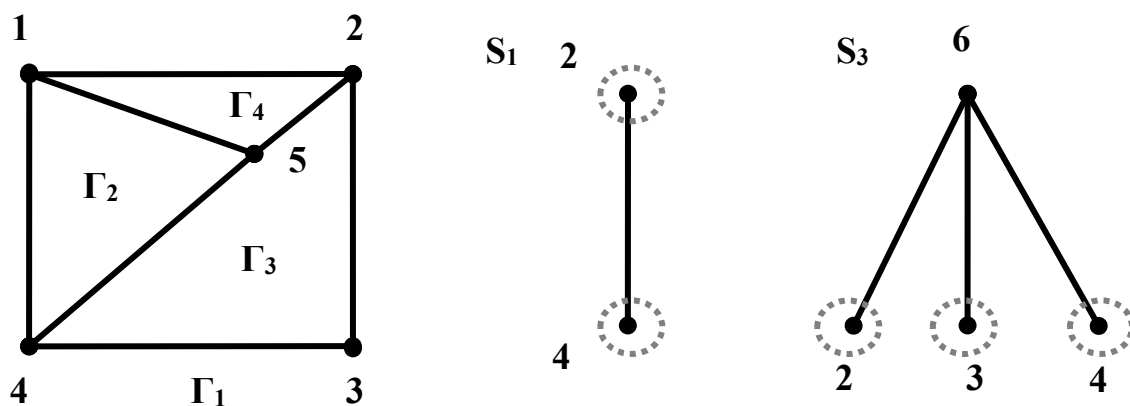
$$\Gamma(S_1) = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}, \Gamma(S_2) = \{\Gamma_2\}, \Gamma(S_3) = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}.$$

Обираємо сегмент S_2 і укладаємо його в єдину для нього допустиму грань Γ_2 . Отримуємо поточну часткову плоску укладку графа G .

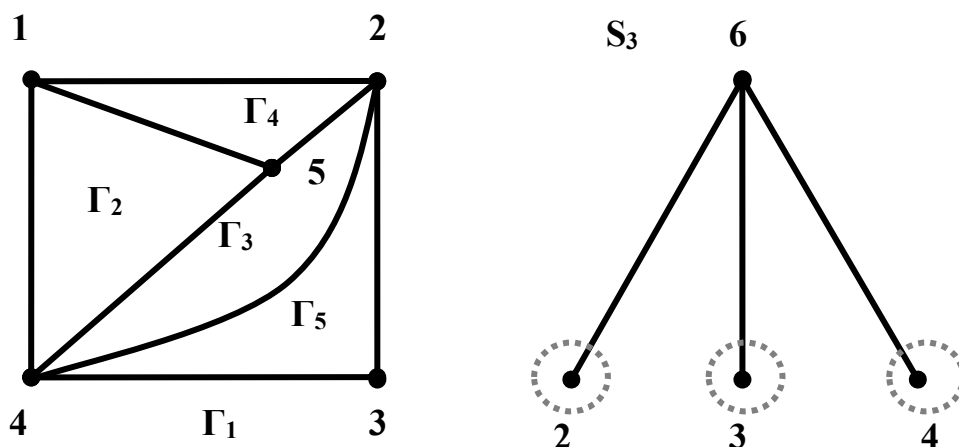
Крок 3. Для нової поточної часткової укладки $\tilde{G}$ визначимо множину граней та сегментів.

$$\text{Множини допустимих граней для сегментів: } \Gamma(S_1) = \Gamma(S_3) = \{\Gamma_1, \Gamma_3\}.$$

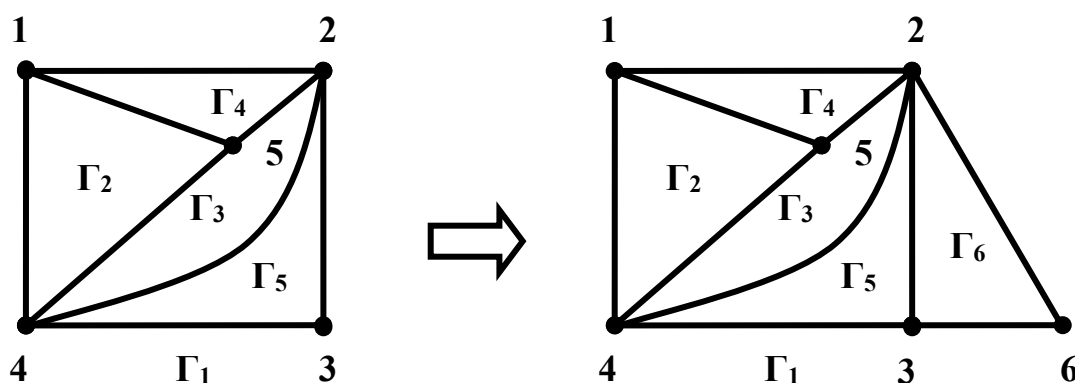
Обираємо сегмент S_1 та укладаємо до допустимої для нього грані Γ_3 .



Крок 4. Отримуємо нову часткову плоску укладку. Визначаємо для неї множину граней та сегментів. Множина допустимих граней для сегменту, що залишився: $\Gamma(S3) = \{\Gamma1, \Gamma5\}$.

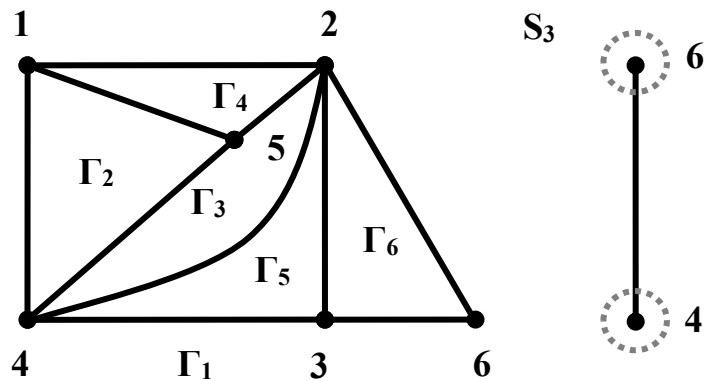


Крок 5. Обираємо грань $\Gamma1$ і α -ланцюг $= \{3, 6, 2\}$, укладаємо його до допустимої грані та отримуємо нову поточну часткову укладку.



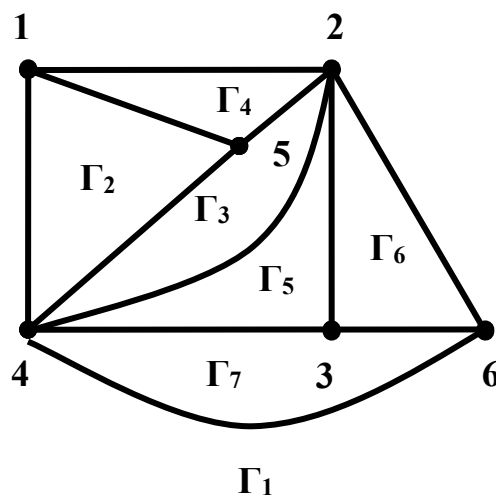
Крок 6. Для нової поточної часткової укладки знаходимо множину граней та сегментів. Для сегмента **S3** множина допустимих граней складає: $\Gamma(S3) = \{\Gamma1\}$.

Укладаємо сегмент **S3** до допустимої грані **Г1**.



Отримуємо нову поточну плоску укладку. Множина сегментів порожня, отже, алгоритм закінчив роботу.

Вхідний граф – планарний і побудована його плоска укладка.

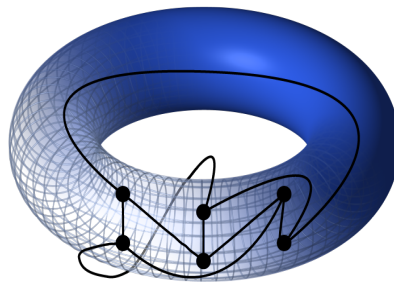


Перевірка за теоремою Ейлера:

$$p=6, q=10, f=7 - 6-11+7=13-11=2.$$

Задача 8. Привести приклад тороїдального графа та його зображення на торі.

Розв'язання. Граф $K_{3,3}$ укладається на торі без пересічень ребер, рід такого графа дорівнює 1.



2.3 Завдання до лабораторної роботи

Вхідні дані для лабораторної роботи – граф $G: GV(13, \{5, 6\})$.

1. Визначити, чи є вихідний граф G планарним або непланарним, використовуючи критерій Понтрягіна-Куратовського або Вагнера. Знайти підграф G , гомеоморфний K_5 або $K_{3,3}$ за критерієм Понтрягіна-Куратовського або підграф, що стягується до K_5 або $K_{3,3}$ за критерієм Вагнера.

2. Якщо вхідний граф є планарним, позначити його G_1 .

3. Якщо вхідний граф є непланарним, позначити його G_2 .

4. Якщо вхідний граф був планарний, додати мінімальне число ребер до непланарності і позначити отриманий непланарний граф G_2 .

5. Якщо вхідний граф був непланарен, видалити мінімальне число ребер і позначити отриманий планарний граф G_1 .

6. Кількість ребер, що додаються (видаляються) при перетвореннях графа має бути обґрунтованою.

7. Побудувати плоску укладку графа G_1 , використовуючи алгоритм γ .
γ. Продемонструвати покрокове виконання алгоритму γ .

8. Для непланарного графа G_2 знайти рід, товщину, перекрученість і число схрещувань.

2.4 Питання для самоконтролю

1. Який граф називається плоским, планарним?
2. Що таке жорданова крива? Сформулювати теорему Жордано та наслідок із неї.
3. Дати визначення грані та границі грані плоского графа.
4. Сформулювати теорему Ейлера для плоского графа.
5. Операції підрозбиття та стягнення ребер графа. Гомеоморфні графи.
6. Сформулювати критерії планарності графів. Критерій Понтрягіна-Куратовського та Вагнера.
7. Алгоритм плоскої укладки графа. Дати визначення сегменту, контактної вершини, α – ланцюга, допустимої грані.
8. Дати визначення характеристикам непланарних графів: число схрещувань, товщина, рід графа, перекрученість.

ЛІТЕРАТУРА: [2,4].

Лабораторна робота № 3

РОЗФАРБУВАННЯ ГРАФІВ

Ціль роботи: засвоєння теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок в розфарбуванні вершин та ребер неорієнтованих графів, визначенні хроматичного числа та індексу.

3.1 Теоретична довідка

Вершинне розфарбування: нехай G є неорієнтований граф і нехай k – деяке натуральне число. k -розфарбуванням (вершинним) графа G називається довільна функція f , що відображає множину вершин графа G у деяку k -елементну множину: $f: V \rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = A$.

У якості елементів множини A найчастіше використовується відрізок натурального ряду $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$ або $\{a, b, \dots, n\}$ або фарби типу – {синій, червоний, ..., чорний}.

Розфарбування називається **правильним**, якщо для будь-яких суміжних вершин u і v графа G : $f(u) \neq f(v)$ або кінцеві вершини будь-якого ребра пофарбовані в різні кольори. Граф, для якого існує правильне k -розфарбування, називається **k -розфарбованим**.

Хроматичне число графа G – це мінімальне число фарб, при якому граф має правильне розфарбування. Якщо хроматичне число дорівнює k , то граф називається **k -хроматичним**: $\chi(G) = k$.

Граф, у якого $\chi = 2$, називається **біхроматичним** (біграф).

Теорема Кеніга (критерій дводольності графа): непустий граф є біхроматичним тоді й тільки тоді, коли він не містить циклів непарної довжини.

Наслідок 1. Будь-яке дерево є біхроматичним.

Наслідок 2. Будь-який дводольний граф є біхроматичним.

Алгоритм послідовного розфарбування

1. Довільній вершині графа G приписуємо колір 1.

2. Нехай розфарбовані i вершин графа G у кольори від 1 до k , де $k \leq i$.

Довільній непофарбованій вершині приписуємо мінімальний колір невикористаний при розфарбуванні суміжних з нею вершин.

Алгоритм послідовного розфарбування залежить від способу перебору вершин.

Графи з малими хроматичними числами.

1) Лема про 1-розфарбування: $\chi(G) = 1$, тоді і тільки тоді, коли G – простий порожній граф.

2) Хроматичне число будь-якого циклу, що містить p вершин, дорівнює 2, якщо p – парне і 3, якщо p – непарне.

Хроматичне число повного графа K_p дорівнює числу його вершин p . Якщо граф G містить підграф, ізоморфний графові K_p , то $\chi(G) \geq p$.

Для довільного графа G справедливо: $\chi(G) \geq \phi(G)$, де $\phi(G)$ – щільність графа G .

Теорема про графи без трикутників (теорема Зикова): існують прості зв'язні графи без трикутників з довільно великим хроматичним числом. Для будь-якого $k \geq 2$ існує простий зв'язний граф G_k такий, що $\phi(G_k) = 2$ і $\chi(G_k) = k$.

Для довільного графа G справедливо: $\chi(G) \geq \lceil p/\alpha(G) \rceil$, де $\alpha(G)$ – число незалежності графа G .

Якщо граф G є (p,q) -граф, то справедливо: $\chi(G) \geq p^2/(p^2-2q)$.

Для будь-якого простого графа G справедливо: $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Теорема Брукса: якщо G – зв'язний граф, який не є повним і $\Delta(G) \geq 3$, то $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

При будь-якому оптимальному розфарбуванні зв'язного неповного графа існують дві вершини з однією фарбою такі, що відстань між ними дорівнює 2.

Доповнення до теореми Брукса: якщо v – вершина графа G , то хроматичне число задовольняє співвідношенню: $\chi(G) \leq 1 + \chi(G - v)$.

Хроматичне число графа G дорівнює максимальному з хроматичних чисел його компонент зв'язності.

Хроматичне число графа G дорівнює максимуму з хроматичних чисел його блоків.

Хроматичне число будь-якого планарного графа не перевищує 4.

Гіпотеза Хивуда: будь який планарний граф можна розфарбувати в п'ять кольорів, тобто $\chi(G) \leq 5$ для будь-якого планарного графа G .

Метод повного неявного перебору для визначення хроматичного числа графа

Нехай задано (p, q) -граф $G = (V, E)$.

Припустимо, що на множині вершин V графа G задано деяке відношення порядку і v_i – i -та вершина в цьому впорядкуванні.

Первісне допустиме розфарбування

- 1) розфарбувати вершину v_1 в колір 1;
- 2) кожен з решти вершин пофарбувати послідовно (відповідно до упорядкування множини вершин), v_i фарбується в колір з мінімально можливим номером, що не використаний при розфарбовуванні будь-якої вершини, суміжної з v_i .

Нехай m – число фарб, отримане при первісному розфарбуванні.

Якщо існує розфарбування, що використовує тільки $m-1$ фарбу, то усі вершини, що пофарбовані в колір m , повинні бути перефарбовані в колір $j < m$.

Нехай v_i^* – перша вершина при заданому впорядкуванні, яка була пофарбована в колір m .

Крок повернення

Із суміжних з v_i^* вершин у множині $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}^*\}$ знайти останню, тобто вершину з максимальним при заданому впорядкуванні номером. Нехай це буде v_k .

Якщо вона пофарбована в колір j_k , то v_k перефарбовується в інший допустимий колір з мінімально можливим номером таким що $j'_k \geq j_k + 1$.

Якщо $j'_k < m$, то треба продовжувати послідовно перефарбовувати усі вершини з v_k до v_p , застосовуючи вказане вище правило (2) і пам'ятаючи, що колір m вже використовувати не можна.

Якщо така процедура можлива, то буде знайдено найкраще розфарбування, що використовує менше ніж m кольорів.

В іншому випадку, якщо зустрінеться вершина, яка вимагає колір m , то робиться крок повернення з цієї вершини.

Якщо $j'_k = m$ або нема іншого допустимого кольору j'_k то відразу робиться крок повернення із вершини v_k .

Алгоритм закінчує роботу, якщо на кроці повернення досягається вершина v_1 .

Методи переупорядкування вершин: (p, q) -граф $G=(V, E)$.

1. **НП-упорядкування** або «найбільші – першими»;
2. **ОН-упорядкування** або «останніми – найменші».

НП-упорядкування вершин

Упорядкування вершин графа в порядку незростання їх валентностей назовемо НП-упорядкуванням.

Якщо дві вершини мають однакові валентності, то обчислюються «двокрокові» валентності, які визначаються, як число маршрутів довжини 2, що виходять з вершини.

Якщо рівні «двокрокові» валентності, то обчислюються «трикрокові» і так далі.

Якщо A – матриця суміжності графа G з нульовими елементами на головній діагоналі, то

$$\deg(v_i) = \deg_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} - \text{валентність вершини } v_i;$$

$\deg^{(2)}(v_i) = \deg_i^{(2)} = \sum_{j=1}^p a_{ij} \cdot \deg_j$ – «двокрокова» валентність вершини i ;

$\deg^{(k)}(v_i) = \deg_i^{(k)} = \sum_{j=1}^p a_{ij} \cdot \deg_j^{(k-1)}$ – k -крокова валентність вершини i .

ОН-упорядкування вершин

1) оскільки $|V| = p$, у якості останньої в упорядкуванні, тобто v_p , обирається вершина мінімальної валентності серед усіх вершин графа G ;

2) для $i = p - 1, p - 2, \dots, 1$ у якості v_i , обирається вершина мінімальної валентності у підграфі, що є породженням наступною множиною вершин $V \setminus \{v_p, \dots, v_{i+1}\}$.

Реберним k -розфарбуванням графа G називається деяка функція φ , що задає відображення множини ребер графа G , у деяку k -елементну множину, тобто: $\varphi : E \rightarrow A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

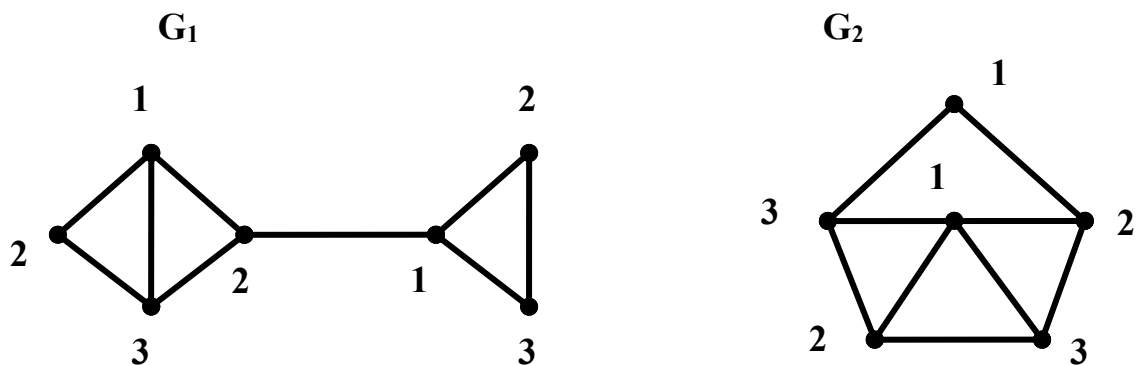
Множина ребер, пофарбованих у певний колір, називається **реберним кольоровим класом**. Якщо $\varphi(e) = c$, то говорять, що ребро e пофарбоване в колір c . Реберне розфарбування є правильним, якщо суміжні ребра пофарбовані в різні кольори. Граф у цьому випадку називається **реберним k -розфарбованим**.

Мінімальне число k , при якому існує правильне реберне k -розфарбування називається **реберним хроматичним числом** або **хроматичним індексом**.

3.2 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Визначити хроматичні числа наступних графів та навести варіант розфарбування, що доставляє хроматичне число.

Розв'язання.

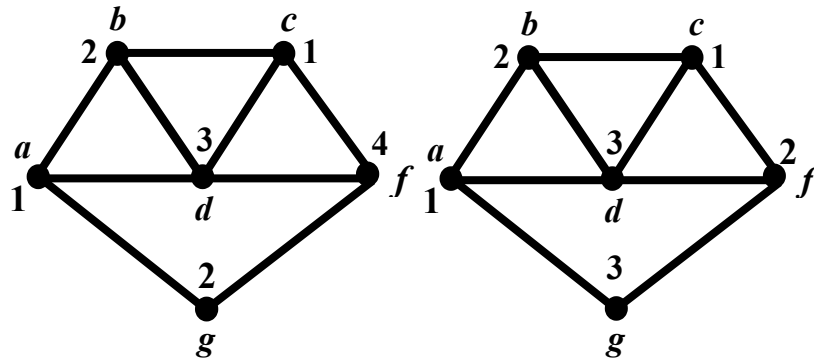


Хроматичне число графа G_1 не менш ніж 3, тому що граф містить підграф ізоморфний K_3 . На рисунку наведено правильне розфарбування вершин графа з використанням 3 кольорів, тому хроматичне число графа G_1 дорівнює 3. Аналогічно, хроматичне число графа G_2 також дорівнює 3.

Задача 2. Навести приклад графа, для якого кількість фарб при застосуванні алгоритму послідовного розфарбування залежить від порядку вибору вершин на обслуговування.

Розв'язання.

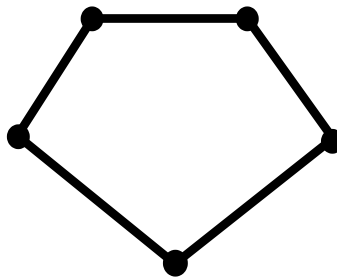
На рисунку наведено граф, що потребує 4 фарби при застосуванні наступної послідовності розфарбування: **(a, b, g, d, c, f)** і 3 фарби для послідовності: **(a, b, d, c, f, g)**.



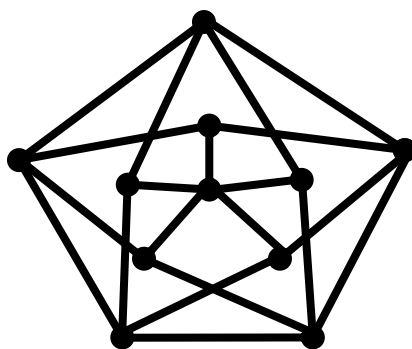
Задача 3. Навести приклади графів з хроматичним числом не менш ніж 3, що не містить трикутників.

Розв'язання. Граф на наступному рисунку є простим циклом з непарним числом вершин, тому його хроматичне число дорівнює 3.

Граф не містить трикутників і за позначенням теореми Зикова є графом G_3 .

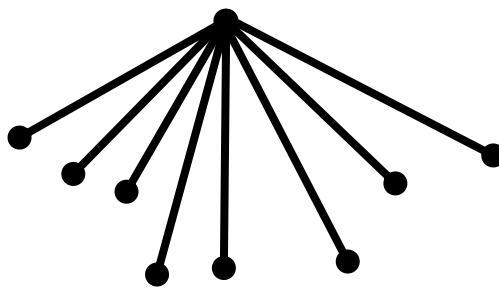
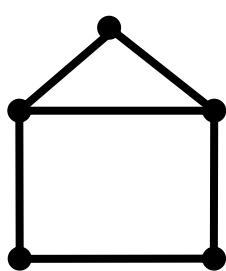


Неважко переконатись, що другий граф на наступному рисунку є G_4 , вочевидь, що і цей граф не містить трикутників.



Задача 4. Навести приклади графів, для яких теорема Брукса дає ефективну та незадовільну оцінку хроматичного числа.

Розв'язання. За теоремою Брукса $\chi(G) \leq \Delta(G)$, верхня оцінка хроматичного числа першого графа: $\chi(G) \leq 3$, для другого: $\chi(G) \leq 8$. Для першого графа така оцінка є досить ефективною, бо вочевидь, що хроматичне число цього графа дорівнює 3. Другий граф, як і усі граfi такого типу (зірки, $K_{1,n}$), може бути прикладом незадовільного використання оцінки $\chi(G)$ за теоремою Брукса. Зірки є повними дводольними графами, тобто являються біграфами: $\chi(G)=2$, тому розбіжність між оцінкою та самим хроматичним числом буде тим більшою, чим більше буде n (потужність другої долі).

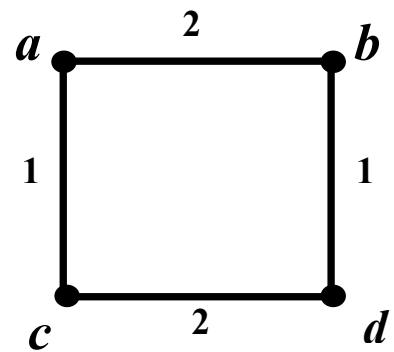
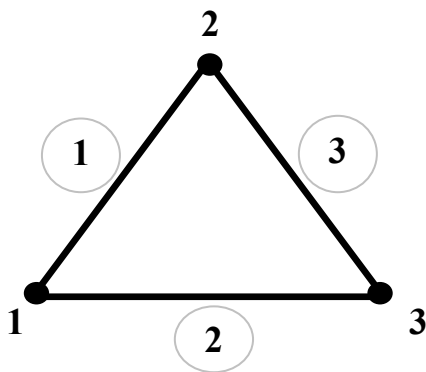


Можливості отримання «ефективних» верхніх оцінок за допомогою теореми Брукса значно збільшаться, якщо використовувати доповнення

до теореми Брукса. Для зірки в якості вершини v треба взяти вершину першої долі, що має максимальний степінь.

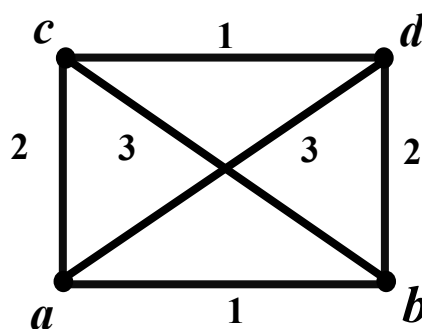
Задача 5. Знайти хроматичний індекс наведених графів, навести реберне розфарбування, що його доставляє.

Розв'язання. Хроматичний індекс повного графа K_p на 3 вершинах дорівнює 3, у загальному випадку співпадає з кількістю вершин, якщо p – непарне число. Для простого циклу на 4 вершинах, що є графом $K_{2,2}$ хроматичний індекс дорівнює 2.



Задача 6. Знайти хроматичний індекс повного графа порядку p , навести приклади реберного розфарбування, що його доставляє.

Розв'язання. Хроматичний індекс повного графа з парним числом вершин, K_{2n} , дорівнює $2n-1=p-1$. У нашому випадку $p-1=3$.



Хроматичний індекс повного графа з непарним числом вершин, K_{2n+1} , дорівнює $2n+1=p$. У попередній задачі 4 наведено розфарбування повного графа на 3 вершинах, що ілюструє цей факт.

3.3 Завдання до лабораторної роботи

Вхідні дані для лабораторної роботи – граф $G: GV(13, \{5, 6\})$.

1. Планарний граф з лабораторної роботи №2 позначити G_1 (вхідний або перетворений), а непланарний – G_2 .
2. Обчислити і проаналізувати для планарного і непланарного графів верхні і нижні оцінки хроматичного числа.
3. Послідовно розфарбувати графи G_1 і G_2 , використовуючи алгоритм послідовного розфарбування та модифікації алгоритму з НП- і ОН-упорядкуванням вершин, використовувати максимально 4-крокові валентності, якщо це потрібно.
4. Знайти хроматичне число і хроматичний індекс графів G_1 і G_2 . Відповідь обґрунтувати.
5. Порівняти хроматичне число графів G_1 і G_2 з оцінками, отриманими аналітично в завданні 2 і в результаті застосування трьох алгоритмів, в завданні 3. Проаналізувати отримані результати.
6. Привести приклад графа, у якого число фарб буде залежати від порядку обходу вершин. Продемонструвати на ньому метод повного неявного перебору для визначення хроматичного числа графа. Демонстрація повинна містити хоча б один крок повернення з метою зменшення числа фарб на 1.

3.4 Питання для самоконтролю

1. Вершинне розфарбування неорієнтованих графів.
2. Яке розфарбування називається правильним?
3. Який граф називають правильно розфарбованим?
4. Що називається хроматичним числом графа?
5. Нижні оцінки хроматичного числа графа.

6. Верхні оцінки хроматичного числа графа.
 7. Визначення кольорового класу.
 8. Сформулювати теорему Кеніга.
 9. Сформулювати гіпотезу чотирьох і п'яти фарб.
 10. Алгоритм послідовної вершинного розфарбування графів.
 11. Послідовні методи розфарбовування, засновані на впорядкуванні множини вершин. НП- і ПН-впорядкування вершин.
 12. k -кроковий степінь вершини і рекурентна формула його обчислення.
 13. Реберне розфарбування або розфарбування ребер.
 14. Хроматичний індекс, реберний кольоровий клас.
 15. Визначення реберного хроматичного числа або хроматичного індексу.
 16. Хроматичний індекс повних графів.
- ЛІТЕРАТУРА: [2,4].

Лабораторна робота № 4

ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ (ОРГРАФИ)

Ціль роботи: засвоєння теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок в роботі з орграфами: визначення типу зв'язності, побудова конденсації, бази та антибази, знаходження ейлеревих і гамільтонових циклів.

4.1 Теоретична довідка

Орієнтований граф $G = (V, A)$ – пара множин V і A , таких, що V – деяка кінцева непорожня множина, а A – деяка підмножина декартового квадрату множини $V: V^2 = V \times V$.

Вершини орграфа G – елементи множини V . Дуги орграфа G – елементи множини A . **Дуга** – впорядкована пара вершин $a = (u, v)$. Початок дуги – вершина u , кінець дуги – вершина v . Дуга **виходить** з свого початку і **заходить** у свій кінець.

Орграф G – орграф p -го порядку, якщо потужність множини вершин дорівнює $|V| = p$.

1. Матриця суміжності орграфа

$$A = \|a_{ij}\|, i, j = \overline{1, p}, |V| = p, |A| = q.$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (i, j) \in A \\ 0, & (i, j) \notin A \end{cases}$$

2. Матриця інцидентності орграфа

$$B = \|b_{ij}\|, i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}, |A| = q, |V| = p.$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & i, v \in V, \quad j = (i, v) \in A \\ -1, & i, v \in V \quad j = (v, i) \in A \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Основа – неорієнтований граф, що виходить внаслідок зняття орієнтації із дуг вхідного орграфа.

Зворотний орграф $G^{-1} = (V, A^{-1})$ – орграф на тій же множині вершин, у якого усі дуги є переорієнтованими.

Напівстепінь заходу вершини v орграфа G – кількість дуг, що заходять у вершину v : $\deg^{-}(v) = |X|$; $X = \{x \mid x = (u, v) \in A\}$.

Напівстепінь виходу вершини v орграфа G – кількість дуг, що виходять із вершини v : $\deg^{+}(v) = |Y|$; $Y = \{y \mid y = (v, u) \in A\}$.

Степінь вершини v орграфа G – сума напівстепенів заходу та виходу вершини v : $\deg(v) = \deg^{-}(v) + \deg^{+}(v)$.

Лема про рукостискання для орграфів: сума напівстепенів заходу всіх вершин орграфа G дорівнює сумі напівстепенів виходу та дорівнює кількості

дуг орграфа: $\sum_{i=1}^p \deg^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^p \deg^{-}(v_i) = q$, $q = |A|$, $p = |V|$.

Орієнтований маршрут (ормаршрут) – кінцева послідовність з вершин та дуг орграфа таких, що кожна дуга виходить з попередньої вершини і заходить у наступну вершину $a_i = (v_i, v_{i+1})$:

Орієнтований ланцюг (орланцюг) – орієнтований маршрут без дуг, що повторюються.

Шлях – орланцюг без повторюваних вершин.

Орієнтований цикл (орцикл) – замкнутий орієнтований ланцюг.

Контур – замкнутий шлях або замкнутий шлях без повторення дуг та вершин (окрім, крайніх).

Довжина орієнтованого маршруту – число дуг, що складають маршрут з урахуванням повторення.

Напівмаршрут (маршрут основи) – послідовність вершин і дуг орграфа така, що $a_i = (v_{i+1}, v_i)$ або $a_i = (v_i, v_{i+1})$. Аналогічно вводяться поняття напівланцюг, напівшлях, напівконтур.

Вершина v орграфа G **досяжна** з вершини u , якщо існує (u, v) -ормаршрут в G , відповідно вершина u – **контрдосяжна** для вершини v .

Будь-яка вершина вважається досяжною сама для себе.

Вершини v та u орграфа G – є **взаємно досяжними** якщо вершина v досяжна для вершини u , і вершина u досяжна для вершини v .

Орграф G – **сильнозв'язний (сильний)**, якщо будь-які дві вершини в ньому взаємнодосяжні.

Орграф G – **односторонньо зв'язний (односторонній)**, якщо для кожної пари його вершин, принаймні, одна досяжна з іншої.

Орграф G – **слабозв'язний (слабкий)**, якщо будь-які дві його вершини з'єднані напівмаршрутом (напівшляхом).

Орграф G – не зв'язний, якщо не зв'язна його основа.

Сильна компонента – максимальний щодо включення вершин сильний підграф вхідного орграфа.

Одностороння компонента – максимальний щодо включення вершин односторонній підграф вхідного орграфа.

Слабка компонента – максимальний щодо включення вершин слабкий підграф вхідного орграфа.

Остовний маршрут – маршрут, що містить усі вершини вхідного графа.

Критерій сильної зв'язності у орграфах: оргграф є сильним тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний циклічний ормаршрут.

Критерій односторонньої зв'язності у орграфах: оргграф є одностороннім тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний маршрут.

Критерій слабкої зв'язності у орграфах: оргграф є слабким тоді і тільки тоді, коли в ньому є остовний напівмаршрут.

Конденсація оргграфа G – оргграф G^* , вершини $S_1, S_2, \dots, S_m$ якого відповідають сильним компонентам оргграфа G і дуга (S_i, S_j) належить оргграфа G^* тоді і тільки тоді, коли в G існує дуга, початок якої, знаходиться в сильній компоненті S_i , кінець – в S_j .

Конденсація G^* будь-якого оргграфа G не має контурів.

Алгоритм побудування конденсації

1. Побудуємо матрицю досяжності оргграфа G .

$$R = \|r_{ij}\|, i, j = \overline{1, p}.$$

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & j \rightarrow \dots \rightarrow i; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}.$$

2. Побудуємо матрицю контрдосяжності.

$$Q = \|q_{ij}\|, i, j = \overline{1, p}, Q = R^T.$$

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & i \rightarrow \dots \rightarrow j; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

2. Знайдемо матрицю взаємної досяжності.

Позначимо як $*$ – оператор поелементного добутку матриць.

$$S = R * Q = R * R^T, s_{ij} = r_{ij} * q_{ij}, i, j = \overline{1, p}.$$

Нехай $v_i \in V$, тоді сильна компонента орграфа що містить v_i , визначається одиничними елементами i -того рядка матриці S . Іншими словами, перестановкою рядків і стовпців можна привести матрицю S до блочно-діагонального вигляду, де кожен блок буде відповідати деякій сильній компоненті орграфа G .

Ейлерів цикл – цикл, що містить кожен дугу орграфа.

Ейлерів орграф – зв'язний орграф, що містить ейлерів цикл.

Критерій ейлеровості для орграфів: зв'язний орграф – ейлерів тоді і тільки тоді, коли для будь-якої його вершини v справедливо: $\deg^+(v) = \deg^-(v)$.

Гамільтонів контур – контур, що містить всі вершини даного орграфа.

Гамільтонів орграф – орграф, що містить гамільтонів контур.

База орграфа G – найменша (щодо включення) підмножина вершин V , що задовольняє умові: будь-яка вершина $v \in V/V$ досяжна із якої-небудь вершини $u \in V$.

Базова компонента – сильна компонента орграфа G , в яку не входить жодна дуга з інших сильних компонент.

У конденсації G^* таким компонентам відповідають вершини з нульовими напівстепенями заходу.

Алгоритм знаходження бази

1. Побудувати конденсацію G^* орграфа G .

2. Виділити в конденсації вершини з нульовими напівстепенями заходу. Такі вершини будуть визначати базові компоненти.

3. З кожної базової компоненти вибирається по одній вершині, таким чином, база орграфа може бути визначена не єдиним чином.

Антибаза орграфа G – найменша (щодо включення) підмножина вершин B' , така, що: будь-яка вершина $v \in V$, досяжна з будь-якої вершини $u \in V/B'$.

Алгоритм знаходження антибази

1. Побудувати конденсацію орграфа G^* .

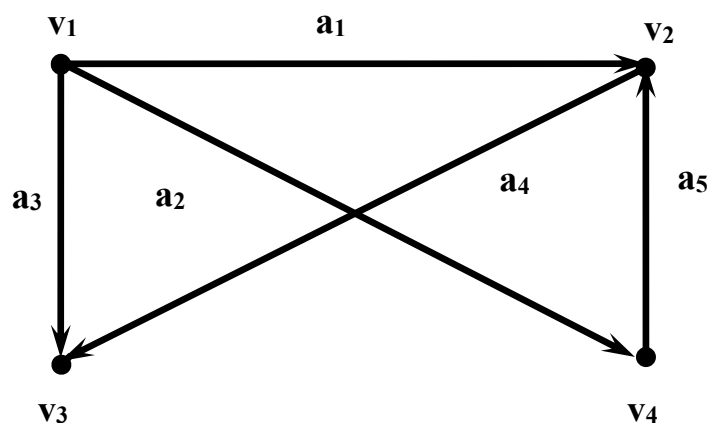
2. Виділити в конденсації вершини з нульовими напівстепенями виходу, антибазові компоненти.

3. З кожної антибазової компоненти вибирається по одній вершині.

Ядро графа – множина вершин, яка одночасно є домінуючою і незалежною множиною.

4.2 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Нехай маємо орграф $G(V, A)$ порядку 4. Знайти його матриці суміжності та інцидентності.



Розв'язання.

Матриця інцидентності B_G :

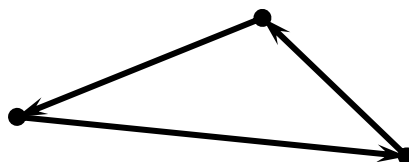
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
v_1	1	1	1	0	0
v_2	-1	0	0	1	-1
v_3	0	0	-1	-1	0
v_4	0	-1	0	0	1

Матриця суміжності A_G :

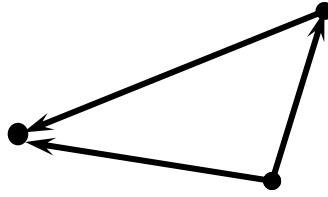
	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	1
v_2	0	0	1	0
v_3	0	0	0	0
v_4	0	1	0	0

Задача 2. Привести приклад орграфів, що є контуром та напівконтуром.

Розв'язання. Приклад орграфа, що є контуром.

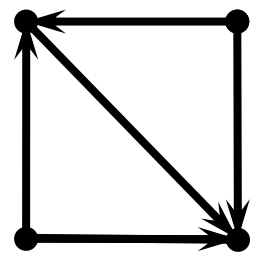
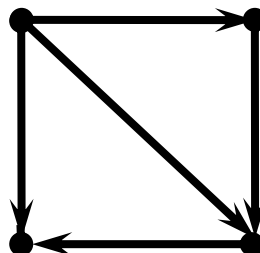
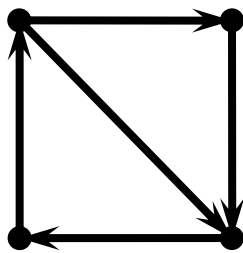


Приклад орграфа, що є напівконтур.



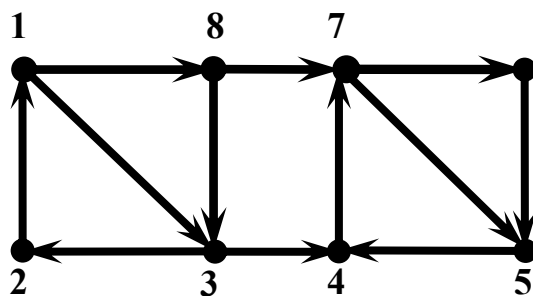
Задача 3. Привести приклади орграфів, що є сильними, односторонніми та слабкими орграфами.

Розв'язання. На наступному рисунку наведено три орграфи. Перший є сильним за критерієм сильної зв'язності для орграфів, тому що в ньому існує остовний циклічний ормаршрут, тобто є можливість по ормаршруту досягти довільну вершину орграфа. Другий орграф є одностороннім, а третій слабким також за відповідними критеріями.



Задача 4. Задано орграф G . Побудувати конденсацію G^* .

Розв'язання.



Орграф G

Сильні компоненти G

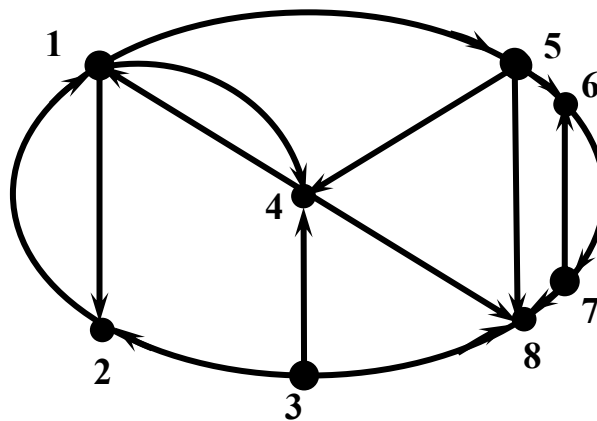
$$S_2 = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$S_1 = \{1, 2, 3, 8\}$$



Орграф G^* конденсація G

Задача 5. Задано оргграф G . Побудувати конденсацію G^* .



Розв'язання.

Матриця досяжності R_G :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	0	0	0
5	1	1	1	1	1	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0
8	1	1	1	1	1	1	1	1

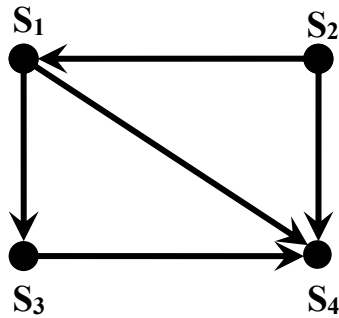
Матриця контрдосяжності Q_G :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	1	1	1	1	1
2	1	1	0	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	0	1	1	1	1	1
5	1	1	0	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	1	1	1
8	0	0	0	0	0	0	0	1

Матриця взаємної досяжності S_G :

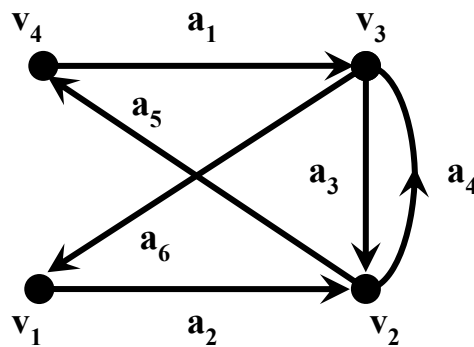
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	0	1	1	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1	0	0	0
5	1	1	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1

Конденсація орграфа G : $S_1 = \{1,2,4,5\}$, $S_2 = \{3\}$, $S_3 = \{6,7\}$, $S_4 = \{8\}$

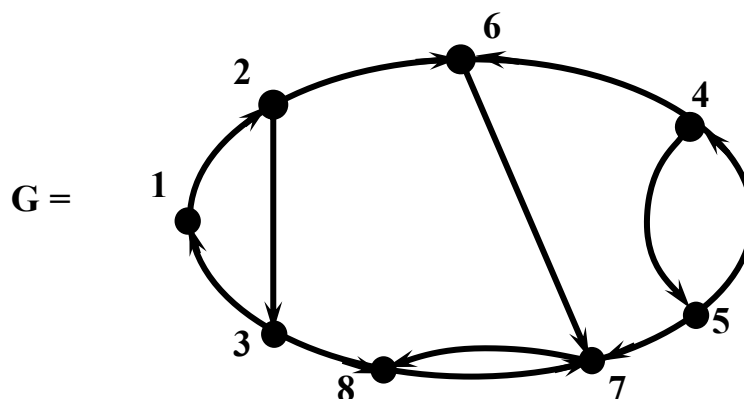


Задача 6. Визначити, чи є заданий орграф ейлеревим і побудувати ейлерів цикл, якщо він існує.

Розв'язання. Ейлерів цикл орграфа: $(a_1, a_3, a_4, a_2, a_5)$.



Задача 7. Заданий орієнтований граф G . Знайти базу і антибазу.



Розв'язання. Спочатку побудуємо конденсацію G^* орграфа. Для цього знайдемо матриці досяжності, контрдосяжності та взаємної досяжності.

Матриця досяжності R_G :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0	0
6	1	1	1	1	1	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1

Матриця контрдосяжності Q_G

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	0	1	1	1
2	1	1	1	0	0	1	1	1
3	1	1	1	0	0	1	1	1
4	0	0	0	1	1	1	1	1
5	0	0	0	1	1	1	1	1
6	0	0	0	0	0	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	1	1

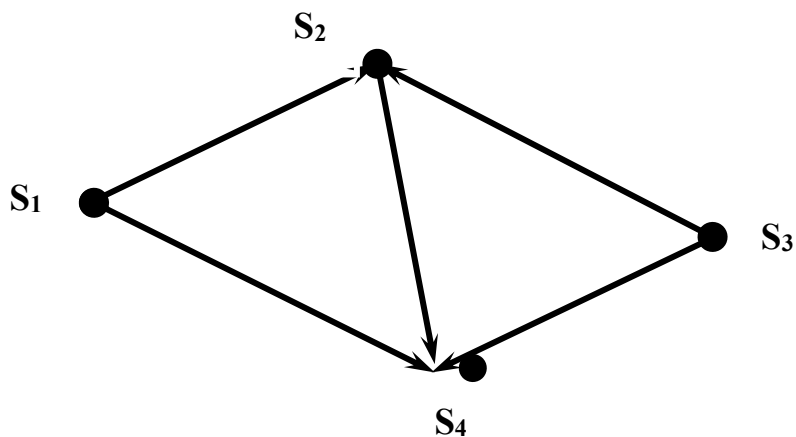
Матриця взаємної досяжності S_G :

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0
5	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	1	1

Знайдемо сильні компоненти орграфа G :

$$S_1 = \{1,2,3\}, S_2 = \{6\}, S_3 = \{4,5\}, S_4 = \{7,8\}.$$

Побудуємо конденсацію G^* орграфа G :



Для знаходження бази виділимо в конденсації вершини з нульовими напівстепенями заходу, тобто базові компоненти. Базові компоненти: S_1 і S_3 . З кожної базової компоненти вибираємо по одній вершині. Бази орграфа: $\{1,4\}; \{1,5\}; \{2,4\}; \{2,5\}; \{3,4\}; \{3,5\}$.

Для знаходження антибази виділимо в конденсації вершини з нульовими напівстепенями виходу, це будуть антибазові компоненти.

Антибазова компонента: S_4 . Антибази орграфа: $\{7\};\{8\}$.

3.3 Завдання до лабораторної роботи

1. На базі алгоритма генерації варіанта GV , побудувати орієнтований граф $G: GV(9, \{3,4\})$.

Орієнтацію дуг встановити таким чином:

– якщо елемент y_{ij} допоміжної матриці Y буде мати у якості дільника 8, то у орграфі буде дві дуги a_{ij} та a_{ji} .

– якщо елемент y_{ij} допоміжної матриці Y був тільки парним, то у орграфі буде дуга a_{ij} , в протилежному випадку a_{ji} (при цьому елемент y_{ji} не розглядається).

2. Побудувати матрицю суміжності і матрицю інцидентності заданого орграфа. Перевірити виконання леми про рукостискання для орграфа.

3. Побудувати основу і зворотний орграф. Визначити чи є орграф симетричним.

4. Побудувати, якщо це можливо, ормаршрут (що не є орланцюгом), виділити в ньому орланцюг (не шлях), шлях, замкнутий ормаршрут (що не орциклом), цикл (не контур) і контур, напівмаршрут (що не є напівланцюгом), напівланцюг (що не є напівшляхом), напівшлях. Обґрунтувати відсутність будь-якого з маршрутів.

5. Побудувати матрицю досяжності, контрдосяжності, взаємної досяжності.

6. Визначити тип зв'язності орграфа, виділити сильні компоненти.

7. Побудувати конденсацію. Визначити бази і антибази.

8. Виділити ядро орграфа.

9. Знайти в графі цикли Ейлера і Гамільтона, якщо вони існують.

10. Привести приклад орграфа, в якому $m + 1$ база потужністю $(n+m) \bmod 3 + 1$, де n - перша цифра порядкового номера студента в списку групи, m - відповідно, друга цифра в номері.

3.4 Питання для самоконтролю

1. Дати визначення орграфа, дуги орграфа.

2. Перелічити матричні способи опису орграфа та їх особливості.

3. Дати визначення основи та зворотного орграфа.

4. Визначити поняття степінь, напівстепінь заходу та виходу вершин орграфа. Аналог леми про рукостискання для орграфа.

5. Дати визначення маршруту в орієнтованому графі, орланцюгу, орциклу, шляху та контуру, а також напівмаршруту, напівланцюгу, напівшляху, напівконтуру.

6. Означити поняття довжини ормаршрута.

7. Дати визначення понять: досяжність, контрдосяжність та взаємна досяжність.

8. Дати визначення типам зв'язності у орграфі: сильна, одностороння і слабка зв'язність. Компоненти зв'язності. Сформулювати критерії зв'язності у орграфі.

9. Дати визначення конденсації орграфа та описати алгоритм її побудови.

10. Дати визначення понять: бази, антибази та ядра орграфа.

11. Гамільтонів контур та оргграф.

12. Ейлерів цикл та оргграф.

ЛІТЕРАТУРА: [1-3].

Лабораторна робота №5

ЦИКЛОМАТИКА

Ціль роботи: засвоєння теоретичного матеріалу та набуття практичних навичок в знаходженні базисних циклів в неорієнтованих графах, визначенні циклічного і коциклічного рангів.

5.1 Теоретична довідка

Нехай G є (p,q) -граф та має k компонент зв'язності.

Цикломатичне число або **циклічний ранг** графа G : $v(G)=q-p+k$.

Теорема. Кількість ребер остову (гілок) довільного графа G дорівнює його коциклічному рангу, а кількість ребер графа, що необхідно видалити для побудови остову (хорд), дорівнює циклічному рангу графа.

Базис циклів

Кожному циклу Z графа $G=(V,E)$ взаємно-відповідно зіставляється вектор довжини q , де q – кількість ребер графа:

$$C_Z = (c_1, c_2, \dots, c_q),$$

$$c_i = \begin{cases} 1, & i \in E, i \in Z \\ 0, & i \in E, i \notin Z \end{cases}$$

Множина усіх векторів, кожен з яких відповідає одному циклу графа G утворює векторний простір, що називається простором циклів графа G .

Векторний простір

Нехай $R, R^1, R^2, \dots, R^k, \dots$ – вектора деякого векторного простору. Якщо елемент R векторного простору може бути представлений у вигляді: $R = \bigoplus_{i=1, \dots, k} \varepsilon_i \cdot R^i$, де $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, операція $\bigoplus$ – додавання за модулем 2, то кажуть, що вектор R – **лінійна комбінація векторів** $R^1, R^2, \dots, R^k$.

Вектори $z^1, z^2, \dots, z^k$ – є **лінійно незалежними**, якщо ніякий вектор цієї множини не може бути представлений у вигляді лінійної комбінації інших.

Вектори $z^1, z^2, \dots, z^k$ – утворюють **базис у векторному просторі**, якщо вони лінійно-незалежні та довільний вектор цього простору може бути представлений у вигляді лінійної комбінації цих векторів.

Цикли, що відповідають базисним векторам, утворюють **базис циклів** графа G і називаються **базисними** або **фундаментальними**.

Теорема Ейлера

Кількість базисних циклів графа G постійна і дорівнює його цикломатичному числу $v(G)$.

Наслідки з теореми Ейлера:

- 1) $v(G) \geq 0$;
- 2) $v(G)=0 \leftrightarrow$ граф ациклічний;
- 3) $v(G)=1 \leftrightarrow$ граф містить рівно 1 цикл.

Алгоритм побудови базисних циклів

Базисною системою циклів графа G називається множина усіх циклів графа, кожен з яких містить тільки одну хорду для даного остову T . Ця система утворює базис простору циклів. Звідси, повна назва алгоритму – алгоритм побудови базисних циклів щодо остова T .

1. Будуємо довільний остов T графа G .
 2. Випишуємо множину хорд, ребер не увійшли в остов.
 3. Додаємо одну з хорд, отримуємо ! простий цикл в новому графі, що складається з остова і хорди (за визначенням дерева).
 4. Повторюємо пункт 3 для всіх хорд графа G щодо остова T .
- Зауваження.

1. Множина отриманих простих циклів є лінійно-незалежною, бо кожен з них містить ребро, що не належить жодному з інших циклів.

2. Всі інші цикли можуть бути представлені у вигляді лінійної комбінації цих циклів з використанням операції додавання за модулем 2.

Матриця циклів або **цикломатична матриця** – матриця, в якій кожному простому циклу графа відповідає рядок, а кожному ребру графа – стовпець:

$C = \|c_{ij}\|$, $i = \overline{1, k_c}$, $j = \overline{1, q}$, де k_c – число простих циклів графа, q – число ребер,

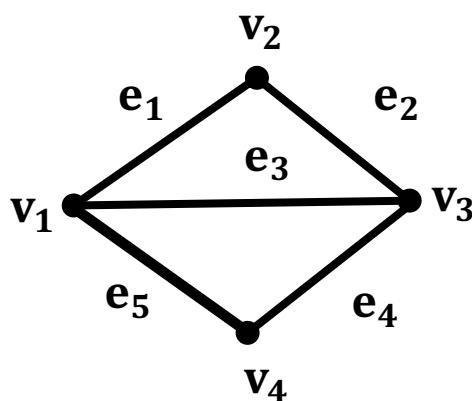
$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i - \text{тий цикл містить ребро } j \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}.$$

Матриця базисних циклів або **базисна цикломатична матриця** – підматриця матриці циклів графа, в якій кожному базисному циклу графа відповідає рядок, а кожному ребру графа – стовпець:

$C_v(G) = \|c_{ij}\|$, де $i = \overline{1, v(G)}$ – кількість базисних циклів, $j = \overline{1, q}$ – кількість ребер.

5.2 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Задано граф, навести приклади циклів і відповідних їм векторів.



Розв'язання.

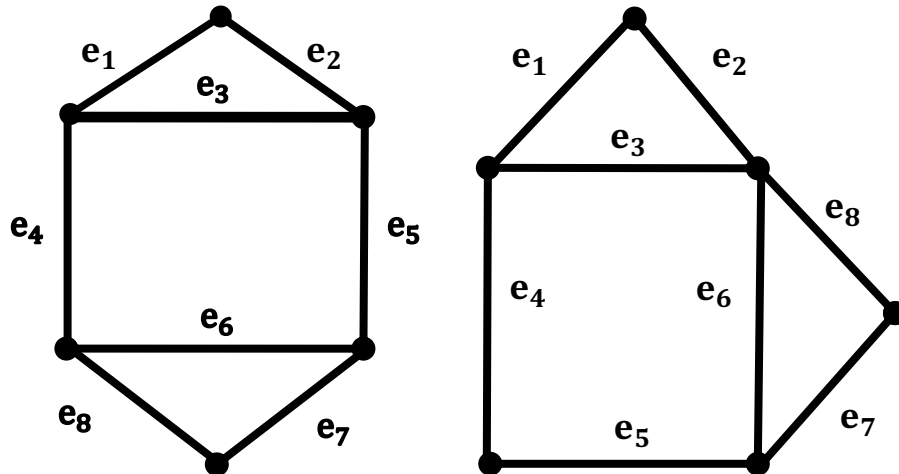
Цикли: $Z_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$, $Z_2 = \{e_1, e_2, e_4, e_5\}$, $Z_3 = \{e_3, e_4, e_5\}$.

Вектори: $C_{Z_1} = \{1, 1, 1, 0, 0\}$, $C_{Z_2} = \{1, 1, 0, 1, 1\}$, $C_{Z_3} = \{0, 0, 1, 1, 1\}$.

Задача 1. Навести приклади різних графів з однаковою матрицею циклів, якщо це можливо.

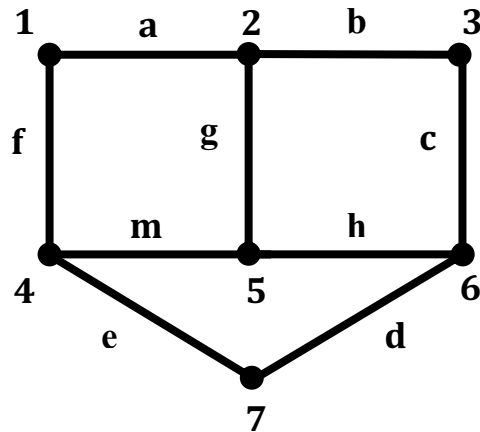
Розв'язання.

На відміну від матриць суміжності і інцидентності матриця циклів не задає граф з точністю до ізоморфізму. Нижче наведені два графи, що не є ізоморфними, але мають одну й ту ж матрицю циклів.



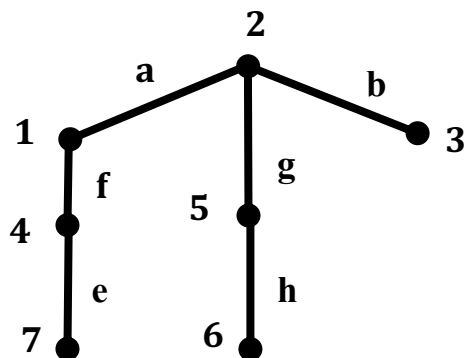
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
Z_1	1	1	1	0	0	0	0	0
Z_2	0	0	1	1	1	1	0	0
Z_3	0	0	0	0	0	1	1	1
Z_4	1	1	0	1	1	0	1	1
Z_5	1	1	0	1	1	1	0	0
Z_6	0	0	1	1	1	1	1	1

Задача 3. Задано граф G , що має $k=1$, $p=7$, $q=9$, побудувати його матрицю циклів, базисних циклів. Навести приклади представлення довільних циклів графа через лінійну комбінацію базисних циклів.



Розв'язання.

Побудуємо довільний остов заданого графа. Хорди: c, m, d .



Матриця циклів графа, $C(G)$:

	a	b	c	d	e	f	m	g	h
C_{Z1}	0	1	1	0	0	0	0	1	1
C_{Z2}	1	0	0	0	0	1	1	1	0
C_{Z3}	1	0	0	1	1	1	0	1	1
C_{Z4}	0	1	1	1	1	0	1	1	0
C_{Z5}	1	1	1	0	0	1	1	0	1
C_{Z6}	0	0	0	1	1	0	1	0	1
C_{Z7}	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Матриця базисних циклів, $C_v(G)$:

	a	b	c	d	e	f	m	g	h	
C_{b1}	0	1	1	0	0	0	0	1	1	c
C_{b2}	1	0	0	0	0	1	1	1	0	m
C_{b3}	1	0	0	1	1	1	0	1	1	d

або в інший спосіб: перші три стовпці – це хорди, далі – гілки.

	c	m	d	a	b	e	f	g	h
C_{b1}	1	0	0	0	1	0	0	1	1
C_{b2}	0	1	0	1	0	0	1	1	0
C_{b3}	0	0	1	1	0	1	1	1	1

Представити три довільних цикла вхідного графа через лінійну комбінацію базисних циклів.

Ех. $Z_4 = \{b, c, d, e, m, g\}$

	a	b	c	d	e	f	m	g	h
C_{Z4}	0	1	1	1	1	0	1	1	0
C_{b1}	0	1	1	0	0	0	0	1	1
C_{b2}	1	0	0	0	0	1	1	1	0
C_{b3}	1	0	0	1	1	1	0	1	1
$C_{b1} \oplus C_{b2} \oplus C_{b3}$	0	1	1	1	1	0	1	1	0

$Z_5 = \{a, b, c, f, m, h\}$

	a	b	c	d	e	f	m	g	h
C_{Z5}	1	1	1	0	0	1	1	0	1
C_{b1}	0	1	1	0	0	0	0	1	1
C_{b2}	1	0	0	0	0	1	1	1	0
$C_{b1} \oplus C_{b2}$	1	1	1	0	0	0	1	0	1

$$Z_6 = \{d, e, m, h\}$$

	a	b	c	d	e	f	m	g	h
C_{Z_6}	0	0	0	1	1	0	1	0	1
C_{b_2}	1	0	0	0	0	1	1	1	0
C_{b_3}	1	0	0	1	1	1	0	1	1
$C_{b_2} \oplus C_{b_3}$	0	0	0	1	1	0	1	0	1

5.3 Завдання до лабораторної роботи

Вихідний граф **G**: **GV(13, {5, 6})**.

1. Порахувати циклічний і коциклічний ранг графа **G**.
2. Побудувати матрицю фундаментальних циклів графа **G** для довільного остова.
3. Представити три непростих цикла вхідного графа через лінійну комбінацію базисних циклів.

5.4 Питання до самоконтролю

1. Дати визначення цикломатичного числа (циклічного рангу) і коциклічного рангу графа.
2. Привести формули обчислення цикломатичного числа (циклічного рангу) і коциклічного рангу графа.
3. Сформулювати теорему про зв'язок між циклічним і коциклічним рангами графа і характеристиками остова (числом гілок і хорд).
4. Сформулювати теорему Ейлера і наслідки з неї.
5. Векторний простір циклів.
6. Лінійна комбінація векторів.
7. Лінійно-незалежні вектори. Базис.
8. Ввести визначення базисних або фундаментальних циклів.

9. Алгоритм побудови базисних циклів графа **G** щодо остова **T**.

10. Матриці циклів і базисних циклів.

Література: [1-5] .

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лекции по теории графов /под ред. Емеличева Е.А./ – М.: Наука, 1990. – 384с.
2. Кристофидес Н. Теория графов : алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432с.
3. Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. – 336с.
4. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300с.
5. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. – М.: Мир, 2001. – 960 с.
6. Назарова І.А. Дискретний аналіз : навч.-метод. посіб. / І.А. Назарова. – Донецьк: ДВНЗ “ДонНТУ”, 2012. – 277с.