

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І ІНФОРМАТИКИ



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
до виконання лабораторних робіт
з дисципліни «ЕМПІРИЧНІ МЕТОДИ ПРОГРАМНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ:
ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ»
для студентів спеціальності
121 «Інженерія програмного забезпечення» всіх форм навчання

Луцьк -2022

УДК 681.3.06(071)

Методичні вказівки і завдання до виконання лабораторних робіт з дисципліни “Емпіричні методи програмної інженерії: перевірка статистичних гіпотез” для студентів спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» всіх форм навчання / укладач: І.А. Назарова. – Луцьк: ДВНЗ «ДонНТУ», 2022. – 47с.

Методичні вказівки містять вимоги і рекомендації до виконання лабораторних робіт, зокрема, методи обробки одновимірної вибірки, застосування критеріїв узгодження та методів вирівнювання статистичних рядів розподілу.

Укладач: Назарова І.А., к.т.н., доцент кафедри прикладної математики та інформатики

Рецензент: Ковальов С.О., к.т.н., доцент кафедри комп’ютерної інженерії

Відповідальний за випуск: Маслова Н.О., доцент, к.т.н., завідувач кафедри "Прикладна математика і інформатика"

Розглянуто на засіданні кафедри прикладної математики і інформатики, протокол №8 від 1.09.2022р.

Затверджено навчально-методичним відділом ДВНЗ «ДонНТУ», протокол №1 від 27. 09.2022р.

© І.А.Назарова, 2022

ЗМІСТ

Лабораторна робота №1	4
Гіпотези щодо перевірки параметрів нормально розподіленої ГС	
Лабораторна робота №2	29
Перевірка непараметричних статистичних гіпотез про однорідні ГС	
Лабораторна робота №3	39
Перевірка параметричних гіпотез щодо параметра біноміального закону розподілу	
Лабораторна робота №4	50
Перевірка однорідності вибіркової сукупності (критерій серій)	
Рекомендована література	53

Лабораторна робота № 1

Гіпотези щодо перевірки параметрів нормально розподіленої ГС

Мета роботи: отримання практичних навичок у формуванні та перевірці статистичних гіпотез параметричного типу, побудова допустимої і критичних областей із заданим рівнем довірчої ймовірності і отримання оцінок для формування висновків щодо основної гіпотези.

Теоретична довідка

Статистична гіпотеза та загальна схема її перевірки

Статистична гіпотеза – будь-яке припущення про генеральну сукупність, що перевіряється на основі вибіркової сукупності або будь-яке припущення про вид або параметри невідомого закону розподілу.

Нульова/основна гіпотеза – гіпотеза, яку перевіряють у завданні, позначається – H_0 .

Альтернативна/конкуруюча гіпотеза – H_1 , логічне заперечення H_0 .

Статистична гіпотеза:

- проста: лише одне припущення;
- складна: кілька (кінцеве/нескінченне) число припущень.

Параметрична гіпотеза: розподіл випадкової величини відомий, за вибіркою спостережень необхідно перевірити гіпотезу про значення параметрів цього розподілу; інакше – **непараметрична**.

Рівень значущості – α , мінімальна ймовірність така, що у рамках цього завдання подія з ймовірністю α вважатиметься майже неможливою.

Критерій K – правило, за яким приймається рішення прийняти чи відхилити гіпотезу H_0 .

Над елементами вибірки будується деяка статистика Z . z^* – вибіркове значення статистики Z , обчислене за заданою вибіркою.

Статистика Z критерію K – вибіркова характеристика, що отримана за вибіркою спостережень випадкової величини X , точний чи наближений розподіл якої відомо.

Статистика Z – випадкова величина, що приймає значення з певної області V . Множина всіх, всіляких значень статистики критерію – V . Множина різноманітних значень статистики розбивається на дві непересічні підмножини: $V_0, V_{кр}$.

Множина $V_{кр}$ – множина можливих значень статистики Z критерію K , при якому приймається рішення відкинути H_0 або **критична область**.

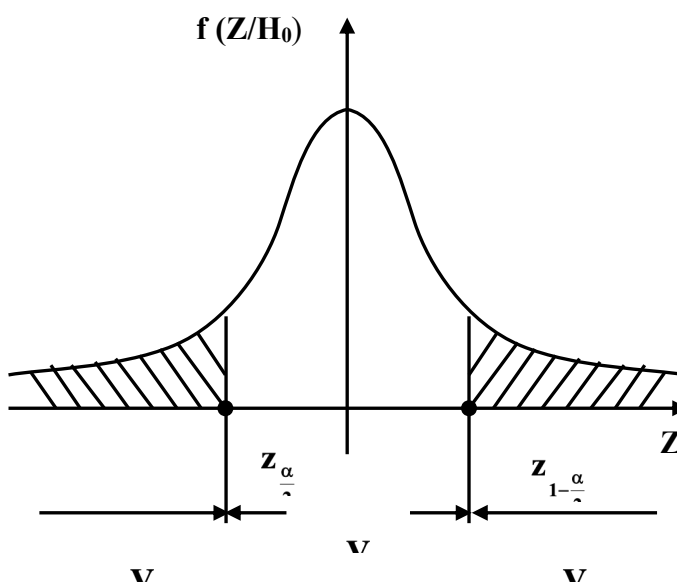
Область $V_0 = V \setminus V_{кр}$ – область прийняття гіпотези H_0 .

Критерій формулюється таким чином:

- якщо $z^* \in V_{кр}$, відхилити гіпотезу H_0 ;
- якщо $z^* \in V \setminus V_{кр} = V_0$, прийняти гіпотезу H_0 .

Двосторонній критерій:

$$\begin{cases} H_0: a = a_0 \\ H_1: a \neq a_0 \end{cases}.$$



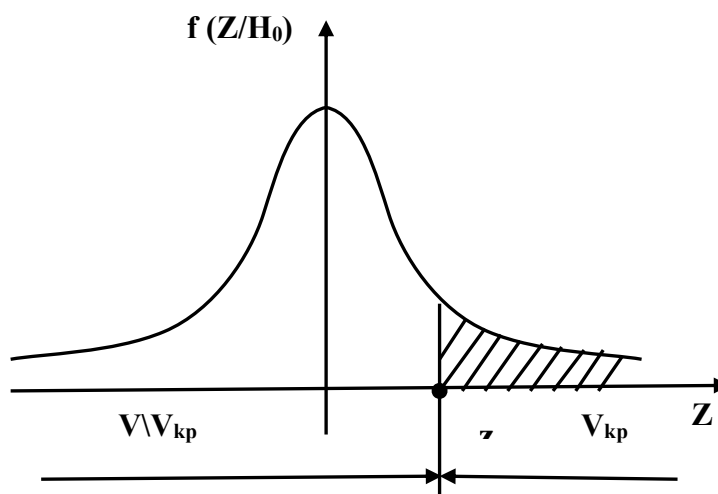
Критична область визначається сукупністю нерівностей:

$$\begin{cases} Z < z_{\frac{\alpha}{2}} \\ Z > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

Односторонні критерії

Правосторонній критерій:

$$\begin{cases} H_0: a = a_0 \\ H_1: a > a_0 \end{cases}$$

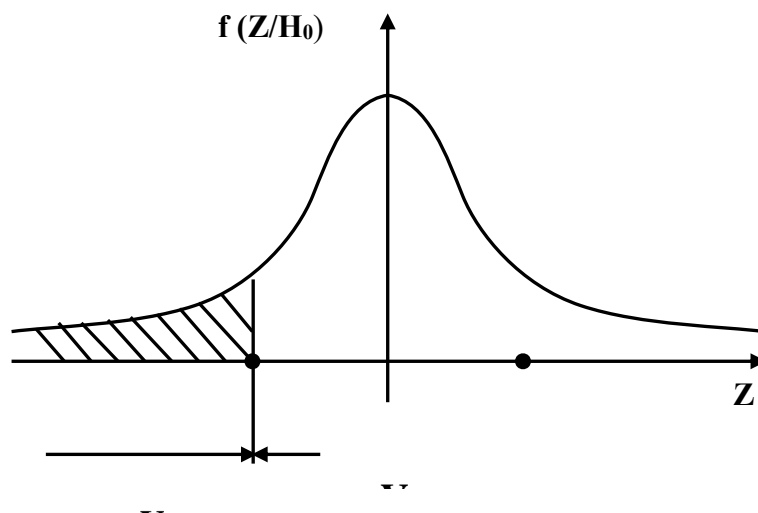


Критична область задається нерівністю:

$$Z < z_{1-\alpha}$$

Лівосторонній критерій:

$$\begin{cases} H_0: a = a_0 \\ H_1: a < a_0 \end{cases}$$



Критична область задається нерівністю:

$$Z < z_{\alpha}.$$

Схема перевірки параметричної гіпотези

1) Сформулювати основну гіпотезу та альтернативну; призначити рівень значущості α .

2) Вибрати статистику Z критерію для перевірки гіпотези; визначити точний або наближений розподіл статистики Z за умови, що правильна.

3) Отримати вибіркове значення статистики критерію.

4) Залежно від формулювання альтернативної гіпотези визначають критичну область однією з нерівностей:

- правостороннім;
- лівостороннім;
- двостороннім.

5) Прийняти статистичне рішення:

- відхилити гіпотезу, як таку, що суперечить вибілковим даним;
- прийняти гіпотезу, як таку, що не суперечить вибілковим даним.

Статистичне значення може бути хибним. При цьому розрізняють помилки 1 та 2 роду.

Класифікація статистичних помилок

Гіпотеза H_0	Приймається	Відкидається
Вірна гіпотеза	Правильне рішення	Помилка 1 роду
Невірна гіпотеза	Помилка 2 роду	Правильне рішення

1. Помилка I роду – помилка, яка полягає в тому, що основна гіпотеза H_0 відхиляється тоді як вона була вірною.

Ймовірність помилки першого роду дорівнює ймовірності попадання статистики критерію в критичну область за умови, що вірною є основна гіпотеза, тобто дорівнює рівню значущості:

$$P[z \in V_{кр} | H_0] = \alpha.$$

Ймовірність не припуститися помилки першого роду $1 - \alpha$ – оперативна характеристика критерію.

2. Помилка II роду – помилка, яка полягає в тому, що основна гіпотеза H_0 приймається у той час, як вона була невірною або альтернативна гіпотеза H_1 відкидається у той час, як вона була вірною.

Ймовірність помилки другого роду за простої альтернативної гіпотези дорівнює: $P[z \in V_0 | H_1] = \beta$.

Ймовірність $1 - \beta$ – не допустити помилку II роду, тобто. відкинути основну гіпотезу, коли вона невірна, називається **потужністю критерію**.

Приклад 1.

За паспортними даними автомобільного двигуна витрата палива на **100** км пробігу становить **10** літрів. В результаті зміни конструкції двигуна витрата палива повинна зменшитися. Для перевірки проведено **25** випробувань автомобілів з модернізованим двигуном $\tilde{m} = 9,3$ л. Припустимо, що вибірка витрат палива взята з нормально розподіленої ГС із середнім $m = 10$ л та дисперсією $D = 4$ л².

Перевірити гіпотезу, що зміна конструкції двигуна не вплинула витрату палива.

Розв'язання.

1) Основна гіпотеза про середнє нормально розподіленої ГС:

$$\begin{cases} H_0: m = 10 \\ H_1: m < 10 \end{cases}$$

2) Рівень значущості $\alpha = 0.05$.

3) У якості статистики критерію використовуємо оцінку математичного очікування: $\tilde{m}$. Так як вибірка отримана з нормально розподіленої ВВ: $N(m, D)$, то вибіркове середнє має нормальний розподіл $N\left(m, \frac{D}{n}\right)$. В умовах

задачі $m = 10$; $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{4}{25}$.

Статистика $u = \frac{\tilde{m}_x - 10}{\sqrt{4/25}}$ розподілена $N(0, 1)$,

4) Альтернативна гіпотеза передбачає односторонній лівосторонній критерій. Критична область визначається нерівністю: $u < u_\alpha$.

5) За таблицею визначаємо квантиль для нормального розподілу:

$$u_{0.05} = -u_{0.95} = -1.645.$$

6) Вибіркове значення нормованої статистики критерію:

$$u^* = \frac{9.3 - 10}{\sqrt{4/25}} = -1.75.$$

7) Статистичне рішення: вибіркове значення статистики критерію належить критичній області, отже, основна гіпотеза суперечить досвідченим даним:

$$u^* = -1.75 < -1.645 = u_\alpha.$$

Межа критичної області для вихідної не нормованої статистики:

$$\frac{\bar{x}_{кр} - 10}{2/5} = -1.645 \Rightarrow \bar{x}_{кр} = 9.342.$$

Приклад 2.

В умовах прикладу 1 припустимо, що поряд з гіпотезою $H_0: m = 10$ л розглядається альтернативна гіпотеза: $H_1: m = 9$. У якості статистики критерію візьмемо вибіркове середнє. Нехай критична область задана нерівністю: $\tilde{m} < 9.44$ л. Знайти ймовірність помилок першого та другого роду.

Розв'язання.

1) Знайдемо ймовірність помилки першого роду:

$$\begin{aligned} \alpha &= P(\tilde{m} < 9.44 \mid H_0: m = 10) = \Phi^*\left(\frac{9.44 - 10}{2/5}\right) = \\ &= \Phi^*(-1.4) = 1 - \Phi^*(1.4) \approx \\ &\approx 1 - 0.92 = 0.08. \end{aligned}$$

Статистика має розподіл: $N\left(10, \frac{2}{5}\right)$.

Критерій класифікує $\approx 8\%$ автомобілів, що мають витрату палива 10л на 100 км пробігу, як автомобілі, що мають меншу витрату палива.

2) Знайдемо можливість помилки другого роду. За умови, що вірна альтернативна гіпотеза H_1 , статистика має розподіл: $N\left(9, \frac{2}{5}\right)$.

$$\begin{aligned}\beta &= (\tilde{m} \geq 9.44 \mid H_1: m = 9) = 1 - \Phi^*\left(\frac{9.44 - 9}{2/5}\right) \\ &= 1 - \Phi^*(1.1) \approx 0.136.\end{aligned}$$

Усього $\approx 13\%$ автомобілів, що мають витрату палива 9л, класифіковані як автомобілі, що мають витрату 10л.

Параметричні методи перевірки статистичних гіпотез

Гіпотези щодо перевірки параметрів нормально розподіленої ГС

Критерії значущості для перевірки гіпотез про дисперсію нормально розподіленої ГС

Є нормально розподілена ГС, із неї обрана вибірка обсягом n .

1) Порівняння дисперсії із заданим значенням (номіналом), m – відомо

Основна гіпотеза: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ або $H_0: D = D_0$.

Додаткова умова (припущення щодо m): m – відомо.

Статистика критерію за умови істинності основної гіпотези H_0 : $z = \frac{n\tilde{D}}{D_0}$.

Закон розподілу статистики: $z: f(z \mid H_0) \rightarrow \chi^2(n)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1: D \neq D_0$ визначається нерівністю:

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n) < z^* < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n).$$

б) правостороннього критерію $H_1: D > D_0$ визначається нерівністю:

$$z^* < \chi_{1-\alpha}^2(n).$$

в) лівостороннього критерію $H_1 : D < D_0$ визначається нерівністю:

$$z^* > \chi_{\alpha}^2(n).$$

2) Порівняння дисперсії із заданим значенням (номіналом), m – невідомо

Основна гіпотеза: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ або $H_0 : D = D_0$.

Додаткова умова (припущення щодо m): m – невідомо.

Статистика критерію за умови істинності основної гіпотези:

$$z = \frac{(n-1)\tilde{D}}{D_0}.$$

Закон розподілу статистики $z : f(z/H_0) \rightarrow \chi^2(n-1)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1 : D \neq D_0$ визначається нерівністю:

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) < z^* < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1).$$

б) правостороннього критерію $H_1 : D > D_0$ визначається нерівністю:

$$z^* < \chi_{1-\alpha}^2(n-1).$$

в) лівостороннього критерію $H_1 : D < D_0$ визначається нерівністю:

$$z^* > \chi_{\alpha}^2(n-1).$$

Приклад 3.

Верстат автомат штампує деталі певної довжини. У робочому стані дисперсія довжини деталей 200л^2 . Якщо вона більша, то верстат розрегульований і його зупиняють. Взяли 10 деталей, отримали $D^* = 350\text{л}^2$. Чи потрібно зупинити виробництво та провести налагодження верстата.

Розв'язання.

1) Нульова та альтернативна гіпотези:

$$\begin{cases} H_0 : D = D_0 = 200 \\ H_1 : D > D_0 \end{cases}.$$

2) Рівень значущості $\alpha = 0.01$.

3) Математичне очікування відомо, тому що відомо якого розміру випускають деталі, хоча і не сказано якого саме.

Статистика критерію: $z = \frac{n\tilde{D}}{D_0}$.

4) Межа критичної області за таблицею розподілу χ^2 :
 $\chi^2_{1-\alpha}(n) = \chi^2_{1-0.01}(10) = 23,2$.

5) Перевіряємо $z^* = 17,5 < 23,2$: отже, переналагодження верстата не потрібно, приймається основна гіпотеза.

3) Критерії значущості для перевірки гіпотез про дисперсії двох нормально розподілених ГС

Порівняння дисперсій двох ГС, m_1 і m_2 – відомі

Основна гіпотеза: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ або $H_0 : D_1 = D_2$.

Додаткова умова (припущення щодо m): m_1 і m_2 – відомі.

Статистика критерію за умови істинності основної гіпотези:

$$z = \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_2}, \quad \tilde{D}_1 > \tilde{D}_2.$$

Закон розподілу статистики $z : \rightarrow F(n_1, n_2)$ – розподіл Фішера.

Властивість квантилю розподілу Фішера: $F_p(n_1, n_2) = \frac{1}{F_{1-p}(n_2, n_1)}$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1 : D_1 \neq D_2$ визначається нерівністю:

$$z^* < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2).$$

б) правостороннього критерію $H_1 : D_1 > D_2$ визначається нерівністю:

$$z^* < F_{1-\alpha}(n_1, n_2).$$

в) лівостороннього критерію $H_1 : D_1 < D_2$ визначається нерівністю:

$$z^* > F_{\alpha}(n_1, n_2).$$

Порівняння дисперсій двох ГС, m_1 і m_2 – невідомі

Основна гіпотеза: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ або $H_0 : D_1 = D_2$.

Додаткова умова (припущення щодо m): m_1 і m_2 – невідомі.

Статистика критерію за умови істинності основної гіпотези:

$$z = \frac{\tilde{D}_1}{\tilde{D}_2}, \quad \tilde{D}_1 > \tilde{D}_2.$$

Закон розподілу статистики $f : \rightarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1 : D_1 \neq D_2$ визначається нерівністю:

$$z^* < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

б) правостороннього критерію $H_1 : D_1 > D_2$ визначається нерівністю:

$$z^* < F_{1-\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

в) лівостороннього критерію $H_1 : D_1 < D_2$ визначається нерівністю:

$$z^* > F_{\alpha}(n_1 - 1, n_2 - 1).$$

Приклад 4.

Двома методами проведено вимірювання однієї й тієї ж випадкової величини обсягами $n_1 = 19$ та $n_2 = 5$. Чи можна вважати на рівні значущості $\alpha = 0.05$, що обидва методи забезпечують одну й ту саму точність вимірів, якщо $D_1^* = 5,43$ і $D_2^* = 9,77$.

Розв'язання.

Основна гіпотеза: $H_0 : D_1 = D_2$.

Альтернативна гіпотеза: $H_1 : D_1 \neq D_2$.

Математичне очікування ГС невідоме, отже $z^* = \frac{D_2^*}{D_1^*} = \frac{9.77}{5.43} \approx 1.8$,

оскільки $D_2^* > D_1^*$. Критичне значення знаходимо за таблицею розподілу

Фішера: $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2 - 1, n_1 - 1) = F_{0.975}(4, 18) = 3,61$.

Відповідь: $z^* = 1.8 < 3.61$, нульова гіпотеза приймається, різниця на заданому рівні значущості несуттєва. Можливість помилки **0.05**. Якби обсяги вибірок були більше 40 за таких самих дисперсій, то відмінності були б істотними на цьому рівні значущості.

Критерії значущості для перевірки гіпотез про математичного очікування (середнього) нормально розподіленої ГС

Є нормально розподілена ГС, із неї обрана вибірка обсягом **n**.

1) Порівняння математичного очікування з номіналом, **D** – відома

Основна гіпотеза: $H_0 : m = m_0$.

Додаткова умова: **D** – відомо.

Статистика критерію за умови істинності основної гіпотези H_0 :

$$z = \frac{m^* - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

Закон розподілу статистики $z : f(z / H_0) \rightarrow N(0,1)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1 : m \neq m_0$ визначається нерівністю:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

б) правостороннього критерію $H_1 : m > m_0$ визначається нерівністю:

$$z^* < u_{1-\alpha}.$$

в) лівостороннього критерію $H_1 : m < m_0$ визначається нерівністю:

$$z^* > u_{\alpha}.$$

2) Порівняння математичне очікування з номіналом, **D**- невідома

Основна гіпотеза: $H_0 : m = m_0$.

Додаткова умова: **D** – невідома.

Статистика критерію за умови істинності основної гіпотези:

$$z = \frac{m^* - m_0}{\sigma^* / \sqrt{n}}.$$

Закон розподілу статистики $z : f(z / H_0) \rightarrow T(n-1)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1 : m \neq m_0$ визначається нерівністю:

$$|z^*| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1).$$

б) правостороннього критерію $H_1 : m > m_0$ визначається нерівністю:

$$z^* < t_{1-\alpha}(n-1).$$

в) лівостороннього критерію $H_1 : m < m_0$ визначається нерівністю:

$$z^* > t_{\alpha}(n-1).$$

Приклад 5.

З великої партії резисторів одного номіналу випадково відібрали **36** штук. Отримали середній опір резисторів за вибіркою **9.3** кОм. На рівні значущості $\alpha = 0.05$ важливості перевірити гіпотезу: партія має номінал **10** кОм. Припускаємо, що розподіл опорів резисторів - нормальний і 1) дисперсія опорів резисторів партії відома і дорівнює **4** кОм; 2) дисперсія не відома, вибіркове значення дисперсії дорівнює **3.9** кОм.

Розв'язання.

Сформулюємо гіпотези:

$$H_0 : m = m_0 = 10$$

$$H_1 : m \neq 10.$$

$$1) \text{ Дисперсія відома: } z = \frac{m^* - m_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{9.3 - 10}{\sqrt{4} / \sqrt{36}} = -2.1.$$

$$\text{Критичне значення за нормальним законом: } u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96.$$

Критерій: $|z^*| = |-2.1| = 2.1 > 1.96$ отже основна гіпотеза відкидається, номінал партії не дорівнює **10** кОм.

$$2) \text{ Дисперсія не відома: } z = \frac{m^* - m_0}{\sigma^* / \sqrt{n}} = \frac{9.3 - 10}{\sqrt{3.9} / \sqrt{36}} = -2.127.$$

Критичне значення щодо розподілу Стюдента:

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(35) = 2.03.$$

Критерій: $|z^*| = |-2.127| = 2.127 > 2.03$ основна гіпотеза не приймається.

Критерії значущості для перевірки гіпотез про математичне очікування двох нормально розподілених ГС

Порівняння середніх двох ГС, D_1 та D_2 – відомі

Основна гіпотеза: $H_0 : m_1 = m_2$.

Додаткова умова: D_1 та D_2 – відомі.

Статистика критерію за умови істинності основної гіпотези:

$$z = \frac{m_1^* - m_2^*}{\sqrt{\frac{D_1}{n_1} + \frac{D_2}{n_2}}}.$$

Закон розподілу статистики $z : \rightarrow N(0,1)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1 : m_1 \neq m_2$ визначається нерівністю:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

б) правостороннього критерію $H_1 : m_1 > m_2$ визначається нерівністю:

$$z^* < u_{1-\alpha}.$$

в) лівостороннього критерію $H_1 : m_1 < m_2$ визначається нерівністю:

$$z^* > u_{\alpha}.$$

Порівняння середніх двох ГС, D_1 та D_2 – не відомі

Основна гіпотеза: $H_0 : m_1 = m_2$.

Додаткова умова: D_1 та D_2 – невідомі.

Перевіряється додаткова гіпотеза: $H'_0 : D_1 = D_2$.

Якщо додаткова гіпотеза H'_0 – правильна, статистика критерію за умови істинності основної гіпотези H_0 :

$$z = \frac{m_1^* - m_2^*}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)D_1^* + (n_2 - 1)D_2^*}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Закон розподілу статистики $z: \rightarrow T(n_1 + n_2 - 2)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1: m_1 \neq m_2$ визначається нерівністю:

$$|z^*| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2).$$

б) правостороннього критерію $H_1: m_1 > m_2$ визначається нерівністю:

$$z^* < t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2).$$

в) лівостороннього критерію $H_1: m_1 < m_2$ визначається нерівністю:

$$z^* > t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2).$$

Якщо додаткова гіпотеза H'_0 – не вірна, статистика критерію за умови істинності основної гіпотези H_0 :

$$z = \frac{m_1^* - m_2^*}{\sqrt{\frac{D_1^*}{n_1} + \frac{D_2^*}{n_2}}}.$$

Закон розподілу статистики:

$$z: \rightarrow T(k), k = \frac{\left(\frac{D_1^*}{n_1} + \frac{D_2^*}{n_2}\right)^2}{\frac{(D_1^*/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(D_2^*/n_2)^2}{n_2 - 1}}.$$

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1: m_1 \neq m_2$ визначається нерівністю:

$$|z^*| < t_{1-\frac{\alpha}{2}}(k).$$

б) правостороннього критерію $H_1: m_1 > m_2$ визначається нерівністю:

$$z^* < t_{1-\alpha}(k).$$

в) лівостороннього критерію $H_1: m_1 < m_2$ визначається нерівністю:

$$z^* > t_{\alpha}(k).$$

Приклад 6.

Зроблено дві вибірки врожаю пшениці: при своєчасному збиранні врожаю та збиранні з деяким запізненням. У першому випадку при спостереженні 8 ділянок вибіркова середня врожайність – 16.2 ц/га та стандартне відхилення – 3.2 ц/га; у другому випадку при спостереженні 9 ділянок ті ж характеристики дорівнювали – 13.9 ц/га та 2.14ц/га. З'ясувати вплив своєчасності збирання врожаю середнє значення врожайності. Вважається, що генеральні дисперсії є рівними.

Розв'язання.

1) Основна та альтернативна гіпотези:

$$\begin{cases} H_0 : m_1 = m_2 \\ H_1 : m_1 > m_2 \end{cases}.$$

2) Статистика критерію:

$$z^* = \frac{16,2 - 13,9}{\sqrt{\frac{(9-1)3,2^2 + (8-1)2,1^2}{8+9-2} \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right)}} = 1,62.$$

3) Критичне значення: $t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2) = t_{0,95}(15) = 1,753$.

4) Критерій: $1,62 < 1,753$ основна гіпотеза приймається.

Перевірка параметричної гіпотези про рівність дисперсій більш ніж двох ГС за критеріями Бартлетта та Кохрана

Критерій Бартлетта

Критерій Бартлетта (Bartlett M.S.) є параметричним і ґрунтується на додатковому припущенні про нормальність ГС. Є k нормально розподілених генеральних сукупностей, дисперсії яких відповідно: $D_1, D_2, \dots, D_k$ та k незалежних вибірок із цих сукупностей різних обсягів $n_1, n_2, \dots, n_k$.

Нульова гіпотеза формулюється про рівність генеральних дисперсій:

$$H_0 : D_1 = D_2 = \dots = D_k = D.$$

Альтернативна гіпотеза: існують принаймні дві генеральні сукупності, для яких дисперсії не є однаковими або рівними:

$$H_1 : \exists i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j, D_i \neq D_j.$$

Статистика критерію Бартлетта має вигляд:

$$B = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \cdot \ln(\bar{D}_i / \hat{D}_i)}{1 + \frac{1}{3(k-1)} \cdot \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - k} \right)}, \text{ де}$$

$$N = \sum_{i=1}^k n_i, \quad \hat{D}_i = \frac{n_i \cdot D_i^*}{n_i - 1},$$

$$\bar{D}_i = \frac{1}{N - k} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \cdot D_i^*.$$

Зауваження: як оцінка дисперсії D_i кожної з ГС вибирається або D_i^* , або, якщо є можливість, $\tilde{D}_i$.

Доведено, що за справедливості нульової гіпотези та за умови $\forall i = \overline{1, k} \quad n_i \geq 3$ статистика критерію Бартлетта має χ^2 -розподіл зі $k - 1$ ступенями свободи. При порушенні вимог про норму ГС рекомендується замість статистики Бартлетта B користуватися її модифікацією, статистикою:

$$B^* = \frac{f_2 \cdot B}{f_1(a - B)},$$

де

$$c = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - k},$$

$$a = \frac{f_2^2}{f_2(2 - c) + c}, \quad f_1 = k - 1, \quad f_2 = \frac{k + 1}{(c - 1)^2}.$$

Статистика B^* має F-розподіл з f_1 і f_2 ступенями свободи. Нульова гіпотеза відхиляється, якщо $B^* > F_{1-\alpha}(f_1, f_2)$.

Критерій Кохрана (Кокрена)

Для вирішення того ж завдання, у разі вибірок рівних обсягів, $\forall i = \overline{1, k} \quad n_i = n$, Кохраном (Cochran W.G.) був запропонований критерій, заснований на статистиці:

$$g = \frac{\max_{i=\overline{1, k}} D_i^*}{\sum_{i=1}^k D_i^*}.$$

Якщо $g > g_{1-\alpha}(k, n)$, то нульова гіпотеза відхиляється при правосторонньому критерії та на рівні значущості α . Критичні значення $g_p(k, n)$ наведено у таблиці Кохрана.

Критичні значення можна обчислити, використовуючи розподіл Фішера при $n \geq 20$:

$$g_p(k, n) = \frac{\frac{F_{k+1-p}[n-1; (n-1)(k-1)]}{k}}{k-1 + \frac{F_{k-1+p}[n-1; (n-1)(k-1)]}{k}},$$

де $F_p(f_1, f_2)$ p -квантиль розподілу Фішера.

Критичні значення критерію Кохрана рівня значимості $\alpha = 0,05$

k	n					
	2	3	4	5	6	7
2	0,999	0,995	0,979	0,959	0,937	0,917
3	0,993	0,942	0,883	0,833	0,793	0,761
4	0,967	0,864	0,781	0,721	0,676	0,641
5	0,928	0,788	0,696	0,633	0,587	0,553
6	0,883	0,722	0,626	0,563	0,519	0,487
7	0,838	0,664	0,568	0,508	0,466	0,435
8	0,794	0,615	0,521	0,463	0,423	0,393
9	0,754	0,573	0,481	0,425	0,387	0,359
10	0,707	0,536	0,447	0,393	0,357	0,331
12	0,653	0,475	0,392	0,343	0,310	0,286
15	0,548	0,407	0,332	0,288	0,259	0,239
20	0,480	0,330	0,265	0,229	0,205	0,188
30	0,363	0,241	0,191	0,163	0,145	0,133

Завдання до лабораторної роботи

1. Для обох задач сформулювати наведені в варіантах завдання в термінах теорії перевірки статистичних гіпотез. Представити графічно по кожній задачі допустиму і критичну (критичні) області, керуючись наведеним в умові завдання рівнем значущості. Відповіді сформулювати двома способами: щодо прийняття або відхилення основної гіпотези і щодо питань, поставлених в завданні.
2. Для задачі № 1, перевірити сформульовану гіпотезу всіма відомими та допустимими для цієї задачі параметричними критеріями. Проаналізувати та зіставити результати.
3. Для задачі № 2, у якій вхідні дані представлені у вигляді двох вибірок, перевірити параметричні гіпотези про рівність математичних очікувань та дисперсій.

Варіанти завдань

Варіант №1.

1. Очікується, що додавання спеціальних речовин зменшує жорсткість води. Оцінки жорсткості води до і після додавання спеціальних речовин по 40 і 50 пробах показали середні значення жорсткості (в градусах жорсткості), що дорівнюють відповідно 4.0 і 3.8 градуса. Дисперсія вимірювань в обох випадках передбачається на рівні 0.25 град^2 . Чи підтверджують ці результати очікуваний ефект? Нехай $\alpha = 0.05$.
2. Контрольований розмір кількох деталей був перевірений до і після налагодження верстата. В результаті отримані дані (в мм):

до наладки	36.4	37.5	36.9	38.1	35.5	37.8	38.3	36.6	38.4	37.5
після наладки	36.8	39.2	37.6	39.9	34.2	36.5	36.3	39.8	38.4	37.5

Чи можна вважати, що результати вимірювань до і після налагодження верстата різні? Нехай $\alpha = 0.05$.

Варіант №2.

1. На двох верстатах А і В виробляють одну і ту ж продукцію, контрольовану по внутрішньому діаметру виробу. З продукції верстата А була взята вибірка з 16 виробів, а з продукції верстата В – вибірка з 25 виробів. Вибіркові оцінки середніх і дисперсій контрольованих розмірів $m_A^* = 37.5\text{мм}$ при $D_A^* = 1.21\text{мм}^2$ і $m_B^* = 36.8\text{ мм}$ при $D_B^* = 1.44\text{мм}^2$.

Використовуючи двосторонній критерій, перевірити гіпотезу про співпадіння математичних очікувань контрольованих розмірів в продукції обох верстатів, якщо: а) $\alpha = 0.05$, б) $\alpha = 0.1$.

2. За вибірками з 2 партій мікросхем після операції легування полікремнію вимірювався опір. Результати вимірів:

1 партія	52.2	33	76	32.5	49.5	32.5	191.5	112.5
	52.9	114.8	33.7	69.1	112.5	48.5	16.5	-
2 партія	119	17.5	43.5	43.5	90.5	40.0	50.0	108
	2.4	16.5	7.5	96	46	48.5	50.0	-

Чи можна стверджувати, що обидві партії отримані з однієї генеральної сукупності? Нехай $\alpha = 0.1$.

Варіант №3.

1. Відповідно до технічних умов середній час безвідмовної роботи для приладів з великої партії має становити не менше 1000 годин зі середньоквадратичним відхиленням 100 годин. Вибіркове середнє часу безвідмовної роботи для випадково відібраних 25 приладів дорівнювало 970 годин. Припустити, що σ часу безвідмовної роботи для приладів у вибірці збігаються з σ усієї партії.

Чи можна вважати, що вся партія приладів не задовольняє технічним умовам, якщо а) $\alpha = 0.1$, б) $\alpha = 0.01$.

2. Протягом деякого часу добова продуктивність двох автоматів характеризувалася такими даними:

1 автомат	105	60	83	111	138	71	87	130	93	105	122
2 автомат	172	45	51	55	117	103	82	93	31	51	71

Перевірити гіпотезу про збіг показників результатів роботи автоматів ($\alpha = 0.1$).

Варіант №4.

Під час випробування радіодальноміра проведено 16 незалежних вимірювань дальності до контрольного об'єкта. Обробка результатів вимірювань дала наступні значення оцінок помилки радіодальноміра: $m_1^* = 0.03$ км, $D_1^* = 0.0324$ км². Після юстування пристрою проведено ще 18 незалежних вимірювань і отримані такі значення оцінок: $m_2^* = 0.05$ км, $D_2^* = 0.0225$ км². Чи можна вважати, що юстирування не вплинуло на систематичну помилку? Нехай $\alpha = 0.1$.

2. Щоб визначити, який вплив надає температура навколишнього середовища на систематичну помилку інструменту, проведені виміри горизонтального кута об'єкту вранці ($t = 10^\circ\text{C}$) і вдень ($t = 26^\circ\text{C}$). Результати вимірювань ξ (в кутових секундах) наступні:

Вранці	38.2	36.4	37.7	36.1	37.9	37.8	37.5	39.2	36.5	38.4	38.2
Вдень	39.5	38.7	37.8	38.6	39.2	39.1	38.9	37.8	37.6	37.3	37.8

Чи можна вважати, що температура навколишнього середовища впливає на систематичну помилку кутомірного інструменту? Нехай $\alpha = 0.05$.

Варіант №5.

1. Технологія виробництва деякої речовини дає в середньому 1000 кг речовини на добу з $\sigma = 80$ кг. Нова технологія виробництва в середньому дає 11000 кг речовини на добу з тим же σ . Чи можна вважати, що нова технологія забезпечує підвищення продуктивності, якщо: а) $\alpha = 0.05$; б) $\alpha = 0.01$.

2. Порівнювалися дії 2-х екстрактів вірусу тютюнової мозаїки. Для цього кожна з половин листа натиралася відповідним препаратом. Число уражених місць наводиться в таблиці:

Екстракт А	20	39	43	13	28	26	17	49	36	31	14	34
Екстракт В	31	22	45	6	21	13	17	46	31	41	24	41

Чи можна вважати, що дія цих екстрактів відрізняється? Нехай $\alpha = 0.01$.

Варіант №6.

1. Тиск в камері контролюється за двома манометрами. Для порівняння точності цих приладів одночасно фіксуються їх показання. За результатами 10 замірів вибіркові оцінки (в одиницях шкали приладів) виявилися наступними: $m_1^* = 15.3$; $m_2^* = 16.1$; $D_1^* = 0.2$; $D_2^* = 0.15$. Використовуючи двосторонній критерій, перевірити при $\alpha = 0.1$:

а) гіпотезу про рівність дисперсій; б) гіпотезу про рівність середніх.

2. Вивчався вплив чорного і квітневого пара на урожай жита. Дослідження тривали 10 років. Враховувалася маса 1000 зерен в грамах. Результати досліджень:

Роки	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936
по чорному пару	31.1	24	24.6	28.6	29.1	30.1	25.4	27.2	29.8	22.8	29.2
по квітневому пару	31.6	24.2	24.8	19.1	29.9	31	26.3	31.1	19.8	23.4	31.6

Чи можна вважати, що урожай жита по квітневому пару значно вище, ніж по чорному? Нехай $\alpha = 0.05$.

Варіант №7.

1. З продукції одного верстата довільно вибирають 25 виробів, вимірюють їх діаметри і обчислюють значення вибіркового середнього $m^* = 42,972$ мм. За технічними умовами верстат налаштовується на номінальний розмір 43 мм. Контрольована ознака має нормальний розподіл, $\sigma = 0,01$ мм. Чи забезпечує верстат заданий номінальний розмір? Нехай $\alpha = 0.05$.

2. Зміна врожайності при застосуванні одного з видів передпосівної обробки насіння характеризується наступними даними (у центнерах з гектара):

Рік	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
Необроблене насіння	20	17.9	20.6	22	21.4	23.8	21.4	19.8	18.4	19.6	18.7
Оброблене насіння	22.1	18.5	19.4	22.1	21.7	24.9	21.6	20.3	18.3	18.9	19.4

Чи можна вважати, що передпосівна обробка збільшує врожайність?
Нехай $\alpha = 0.05$.

Варіант №8.

З великої партії резисторів одного типу і номіналу, випадковим чином відібрані 27 штук. Вибіркове середнє величини опору при цьому виявилося рівним $m^* = 12.3$ кОм. Використовуючи двосторонній критерій при $\alpha = 0.05$, перевірити гіпотезу про те, що вибірка взята з партії з номіналом 11.5 кОм, якщо:

- дисперсія величини опору відома і дорівнює 6 кОм²;
- дисперсія величини опору невідома, а вибіркова дисперсія дорівнює 8.25 кОм .

2. Вміст нікотину (в мг) для 2 марок сигарет характеризується такими даними:

Марка А	24	25	28	27	22	26	24	27	25	29	24	28	27
Марка В2	27	23	25	23	28	24	23	29	28	22	26	20	23

Чи вказують ці результати на розходження в утриманні нікотину в сигаретах цих марок? Нехай $\alpha = 0.1$.

Варіант №9.

1. Точність роботи автомата перевіряється за дисперсією контрольованого розміру виробів, яка не повинна перевищувати 0.15мм². За пробою з 25 випадково відібраних виробів обчислена оцінка дисперсії: $D^* = 0.25$ мм². Чи забезпечує верстат необхідну точність? Передбачається, що розмір виробу – нормально розподілена випадкова величина. Нехай $\alpha = 0.05$.

2. У польових транзисторів з 2-х партій, виготовлених із застосуванням різної технології, вимірювався диференціальний опір каналу R_i . Результати вимірювань (в мікроомах):

Технологія А	0.01	0.02	0.12	0.3	0.29	0.15	0.21	0.18	0.27	0.3	0.18
Технологія В	0.15	0.07	0.25	0.15	0.22	0.18	0.18	0.22	0.23	0.27	0.26

Чи впливає технологія виготовлення на величину диференціального опору каналу R_i ? Нехай $\alpha = 0.05$.

Варіант №10.

1. При застосуванні певної процедури, в якій перевіряється коефіцієнт тертя шини по мокрому асфальту, встановлено, що дисперсія результатів вимірювань цього коефіцієнта становить 0.1. Вибіркове значення дисперсії, обчислене за результатами 25 вимірювань коефіцієнта тертя, виявилось рівним 0.2. Використовуючи двосторонній критерій, перевірити гіпотезу про те, що дисперсія результатів вимірювань коефіцієнта тертя дорівнює 0.1 при $\alpha = 0.1$.

2. На Всеукраїнському конкурсі фірм-виробників молочних продуктів одним із критеріїв вибору був термін придатності товарів. Дані двох фіналістів наведено у таблиці:

Число днів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ласуня	3	2.5	3.5	2	4	1.5	3.0	1.0	4.0	3.5	2.5	3.0
Президент	3.5	2.5	4.0	1.5	3.0	2.0	2.5	2.5	3.0	2.5	3.5	4.0

Хто переможе у цьому конкурсі?

Варіант №11.

1. Перша вибірка містить 14 деталей. Середній розмір діаметра валків по цій вибірці = 182 мм. Друга вибірка містить 9 деталей. Середній розмір діаметра валків по другій вибірці = 185 мм. Розмір діаметра валків має нормальний закон розподілу з дисперсією $D_1^* = 5\text{мм}^2$ – по першій вибірці і

$D_2^* = 7 \text{ мм}^2$ – по другій вибірці. Чи суттєві відмінності між двома вибірками? Нехай $\alpha = 0.05$.

2. Двом групам випробовуваних пропонувалося провести впізнання трьох накреслень цифри 5. Результати експерименту (час впізнання в секундах):

Група 1	17	20	14	15	22	16	12	13	17	21	19	12
Група 2	21	12	16	13	18	15	20	15	16	17	13	25

Чи можна вважати, що результати дослідів різні? Нехай $\alpha = 0.1$.

Варіант №12.

1. Стверджується, що кульки, виготовлені верстатом-автоматом, мають середній діаметр $d_0 = 10$ мм. Використовуючи односторонній критерій ($\alpha = 0.05$), перевірити цю гіпотезу, якщо у вибірці з $n = 16$ кульок середній діаметр дорівнював 10.3 мм, вважаючи що: а) дисперсія відома і дорівнює $D = 1 \text{ мм}^2$; б) оцінка дисперсії, визначена за вибіркою, $D^* = 1.21 \text{ мм}^2$.

2. У процесі підготовки вибіркового обстеження якості імпортованих кондитерських виробів було проведено пробну перевірку 11 ящиків для збору інформації про варіації їх ваги різними пакувальниками:

Пакувальник 1	Пакувальник 2
540	530
520	530
550	540
510	520
530	530
560	500
520	570
500	510
510	530
540	520
570	560

Чи однаково фасуються кондитерські вироби? Нехай $\alpha = 0.05$.

Контрольні питання

1. Дати визначення статистичної гіпотези.
2. Визначити поняття простої та складної, параметричної та непараметричної гіпотез. Навести приклади.
3. Нульова та альтернативна гіпотези. Статистика критерію. Статистичний критерій.
4. Критична область та область прийняття основної гіпотези. Рівень важливості.
5. Двосторонній, односторонній: правосторонній та лівосторонній критерії. Нерівності для критичної галузі.
6. Схема перевірки простої параметричної гіпотези.
7. Статистичні помилки першого та другого роду.

Лабораторна робота № 2

**Перевірка непараметричних статистичних гіпотез
про однорідні ГС**

Мета роботи: придбання практичних навичок у побудові статистики та перевірці непараметричних статистичних гіпотез при невідомому законі розподілу випадкової величини.

Теоретична довідка

Непараметричні методи перевірки статистичних гіпотез

Загальна характеристика

При обробці результатів спостережень закон розподілу генеральної сукупності часто є невідомим або відрізняється від нормального, тому застосування параметричних методів вважається не обґрунтованим. У таких випадках застосовують методи, що не залежать від закону розподілу ГС. Такі методи називають **непараметричними**. При їх застосуванні використовують не чисельні значення елементів вибірки, а структурні властивості вибіркової сукупності (відношення порядку між її елементами).

Потужність непараметричних методів менша, ніж потужність їх параметричних аналогів (втрачається частина інформації, що міститься у вибірці). Перевагою вільних від розподілу методів є їх розрахункова простота.

Як правило, встановлюють наступний порядок використання непараметричних критеріїв. Якщо розподіл випадкової величини невідомий, то такі критерії є єдино можливими для перевірки різних статистичних гіпотез. Якщо розподіл відомий, то рекомендується спочатку застосувати прості в обчислювальному відношенні непараметричні критерії. При відхиленні ними гіпотези, що перевіряється, подальше уточнення не потрібно. Якщо непараметричний критерій не відхиляє гіпотезу, необхідно здійснити її подальшу перевірку одним з більш точних параметричних критеріїв.

Велика група непараметричних критеріїв використовується для перевірки гіпотези про належність двох вибірок: $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ і $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ одній і тій ж генеральній сукупності, тобто про те, що функції розподілу двох генеральних сукупностей рівні: $F_X = F_Y$. Такі генеральні сукупності називають **однорідними**.

Необхідна умова однорідності: рівність характеристик положення та (або) розсіювання.

Знаковий критерій Вілкоксона

Застосовується для перевірки нульової гіпотези H_0 : про однорідність генеральних сукупностей за попарно пов'язаними вибірками, що розподілені за законом розподілу, відмінним від нормального.

Дано: дві вибірки однакового обсягу: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Обмеження:

- 1) обидві вибірки прості, однакового обсягу, $n > 10$;
- 2) вибірки пов'язані, тобто елементи (x_i, y_i) відповідають одному і тому ж об'єкту, але вимірювання зроблені в різні моменти (наприклад, до і після обробки).

Нульова гіпотеза H_0 : X та Y з однієї генеральної сукупності або з однорідних ГС.

Алгоритм критерію Вілкоксона для вибірок однакового обсягу:

- 1) обчислити $d_i = x_i - y_i$, якщо $d_i = 0$, то пара (x_i, y_i) викреслюється, нехай N – кількість ненульових різниць;
- 2) впорядкувати ненульові модулі різниць пар вибірки за зростанням $|d_i|$;
- 3) кожному елементу ряду поставити у відповідність його номер у ряду – ранг:

– якщо $d_{i^*} = \min_{i=1, \dots, N} |d_i|$, то $\text{rang}_{i^*} = 1$;

- якщо $\mathbf{d}_i \neq \mathbf{d}_{i+1}$, то $\mathbf{rang}_{i+1} = \mathbf{rang}_i + 1$;
- якщо кілька елементів ряду збігаються за величиною, то кожному з них присвоїти ранг, що дорівнює середньому арифметичному їх номерів;
- 4) призначити рангам $\mathbf{rang}_i$ знаки відповідних різниць $\mathbf{d}_i$;
- 5) розрахувати суму позитивних рангів:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^k \mathbf{rang}_i, \mathbf{rang}_i > 0 ;$$

- 6) $\mathbf{T}$ – нормально розподілена випадкова величина з параметрами:

$$\mathbf{m}_T = \frac{n(n+1)}{4}, \sigma_T = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}};$$

- 7) статистика критерію має вигляд:

$$\mathbf{z} = \frac{\mathbf{T} - \mathbf{m}_T}{\sigma_T} \approx N(0, 1);$$

- 8) нульова гіпотеза приймається на рівні значущості α , якщо вибіркове значення статистики задовольняє одній з нерівностей:

- двосторонній критерій:

$$|\mathbf{z}^*| < \mathbf{u}_{1-\frac{\alpha}{2}};$$

- правосторонній критерій:

$$\mathbf{z}^* < \mathbf{u}_{1-\alpha};$$

- лівосторонній критерій:

$$\mathbf{z}^* > \mathbf{u}_{\alpha}.$$

Якщо нульова гіпотеза приймається, то це означає, що вона не протирічить вибірквим даним на заданому рівні значущості і відмінності між $\mathbf{X}$ та $\mathbf{Y}$ не суттєві або не істотні.

Приклад 1.

На підставі оцінок 13 студентів з 2-х іспитів визначити: чи істотно відрізняється успішність з цих дисциплін.

Таблиця 1.

x_i	y_i	d_i	rang_i	rang_i та знак	
64	70	-6	3.5	-3.5	
73	89	-16	10	-10	
44	43	1	1		1
87	77	10	6		6
62	76	-14	7.5	-7.5	
42	47	-5	2	-2	
45	39	6	3.5		3.5
72	79	-7	5	-5	
50	36	14	7.5		7.5
105	118	-16	10	-10	
35	19	16	10		10
45	45	0			
48	30	18	12		12

Розв'язання.

H_0 : X та Y з однієї ГС або з однорідних ГС (успішність студентів з іспитів за двома дисциплінами є однаковою).

H_1 : X та Y з різних ГС або з неоднорідних ГС (успішність студентів з іспитів за двома дисциплінами є різною).

Розрахунки за алгоритмом знакового методу Вілкоксона:

$$\alpha = 0.1, u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645;$$

$$T = 1 + 6 + 3.5 + 7.5 + 10 + 12 = 40;$$

$$m_T = \frac{12 * 13}{4} = 39;$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{24}} \approx 12.75;$$

$$z^* = \frac{40 - 39}{12.75} \approx 0.08.$$

Для двостороннього критерію нерівність для області прийняття основної гіпотези має вигляд: $|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Оскільки рівень значущості $\alpha = 0.01$, то табличне значення квантилю нормального розподілу становить $u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.95} = 1.645$. Отже, основна гіпотеза приймається $0.08 < 1.645$, розбіжності у оцінках 13 студентів з іспитів за двома дисциплінами не істотні на цьому рівні значущості.

Критерій Вілкоксона-Манна-Уїтні

Критерій Вілкоксона-Манна-Уїтні застосовується для порівняння двох незалежних вибірок обсягу n_1 та n_2 , перевіряє нульову гіпотезу H_0 , яка стверджує, що вибірки отримані з однорідних генеральних сукупностей і мають рівні середні та медіани.

Дано: дві вибірки різного обсягу: $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$ та $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2})$.

Обмеження:

- 1) обсяги вибірок можуть бути різними, $n_1 \neq n_2$;
- 2) накладаються обмеження на потужності вибірок $n_1 \geq 8, n_2 \geq 8$.

Нульова гіпотеза H_0 : X та Y з однієї генеральної сукупності або з однорідних ГС.

Алгоритм критерію Вілкоксона-Манна-Уїтні:

- 1) за об'єднаною вибіркою побудувати варіаційний ряд;
- 2) кожному елементу ряду поставити у відповідність його номер в ряду – ранг, якщо кілька елементів ряду збігаються за величиною, то кожному з них присвоїти ранг, рівний середньому арифметичному їх номерів, отже

останній елемент у ранжируванні об'єднаній вибірці повинен мати ранг $n_1 + n_2$;

3) визначити значення: R_1 – сума рангів 1-ої вибірки, R_2 – сума рангів 2-ої вибірки;

4) обчислити величини:

$$\omega_1 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1,$$

$$\omega_2 = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2;$$

5) перевірити:

$$\omega_1 + \omega_2 = n_1 \cdot n_2;$$

6) знайти значення:

$$\omega = \min(\omega_1, \omega_2);$$

7) статистика критерію буде мати наступний вигляд:

$$z = \frac{\omega - \frac{1}{2}n_1 \cdot n_2}{\sqrt{\frac{1}{12}n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}}$$

та приблизно стандартний нормальний закон розподілу: $\approx N(0, 1)$;

8) нульова гіпотеза приймається на рівні значущості α , якщо вибіркове значення статистики задовольняє однієї з нерівностей:

– двосторонній критерій:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}};$$

– правосторонній критерій:

$$z^* < u_{1-\alpha};$$

– лівосторонній критерій:

$$z^* > u_{\alpha}.$$

Якщо нульова гіпотеза приймається, то це означає, що вона не протирічить вибірквим даним на заданому рівні значущості і відмінності між X та Y не суттєві або не істотні.

Приклад 2.

Із двох партій діодів взяли по одній вибірці, $n_1 = 7$, $n_2 = 8$. Виміряли напругу пробою, дані звели в таблицю 2.

Таблиця 2.

X 1 партія	39	50	61	67	40	40	54	-
Y 2 партія	60	53	42	41	40	54	63	69

Чи однакова якість двох партій?

Розв'язання.

H_0 : **X** та **Y** з однієї ГС або з однорідних ГС (якість двох партій діодів є однаковою).

H_1 : **X** та **Y** з різних ГС або з неоднорідних ГС (якість двох партій діодів є різною).

Побудувати об'єднану вибірку обсягом $n_1 + n_2 = 15$. На її базі записати варіаційний ряд та проставити ранги. В таблиці 3 елементи першої вибірки в об'єднаній відзначені рисою угорі.

Таблиця 3.

Елемент	39	40	40	40	41	42	50	53
Ранг	1	3	3	3	5	6	7	8

Продовження таблиці 3

Елемент	54	54	60	61	63	67	69
Ранг	9.5	9.5	11	12	13	14	15

Розрахунки за критерієм Вілкоксона-Манна-Уїтні:

$$R_1 = 49.5, R_2 = 70.5;$$

$$\omega_1 = 7 \cdot 8 + \frac{7 \cdot (7 + 1)}{2} - 49.5 = 34.5;$$

$$\omega_2 = 7 \cdot 8 + \frac{8 \cdot (8 + 1)}{2} - 70.5 = 21.5.$$

Перевірка: $\omega_1 + \omega_2 = 30.5 + 70.5 = 56 = n_1 \cdot n_2$.

Значення ω : $\omega = \min(\omega_1, \omega_2) = 21.5$.

Статистика критерію:

$$z = \frac{\omega - \frac{1}{2} n_1 \cdot n_2}{\sqrt{\frac{1}{12} n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 + 1)}} =$$

$$= \frac{21.5 - \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot 7 \cdot 8 \cdot (7 + 8 + 1)}} = -0.75; \alpha = 0.1, u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645.$$

Для двостороннього критерію нерівність для області прийняття основної гіпотези має вигляд: $|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Отже, основна гіпотеза приймається $|-0.75| < 1.645$.

Вибіркове значення статистики критерію за модулем менше, ніж критичне, отже, основна гіпотеза приймається, як така, що не протирічить експериментальним даним. Це значить, що на заданому рівні значущості якість двох партій однакова, тобто вони взяті з однієї або однорідних ГС.

Критерій Зігеля-Тьюки

Критерій Зігеля-Тьюки є непараметричним, рангових критерієм, призначеним для перевірки належності двох незалежних вибірок до загальної генеральної сукупності або до двох генеральних сукупностей з однаковими характеристиками розсіювання.

Дано: дві вибірки в загальному випадку різного обсягу: $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n_1})$ та $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_2})$.

Обмеження:

- 1) обсяги вибірок можуть бути різними, $n_1 \neq n_2$;
- 2) обмеження на потужності вибірок $n_1 \geq 10, n_2 \geq 10$.

Нульова гіпотеза H_0 : X та Y з однієї генеральної сукупності або з однорідних ГС з однаковими дисперсіями.

У разі наявності відомостей про рівність середніх, гіпотеза може висуватися на належність вибірок однієї і тієї ж генеральної сукупності.

Алгоритм критерію Зігеля-Тьюки:

- вибірку меншого обсягу визначити, як другу вибірку: $n_1 \geq n_2$;
- об'єднану вибірку обсягом $n_1 + n_2$ упорядкувати в порядку зростання і відзначити приналежність кожного елемента до тієї чи іншої вибірки;
- розставити ранги за таким правилом: найменшим значенням присвоїти ранг 1, двом найбільшим значенням назначити ранги 2 і 3, ранги 4 та 5 отримують наступні найменші значення і т.д., схема розстановки рангів має вигляд: 1, 4, 5, 8, 9, ..., 7, 6, 3, 2;
- кожному з співпадаючих за величиною елементів присвоїти ранг, рівний середньому арифметичному;
- для вибірки меншого обсягу (n_2) підрахувати суму рангів R ;
- статистика критерію має вигляд:

$$z = \frac{\left| R - \frac{n_2 \cdot (n_1 + n_2)}{2} \right| - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot n_1 \cdot (n_1 + n_2)}} \approx N(0, 1);$$

- нульова гіпотеза про рівність дисперсій приймається на рівні значущості α , якщо вибіркове значення статистики задовольняє одній з нерівностей:

- двосторонній критерій:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}};$$

- правосторонній критерій:

$$z^* < u_{1-\alpha};$$

- лівосторонній критерій:

$$z^* > u_{\alpha}.$$

Завдання до лабораторної роботи

1. В якості завдання до лабораторної роботи вибрати задачу з лабораторної роботи №1, яка представлена двома вибірковими сукупностями. Сформулювати наведені в варіанті завдання в термінах теорії перевірки статистичних гіпотез.
2. Представити графічно по кожній задачі допустиму і критичну (критичні) області, керуючись наведеними в умові завдання рівнями значущості.
3. Вирішити завдання, перевібивши сформульовані гіпотези усіма відомими і допустимими для даного завдання непараметричними критеріями. Проаналізувати і порівняти результати. Відповіді сформулювати двома способами: щодо прийняття або відхилення основної гіпотези і щодо питань, поставлених в завданні.
4. Якщо обсяги вибірок різні, для можливого застосування знакового критерію Вілкоксона до визначити вибірку меншого обсягу значеннями, що збігаються з вибірковим середнім даної вибірки для вирівнювання потужностей вибірок.

Контрольні питання

1. Дати визначення непараметричної статистичної гіпотези.
2. Характеристика завдань про однорідні ГС.
3. Ранг, пов'язані ранги.
4. Сформулювати гіпотезу, що перевіряється, для критерію Вілкоксона та умови його застосування.
5. Алгоритм застосування критерію Вілкоксона щодо однорідних ГС.
6. Критерій Вілкоксона, Манна, Вітні, умови його застосування.
7. Алгоритм застосування критерію Вілкоксона, Манна, Вітні.

Лабораторна робота № 3

Перевірка параметричних гіпотез щодо параметра біноміального закону розподілу

Мета роботи: формування уявлень та практичних навичок у перевірці параметричних гіпотез про параметри біноміального розподілу.

Теоретична довідка

Перевірка гіпотез щодо параметра p біноміального розподілу

Перевірка гіпотез про параметр p біноміального розподілу:

– порівняння ймовірності «успіху» p в одному випробуванні із заданим p_0 ;

– порівняння ймовірностей «успіху» у двох серіях випробувань;

– порівняння ймовірностей «успіху» у кількох серіях випробувань.

–

Порівняння ймовірності з номіналом

По досить великому числу n незалежних випробувань, у кожному у тому числі ймовірність появи події постійна, але невідома, знайдено відносна частота m/n . Є підстави припускати, що невідома ймовірність дорівнює гіпотетичному значенню p_0 .

При заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу: невідома ймовірність p дорівнює гіпотетичній ймовірності p_0 .

Нульова гіпотеза: $H_0: p = p_0$.

Оскільки ймовірність оцінюється за відносною частотою, це завдання можна сформулювати таким чином: значимо чи не значимо розрізняються відносна частота (статистична ймовірність) та гіпотетична ймовірність.

У якості статистики критерію вибирають випадкову величину:

$$z = \frac{\frac{m}{n} - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0/n}} = \frac{p^* - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot q_0/n}}$$

$$q_0 = 1 - p_0.$$

Обмеження:

$$n > 50, p^* \cdot n > 5, n \cdot (1 - p^*) > 5.$$

Якщо нульова гіпотеза не протирічить експериментальним даним, статистика z має розподіл, що близький до стандартного нормального закону $N(0,1)$.

Область прийняття гіпотези H_0 для

а) двостороннього критерію $H_1: p \neq p_0$ визначається нерівністю:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

б) правостороннього критерію $H_1: p > p_0$ визначається нерівністю:

$$z^* < u_{1-\alpha}.$$

в) лівостороннього критерію $H_1: p < p_0$ визначається нерівністю:

$$z^* > u_{\alpha}.$$

Порівняння ймовірностей «успіху» у двох серіях випробувань

Зіставлення двох ймовірностей біноміальних розподілів

Нехай у двох генеральних сукупностях проводяться незалежні випробування; в результаті кожного випробування подія A може або з'явитися або не з'явитися. Позначимо невідому ймовірність появи події A першій сукупності через p_1 , а другий – через p_2 .

Припустимо, що у першій сукупності проведено n_1 випробувань, причому подія A з'явилося m_1 разів. Відносна частота появи події A у першій сукупності: $p_1^* = m_1/n_1$. Аналогічно, $p_2^* = m_2/n_2$.

Потрібно при заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу, яка полягає в тому, що p_1 та p_2 рівні: $H_0: p_1 = p_2$.

Оскільки ймовірності оцінюються за відносними частотами, завдання можна сформулювати так: значимо чи не значимо розрізняються відносні частоти: p_1^* та p_2^* .

Статистика критерія:

$$z = \frac{p_1^* - p_2^*}{\sqrt{p^*(1-p^*) \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$p^* = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}.$$

Якщо нульова гіпотеза не протирічить експериментальним даним, статистика **z** має розподіл, що близький до стандартного нормального закону **N(0,1)**.

Додаткові умови:

$$\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2} > 5.$$

Область прийняття гіпотези **H₀** для

а) двостороннього критерію **H₁: p₁ ≠ p₂** визначається нерівністю:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

б) правостороннього критерію **H₁: p₁ > p₂** визначається нерівністю:

$$z^* < u_{1-\alpha}.$$

в) лівостороннього критерію **H₁: p₁ < p₂** визначається нерівністю:

$$z^* > u_{\alpha}.$$

Порівняння ймовірностей «успіху» у кількох серіях випробувань

Зіставлення більш ніж двох ймовірностей біноміальних розподілів.

Нехай є **k** сукупностей, генеральні частки яких рівні відповідно: **p₁, p₂, ..., p_k**.

Необхідно перевірити нульову гіпотезу про рівність генеральних часток:
H₀: p₁ = p₂ = ... = p_k = p.

Для перевірки нульової гіпотези з цих сукупностей відібрано **k** незалежних вибірок досить великих обсягів: **n₁, n₂, ..., n_k**. Відносні частоти появи події **A** у першій сукупності: **p₁^{*} = m₁/n₁**. Аналогічно, **p₂^{*} =**

$m_2/n_2, \dots, p_k^* = m_k/n_k$. Доведено, що за справедливості нульової гіпотези та при $n \rightarrow \infty$ статистика критерію дорівнює:

$$\chi^2 = \frac{1}{p^*(1-p^*)} \cdot \sum_{i=1}^k n_i \left(\frac{m_i}{n_i} - p^* \right)^2$$

та має розподіл χ^2 із $k - 1$ ступенями свободи.

Як невідоме значення беруть найкращу оцінку для p , рівну відносній частоті, якщо усі з вибірок змішати в одну:

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^k m_i}{\sum_{i=1}^k n_i}.$$

Для перевірки нульової гіпотези зазвичай беруть правосторонню критичну область.

Нульова гіпотеза відкидається, якщо $\chi^2 > \chi_{\alpha, k-1}^2$, де $\chi_{\alpha, k-1}^2$ – критичне значення критерію, що визначається на рівні значущості α при $k - 1$ числі ступенів свободи.

Приклад 1.

Передбачається, що велика частина деталей містить 15% браку. Для перевірки з партії випадково відібрано 100 деталей, серед яких виявилось 10 бракованих. Вважається, що кількість бракованих деталей у партії має біноміальний розподіл.

Використовуючи двосторонній критерій, при $\alpha = 0.05$, перевірити гіпотезу про те, що в партії міститься 15% бракованих деталей.

Розв'язання.

За постановкою завдання основна гіпотеза:

$$H_0: p = p_0 = 0.15,$$

при альтернативній:

$$H_1: p \neq p_0 = 0.15.$$

Відносна частота:

$$p^* = 10/100 = 0.10.$$

Виконуються такі обмеження:

$$n > 50, n \cdot p^* = 10 > 5,$$

$$n \cdot (1 - p^*) = 9 > 5.$$

Для перевірки нульової гіпотези $H_0: p = p_0$ можна використовувати статистику:

$$z = \frac{p^* - p_0}{\sqrt{p_0 \cdot (1 - p_0)/n}}.$$

Вибіркове значення статистики критерію:

$$z^* = \frac{0.01 - 0.15}{\sqrt{\frac{0.15 \cdot 0.85}{100}}} \approx -1.4.$$

За таблицею функції розподілу стандартного нормального закону зворотним інтерполюванням знаходимо квантиль нормального розподілу:

$$u_{0.975} = 1.96.$$

Фактичне значення статистики менше критичного:

$$|-1.4| < 1.96$$

належить області прийняття нульової гіпотези. Припущення проте, що в партії міститься 15% браку узгоджується з експериментальними даними.

Приклад 2.

Контрольну роботу з вищої математики за індивідуальними варіантами виконували студенти двох груп першого курсу. У першій групі було запропоновано 105 завдань, з яких правильно вирішено 60, у другій групі зі 140 запропонованих завдань правильно вирішено 69.

На рівні значущості $\alpha = 0.1$ перевірити гіпотезу про відсутність суттєвих відмінностей у засвоєнні навчального матеріалу студентами обох груп.

Розв'язання.

Нульова гіпотеза:

$$H_0: p_1 = p_2 = p,$$

частки вирішених завдань для студентів першої та другої груп є однаковими.

Альтернативна гіпотеза:

$$H_1: p_1 \neq p_2.$$

За умовами завдання:

$$m_1 = 60, n_1 = 105,$$

$$m_2 = 69, n_2 = 140.$$

При справедливості нульової гіпотези найкраща оцінка для p :

$$p^* = \frac{60 + 69}{105 + 140} = \frac{129}{245} = 0.527.$$

Вибіркові частки вирішених завдань кожної групи дорівнюють:

$$p_1^* = \frac{60}{105} = 0.571,$$

$$p_2^* = \frac{69}{140} = 0.493.$$

Статистика критерію має вигляд:

$$z^* = \frac{0.571 - 0.493}{\sqrt{0.527(1 - 0.527) \cdot \left(\frac{1}{105} + \frac{1}{140}\right)}} = 1.21.$$

При конкуруючій гіпотезі на нерівність вибираємо критичну двосторонню область, межі якої визначаємо так:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

$$u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{0.01}{2}} = u_{0.95} = 1.645.$$

Фактичне значення критерію менше критичного:

$$1.21 = |z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645.$$

Основна гіпотеза $H_0: p_1 = p_2 = p$ приймається, отже отримані дані не суперечать гіпотезі про однаковий рівень засвоєння навчального матеріалу студентами обох груп.

Приклад 3.

За умовою попереднього прикладу 2 на рівні значущості $\alpha = 0.05$ з'ясувати, чи можна вважати, що відмінності у засвоєнні навчального матеріалу студентами чотирьох груп першого курсу є суттєвими.

Розв'язання.

Нульова гіпотеза $H_0: p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p$.

Додаткові умови для третьої групи:

$$m_3 = 63, n_3 = 125,$$

для четвертої групи:

$$m_4 = 105, n_4 = 160.$$

Обчислимо оцінку p^* :

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i}{\sum_{i=1}^4 n_i} = \frac{60 + 69 + 63 + 105}{105 + 140 + 125 + 160} = 0.553.$$

Вибіркові частки вирішених завдань кожної групи:

$$p_1^* = 0.571, p_2^* = 0.493, \\ p_3^* = 63/125 = 0.504, p_4^* = 105/160 = 0.656.$$

Вибіркове значення статистики критерію:

$$\chi^2 = \frac{1}{p^*(1-p^*)} \cdot \sum_{i=1}^4 n_i \left(\frac{m_i}{n_i} - p^* \right)^2 = 9.87.$$

За таблицею χ^2 -розподілу знаходимо критичне значення статистики:

$$\chi_{\alpha, k-1}^2 = \chi_{0.05, 3}^2 = 7.82.$$

Вибіркове значення статистики потрапляє в критичну область:

$$\chi^2 = 9.87 > \chi_{\alpha, k-1}^2 = 7.82.$$

Нульова гіпотеза відкидається, отже відмінність у засвоєнні матеріалу у чотирьох групах істотна на рівні значимості: $\alpha = 0.05$.

Нульова гіпотеза відкидається, як така, що суперечить експериментальним даним.

Завдання до лабораторних робіт

1. За заданим у лабораторній роботі варіантом перевірити гіпотезу про параметр біномного розподілу всіма відомими способами та допустимими для цього завдання критеріями.
2. Проаналізувати рішення та зіставити результати.

Варіанти завдань

Варіант №1.

Кількість бракованих виробів у партії має перевищувати 5%. В результаті контролю у 100 деталях із цієї партії виявлено 6 бракованих. Чи можна вважати, що відсоток шлюбу перевищує припустимий за $\alpha = 0.01$?

Варіант №2.

При дослідженні 50 корпусів мікросхем випадковим чином вибраних з великої партії цих виробів виявилось, що 6 їх не мають необхідної міцності. Чи погоджуються ці дані із твердженням, що ця партія містить більш ніж 90% міцних корпусів. Нехай $\alpha = 0.05$.

Варіант №3. З добової продукції цеху випадково відібрано та перевірено 200 приладів, при цьому 16 приладів визнано непридатними до експлуатації. Чи можна вважати, що сторічна продукція цеху складе 90%, якщо $\alpha = 0.1$.

Варіант №4. Два преси штампують деталі одного найменування. З партії деталей, виготовлених першим пресом, перевірено 1000 деталей, 25 з яких виявились непридатними. З 800 деталей, виготовлених другим пресом, непридатними виявились 36 деталей. Чи погоджуються ці результати з припущенням про рівність частки шлюбу продукції двох пресів, при $\alpha = 0.1$?

Варіант №5. Для вивчення ефективності профілактичних ліків проти алергії обстежилися дві групи людей, схильних до цього захворювання. Результати обстеження такі:

Приймали ліки	Не приймали ліки
---------------	------------------

Захворіли	Не захворіли	Захворіли	Не захворіли
3	172	32	168

Чи ці результати показують ефективність ліків, якщо рівень значущості: $\alpha = 0.09$.

Варіант №6. У 105 дослідів подія А сталася 42 рази. Повторна серія дослідів складалася зі 195 дослідів, причому подія сталася 85 разів. Чи можна вважати, що ймовірність події А в обох серіях, та сама, якщо результати дослідів незалежні. Нехай $\alpha = 0.01$.

Варіант №7. Стверджується, що результат дії ліків залежить від способу застосування. Перевірити це твердження за $\alpha = 0.05$ за такими даними:

Результат	Спосіб застосування	
	А	В
Несприятливий	11	17
Сприятливий	20	23

Варіант №8. Ставлення глядачів до включення однієї з передач у програму виразилося такими даними:

Стать	Позитивне	Негативне
Чоловіки	14	26
Жінки	29	51

Можна вважати, що ставлення до включення даної передачі в програму не залежить від статі глядача. Нехай $\alpha = 0.1$.

Варіант №9. Зміна продуктивності праці на підприємстві під час проведення заходів А та В виражається такими даними:

Продуктивність	Захід	
	А	В
Змінилася	34	47
Не змінилася	22	37

Чи можна вважати, що проведення цих заходів не впливає на продуктивність праці? Нехай $\alpha = 0.1$.

Варіант №10. Наведено результати опитування 100 студентів перших двох курсів на запитання "Чи вважаєте ви, що куріння заважає навчанню?".

Відповідь	Курс	
	1	2
Ні	15	10
Так	0	30

Чи ці дані підтверджують припущення про те, що ставлення до куріння студентів різних курсів по-різному. Нехай $\alpha = 0.01$.

Варіант №11. Для визначення залежності кольору волосся від їхнього місця проживання було обстежено три групи людей з районів А, В і С. Чи існує наведені нижче результати обстеження про залежність кольору волосся мешканців від їхнього місця проживання? Нехай $\alpha = 0,05$.

Район	Колір волосся		
	Світлий	Темний	Разом
А	9	9	18
В	6	21	27
С	15	20	35

Варіант №12. Передбачається, що застосування нової технології у виробництві мікросхем призведе до збільшення виходу придатної продукції. Результати контролю двох партій продукції, виготовлених за новою та старою технологією, наведені нижче:

Вироби	Стара технологія	Нова технологія
Придатні	140	185
Непридатні	10	15
Разом	150	200

Чи ці результати підтверджують припущення про збільшення виходу придатної продукції? Прийняти $\alpha = 0,05$.

Варіант №13. Досліджуються 2 виробничі процеси виготовлення поршневих кілець. Перевірити гіпотезу про рівність відсотка шлюбу обох процесах за такими даними (при $\alpha = 0.01$):

Кільця	Процес	
	1	2
Придатні	95	49
Браковані	5	2

Контрольні питання

1. Критерій перевірки гіпотези щодо порівняння параметра біномного розподілу з номіналом.
2. Критерій перевірки гіпотези про зіставлення двох ймовірностей біномних розподілів.
3. Критерій перевірки гіпотези про зіставлення більш ніж двох ймовірностей біномних розподілів.

Лабораторна робота № 4

Перевірка однорідності вибіркової сукупності (критерій серій)

Мета роботи: придбання практичних навичок у використанні непараметричних критеріїв для перевірки однорідності вибіркової сукупності.

Теоретична довідка**Критерій серій**

Критерій серій застосовується для перевірки гіпотези, яка стверджує, що вибірка однорідна, тобто елементи вибірки отримані випадковим чином і незалежні.

Дано вибірка елементів: $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Нульова гіпотеза H_0 : елементи вибірки отримані випадковим чином і незалежні.

Обчислення статистики критерію:

- 1) побудувати варіаційний ряд: $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_{n-1}^* \leq x_n^*$;
- 2) за побудованим варіаційним рядом знайти медіану h_x^* :
 - $h_x^* = x_{k+1}^*$, якщо $n = 2k + 1$;
 - $h_x^* = \frac{x_{k+1}^* + x_k^*}{2}$, якщо $n = 2k$;
- 3) кожному елементу вихідної вибірки x_i поставити у відповідність «+», якщо елемент $x_i > h_x^*$; «-», якщо елемент $x_i < h_x^*$;
- 4) якщо елемент вихідного ряду збігається з медіаною $x_i = h_x^*$, його необхідно видалити;
- 5) для отриманого ряду знаків ввести позначення:
 - n_1 – кількість «+»;
 - n_2 – кількість «-»;
 - N – число серій, серією в цьому наборі називається всяка послідовність, що складається з однакових знаків і обмежена протилежними знаками, або яка перебуває на початку або наприкінці набору: наприклад в

послідовності $+ - + + + - - - - + +$ міститься $N=5$ серій, при цьому $n_1 = 6$, $n_2 = 6$;

6) якщо $\min(n_1, n_2) > 20$, то для перевірки можна використовувати статистику критерію виду:

$$z = \frac{N - \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} - 1}{\sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - (n_1 + n_2))}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)}}} \approx N(0, 1);$$

7) нульова гіпотеза приймається на рівні значущості α , якщо вибіркове значення статистики задовольняє однієї з нерівностей:

– двосторонній критерій:

$$|z^*| < u_{1-\frac{\alpha}{2}};$$

– правосторонній критерій:

$$z^* < u_{1-\alpha};$$

– лівосторонній критерій:

$$z^* > u_{\alpha}.$$

Якщо нульова гіпотеза приймається на заданому рівні значущості, то в даному випадку це значить, що вибірка отримана випадковим чином і є однорідною.

Завдання до лабораторної роботи

За заданим варіантом перевірити вибіркву сукупність на випадковість та незалежність з використанням критерію серій. Як вихідні дані взяти одновимірну вибірку з першої лабораторної роботи за курсом ЕМПІ.

Контрольні питання

1. Дати визначення випадкової вибірки.
2. Визначити яку гіпотезу перевіряє критерій серій.
3. Дати визначення вибіркової медіани, навести алгоритм розрахунку цієї числової характеристики.

4. Навести визначення серії, алгоритм застосування критерію серій.

Рекомендована література

1. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – М.: Юнити-Дана, 2000. – 543с.
2. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений – М.: Наука, 1969. – 509с.
3. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.посіб. у 2-х час. – Ч. II. Математична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336с.
4. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 576с.
5. Статистика /Под ред. Ионина В.Г. – М.: Инфра, 2000. – 310с.
6. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики: Нав. посібник для студ. вищ. навч. закладів / За ред.. Р.К.Чорнея. –К.: МАУП, 2003.– 328с.