

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

СХЕМОКОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
з навчальної дисципліни
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
для студентів всіх форм навчання
спеціальностей 121 Інженерія програмного забезпечення
122 Комп'ютерні науки
123 Комп'ютерна інженерія
125 Кібербезпека та захист інформації
галузі знань 12 Інформаційні технології

Луцьк, 2023

Схемоконспект лекцій з навчальної дисципліни «Дискретна математика» для студентів всіх форм навчання галузі знань 12 Інформаційні технології / уклад. І.А. Назарова. Луцьк : ДонНТУ, 2023. – 385 с.

Дисципліна “**Дискретна математика**” має своєю метою формування знань та вмінь студентів напряму 12 Інформаційні технології в області теорії та засобів дискретної математики, що є фундаментальними для аналізу та розробки дискретних математичних моделей складних динамічних систем та процесів, засобів обчислювальної техніки, інформаційно-управляючих систем та систем штучного інтелекту.

Укладач: И.А. Назарова І.А. Назарова, доцент, к.т.н., доцент кафедри ПМІ
Рецензент: С.О. Ковальов С.О. Ковальов, доцент, к.т.н., доцент кафедри ЕТ
Відповідальний за випуск: Н.О. Маслова Н.О. Маслова, доц., к.т.н., зав. каф. ПМІ

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ, протокол №3 від 28.11.2023р.

Розглянуто на засіданні кафедри ПМІ, протокол №11 від 14.11.2023р.

© Донецький національний технічний університет, 2023

Зміст

❖ Вступ	5
❖ Тема 1. Теорія множини	17
1. Визначення множини та її елементів. Способи опису множин.	19
2. Відношення між множинами та між елементом та множиною.	29
3. Булеан. Теорема про потужність булеану.	41
4. Операції над множинами. Алгебра множин. Основні закони.	48
❖ Тема 2. Теорія відношень	73
1. Декартов добуток. Декартов ступінь.	75
2. Визначення n-арного відношення.	82
3. Бінарне відношення. Способи опису.	83
4. Операції над відношеннями.	93
5. Властивості бінарних відношень. Відношення еквівалентності та порядку.	97
6. Функціональні відношення.	127
❖ Тема 3. Булеві функції	134
1. Визначення функції алгебри логіки (ФАЛ) або булевої функції.	138
2. Способи опису ФАЛ.	143
3. ФАЛ від одного та двох аргументів.	152
4. Фіктивні аргументи ФАЛ.	163
5. Основні закони булевої алгебри.	171

Зміст

❖ Тема 4. Аналітичний запис ФАЛ	179
1. Канонічне аналітичне представлення ФАЛ. Основні визначення.	181
2. Диз'юнктивна (ДНФ) та кон'юнктивна нормальні форми (КНФ). Досконалі форми (ДДНФ та КДНФ). Алгоритми побудови.	182
3. Повні системи ФАЛ. Базиси. Мінімальні базиси. Універсальний базис.	208
❖ Тема 5. Мінімізація ФАЛ	220
1. Загальні визначення. Мінімальна та найкоротша нормальні форми. Мінімізація в класі ДНФ.	222
2. Мінімізація на одиничному n-вимірному кубі. Скорочена та мінімальна ДНФ.	225
3. Мінімізація на картках Карно (діаграмах Вейча).	248
4. Таблично-аналітична мінімізація методом Квайна-Мак-Класкі.	271
5. Мінімізація неповністю визначених ФАЛ.	298
❖ Тема 6. Комбінаторний аналіз	303
1. Комбінаторні правила додавання та множення.	305
2. Комбінаторні з'єднання без повторень елементів: перестановки розміщення сполучення.	316
3. Комбінаторні з'єднання з повторенням елементів: перестановки розміщення сполучення.	326
4. Принцип включення-виключення.	336
Перелік рекомендованої літератури.	383

ВСТУП

ДИСКРЕТНА АБО КОМП'ЮТЕРНА МАТЕМАТИКА

Доцент кафедри прикладної
математики і інформатики
Назарова Ірина Акопівна



Кафедра ПМІ



Дискретна математика – це частина сучасної абстрактної математики, предметом дослідження якої є дискретні об'єкти, на відміну від вищої математики, в основі якої лежать поняття межі і безперервності.

ЗАПИШИ



Курс «Дискретна математика»

для спеціальностей

- ❖ 121 Інженерія програмного забезпечення (ІПЗ)
- ❖ 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології (КН)
- ❖ 125 Кібербезпека (КІБ)

Лекції + Лаб. Роботи + Екзамен

Зміст курсу (теорія)

1

Теорія множини

2

Теорія відношень

3

Булеві функції та булева
алгебра

4

Основи комбінаторики

Лабораторні роботи

1

Множина, операції над множинами.
Співвідношення алгебри множини

2

Відношення на множинах

3

Булеві функції та
булева алгебра

4

Мінімізація булевих функцій

Організаційні питання

Допуск до іспиту – захист усіх
лабораторних робіт !!!!!



Квантор загальності або універсальний квантор

Позначення $\forall$

ЗАПИШИ



«для всіх», «для кожного»,
«для всякого» , «for all» або
«всі», «кожен», «всякий»,
«який би не був».

Перевернута латинська буква A
від англійського слова Any – всякий

Квантор існування або екзистенціальний квантор

ЗАПИШИ



Позначення $\exists$

«існує (бодай один)»,
«існують», «знайдеться (бодай
один)», «знайдуться», «деякі».

Перевернута латинська буква E від
англійського слова Existence – існування

Модифікації квантора існування

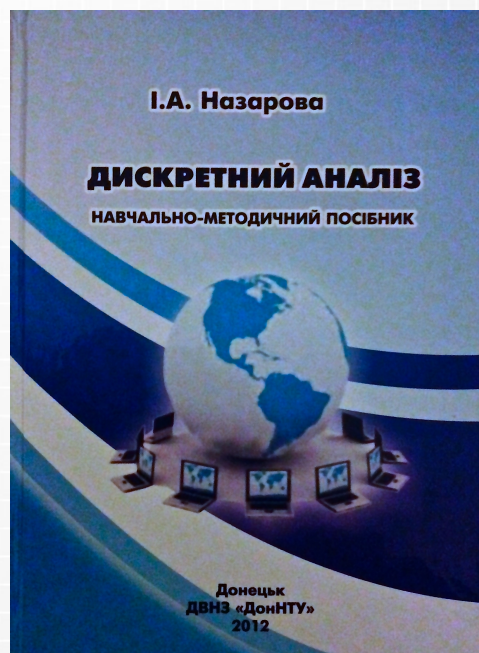
«не існує» $\bar{\exists}$ $\nexists$ $\neg\exists$

«існує єдиний» $\exists!$

ЗАПИШИ



Навчально-методичні матеріали за курсом «Дискретна математика»



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ



МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
ЗА КУРСОМ

«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
Частина 2

АВТОРИ: НАЗАРОВА І.А.
ТИХОНОВА О.А.

Покровськ-2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ



І.А. Назарова

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА
КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ



ДВНЗ «ДонНТУ»
2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»



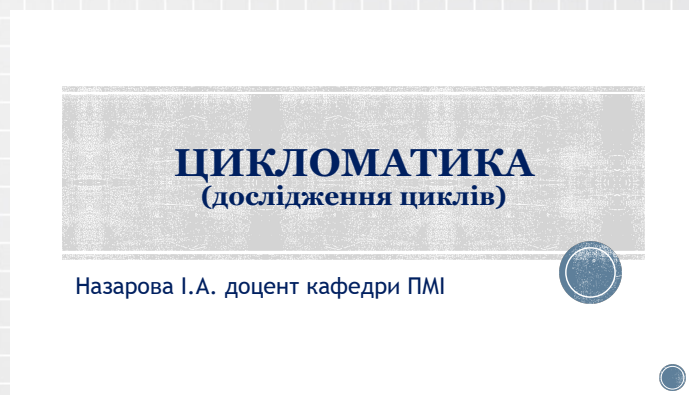
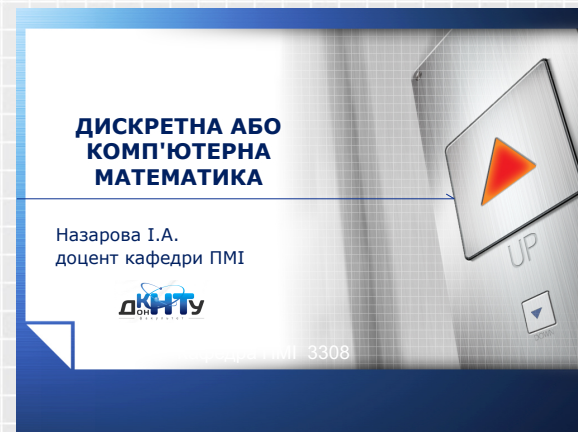
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
ДО ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ
ЗА КУРСОМ

«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
ЧАСТИНА 1

АВТОРИ: НАЗАРОВА І.А.
ТИХОНОВА О.А.

ПОКРОВСЬК-2016

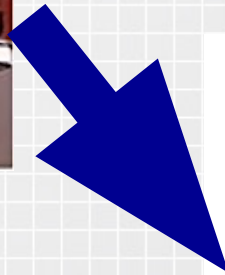
Навчальні матеріали Назарової І.А. за курсом «Дискретна математика»



ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА



ДОННТУ



Кафедра ПМИ



УСПІХІВ!!!!



Тема 1

Теорія множини

Доцент кафедри ПМІ ДонНТУ
Назарова Ірина Акопівна

Тема 1 Теорія множини

План

1. Визначення множини та її елементів. Способи опису множин.
2. Відношення між множинами та між елементом та множиною.
3. Булеан. Теорема про потужність булеану.
4. Операції над множинами. Алгебра множин. Основні закони.

Теорія множини

Загальні визначення

Поняття «множини» відноситься до категорії найбільш загальних, основоположних понять математики, тому замість строгого визначення зазвичай приймається деяке основне положення про множину та її елементи.

Синонімами терміну "множина" є слова "сукупність", "клас", "колекція тощо.



«Множина – це багато чого, що мислиться нами, як єдине ціле»

Засновником теорії множини, як математичної теорії, вважається німецький математик **Георг Кантор** (кінець 19 століття).

У якості робочого визначення приймається наступне твердження.

Множина – сукупність визначених об'єктів таких, що обов'язково розрізняються між собою та для будь-якого об'єкта можна встановити, належить він даній сукупності чи ні.

Той факт, що множина A складається з об'єктів $a_1, a_2, \dots, a_n$ й тільки з них, умовно записується таким чином:

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}.$$

Об'єкти $a_1, a_2, \dots, a_n$ називаються
елементами множини A .

- Для позначення множин використовуються зазвичай великі латинські літери, а для позначення елементів множини – малі літери.
- У разі необхідності при позначенні використовуються індекси.

Наприклад:

- 1) множини: $A, D, \dots, X, Y, A_1, A_2, \dots$
- 2) елементи: $a, b, \dots, x, y, z, a_1, a_2, \dots$

Позначення відомих математичних множин:

- $\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел;
- $\mathbf{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$ – відрізок натурального ряду чисел від **1** до **k**;
- $\mathbf{Z}$ – множина цілих чисел;
- $\mathbf{Q}$ – множина раціональних чисел;
- $\mathbf{R}$ – множина дійсних чисел;
- $\mathbf{C}$ – множина комплексних чисел.

Твердження " a є елементом множини A "
записується у вигляді $a \in A$ та читається, як:
 a належить множині A .

$\in$ - знак належності

Твердження " a не є елементом множини A "
записується у вигляді $a \notin A$ та читається, як:
 a не належить множині A .

Скінченна множина – множина, що складається із скінченної кількості елементів, у протилежному випадку – **нескінченна множина**.

$$\mathbf{A} = \{1,3,5,6\}, |\mathbf{A}| = 4; \mathbf{B} = \{a,b,c\}, |\mathbf{B}| = 3$$
$$1 \in \mathbf{A}; 4 \notin \mathbf{A}$$

Кількість елементів скінченної множини називається **потужністю (нормою)** та позначається: $|\mathbf{A}|$

Порожня множина – множина, що не містить жодного елемента.

Порожня множина позначається $\emptyset$ або $\{\}$.

Потужність порожньої множини дорівнює нулю:

$$|\emptyset| = 0.$$

Універсальна множина (універсум) – множина, що містить усі можливі елементи у заданому класі задач.

Універсальна множина позначається U .

Способи завдання множини

- 1) Перерахування елементів (підходить для скінченної множини із невеликою кількістю елементів). $A = \{1, 3, 5, 6, 889, -10\}$.
- 2) Завдання **характеристичної властивості**, тобто такої властивості, якою володіють всі елементи множини і тільки вони:

$$X = \{ x \mid x \text{ володіє властивістю } P \} = \\ = \{ x \mid P(x) \} = \{ x : P(x) \}.$$

$$B = \{ b \mid 1 > b > 5, b \in \mathbb{N} \};$$

$$A = \{ a \mid a - \text{парне число}, a \in \mathbb{Z} \}.$$

Відношення на множинах

- Відношення рівності множин
- Відношення нерівності множин
- Відношення нестроного включення
- Відношення строгого включення
- Відношення рівносильності

Рівність та нерівність множин

Множини **A** та **B** називаються **рівними** або **тотожно рівними**, тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних й тих же елементів (позначається $A = B$ або $A \equiv B$).

Множини **A** та **B** називаються **рівними** або **тотожно рівними**, тоді і тільки тоді, коли кожен елемент множини **A** є елементом множини **B** та навпаки; інакше множини **A** та **B** називаються **нерівними** (позначається $A \neq B$).

Підмножина

Множина **A** називається **підмножиною** множини **B**, якщо кожен елемент множини **A** є також елементом множини **B**:

$$\forall a \in A \Rightarrow a \in B$$

Позначення: $A \subseteq B$.

(**B** містить **A**, покриває, включає).

Ex.

$$X = \{1, 3, 5, 6\},$$

$$Y = \{6, 5, 3\}$$

$\subseteq$ - знак включення або
нестроного включення

$$Y \subseteq X$$

У тих випадках, коли одночасно мають місце співвідношення $A \subseteq B$ та $A \neq B$ (причому останнє особливо хочуть підкреслити в явному вигляді), тоді A називають **власною (строгою, істинною) підмножиною** множини B .

Позначення: $A \subset B$.

$\subset$ - знак строгого включення

Строге включення означає, що в B існує хоча б один елемент, який не належить A :

$$\exists x \in B : x \notin A$$

- Множини **A** і **B** називаються **рівними**, тоді і тільки тоді, коли одночасно $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$.

Властивості підмножин

- 1) Порожня множина є підмножиною будь-якої множини: $\emptyset \subseteq A$.
- 2) Будь-яка множина **A** є своєю підмножиною: $A \subseteq A$.
- 3) Будь-яка множина є підмножиною відповідного універсуму: $A \subseteq U$.
- 4) Порожню множину $\emptyset$ та саму множину **A** прийнято називати — **невласними** підмножинами **A**, а всі відмінні від них підмножини — **власними**.

Графічне представлення множини

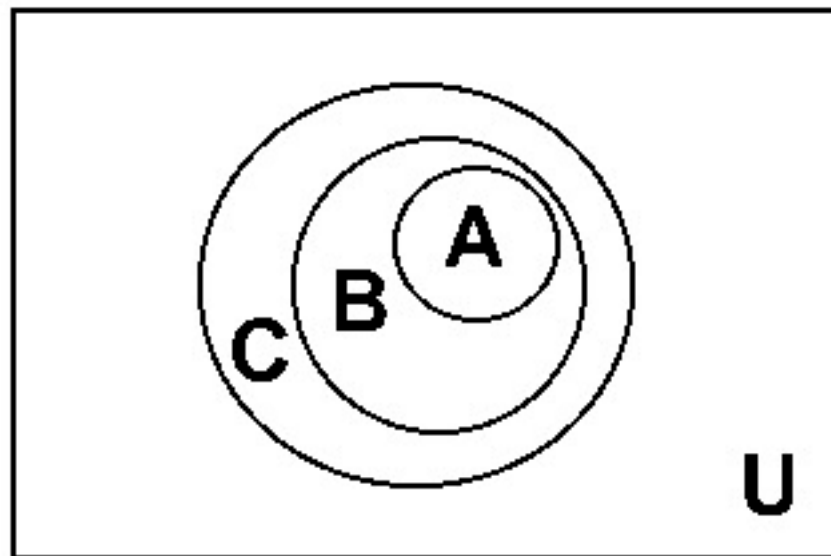
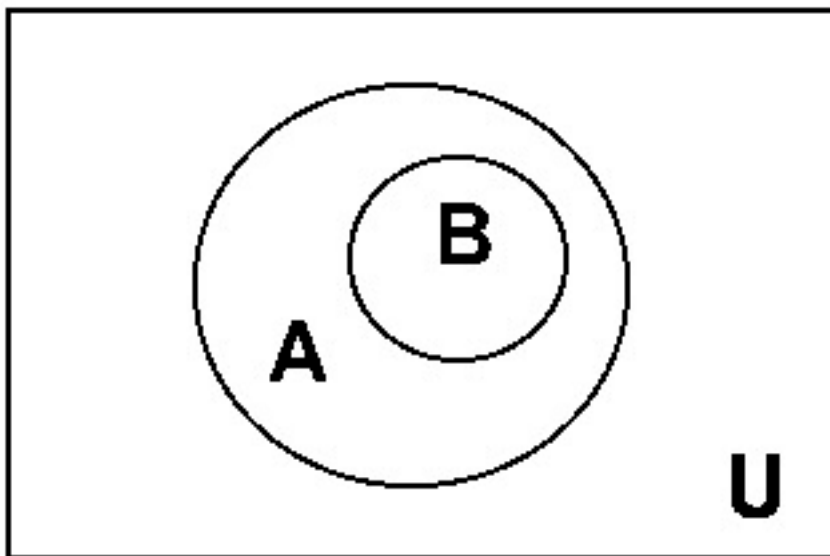
- Для наочного зображення співвідношень між підмножинами деякого універсуму використовують **кола Ейлера** (діаграми Венна).
- **Універсум** або універсальна множина зображується множиною точок на площині, що обмежені прямокутником.

- 
- Підмножини універсуму – у вигляді кіл (або будь-яких інших простих областей, обмежених замкнутою лінією) всередині цього прямокутника.
 - Множину-результат виділяють штрихуванням.
 - Штрихування може мати різний колір, нахил і щільність.

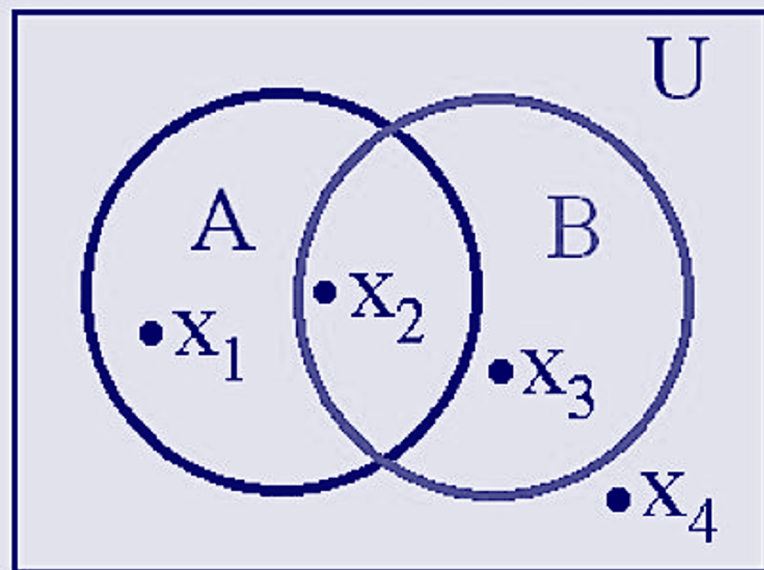
Приклади графічного зображення підмножин

$$B \subseteq A \subseteq U$$

$$A \subseteq B \subseteq C \subseteq U$$



Кола Ейлера для 2 множин A та B



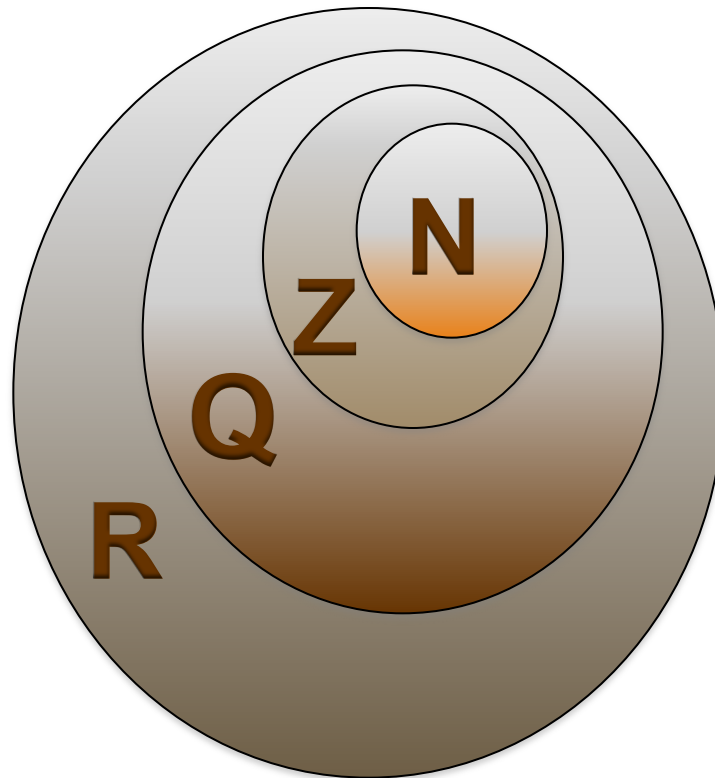
$$x_1 \in A, x_1 \notin B$$

$$x_2 \in A, x_2 \in B$$

$$x_3 \in B, x_3 \notin A$$

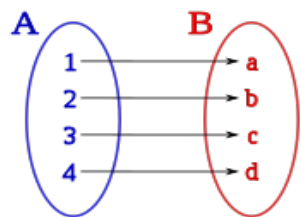
$$x_4 \notin A, x_4 \notin B$$

Співвідношення між відомими числовими множинами

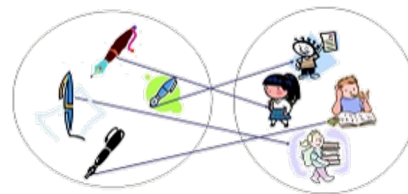


Взаємно-однозначна відповідність МНОЖИН

Взаємно-однозначна відповідність - відповідність між елементами двох множин A і B , при якій кожному елементу множини A поставлено у відповідність один і тільки один елемент множини B , а кожному елементу множини B відповідає один і тільки один елемент множини A , різним елементам множини A відповідають різні елементи множини B .



$$A \Leftrightarrow B$$



- 
- Дві множини називають **рівносильними**, якщо між ними можна встановити взаємно-однозначну відповідність.
 - Варіанти термінології: рівносильні множини «мають однакову потужність» або «рівнопотужні».

Булеан (множина-ступінь)

- Нехай A - скінченна множина, що містить n елементів:

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}, \quad |A|=n.$$

- Множина всіх, довільних підмножин скінченної множини A називається **булеаном** і позначається, як $P(A)$.

Приклади

- Нехай дана множина $A = \{a, b\}$.
- Знайти булеан множини A .

$$P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}.$$

- Чи є вірними співвідношення:

$a \in \{a, b\}$	+	$a \subseteq \{a, b\}$	—
$\emptyset \in \{a, b\}$	—	$\{a\} \in \{a, b\}$	—
$\emptyset \subseteq \{a, b\}$	+	$\{a\} \subseteq \{a, b\}$	+

- 1. Записати булеан для множини

$$X = \{1, \{1\}, \{1, 2\}\}.$$

$$|X| = 3, |P(X)| = 8.$$

$$\begin{aligned} P(X) = \{ & \emptyset, \\ & \{1\}, \{\{1\}\}, \{\{1, 2\}\}, \\ & \{1, \{1\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \\ & \{1, \{1\}, \{1, 2\}\} \end{aligned}$$

2. Записати булеан для множини

$$A = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$$

$$A = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \quad |A| = 2, \quad |P(A)| = 4$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, A\}.$$

Теорема про потужність булеана

Для будь-якої множини A , що складається з n елементів існує 2^n різних підмножин, тобто потужність булеану дорівнює:

$$| P(A) | = 2^n.$$

Доведення

- Нехай $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а B – є будь-яка підмножина A , тобто $B \subseteq A$.

Множині B поставимо у відповідність вектор C , що складається з нулів та одиниць:

- якщо елемент множини A увійшов у множину $B : a_i \in B$, тоді i -тий елемент вектору C дорівнює одиниці,
- якщо $a_i \notin B$, тоді i -тий елемент вектору C дорівнює нулю.

Наприклад, нехай $n=4$:

$$\blacksquare \mathbf{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} \Rightarrow \mathbf{C} = (1, 1, 0, 0)$$

$$\blacksquare \mathbf{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\} \Rightarrow \mathbf{C} = (1, 1, 0, 1)$$

$$\blacksquare \mathbf{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} \Rightarrow \mathbf{C} = (1, 1, 1, 1)$$

■ Таким чином, кожній підмножині $\mathbf{B}$ множини $\mathbf{A}$ відповідає певний єдиний вектор $\mathbf{C}$ і навпаки, тобто підмножин множини $\mathbf{A}$ рівно стільки, скільки векторів $\mathbf{C}$.

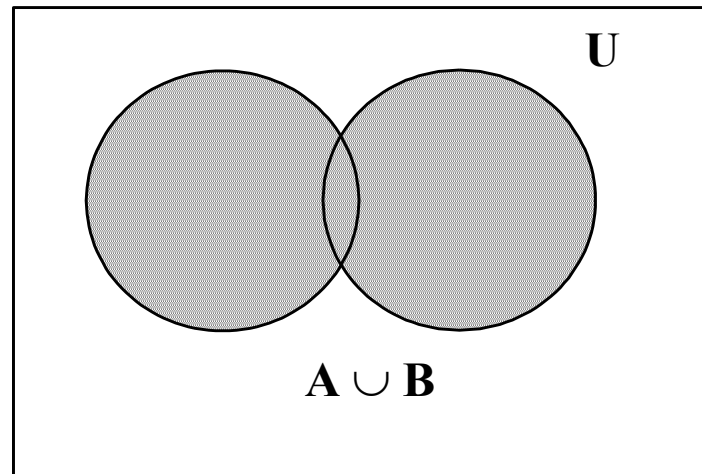
■ Загальна кількість таких послідовностей - це число різних двійкових векторів довжини n :

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n.$$

Операції над множинами

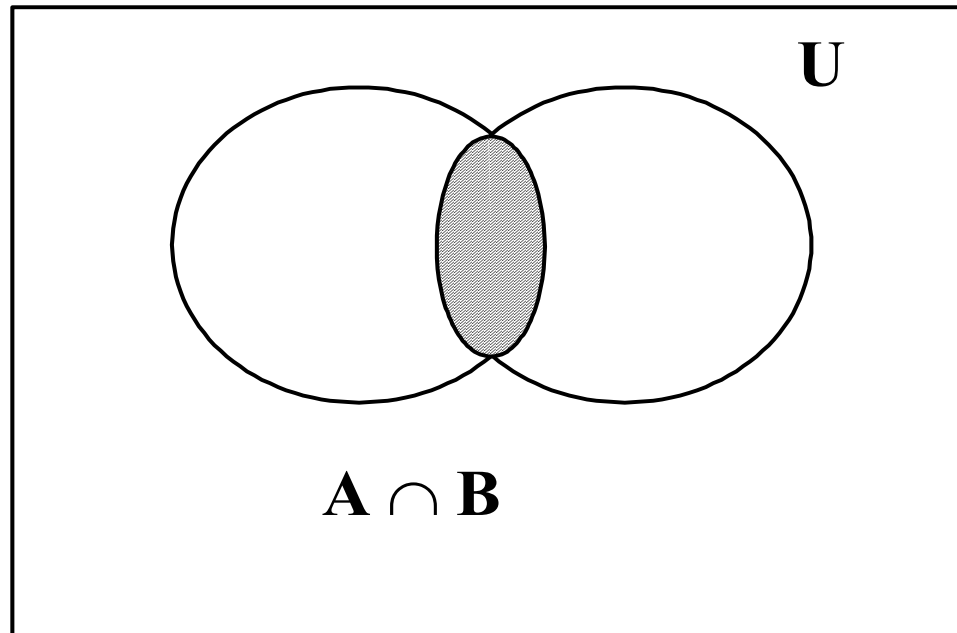
Об'єднання множин **A** і **B** ($X = A \cup B$) – множина, яка складається з усіх елементів, що належать хоча б одній з цих множин, тобто

$$A \cup B = X = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}.$$



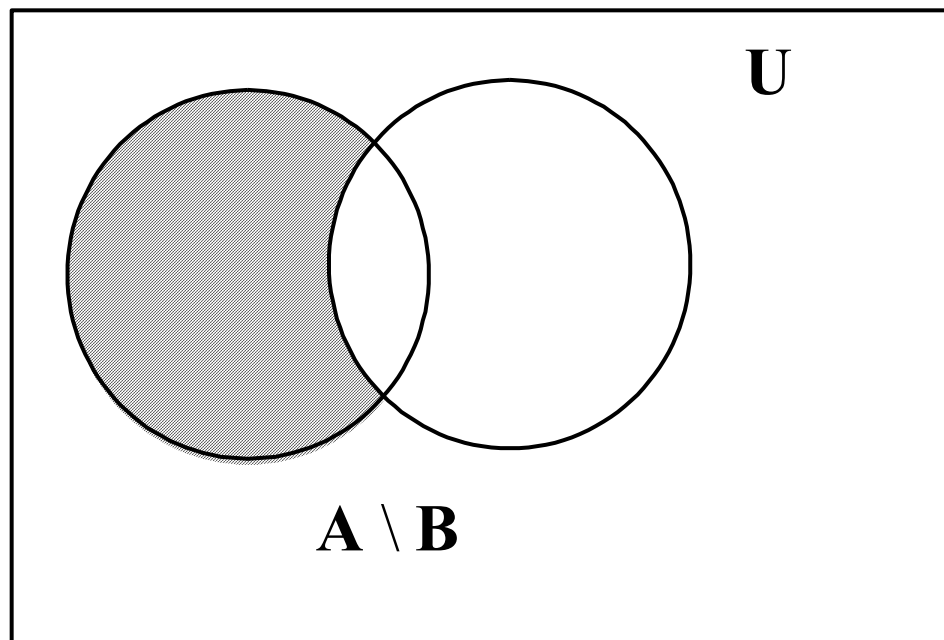
Перетин множин A і B ($X=A \cap B$ –
множина, яка складається з усіх елементів,
що одночасно належать кожній з цих
множин, тобто

$$A \cap B = X = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}.$$



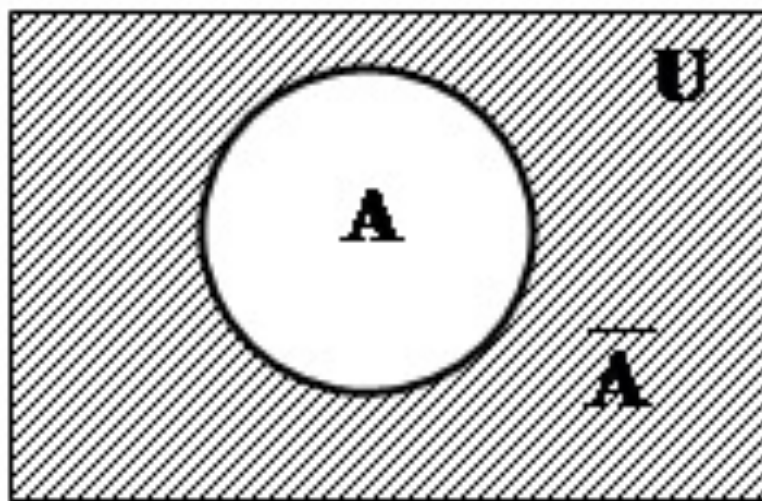
Різниця двох множин **A** і **B** ($X=A \setminus B$) – множина, яка складається з усіх елементів множини **A**, що одночасно не належать множині **B**, тобто

$$A \setminus B = X = \{ x \mid x \in A \text{ і } x \notin B \}.$$



- **Доповнення** множини A до універсальної множини U ($X = \bar{A}$) – множина, що складається з усіх елементів універсальної множини U , що одночасно не належать множині A , тобто

$$\bar{A} = U \setminus A = X = \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin A\}.$$



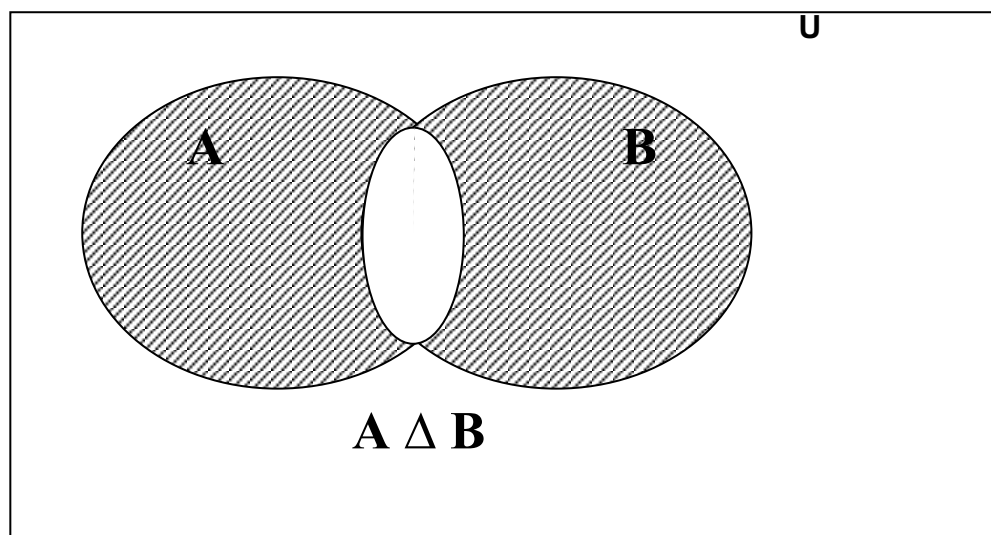
Симетрична різниця множин A і B

$(A \oplus B$ або $A \Delta B)$ – множина, що складається з усіх елементів, що належать в точності одній з цих множин, тобто

$$A \Delta B = X = \{x \mid \text{або } x \in A \text{ і } x \notin B, \\ \text{або } x \notin A \text{ і } x \in B\}$$

Симетрична різниця

■ $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$



Умовні пріоритети операцій над множинами

- З метою спрощення запису формул прийнято керуватися таким правилом економії дужок: при відсутності дужок порядок виконання операцій над множинами визначається послідовністю:

- $\neg, \setminus, \oplus, \cap, \cup$.

Наприклад.

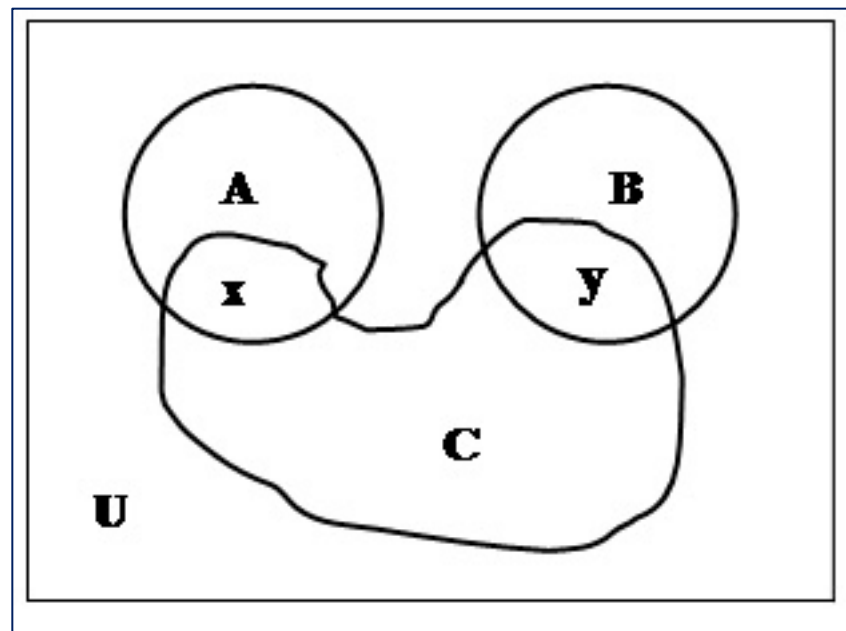
Нехай універсум це множина букв латинського алфавіту. $A=\{x,z,q\}$, $B=\{y,f,g\}$, $C=\{x,y,k,l\}$.

Привести графічне зображення множини: $A \cap B \cap C$.

$A \cap C = \{x\}$, $B \cap C = \{y\}$,

тоді $A \cap B = A \cap B \cap C = \emptyset$,

тому результат цієї операції
штриховкой відмітити
не можна.



Алгебра множини

(теоретико-множинний аналог алгебри дійсних чисел)

- **Алгебра множини** — сукупність тотожностей, справедливих незалежно від того, яка універсальна множина і які саме її підмножини входять в ці рівності.

Основні закони алгебри множин

■ 1) Комутативні закони

$$\mathbf{A \cup B = B \cup A}$$

$$\mathbf{A \cap B = B \cap A}$$

■ 2) Асоціативні закони

$$\mathbf{A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C}$$

$$\mathbf{A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C}$$

■ 3) Дистрибутивні закони

$$\mathbf{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$$

$$\mathbf{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$$

■ 4) Закони з $\emptyset$ та U

$$\overline{\overline{U}} = \emptyset$$

$$\overline{\emptyset} = U$$

$$\mathbf{A \cup \emptyset = A}$$

$$\mathbf{A \cap \emptyset = \emptyset}$$

$$\mathbf{A \cap U = A}$$

$$\mathbf{A \cup U = U}$$

■ 5) Закони ідемпотентності

$$\begin{array}{ll}\overline{\overline{A}} = A & A \cup \overline{A} = U \\ A \cap A = A & A \cap \overline{A} = \emptyset \\ A \cup A = A & \end{array}$$

■ 6) Закони поглинання

$$\begin{array}{l} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{array}$$

■ 7) Закони де Моргана

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

■ 8) Закони склеювання

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$$

Узагальнення операцій і законів

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i$$

■ Закони де Моргана

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$$

Розбиття та покриття множини

- **Покриттям** непорожньої множини A називається така сукупність підмножин множини A , що

$$\Pi(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\forall i = \overline{1, n} \quad A_i \neq \emptyset,$$

$$\forall i = \overline{1, n} \quad A_i \subseteq A.$$

■ **Розбиттям** непорожньої множини **A** називається така сукупність підмножин множини **A**, що

$$P(A) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A, n \in \mathbb{N}$$

$$\forall i = \overline{1, n} \quad A_i \neq \emptyset,$$

$$\forall i = \overline{1, n} \quad A_i \subseteq A,$$

$$\forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j, \quad A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Наприклад

■ Дано $A = N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$

$$\Pi(A) = \{ \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$$

$$P(A) = \{ \{1\}, \{2\}, \{3, 4\} \}$$

$$P(A) = \{ \{1, 2\}, \{3, 4\} \}$$

- Справедливість законів алгебри множин доводиться на основі визначення рівності:
 $X = Y$, якщо
 - 1) $X \subseteq Y: \forall x \in X \Rightarrow x \in Y$;
 - 2) $Y \subseteq X: \forall y \in Y \Rightarrow y \in X$.
- Сформульований принцип називають **інтуїтивним принципом об'ємності**.

- Для доказів будемо використовувати такі позначення ($\{$ - і ; $[$ - або) і соотношення:

$$\begin{aligned}x \in A \cap B &\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\x \in A \cup B &\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\x \in A \setminus B &\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}\end{aligned}$$

$$\blacksquare \mathbf{x \notin A \cap B \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x \notin A} \\ \mathbf{x \notin B} \end{cases}}$$

$$\blacksquare \mathbf{x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x \notin A} \\ \mathbf{x \notin B} \end{cases}}$$

$$\blacksquare \mathbf{x \notin A \setminus B \Rightarrow x \notin A \cap \bar{B} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x \notin A} \\ \mathbf{x \in B} \end{cases}}$$

Наприклад:

- Використовуючи відношення належності, довести тотожність:

- $(A \Delta B) \setminus C = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C).$

- Нехай $X = (A \Delta B) \setminus C;$
 $Y = (A \setminus C) \Delta (B \setminus C).$

■ Якщо $x \in X \Rightarrow x \in (A \Delta B) \setminus C \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \in A \Delta B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ x \notin C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in B \\ x \notin A \end{cases} \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \\ \begin{cases} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{cases}$$

- Якщо $y \in Y \Rightarrow y \in (A \setminus C) \Delta (B \setminus C) \Rightarrow$
- $y \in [(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)] \cup [(B \setminus C) \setminus (A \setminus C)] \Rightarrow$

- $$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y \in A \setminus C \\ y \notin B \setminus C \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in B \setminus C \\ y \notin A \setminus C \end{array} \right. \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} y \in A \\ y \notin C \end{array} \right. \quad \text{і} \quad \left[\begin{array}{l} y \notin B \\ y \in C \end{array} \right] \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} y \in B \\ y \notin C \end{array} \right. \quad \text{і} \quad \left[\begin{array}{l} y \notin A \\ y \in C \end{array} \right] \end{array} \right]$$

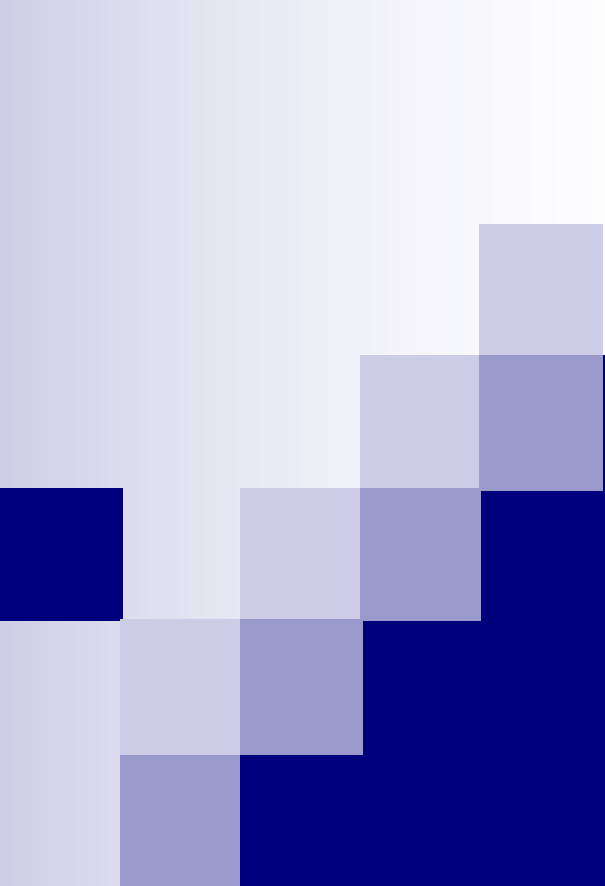
$$1. \begin{cases} y \in A \\ y \notin C \end{cases} \text{Ta} \begin{cases} y \notin B \\ y \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in A \\ y \notin C \\ y \notin B \end{cases} \text{Ta} \begin{cases} y \in A \\ y \notin C \\ y \in C \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y \in B \\ y \notin C \end{cases} \text{Ta} \begin{cases} y \notin A \\ y \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in B \\ y \notin C \\ y \notin A \end{cases} \text{Ta} \begin{cases} y \in B \\ y \notin C \\ y \in C \end{cases}$$

■ Звідти,

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \\ x \notin C \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} y \in A \\ y \notin B \\ y \notin C \end{array} \right. \text{ або } \left\{ \begin{array}{l} y \notin A \\ y \in B \\ y \notin C \end{array} \right.$$

Отже, тотожність є вірною.



Теорія відношень

*«Основная задача настоящего
образования — научить
пониманию»*

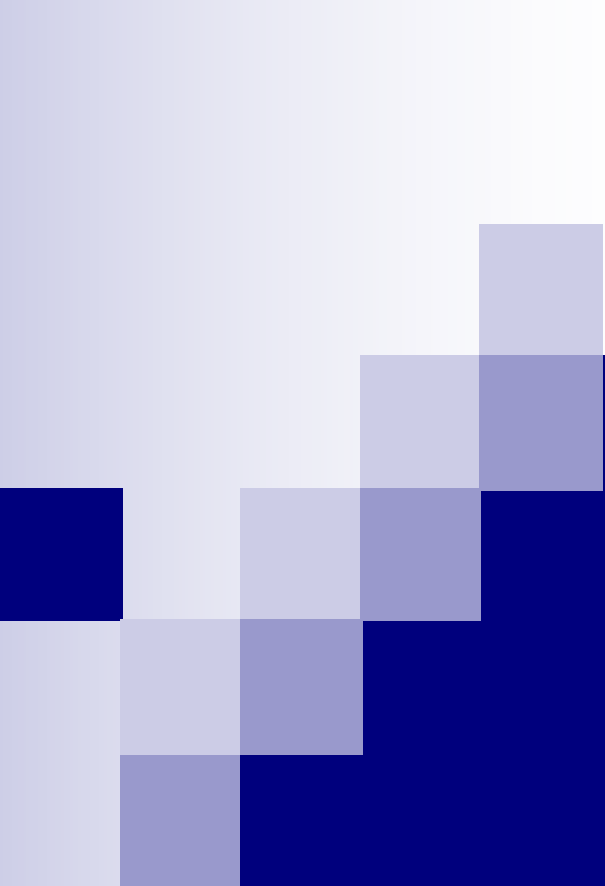
Сергей Капица



Тема 2. Теорія відношень

План

1. Декартов добуток. Декартов ступінь.
2. Визначення n -арного відношення.
3. Бінарне відношення. Способи опису.
4. Операції над відношеннями.
5. Властивості бінарних відношень.
Класифікація. Відношення еквівалентності та порядку.
6. Функціональні відношення.



Декартов або прямий добуток множин

- **Кортеж, набір, вектор** — впорядкована послідовність елементів, в якій кожний елемент займає визначене місце.
- Елементи, що утворюють вектор, називають **координатами** або **компонентами** вектору.
- Число координат вектору називається **довжиною** або **розміром** вектору.

- $()$ – порожній кортеж,
- (x) – одноелементний кортеж,
- (x,y) – пара, двоелементний кортеж,
- $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – кортеж довжини **n** або **n -ка**.

Прямий (декартовий) добуток множин

$X_1, X_2, \dots, X_n$ – множина всіх впорядкованих векторів:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

таких, що перший елемент належить першій множині X_1 , другий – другій множині X_2 , ..., n -тий – n -тій множині X_n :

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \right\}.$$

- Прямий добуток $X \times X \times \cdots \times X$, у якому одна й та ж множина X перемножується n разів сама на себе – **декартовий ступінь** множини X : X^n .

- **Прямий добуток двох множин X та Y** – множина всіх впорядкованих пар (двоелементних векторів), таких що:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

- Якщо $X=Y$ множина $X \times X$ – **декартовий квадрат** множини X : X^2 .

- Нехай $X = \{x, y\}$, $Y = \{1, 2\}$, тоді ,
 $X \times Y = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$
 $Y \times X = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$.

- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ — множина точок площини,
- $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$ — множина точок n -мірного простору.

- Шахматна дошка:

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}; Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\};$$
$$X \times Y = \{(a, 1), \dots, (h, 8)\}.$$

Властивості прямого добутку:

- 1) $X \times Y \neq Y \times X$
- 2) $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$
- 3) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$
- 4) $X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z).$

■ n - арне відношення на множинах

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

— усяка, довільна підмножина прямого добутку цих множин:

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n.$$

- Якщо набір елементів $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R$ належить відношенню R , тоді кажуть, що елементи $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ перебувають або знаходяться у відношенні R .

- **n-арне відношення R на множині X** – всяка, довільна підмножина **n-го** декартового ступеня цієї множини:

$$R \subseteq X^n.$$

- **Бінарне відношення** на множинах X та Y – довільна підмножина прямого добутку двох множин:

- $\rho \subseteq X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$

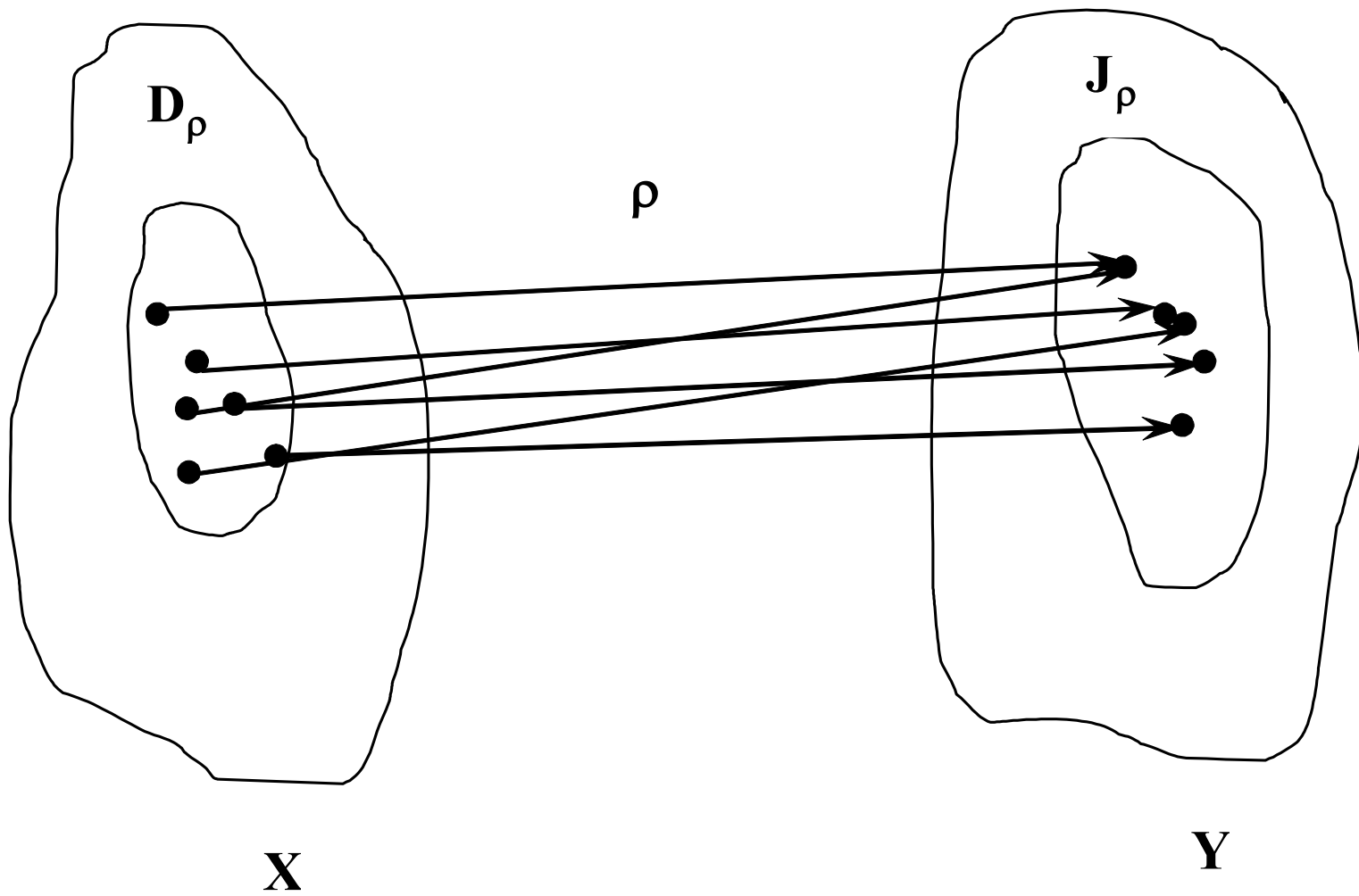
- Якщо $\rho \subseteq X^2$, то кажуть, що відношення ρ **задане на множині X** .
- Якщо $(x, y) \in \rho$, то кажуть, що (x, y) **знаходяться** у відношенні ρ або **зв'язані** відношенням ρ : $x \rho y$ або $y = \rho(x)$.

- **Область визначення** $D\rho$ бінарного відношення — множина перших координат кожної впорядкованої пари відношення:

- $D\rho = \{ x \mid (x, y) \in \rho \}.$

- **Область значень** $J\rho$ бінарного відношення — множина других координат кожної впорядкованої пари відношення:

- $J\rho = \{ y \mid (x, y) \in \rho \}.$



Способи завдання відношень

1) Перелік пар або характеристична властивість

Довільне бінарне відношення (як множину) задають у вигляді переліку пар, із яких складається відношення, або із використанням характеристичної чи визначальної властивості.

$$\rho = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \} \text{ на } X,$$

$$X = \{1,2,3,4\} \text{ або } \rho \subseteq X^2,$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x = y, x, y \in X \}.$$

■ 2) Матриця відношення

- У матриці відношення рядки відповідають елементам множини X , стовбці елементам множини Y , елемент матриці дорівнює:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (x_i, y_j) \in \rho; \\ 0, (x_i, y_j) \notin \rho. \end{cases}$$

- Якщо $|X| = n, |Y| = m$, тоді матриця відношення має розмір: $n \times m$.

- $\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ на $\rho \subseteq X^2$, $X = \{1,2,3,4\}$.

$A_\rho =$

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

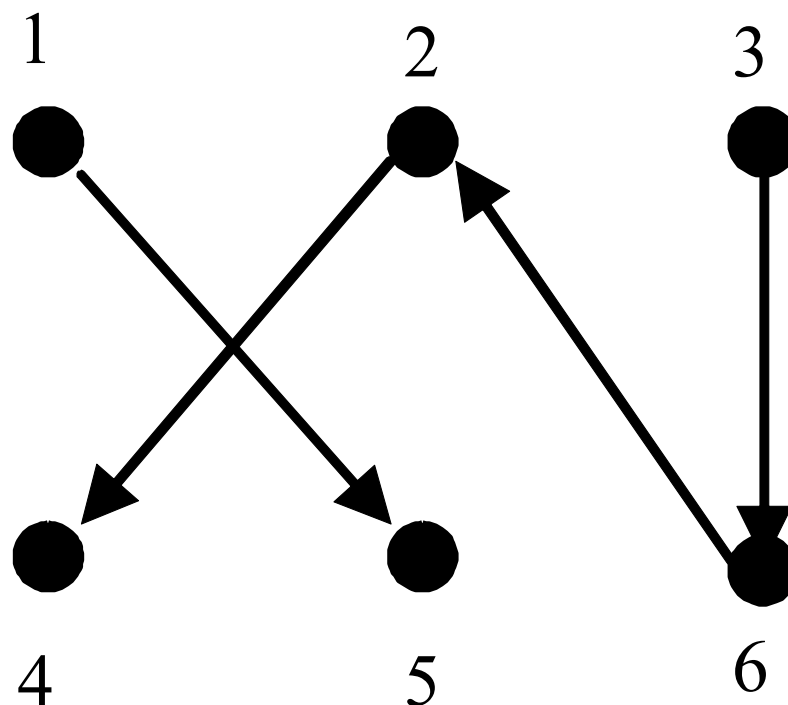
■ 3) Графічне зображення відношень

На площині зображаються точками елементи множин X і Y .

■ Якщо пара (x_i, y_j) належить відношенню, то дугою з'єднуються точки, які відповідають x_i, y_j парі, дуга направлена від першого елемента до другого.

■ Позначаючи таким чином усі пари, що належать відношенню, отримаємо фігуру, яка називається **графом відношення**.

- $\rho = \{(1,5), (2,4), (3,6), (6,2)\}$ на $\rho \subseteq X^2, X = \{1,2,3,4,5,6\}$.



Екстремальні відношення

- Для довільної множини X :

$I_X = \{(x, x) \mid \forall x \in X\}$ – тотожнє відношення

$U_X = X^2$ – універсальне відношення

$\emptyset \subseteq X^2$ – порожнє відношення.

Нехай $X = \{1, 2, 3\}$, тоді

$$I_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}; \quad \emptyset_X = \{ \};$$

$$U_X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Операції над відношеннями

- Нехай ρ - деяке бінарне відношення.
- **Обернене відношення** ρ^{-1} до відношення ρ визначається як:

$$\rho^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in \rho \}.$$

- **Обернене відношення** утворюється за рахунок перестановки значень у парах початкового відношення.

■ Нехай ρ і γ – довільні бінарні відношення, такі, що $\rho \subseteq X \times Y$, $\gamma \subseteq Y \times Z$, де X, Y, Z – деякі множини.

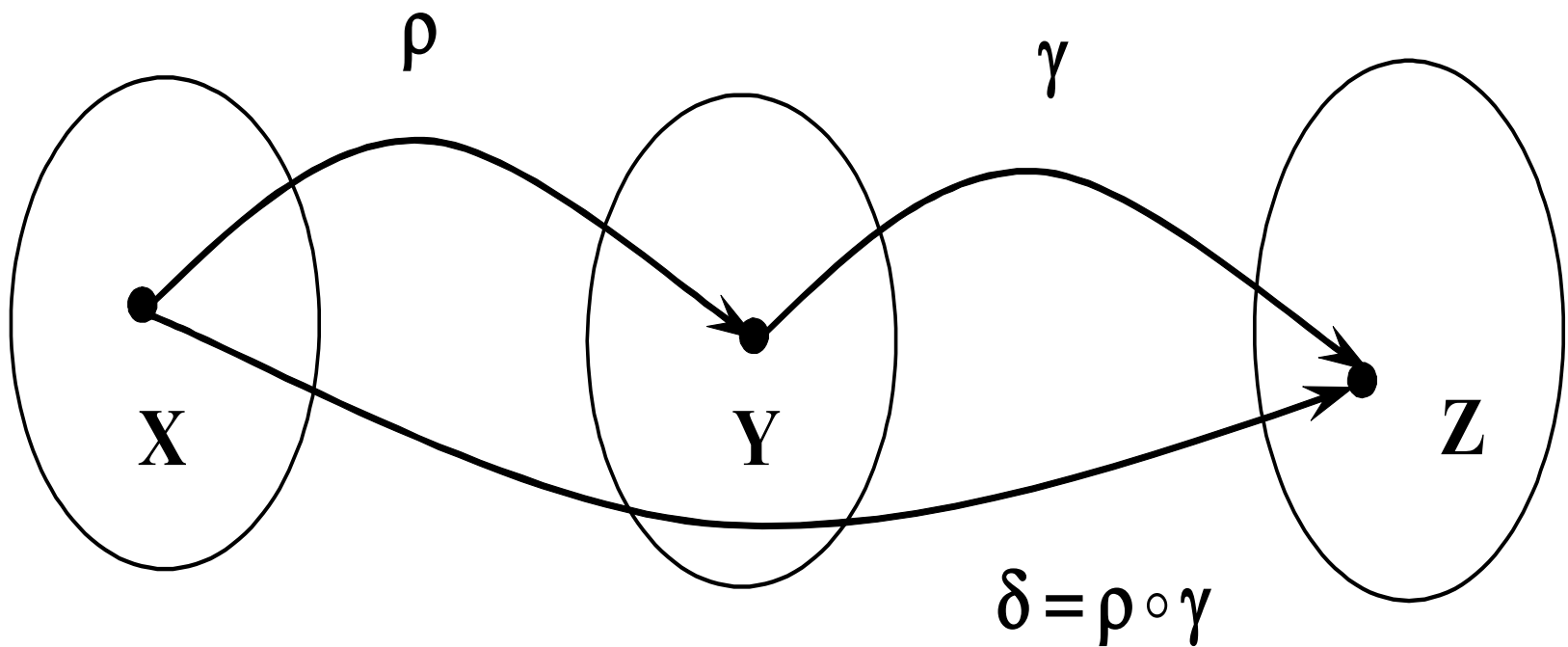
■ **Композиція відношень ρ і γ** – бінарне відношення $\delta \subseteq X \times Z$, яке складається з впорядкованих пар (x, z) , $x \in X, z \in Z$, для яких існує елемент $y \in Y$ такий, що виконуються умови,

$$(x, y) \in \rho, (y, z) \in \gamma : \\ \delta = \rho \circ \gamma = \{ (x, z) \mid x \rho y, y \gamma z \}.$$

Операція композиція відношень

не комутативна: $\rho \circ \gamma \neq \gamma \circ \rho$

асоціативна: $(\rho \circ \gamma) \circ \varphi = \rho \circ (\gamma \circ \varphi)$.



■ Приклади

$$\rho \subseteq N_4^2, \rho = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,1)\}$$

$$\rho^{-1} \subseteq N_4^2, \rho^{-1} = \{(2,1), (4,1), (3,2), (1,3)\}$$

$$\gamma \subseteq N_4^2, \gamma = \{(2,1), (4,1), (3,2)\}$$

$$\rho \circ \gamma = \{(1,1), (2,2)\},$$

$$\gamma \circ \rho = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4), (3,3)\}$$

Властивості бінарних відношень

Нехай ρ задається на множині X , $\rho \subseteq X^2$.

Рефлексивність: $\forall x \in X \ x \rho x$.

Відношення ρ на множині X називається **рефлексивним**, якщо довільний, кожний елемент множини X , на якій задане відношення ρ , знаходиться у цьому відношенні до себе.

Матриця рефлексивного відношення має одиничну головну діагональ, а граф — петлю для кожного свого елемента.

■ Наприклад:

$$\rho = \{ (x, y) \mid x=y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \geq y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \leq y, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x = y \pmod{m}, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

- На множині людей: “бути родичем”,
”навчатися у одній студентській групі”.

- На множині множин: “ $A \subseteq B$ ”, “ $A=B$ ”.

- 2. Антирефлексивність: $\neg \exists x \in X \ x \rho x$.
- Відношення ρ на множині X називається **антирефлексивним**, якщо не існує $x \in X$ такого, що має місце $x \rho x$, тобто не має жодного елементу у множині X , що знаходиться у відношенні ρ сам до себе.

Матриця антирефлексивного відношення має нульову головну діагональ, а граф — не має жодної петлі.

- Наприклад:

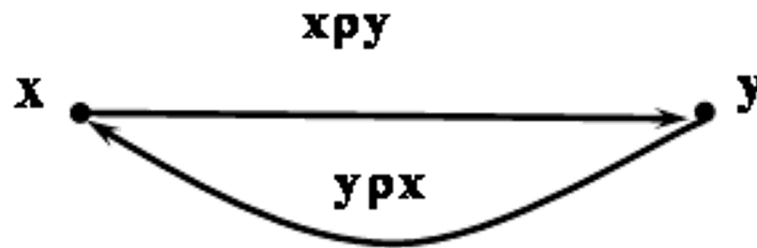
$$\rho = \{ (x, y) \mid x \neq y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x > y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x < y, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

- На множині людей: “бути батьками”, ”бути дитиною”.
- На множині множин: “ $A \subset B$ ”, “ $A \neq B$ ”.
- **3. Нереклексивність:** $\exists x \in X (x, x) \notin \rho$.

- 4. Симетричність: $\forall x, y \in X \quad xry \Rightarrow yrx$
- Відношення ρ на множині X називається **симетричним**, якщо для довільних x та y множини X , із належності (x, y) відношенню ρ випливає, що й (y, x) належить відношенню ρ .



Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі, а граф: для кожної дуги (x, y) існує обернена дуга (y, x) .

- Наприклад:

$$\rho = \{ (x, y) \mid x=y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \neq y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

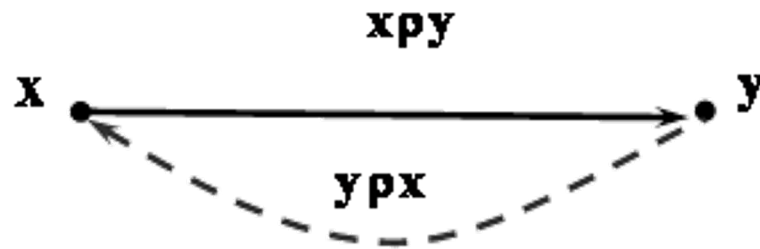
$$\rho = \{ (x, y) \mid x=y \pmod{m}, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

- На множині людей: “бути родичем”,
”навчатись в одній студентській групі”.
- На множині множин: “ $A \neq B$ ”, “ $A=B$ ”.

■ 5. Антисиметричність:

$$\forall x, y \in X \quad xry, urx \Leftrightarrow x = y$$

Відношення ρ на множині X називається **антисиметричним**, якщо для довільних x і y множини X , із належності (x,y) та (y,x) відношенню ρ випливає, що $x=y$.



Матриця антисиметричного відношення не має жодної симетричної одиниці відносно головної діагоналі, граф – для кожної дуги (x,y) не існує обернена дуга (y,x) і навпаки.

■ Наприклад:

$$\rho = \{ (x, y) \mid x > y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x < y, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x = y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \geq y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \leq y, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

■ На множині людей: “бути вище”, ”бути рівним”.

■ На множині множин: “ $A \subset B$ ”, “ $A = B$ ”, “ $A \subseteq B$ ”.

**Властивості симетричності та
антисиметричності не являються
взаємно-виключними**

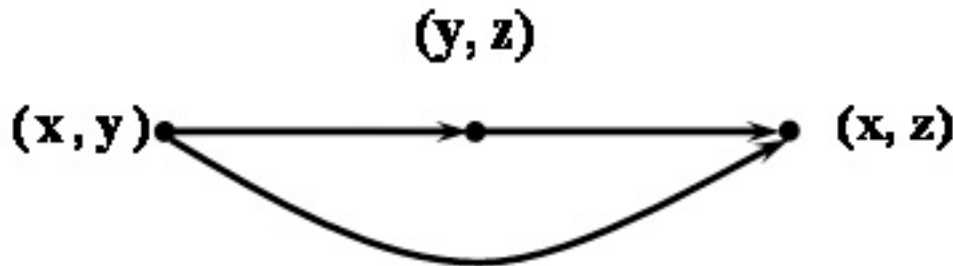
Приклади:

- відношення рівності на множині натуральних чисел,
- тотожна рівність множин.

■ 6. Транзитивність:

$$\forall x, y, z \in X \quad xry, yrz \Rightarrow xrz.$$

Відношення ρ на множині X називається **транзитивним**, якщо для довільних x, y, z множини X , із належності (x, y) і (y, z) відношенню ρ випливає, що (x, z) також належить ρ .



- Відношення ρ на множині X називається **антитранзитивним**, якщо для довільних x, y, z множини X , із належності (x, y) та (y, z) відношенню ρ випливає, що (x, z) також належить ρ .

■ Наприклад:

$$\rho = \{ (x, y) \mid x > y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x < y, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x = y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \geq y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \leq y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x = y \pmod{m}, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

■ На множині людей: “бути вище”,
”навчатись у одній студентській групі”.

■ На множині множин: “ $A \subseteq B$ ”, “ $A \subset B$ ”,
“ $A = B$ ”.

■ **Відношення порядку** – антисиметрично,
транзитивно.

■ **Відношення нестрого порядку** $\preceq$ -
рефлексивно,
антисиметрично,
транзитивно.

■ $\rho = \{ (x, y) \mid x \geq y, x, y \in \mathbb{N} \},$

■ $\rho = \{ (x, y) \mid x \leq y, x, y \in \mathbb{N} \}.$

■ На множині множин: “ $A \subseteq B$ ”, “ $A=B$ ”.

- Відношення строгого порядку $\prec$ -
антирефлексивно,
антисиметрично,
транзитивно.

- $\rho = \{ (x, y) \mid x > y, x, y \in \mathbb{N} \},$

- $\rho = \{ (x, y) \mid x < y, x, y \in \mathbb{N} \}.$

- На множині множин: “ $A \subset B$ ”.

- $x \prec y$ - “ x передує y в розумінні відношення строгого порядку”,
- $x \preceq y$ - “ x передує y в розумінні відношення нестроного порядку”.
- Множина, на якій задано деяке відношення порядку, називається **впорядкованою**.

➤ Два елементи x та y впорядкованої множини **порівняні між собою**, якщо $x < y$ або $y < x$.

Якщо для деякої пари (x, y) жодне з співвідношень: $x < y$ або $y < x$ не вірно, то кажуть, що елементи x та y є **непорівняними** між собою у розумінні цього відношення порядку чи просто **непорівняні**.

Зауваження: пари однакових елементів теж порівнюються між собою.

Відношення задане на $N_4 = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\delta = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}.$$

Елементи 1 та 2, 1 та 3, 1 та 4, 2 та 3 і так далі, 4 та 4 є не порівняними між собою у розумінні відношення δ .

$$\gamma = \{ (1,2), (2,2), (3,3), (4,4) \}.$$

Елементи 1 та 1, 1 та 3, 1 та 4, 2 та 3 і так далі є не порівняними між собою у розумінні відношення γ .

- У відношеннях **повного** порядку усі елементи множини, на якій задане відношення, є порівняними між собою, а у відношеннях **часткового порядку** не всі елементи порівняні між собою.
- Відношення повного порядку називають **лінійним порядком** або **ланцюгом**.

■ Відношення повного порядку:

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \geq y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x \leq y, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

■ Відношення часткового порядку:

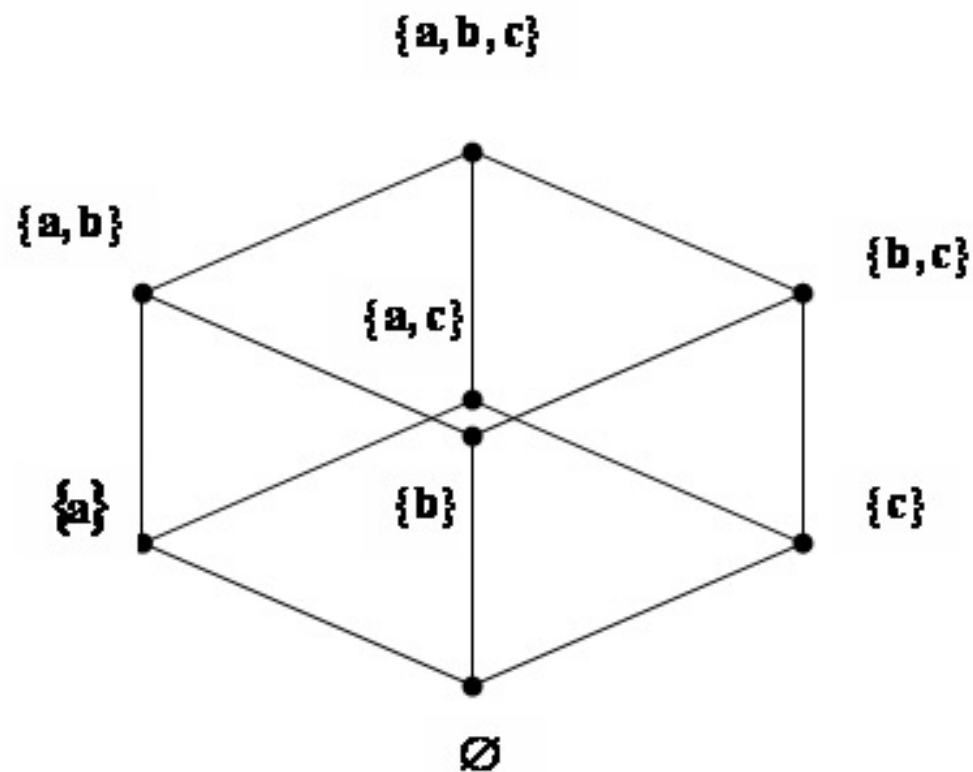
$$\rho = \{ (x, y) \mid x > y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x < y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

■ на множині множин: “ $A \subseteq B$ ”, “ $A \subset B$ ”.

- Для графічного зображення впорядкованих множин використовують **діаграми Хассе (Гессе)**:
- спеціальні графи відношень;
- якщо $x \prec y$ та не існує z такого, що
$$x \prec z \prec y,$$
- тоді вершини, які відповідають x та y , з'єднують відрізками прямої, а вершину x розташовують нижче y .

■ Діаграми Гессе для
 лінійного порядку $\leq$ часткового порядку $\subseteq$
 на $\{1,2,3,4\}$ на $\{a,b,c\}$



■ Відношення еквівалентності $\sim$ -

рефлексивно,

симетрично,

транзитивно.

$$\rho = \{ (x, y) \mid x=y, x, y \in \mathbb{N} \},$$

$$\rho = \{ (x, y) \mid x=y \pmod{m}, x, y \in \mathbb{N} \}.$$

- На множині людей: “мати одне ім'я”,
”навчатись у одній студентській групі”.
- На множині множин: “ $A=B$ ”.

- **Клас еквівалентності** для елемента x :

$$[x] = \{ y \in X \mid x \sim y \}.$$

- Відношення еквівалентності **розбиває** X - множину, на якій задано відношення на класи, що не перетинаються - класи еквівалентності.
- Елементи, що належать одному класу знаходяться між собою у відношенні еквівалентності, елементи з різних класів у відношенні еквівалентності не знаходяться.

■ *Наприклад:*

■ Відношення ρ і γ задано на множині
 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$\underline{\rho = \{(1,4), (2,5), (3,6), (4,1), (6,3)\}}.$$

Область визначення $D\rho = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Область значень $J\rho = \{1, 3, 4, 5, 6\}$.

Відношення ρ - антирефлексивно,

- не симетрично: $(2,5) \in \rho$, але $(5,2) \notin \rho$;
- не антисиметрично: $(1,4) \in \rho$ та $(4,1) \in \rho$;
- не транзитивно: $(1,4) \in \rho$ та $(4,1) \in \rho$, але $(1,1) \notin \rho$.



■ $\gamma = \{(1,1), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,6)\}.$

Область визначення $D\gamma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

Область значень $J\gamma = \{1, 3, 4, 5, 6\}.$

Відношення γ - не рефлексивно,
антисиметрично, не транзитивно.

■ Композиція

$$\rho \circ \gamma = \{(1,5), (2,6), (3,6), (4,1), (6,4)\}.$$

■ *Наприклад:*

Відношення

$\rho = \{(x, y) \mid \text{порівняння за модулем } m, x, y \in \mathbb{N}\}.$

Відношення порівняння за модулем m на множині натуральних чисел: $x = y \bmod m$, що означає: “ x та y мають однакову остачу при діленні на m ”.

Відношення порівняння за модулем 2 на N_4 :

$\delta = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}.$


$$\rho = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3), (4,2), (4,4)\}$$

Область визначення $D\delta = \{1, 2, 3, 4\}$.

Область значень $J\delta = \{1, 2, 3, 4\}$.

Відношення δ - рефлексивно, симетрично,
транзитивно.

Відношення δ - відношення еквівалентності.

Класи еквівалентності:

$$[1] = \{1, 3\} = [3];$$

$$[2] = \{2, 4\} = [4].$$

Відношення φ і ν задано на множині N_4 .

$$\underline{\varphi = \{ (1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (2,4), (1,4) \}}$$

Область визначення $D\varphi = \{1, 2, 3\}$.

Область значень $J\varphi = \{2, 3, 4\}$.

- Відношення φ - антирефлексивно, антисиметрично, транзитивно.
- Відношення φ - відношення строгого порядку.


$$\underline{v = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \}}.$$

Область визначення $Dv = \{1, 2, 3, 4\}$.

Область значень $Jv = \{1, 2, 3, 4\}$.

Відношення v - рефлексивно, симетрично, антисиметрично, транзитивно.

Відношення v - відношення нестроного часткового порядку.

Відношення v - відношення еквівалентності.

Класи еквівалентності: $[1] = \{1\};$

$[2] = \{2\}; [3] = \{3\}; [4] = \{4\}.$

$\rho :=$ транзитивность

for $x \in X$

for $y \in X$

for $z \in X$

begin

if $(x,y) \in \rho$ *and* $(y,z) \in \rho$ *and* $(x,z) \notin \rho$

then $\rho :=$ нетранзитивность

end

■ Функціональні відношення

Нехай $\rho \subseteq X \times Y$.

■ Функціональне відношення – бінарне відношення ρ :

$$\forall x \in X \quad \exists! y \in Y: x \rho y \quad \text{або} \quad \nexists y \in Y: x \rho y.$$

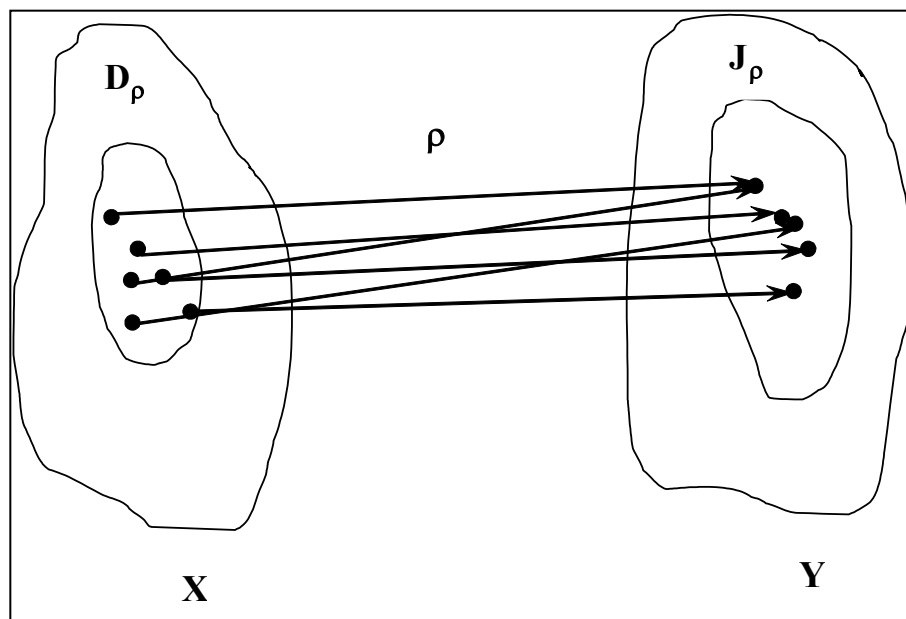
■ Функціональне відношення – бінарне відношення ρ :

$$\forall x \in D\rho \quad \exists! y \in Y: x \rho y.$$

- **Всюди визначене відношення (відображення)** – відношення, у якого

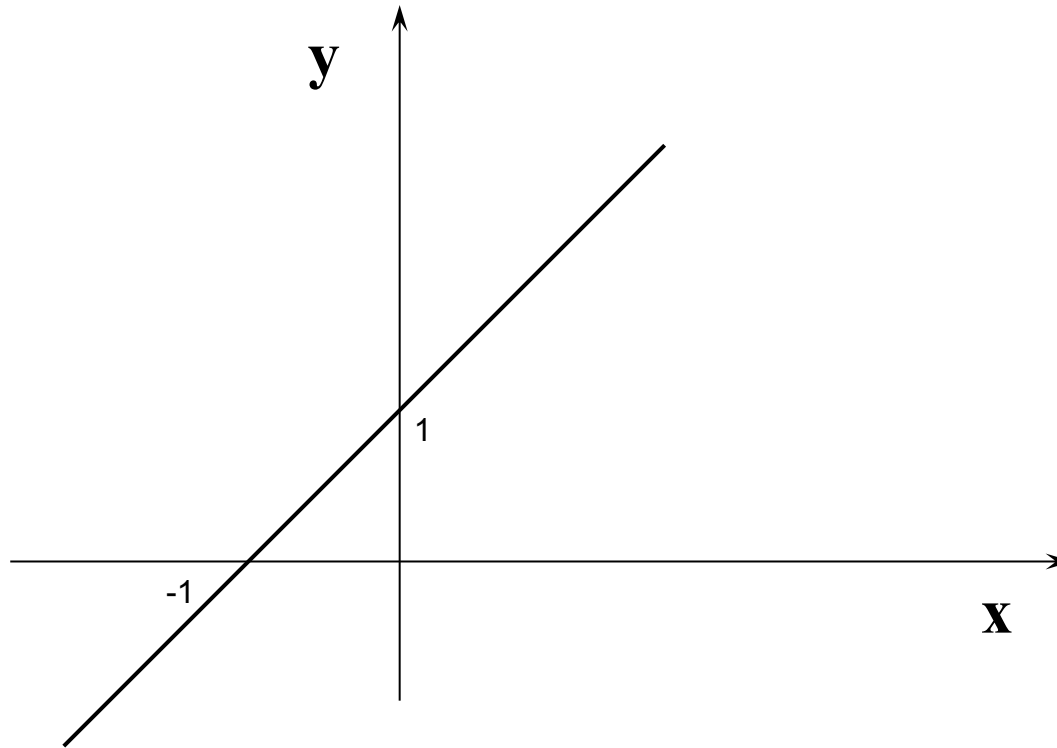
$$D\rho = X \text{ ("нема поодиноких } x\text{")}.$$

- **Сюр'єктивне відношення** – відношення, у якого $J\rho = Y$ ("нема поодиноких y ").



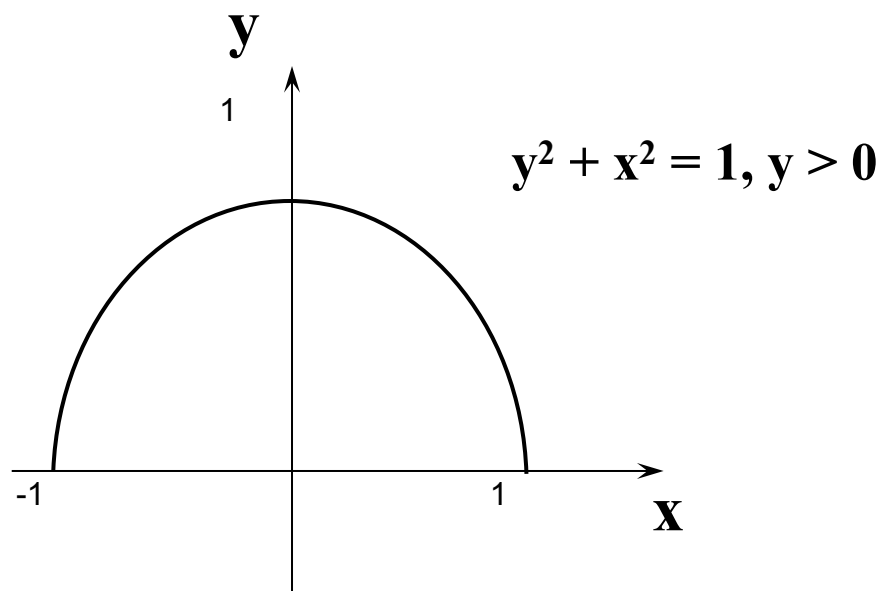
- **Ін'єктивне відношення** – відношення, для якого різним x відповідають різні y .
- **Бієкція** - функціональне, всюди визначене, ін'єктивне, сюр'єктивне відношення, яке задає взаємно однозначну відповідність множин.

- Наприклад: нехай $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$



- Відношення γ - функціональне, всюди визначене, ін'єктивне (немає різних x , яким відповідають однакові y), сюр'єктивне, бієктивне, задає взаємно однозначну відповідність.

- Нехай $\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$



- Відношення ρ – функціональне, не всюди визначене, не ін'єктивне, не сюр'єктивне, не бієкція.

■ *Наприклад:*

Нехай $\varphi = \{(1,2), (2,3), (1,3), (3,4), (2,4), (1,4)\}$
задано на множині N_4 .

- Відношення φ — не функціональне, бо $x = 1$ відповідає три y : $(1,2), (1,3), (1,4)$.
- Відношення φ - не всюди визначене
 $D\varphi = \{1,2,3\} \neq N_4$.
- Відношення φ — не сюр'єктивне $I\varphi = \{4,2,3\} \neq N_4$.
- Відношення φ — не ін'єктивне, різним x відповідають однакові y , наприклад, $(2,3)$ та $(1,3)$.

Нехай відношення μ задано на множині N_5 :

$$\mu = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}.$$

Відношення μ — функціональне, бо кожному x відповідає тільки один y .

Відношення μ — всюди визначене, нема поодиноких x , бо $D_\mu = \{1,2,3,4,5\} = N_5$.

Відношення μ — сюр'єктивне, нема поодиноких y , бо $I_\mu = \{1,2,3,4,5\} = N_5$.

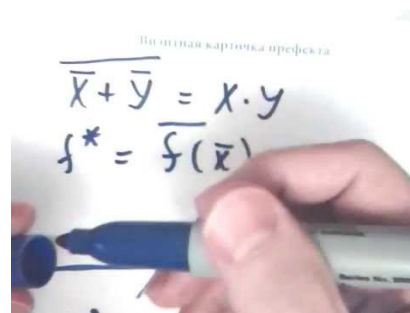
Відношення μ — ін'єктивне, різним x відповідають різні y .

Відношення μ — бієкція, взаємно однозначна відповідність.

Тема 3

БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

ФУНКЦІЇ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ



Тема 3 Булеві функції

План

- 1. Визначення функції алгебри логіки (ФАЛ) або булевої функції.
- 2. Способи опису ФАЛ.
- 3. ФАЛ від одного та двох аргументів.
- 4. Фіктивні аргументи ФАЛ.
- 5. Основні закони булевої алгебри.

При проектуванні обчислювальної техніки для формального опису логічних схем використовують математичний апарат алгебри логіки

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА



Булева алгебра (алгебра логіки)



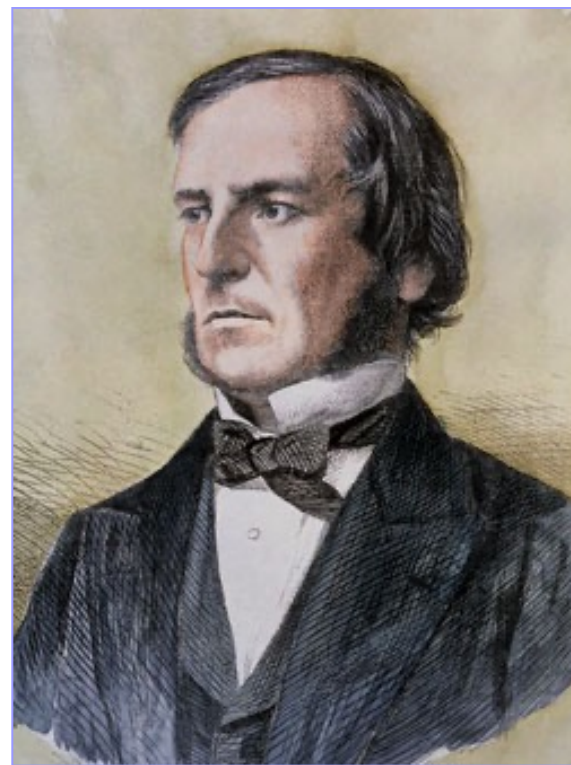
КОМП'ЮТЕРНА МАТЕМАТИКА

Вивчення властивостей булевих функцій важливо для успішного розв'язання задач з проектування засобів обчислювальної техніки.

Джордж Буль

1815-1864рр

Англійський математик
Професор математики
Королівського коледжу
Корка з 1849 року
Один із засновників
математичної логіки



Визначення функції алгебри логіки

■ Нехай множина X складається з двох елементів 0 та 1: $X=\{0,1\}$; тоді множина

$$X^n = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \forall i = \overline{1, n} \ x_i \in X \right\}$$

є множина всіляких двійкових наборів (векторів) довжини n .

■ **Двійковий набір** – сукупність координат деякого фіксованого вектору:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$$

- Кожному двійковому набору можна поставити у відповідність деякий **номер**, що дорівнює двійковому числу відповідному даному набору.
- Нехай $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$ – двійковий набір, тоді i – номер набору:

$$i = \#(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot 2^{n-1} + x_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + x_n \cdot 2^0$$

Наприклад: $\#(0,1,1) = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$

$$\#(0,0,1,1) = 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 3$$

Зауваження: для того, щоб однозначно відновити набір за номером – потрібно знати довжину двійкового вектору.

Теорема

Кількість всіляких, різних двійкових наборів довжиною n дорівнює: 2^n .

Двійковий вектор довжини n – це впорядкована послідовність, у якій кожен із елементів, приймає одно із двох значень, або 0, або 1. Для того, щоб вибрати першу координату двійкового вектора, існує 2 варіанти. Після цього і незалежно від того, яке конкретно значення було вибрано для першої координати, число варіантів вибрати другу координату також дорівнює 2 і так далі.

Відповідно, й для n -тої координати число варіантів складає 2. Тоді, за комбінаторним правилом добутку маємо:

$$\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n = 2^n$$

Всі двійкові вектори довжиною $n = 3$
За доведеною теоремою їхня кількість дорівнює $2^3 = 8$.

Номер двійкового вектору	Двійковий вектор		
	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Визначення булевих функцій або функцій алгебри логіки (ФАЛ)

- **Логічна (булева) змінна** — це змінна, що може приймати тільки два значення: істина або хибність (TRUE/FALSE, 1/0).
- **Функція алгебри логіки** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — це функція, у якої всі аргументи є логічні змінні, і сама функція приймає тільки логічні значення.

- 
- Існують наступні способи опису ФАЛ:
 - табличний;
 - графічний;
 - аналітичний.

Табличний спосіб завдання ФАЛ

- Функцію алгебри логіки можна представити таблицею, що має 2^n рядків.
- Така таблиця називається **таблицею істинності**.
- У лівій частині таблиці перераховуються всілякі двійкові набори значень аргументів, а в правій частині – значення деякої булевої функції:
$$\alpha_i \in \{0,1\}, i = \overline{1, 2^n}.$$

Таблиця істинності

N_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n	$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
0	0	0	$\dots$	0	α_1
1	0	0	$\dots$	1	α_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$2^n - 1$	1	1	$\dots$	1	α_{2^n}

Теорема

Число різних ФАЛ, що залежать від n аргументів, дорівнює:

$$2^{2^n}$$

Число строк у таблиці істинності співпадає із числом усіх двійкових векторів довжини n і дорівнює $m=2^n$. На кожному такому наборі ФАЛ приймає одно із двох значень, або 0, або 1.

Тобто для першого рядка таблиці істинності маємо два варіанти вибору значення ФАЛ, для другого - 2, і так далі, й відповідно для останнього m -того рядка також два варіанти.

Тоді, за правилом добутку, число різних варіантів сформуванати таблицю істинності, а відповідно й задати ФАЛ від n аргументів дорівнює: 2^m , а оскільки $m=2^n$, то $2^m = 2^{2^n}$.

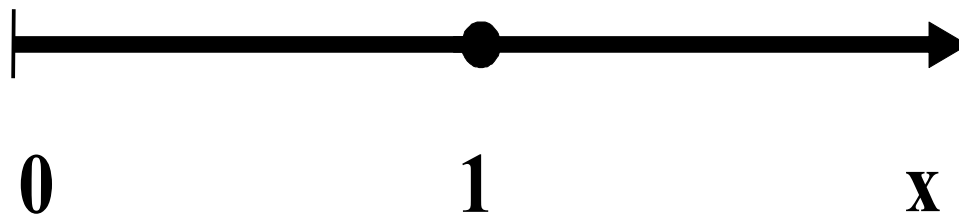
Графічне подання ФАЛ

Графічно ФАЛ можна представити:

- ✓ у вигляді n -вимірного одиничного кубу, якщо наборам значень аргументів зіставити у відповідність точки n -мірного простору;
- ✓ картки Карно або діаграми Вейча (мінімізації ФАЛ).

Одновимірний куб ($n=1$)

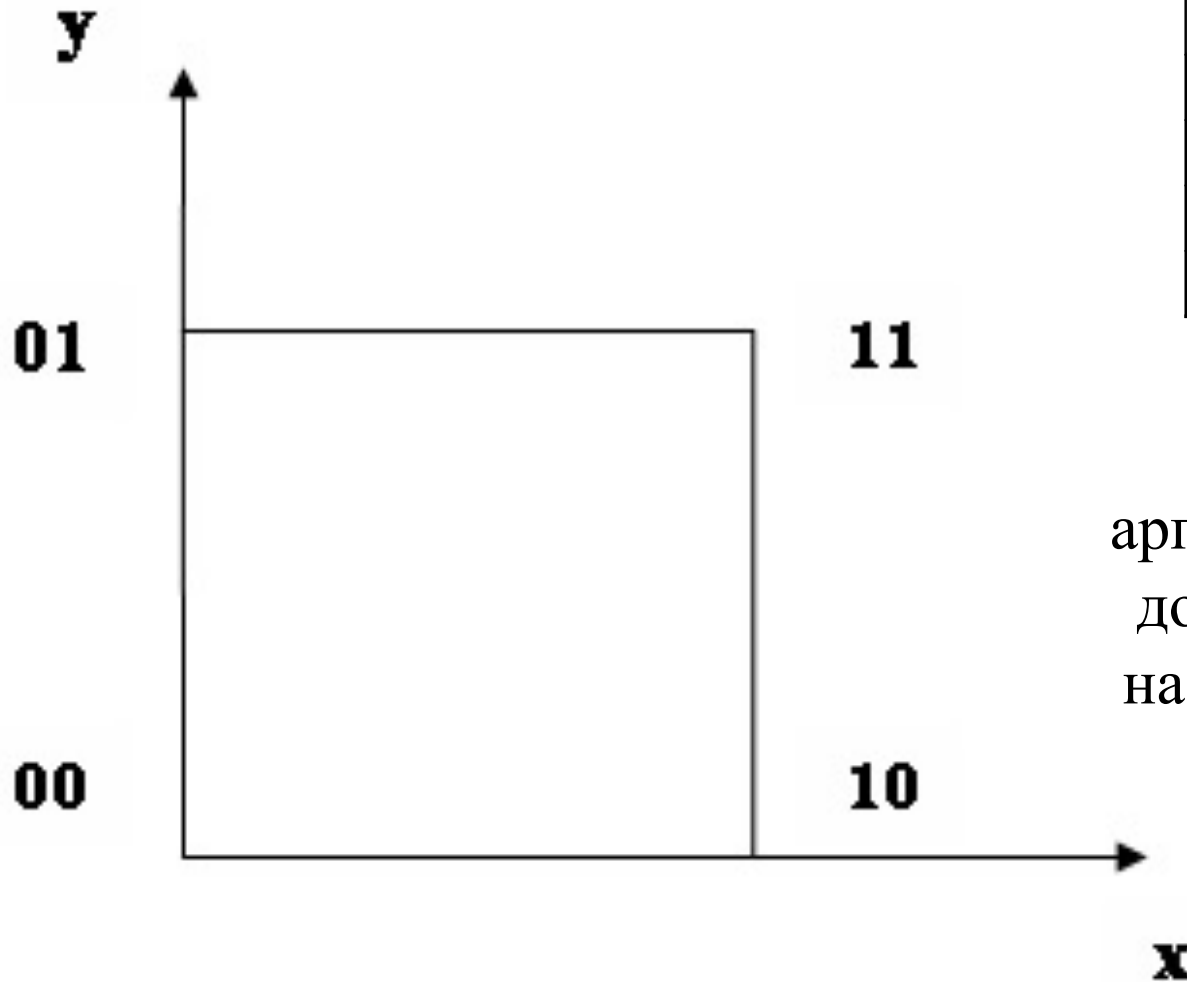
- При графічному представленні, якщо ФАЛ $f(x)=0$, то на рисунку зображується порожнє коло або нічого.
- Якщо ФАЛ $f(x)=1$ – зафарбоване коло.



ФАЛ від одного аргументу x , що дорівнює одиниці, коли значення аргументу є 1, $x=1$.

x	$f(x)$
0	0
1	1

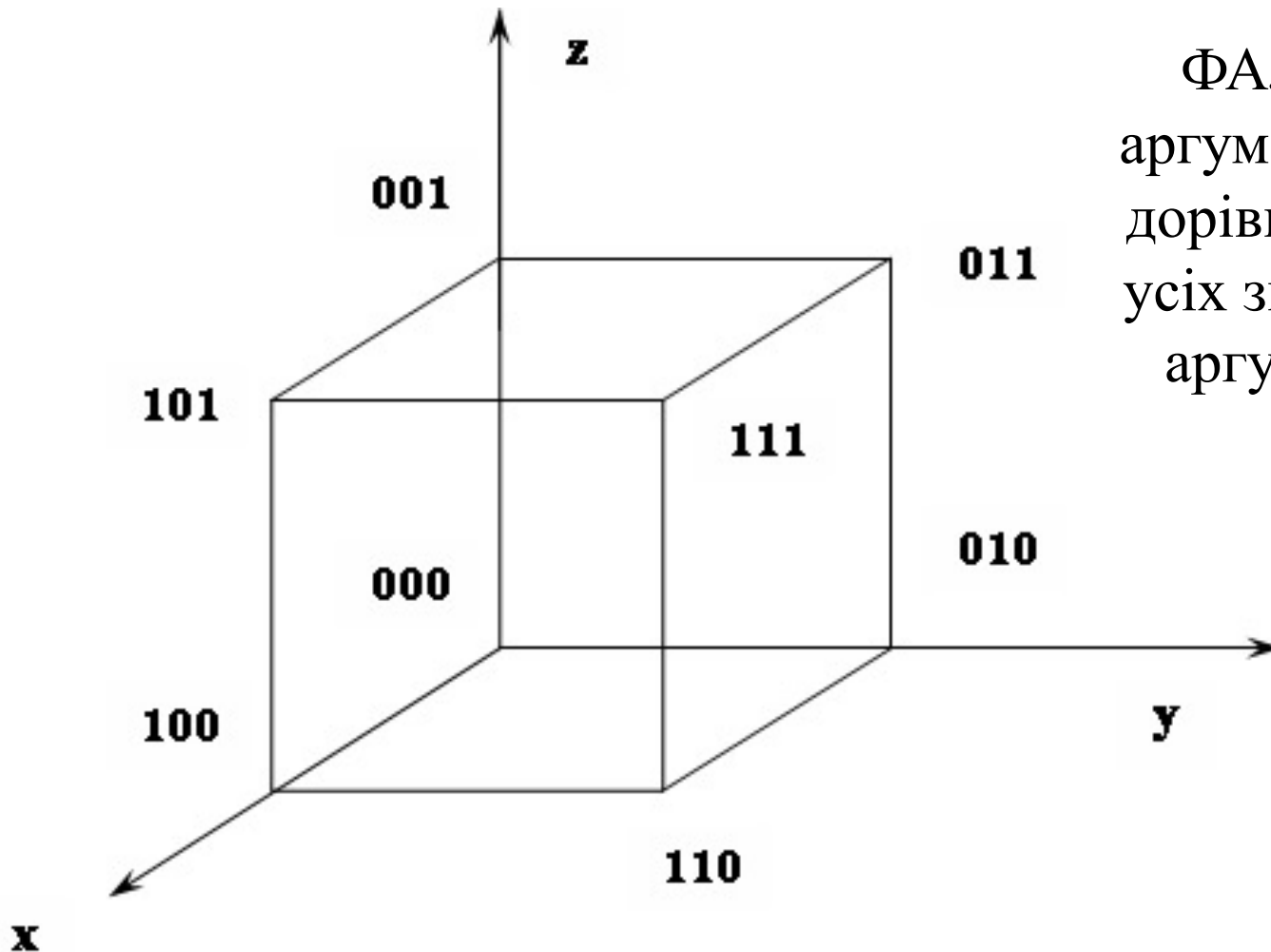
Двовимірний куб ($n = 2$)



x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

ФАЛ від двох аргументів x та y , що дорівнює 0, на усіх наборах аргументів.

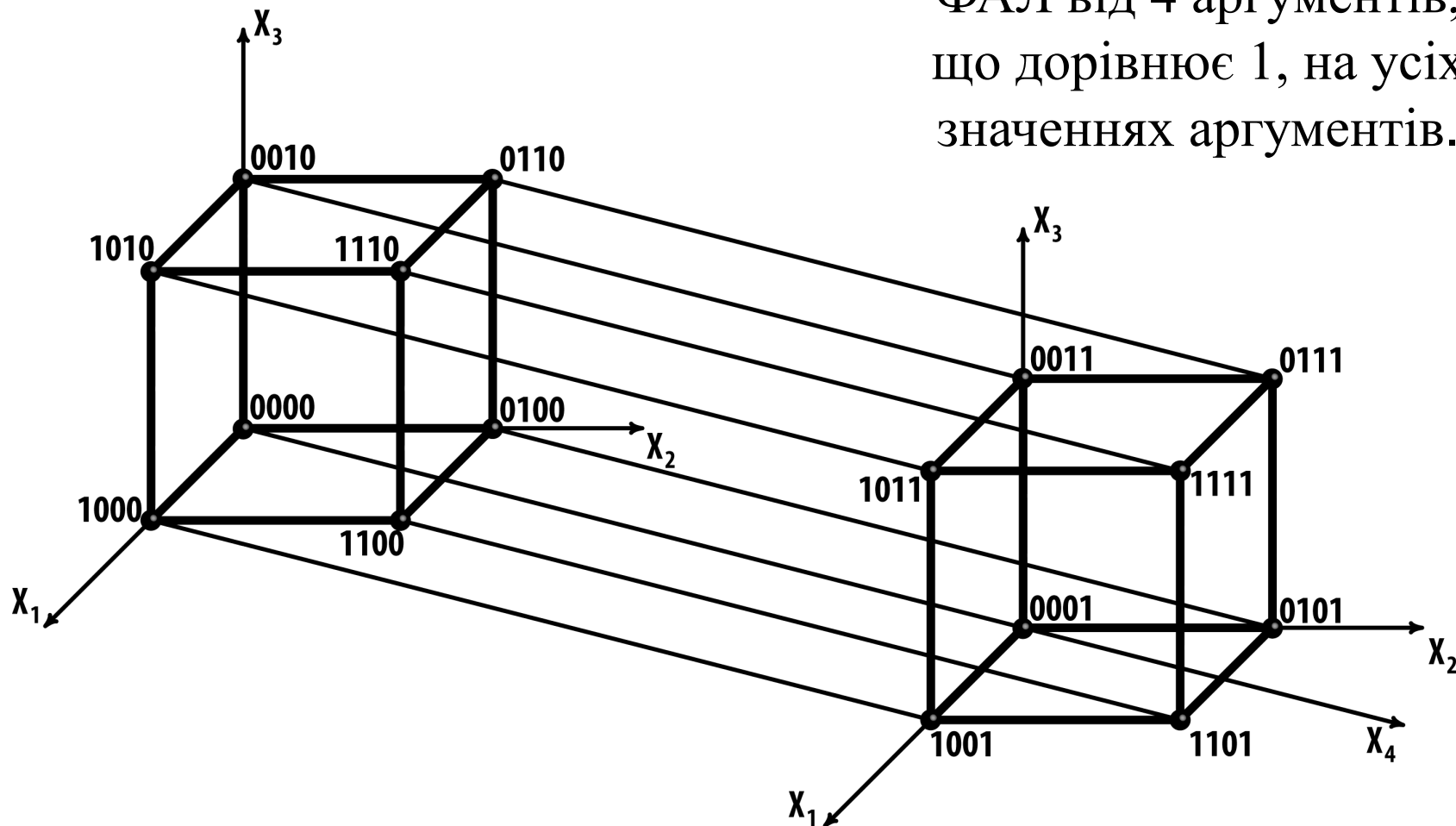
Тривимірний куб ($n=3$)



ФАЛ від 3 аргументів, що дорівнює 0, на усіх значеннях аргументів.

Чотиривимірний куб ($n = 4$)

ФАЛ від 4 аргументів,
що дорівнює 1, на усіх
значеннях аргументів.



Функції алгебри логіки одного аргументу

Кількість функцій алгебри логіки від одного аргументу за теоремою ФАЛ = 4.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

- $f_0(x)=0$ – константа нуль, тотожній нуль або «хибність»;
- $f_1(x) = x$ – змінна x ;
- $f_2(x) = \bar{x}$ – заперечення x , інверсія x (“не” x).
- $f_3(x)=1$ – константа одиниця, тотожна одиниця, «істина»;

Функції алгебри логіки двох аргументів

- Кількість різних ФАЛ від двох аргументів одно $= 16$.
- З них тільки 10 істотно залежать від x і y .
- Важливість цих функцій полягає в тому, що з них можна побудувати будь-які ФАЛ, причому двома способами:
 - а) шляхом перенумерації аргументів;
 - б) шляхом підстановки в функцію нових функцій замість аргументу.

Кон'юнкція, логічне «і», логічне множення

$$f(x, y) = x \wedge y = x \cdot y = x \& y$$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диз'юнкція, логічне «або», логічне додавання

$$f(x, y) = x \vee y$$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Імплікація від x до y або логічний наслідок

$$f(x, y) = x \rightarrow y$$

x	y	$f(x, y)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Еквівалентність, рівнозначність, тотожність

$$f(x, y) = x \equiv y \qquad f(x, y) = x \approx y$$

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Додавання за модулем 2, нерівнозначність

$$f(x, y) = x \oplus y$$

$$f(x, y) = x \Delta y$$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Штрих Шеффера , логічне «і-не», заперечення кон'юнкції

$$f(x,y) = x | y = \overline{x \cdot y}$$

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрілка Пирса, функція Вебба, логічне «або-не» , заперечення диз'юнкції

$$f(x,y) = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

x	y	f(x,y)
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Умовні пріоритети булевих функцій

- 1. $()$
- 2. заперечення $(\bar{x})$
- 3. $\&, |, \downarrow$
- 4. $\vee, \oplus, \rightarrow, \equiv$
- **Зауваження.** У межах одного пріоритету операції у виразі виконуються зліва направо.

Рівність ФАЛ

- ФАЛ $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називаються **рівними**, якщо вони приймають однакові значення на всіх можливих наборах аргументів.

Для рівних ФАЛ відповідні стовпці в таблиці істинності збігаються.

Фіктивні аргументи ФАЛ

- ФАЛ називається **істотно залежною від аргументу** x_i , якщо має місце нерівність:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \neq f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

У протилежному випадку кажуть, що функція **не істотно залежить** від x_i , тоді x_i є її **фіктивним аргументом**.

Алгоритм знаходження фіктивних аргументів

Для знаходження фіктивних аргументів ФАЛ задають таблично:

1) розбити таблицю істинності на 2 підтаблиці за підмножинами наборів аргументів ФАЛ :

T_0 — підмножина наборів аргументів, де ФАЛ приймає значення 0;

T_1 — підмножина наборів аргументів, де функція приймає значення 1.

2) для перевірки фіктивності аргументу x_i у обох підтаблицях умовно викреслюємо стовпець, що йому відповідає, і перевіряємо, чи не з'явилися у двох підмножинах T_0 та T_1 однакові набори.

Якщо такі набори не з'явилися, то x_i є фіктивним.

- *Наприклад*

Дано: наступна ФАЛ

$$F(x, y, z) = x \equiv y \downarrow z \oplus y \& (\overline{z \rightarrow x})$$

- Проставити пріоритети.

Скласти таблицю істинності функції 3-х змінних.

Зобразити функцію графічно.

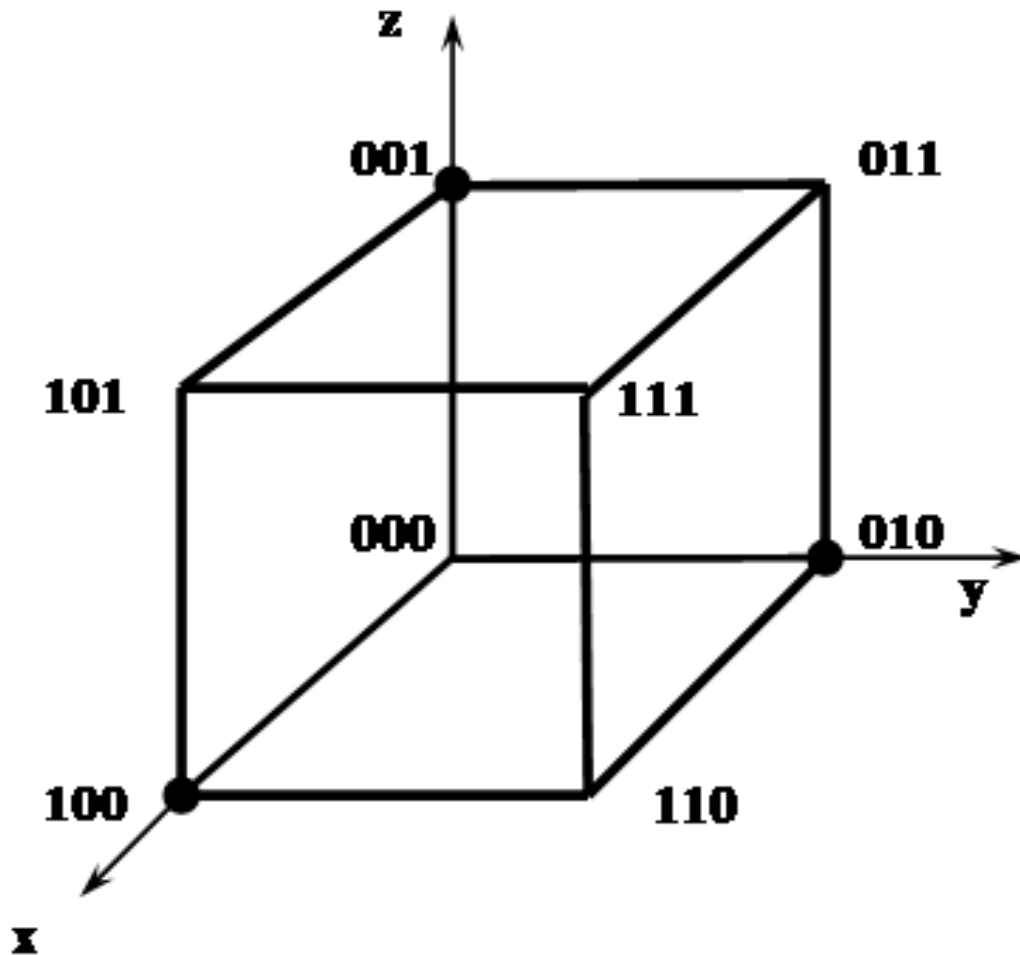
2

$$F(x, y, z) = x \equiv y \downarrow z \oplus y \& (\overline{z \rightarrow x})$$

5 3 6 4 1

№	x	y	z	1 $z \rightarrow x$	2 $\overline{z \rightarrow x}$	3 $y \downarrow z$	4 $y \cdot 2$	5 $x \equiv 3$	F(x,y,z) $5 \oplus 4$
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1
2	0	1	0	1	0	0	0	1	1
3	0	1	1	0	1	0	1	1	0
4	1	0	0	1	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	0	0	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Зображення функції $F(x,y,z)$ на кубі:



- Таблиця істинності для функції $F(x,y,z)$ має вигляд. Знайдемо фіктивні аргументи.

x	y	z	$F(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Підтаблиці для множин

T_0 T_1

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

x	y	z	F(x,y,z)
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1

- Якщо викреслити аргумент x у множинах T_0 та T_1 , то з'являться однакові набори в обох підтаблицях: наприклад – 00, 01, 10.
- Отже, x не є фіктивним аргументом функції $F(x,y,z)$.
- Аналогічно, для аргументів y і z .
- У результаті, функція $F(x,y,z)$ не має фіктивних аргументів.

Основні закони булевої алгебри для операцій $\{\&, \vee, \neg\}$

■ Комутативність

$$x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$$

$$x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$$

■ Асоціативність

$$x_1 \& (x_2 \& x_3) = (x_1 \& x_2) \& x_3$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$$

■ Дистрибутивність

$$x_1 \& (x_2 \vee x_3) = x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3$$

$$x_1 \vee (x_2 \& x_3) = (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3)$$

■ Закони де Моргану

$$\overline{x_1 \& x_2} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$$

$$\overline{x_1 \vee x_2} = \bar{x}_1 \& \bar{x}_2$$

■ Закони поглинання

$$X_1 \vee X_1 X_2 = X_1$$

$$X_1 (X_1 \vee X_2) = X_1$$

■ Правила склеювання

$$X_1 X_2 \vee X_1 \bar{X}_2 = X_1$$

$$(X_1 \vee X_2) \& (X_1 \vee \bar{X}_2) = X_1$$

■ Ідемпотентність: $X \vee X = X$

$$X \& X = X$$

■ Закон заперечення заперечення:

$$\overline{\overline{X}} = X$$

■ Закон вилучаючого третього:

$$X \vee \overline{X} = 1$$

■ Закон протиріччя: $X \& \overline{X} = 0$

■ Властивості констант

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \& 1 = x$$

$$x \& 0 = 0$$

Вираз елементарних ФАЛ через $\{\&, \vee, \neg\}$

$$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \equiv x_2} = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

$$x_1 \equiv x_2 = \overline{x_1 \oplus x_2} = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} = \overline{x_1 \oplus x_2}$$

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \overline{x_2}$$

Властивості функцій Шеффера і Вебба

■ 1. Комутативність

$$x_1 \mid x_2 = x_2 \mid x_1$$

$$x_1 \downarrow x_2 = x_2 \downarrow x_1$$

■ 2. Не асоціативність

$$(x_1 \mid x_2) \mid x_3 \neq x_1 \mid (x_2 \mid x_3)$$

$$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3)$$

- Функції $\downarrow$ і $|$ зв'язані співвідношеннями аналогічними формулам де Моргана

$$x_1 | x_2 = \overline{x_1 \downarrow x_2}$$

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 | x_2}$$

$$x | x = \bar{x}$$

$$x \downarrow x = \bar{x}$$

$$x | 1 = \bar{x}$$

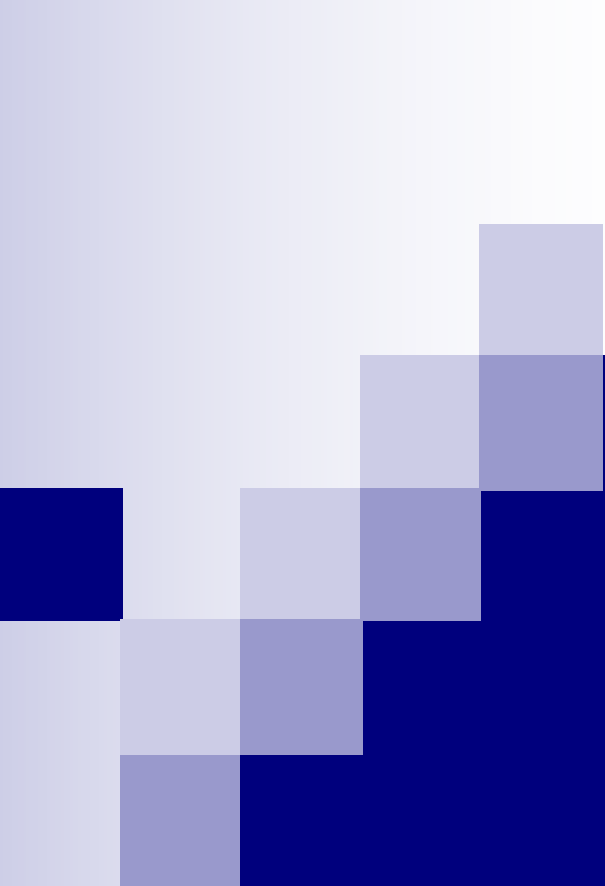
$$x \downarrow 0 = \bar{x}$$

$$x | \bar{x} = 1$$

$$x \downarrow \bar{x} = 0$$

$$x | 0 = 1$$

$$x \downarrow 1 = 0$$



Тема 4

Аналітичний запис ФАЛ

**Канонічні форми
представлення ФАЛ**

Тема 4 Аналітичний запис ФАЛ

План

- 1. Канонічне аналітичне представлення ФАЛ. Основні визначення.
- 2. Диз'юнктивна (ДНФ) та кон'юнктива нормальні форми (КНФ). Досконалі форми (ДДНФ та КДНФ). Алгоритми побудови.
- 3. Повні системи ФАЛ. Базиси. Мінімальні базиси. Універсальний базис.

Основні визначення

- **Буква** - це змінна або її заперечення.
- Кон'юнкція називається **елементарною**, якщо в ній кожна змінна зустрічається не більше одного разу.
- Наприклад:

$\bar{x}, x y z, \bar{x} \bar{y}, x \bar{y} \bar{z},$

$\bar{x}x, x y \bar{x}, \bar{x} y y, z \bar{y} \bar{z}$

- Диз'юнкція елементарних кон'юнкцій називається **диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)**.
- **Ранг кон'юнкції** - це кількість букв, які її утворюють.
- Для функції від n змінних ДНФ, що складається з кон'юнкцій рангу n , називається **диз'юнктивною досконалою нормальною формою (ДДНФ)**.

■ Наприклад

Дано: наступна ФАЛ

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z} \rightarrow x\overline{z}$$

- Покроково перевести ФАЛ в ДНФ.
- Розв'язання.

Проставимо пріоритети:

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z} \rightarrow x \cdot \overline{z}$$

7 5 6 3 2 1

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7
5
6
3
2
1

№	x	y	z	1 $\bar{z}$	2 $x\bar{z}$	3 $z \rightarrow x\bar{z}$	4 $\bar{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$
0	0	0	0							
1	0	0	1							
2	0	1	0							
3	0	1	1							
4	1	0	0							
5	1	0	1							
6	1	1	0							
7	1	1	1							

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7
5
6
3
2
1

№	x	y	z	1 $\bar{z}$	2 $x\bar{z}$	3 $z \rightarrow x\bar{z}$	4 $\bar{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$
0	0	0	0	1						
1	0	0	1	0						
2	0	1	0	1						
3	0	1	1	0						
4	1	0	0	1						
5	1	0	1	0						
6	1	1	0	1						
7	1	1	1	0						

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{y} \equiv \mathbf{y} | \mathbf{z} \wedge \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{z}}$$

№	x	y	z	$\frac{1}{\bar{z}}$	$\frac{2}{x\bar{z}}$	$\frac{3}{z \rightarrow x\bar{z}}$	$\frac{4}{\bar{3}}$	$\frac{5}{y z}$	$\frac{6}{5 \wedge 4}$	$\frac{7}{y \equiv 6}$
0	0	0	0	1	0					
1	0	0	1	0	0					
2	0	1	0	1	0					
3	0	1	1	0	0					
4	1	0	0	1	1					
5	1	0	1	0	0					
6	1	1	0	1	1					
7	1	1	1	0	0					

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7
5
6
3
2
1

№	x	y	z	1 $\bar{z}$	2 $x\bar{z}$	3 $z \rightarrow x\bar{z}$	4 $\bar{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$
0	0	0	0	1	0	1				
1	0	0	1	0	0	0				
2	0	1	0	1	0	1				
3	0	1	1	0	0	0				
4	1	0	0	1	1	1				
5	1	0	1	0	0	0				
6	1	1	0	1	1	1				
7	1	1	1	0	0	0				

4

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7
5
6
3
2
1

№	x	y	z	1 $\bar{z}$	2 $x\bar{z}$	3 $z \rightarrow x\bar{z}$	4 $\bar{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$
0	0	0	0	1	0	1	0			
1	0	0	1	0	0	0	1			
2	0	1	0	1	0	1	0			
3	0	1	1	0	0	0	1			
4	1	0	0	1	1	1	0			
5	1	0	1	0	0	0	1			
6	1	1	0	1	1	1	0			
7	1	1	1	0	0	0	1			

4

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7
5
6
3
2
1

№	x	y	z	1 $\bar{z}$	2 $x\bar{z}$	3 $z \rightarrow x\bar{z}$	4 $\bar{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$
0	0	0	0	1	0	1	0	1		
1	0	0	1	0	0	0	1	1		
2	0	1	0	1	0	1	0	1		
3	0	1	1	0	0	0	1	0		
4	1	0	0	1	1	1	0	1		
5	1	0	1	0	0	0	1	1		
6	1	1	0	1	1	1	0	1		
7	1	1	1	0	0	0	1	0		

4

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7 5 6 3 2 1

№	x	y	z	1 $\bar{z}$	2 $x\bar{z}$	3 $z \rightarrow x\bar{z}$	4 $\bar{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	
4	1	0	0	1	1	1	0	1	0	
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	
6	1	1	0	1	1	1	0	1	0	
7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	

4

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7
5
6
3
2
1

№	x	y	z	1 $\bar{z}$	2 $x\bar{z}$	3 $z \rightarrow x\bar{z}$	4 $\bar{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0
6	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0

Покрокове перетворення $F(x, y, z)$ в ДНФ

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

4
7 5 6 3 2 1

Перші два кроки перетворення
в ДНФ не потребують.

1. $\bar{z}$ – ДНФ

2. $x\bar{z}$ – ДНФ

Вираз елементарних ФАЛ через

$$\{\&, \vee, \neg\}$$

$$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

$$x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1 \equiv x_2} = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

$$x_1 \equiv x_2 = x_1 x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} = \overline{x_1 \oplus x_2}$$

$$x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$$

$$x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \overline{x_2}$$

**!!! Див.
попередню
лекцію!!!**

$$F(x, y, z) = y \equiv y | z \wedge \overline{z} \rightarrow x \cdot \overline{z}$$

7 5 6 3 2 1

$$3. \quad \overline{z} \rightarrow x\overline{z} = \overline{z} \vee x\overline{z} = \overline{z}$$

№	x	y	z	1 $\overline{z}$	2 $x\overline{z}$	3 $\overline{z} \rightarrow x\overline{z}$
0	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0

Використані
закони:

$$x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$$

$$x_1 \vee x_1 x_2 = x_1$$

- закон поглинання

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \overline{z}}$$

7 5 6 3 2 1

$$4. \quad \overline{z \rightarrow x\overline{z}} = \overline{\overline{z}} = z$$

№	x	y	z	1 $\overline{z}$	2 $x\overline{z}$	3 $z \rightarrow x\overline{z}$	4 $\overline{3}$
0	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	0	0	1
4	1	0	0	1	1	1	0
5	1	0	1	0	0	0	1
6	1	1	0	1	1	1	0
7	1	1	1	0	0	0	1

Використані
закони:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

- закон
подвійного
заперечення

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z} \rightarrow x \cdot \overline{z}$$

7 5 6 3 2 1

5. $y|z = \overline{y} \wedge z = \overline{\overline{y} \vee \overline{z}}$

Використані закони:
закон де Моргана

№	x	y	z	1 $\overline{z}$	2 $x\overline{z}$	3 $z \rightarrow x\overline{z}$	4 $\overline{3}$	5 $y z$	$\overline{y}$	$\overline{y} \vee \overline{z}$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
6	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1
7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z} \rightarrow x \cdot \overline{z}$$

7 5 6 3 2 1

$$6. \quad 5 \wedge 4 = (\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot z = \overline{y} \cdot z \vee \overline{z} \cdot z = \overline{y}z$$

$$6. \quad 5 \wedge 4 = (\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot z = ?$$

Дистрибутивний
закон

$$= (\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot z = \overline{y} \cdot z \vee \overline{z} \cdot z =$$

$$\begin{aligned} x_1 \& (x_2 \vee x_3) &= x_1 \& x_2 \vee x_1 \& x_3 \\ x_1 \vee (x_2 \& x_3) &= (x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3) \end{aligned}$$

$$= (\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot z = \overline{y} \cdot z \vee \mathbf{0} =$$

$$x \& \overline{x} = \mathbf{0}$$

Закон протиріччя

$$= (\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot z = \overline{y} \cdot z$$

$$x \vee \mathbf{0} = x$$

Властивості констант

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z} \rightarrow x \cdot \overline{z}$$

7 5 6 3 2 1

$$6. \quad 5 \wedge 4 = (\overline{y} \vee \overline{z}) \cdot z = \overline{y} \cdot z \vee \overline{z} \cdot z = \overline{y}z$$

Nº	x	y	z	1 $\overline{z}$	2 $x\overline{z}$	3 $z \rightarrow x\overline{z}$	4 $\overline{z}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	$\overline{y}$	$\overline{y}z$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1
6	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0

198

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge z \rightarrow x \cdot \bar{z}$$

7 5 6 3 2 1

$$\begin{aligned}
 7. \quad y \equiv 6 &= y \equiv \bar{y}z = y \cdot \bar{y}z \vee \bar{y} \cdot (\bar{\bar{y}}z) = \\
 &= \bar{y} \cdot (\bar{\bar{y}} \vee \bar{z}) = \bar{y} \cdot (y \vee \bar{z}) = \bar{y} \cdot y \vee \bar{y} \cdot \bar{z} = \\
 &= \bar{y} \cdot \bar{z}
 \end{aligned}$$

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \vee 0 = x$$

$$x \& 1 = x$$

$$x \& 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 x_1 \rightarrow x_2 &= \bar{x}_1 \vee x_2 \\
 x_1 \oplus x_2 &= x_1 \equiv x_2 = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \\
 x_1 \equiv x_2 &= x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = x_1 \oplus x_2 \\
 x_1 | x_2 &= x_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \\
 x_1 \downarrow x_2 &= x_1 \vee x_2 = \bar{x}_1 \bar{x}_2
 \end{aligned}$$

$$7. y \equiv 6 = \bar{y} \cdot \bar{z}$$

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z \rightarrow x \cdot \bar{z}}$$

7 5 6 3 2 1

Покрокові перетворення	Використані закони
$y \equiv 6 = y \equiv \bar{y} \cdot z =$	$x_1 \equiv x_2 = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$
$y \cdot (\bar{y} \cdot z) \vee \bar{y} \cdot (\overline{\bar{y} \cdot z}) =$ $= (y \cdot \bar{y}) \cdot z \vee \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} =$	Асоціативний закон: $(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$
$= 0 \cdot z \vee \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} =$ $= 0 \vee \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} =$ $= \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} =$	Закон протиріччя: $x \cdot \bar{x} = 0$ Властивості констант: $x \cdot 0 = 0, x \vee 0 = x$
$= \bar{y} \cdot (\overline{\bar{y}} \vee \bar{z}) =$	Закон де Моргана: $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
$= \bar{y} \cdot (y \vee \bar{z}) =$ $= y \cdot \bar{y} \vee \bar{y} \cdot \bar{z} =$	Закон подвійного заперечення: $\overline{\bar{x}} = x$ Дистрибутивний закон: $x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$
$= 0 \vee \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{y} \cdot \bar{z}$	$x \cdot \bar{x} = 0, \quad x \vee 0 = x$

$$F(x, y, z) = y \equiv y | z \wedge \overline{z} \rightarrow x \cdot \overline{z}$$

7 5 6 3 2 1

$$7. y \equiv 6 = ?$$

$$7. y \equiv 6 = y \equiv \bar{y} \cdot z =$$

$$x_1 \equiv x_2 = x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$$

$$= y \cdot \bar{y} \cdot z \vee \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} =$$

Закон протиріччя

$$x \& \bar{x} = 0$$

$$= 0 \cdot z \vee \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} = 0 \vee \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} =$$

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \\ x \vee 0 &= x \end{aligned}$$

$$= \bar{y} \cdot \overline{\bar{y} \cdot z} = \bar{y} \cdot (\bar{\bar{y}} \vee \bar{z}) =$$

Закон де Моргана

$$\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

$$= \bar{y} \cdot (y \vee \bar{z}) =$$

Дистрибутивний
закон

$$= y \cdot \bar{y} \vee \bar{y} \cdot \bar{z} =$$

$$x \& \bar{x} = 0$$

$$= 0 \vee \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{y} \cdot \bar{z}$$

$$x \vee 0 = x$$

$$F(x, y, z) = y \equiv y|z \wedge \overline{z} \rightarrow x \cdot \overline{z}$$

7 5 6 3 2 1

$$7. \quad y \equiv 6 = \overline{y} \overline{z}$$

№	x	y	z	1 $\overline{z}$	2 $x\overline{z}$	3 $z \rightarrow x\overline{z}$	4 $\overline{3}$	5 $y z$	6 $5 \wedge 4$	7 $y \equiv 6$	$\overline{y}$	$\overline{y} \overline{z}$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
6	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0

- **Довжина** ДНФ L - це кількість кон'юнкцій, які її складають.
- **Найкоротшою ДНФ** називається така ДНФ, яка має найменшу довжину L в порівнянні з іншими ДНФ, які еквівалентні даній функції.
- **Мінімальною ДНФ (МДНФ)** називається така ДНФ, яка має найменше число букв (сумарний ранг) в порівнянні з іншими ДНФ, які еквівалентні даній функції.

Алгоритм побудови диз'юнктивної досконалої нормальної форми

1. Вибрати в таблиці усі набори аргументів, на яких функція звертається в 1: T_1 .

2. Виписати кон'юнкції, які відповідають цим наборам аргументів.

Якщо аргумент x_i входить в даний набір як 1, він вписується без зміни в кон'юнкцію, яка відповідає цьому набору.

Якщо x_i входить в даний набір як 0, то в кон'юнкцію вписується його заперечення.

3. Всі отримані кон'юнкції з'єднуються між собою знаками диз'юнкцій.

Алгоритм побудови кон'юнктивної досконалої нормальної форми

1. Вибрати в таблиці усі набори аргументів, на яких функція звертається в 0: T_0 .
2. Виписати диз'юнкції, які відповідають цим наборам аргументів.

Якщо аргумент x_i входить в даний набір як 0, він вписується без зміни в диз'юнкцію, яка відповідає цьому набору.

Якщо x_i входить в даний набір як 1, то в диз'юнкцію вписується його заперечення.

3. Всі отримані диз'юнкції з'єднуються між собою знаками кон'юнкцій.

Приклад1: ФАЛ задана таблично.

№	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

■ ДДНФ $F(x,y,z) = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z}$

■ КДНФ

$$F(x,y,z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

Приклад 2

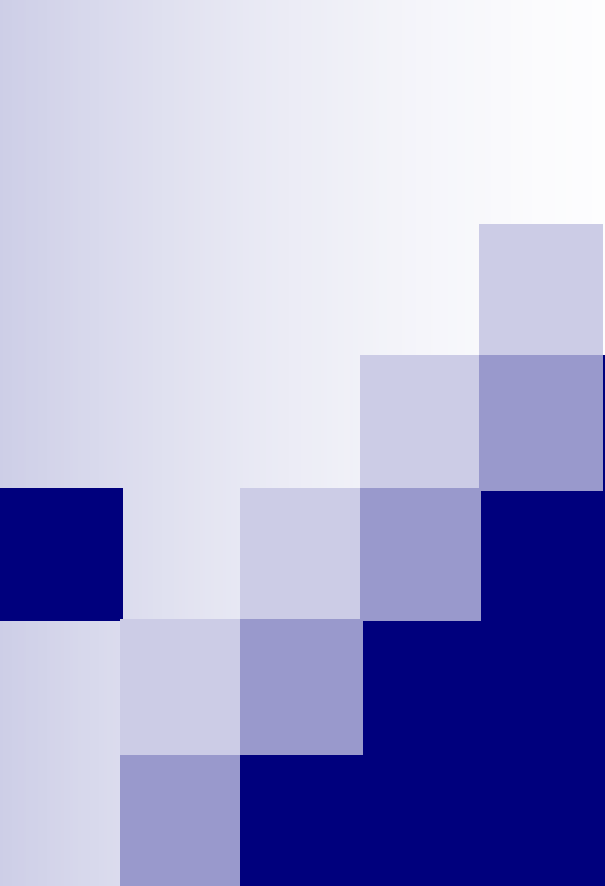
x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

■ ДДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3$$

■ КДНФ

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$$



Повні системи ФАЛ

- Система ФАЛ називається **повною** в деякому класі функцій, якщо будь-яка функція з цього класу може бути представлена суперпозицією цих функцій.
- Система ФАЛ, повна в деякому класі функцій, називається **базисом**.
- **Мінімальним базисом** називається такий базис, для якого видалення хоча б однієї з функцій, які його складають, робить цю систему функцій неповною.

- Будь-яка ФАЛ може бути представлена за допомогою трьох елементарних функцій:

$$\{\neg, \&, \vee\}.$$

- Ця система ФАЛ називається **універсальним базисом**.

- Найбільш популярні мінімальні базиси ФАЛ: $\{\neg, \vee\}$ $\{\neg, \&\}$ $\{\downarrow\}$ $\{\mid\}$

Продовження прикладу 1.

Представити ФАЛ $F(x,y,z)$ у базисах $\{\neg, \vee\}$ та $\{\neg, \&\}$.

Нехай ФАЛ задано ДДНФ:

$$F(x,y,z) = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z}$$

$$F(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z}$$

Для представлення функції $F(x, y, z)$ в базисі $\{\neg, \vee\}$ застосуємо закон де Моргана та закон заперечення заперечення до кожної з кон'юнкцій ДДНФ цієї функції:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \overline{\bar{x} \bar{y} z} \vee \overline{\bar{x} \bar{y} z} \vee \overline{\bar{x} y \bar{z}} = \\ &= \overline{\bar{x}} \vee \overline{\bar{y}} \vee \overline{z} \vee \overline{\bar{x}} \vee \overline{\bar{y}} \vee \overline{z} \vee \overline{\bar{x}} \vee \overline{y} \vee \overline{\bar{z}} \end{aligned}$$

- Для представлення функції $F(x, y, z)$ у базисі $\{\neg, \&\}$ застосуємо закон заперечення заперечення і закон де Моргана в цілому до ДДНФ цієї функції:

$$F(x, y, z) = \overline{\overline{x \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z}}} =$$

$$= \overline{\overline{x \bar{y} \bar{z}} \cdot \overline{\bar{x} \bar{y} z} \cdot \overline{\bar{x} y \bar{z}}}$$

$$F(x, y, z) = \bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee x \bar{y} \bar{z}$$

- Для подання цієї ж функції в базисі штрих Шеффера застосуємо наступні співвідношення до ДДНФ функції:

$$x \cdot y = \overline{x | y}$$

$$x \vee y = \overline{\bar{x} | \bar{y}}$$

$$\bar{x} = x | x$$

■ Позначимо

$$F(x, y, z) = \underbrace{x \bar{y} \bar{z}}_{\downarrow \underline{A}} \vee \underbrace{\bar{x} \bar{y} z}_{\downarrow \underline{B}} \vee \underbrace{\bar{x} y \bar{z}}_{\downarrow \underline{C}}$$

$$1. \quad \overline{\underline{A}} = \overline{(x \bar{y}) \bar{z}} = \overline{(x | \bar{y}) \bar{z}} = \overline{\overline{x | \bar{y} | \bar{z}}} = [(x | (y | y)) | (x | (y | y)) | (z | z)] |$$

$$| [(x | (y | y)) | (x | (y | y)) | (z | z)]$$

■ 2.

$$\overline{B} = (\overline{x} \cdot \overline{y}) \cdot z = \overline{\overline{x} \mid \overline{y} \mid z} = [((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid z] \mid [((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid z]$$

■ 3.

$$\overline{C} = \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} = \overline{\overline{x} \mid y \mid \overline{z}} = [((x \mid x) \mid y) \mid ((x \mid x) \mid y) \mid (z \mid z)] \mid [((x \mid x) \mid y) \mid ((x \mid x) \mid y) \mid (z \mid z)]$$

$$F(x, y, z) = (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee \overline{C} = (A \mid B) \vee \overline{C} = \overline{A \mid B \mid C} = [((A \mid B) \mid (A \mid B)) \mid C]$$

- Перевірити перетворення можна побудувавши таблицю істинності.

- Наприклад:

$$\overline{A} = \overbrace{[(x | \underbrace{(y | y)}_1) | (x | (y | y)) | \underbrace{(z | z)}_4]]}_{5} \overbrace{[(x | (y | y)) | (x | (y | y)) | (z | z)]}^6$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_2$
 $\underbrace{\quad\quad\quad}_3$

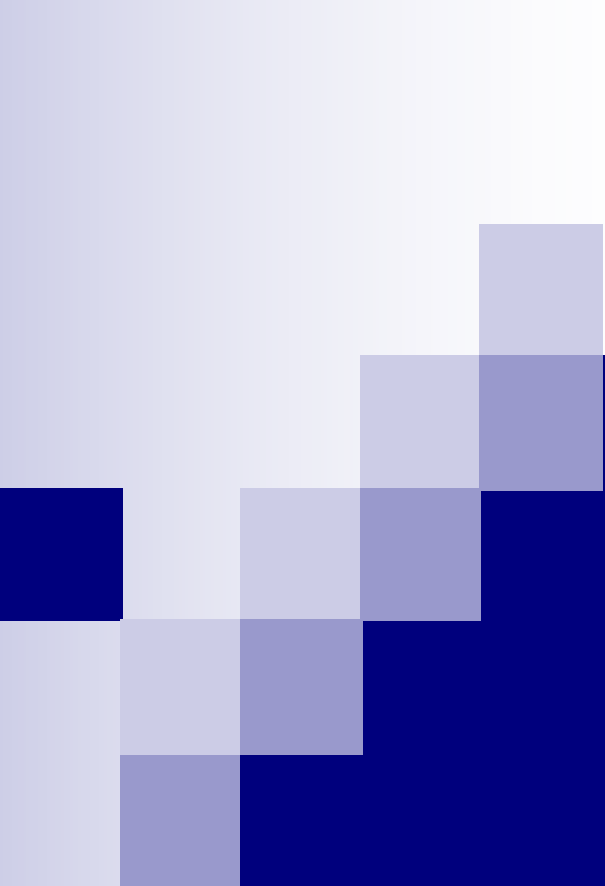
■ Таблиця істинності для $\overline{A}$

№	x	y	z	1	2	3	4	5	6	$x \overline{y} \overline{z}$
0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
3	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
6	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
7	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0

Аналогічно для інших частин і повністю для всієї функції $F(x,y,z)$.

$$F(x,y,z) = (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee \overline{C} = (A | B) \vee \overline{C} = \overline{A | B | C} = [(A | B) | (A | B)] | C$$

№	x	y	z	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{C}$	A	B	C	$A B$	$\overline{A B}$	$\overline{A B C}$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
2	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
3	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
5	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0
6	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0



Тема 5

МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Тема 5 Мінімізація ФАЛ

План

- 1. Загальні визначення. Мінімальна та найкоротша нормальні форми. Мінімізація в класі ДНФ.
- 2. Мінімізація на одиничному n -вимірному кубі. Скорочена та мінімальна ДНФ.
- 3. Мінімізація на картках Карно (діаграмах Вейча).
- 4. Таблично-аналітична мінімізація методом Квайна-Мак-Класкі.
- 5. Мінімізація неповністю визначених ФАЛ.

Загальні визначення

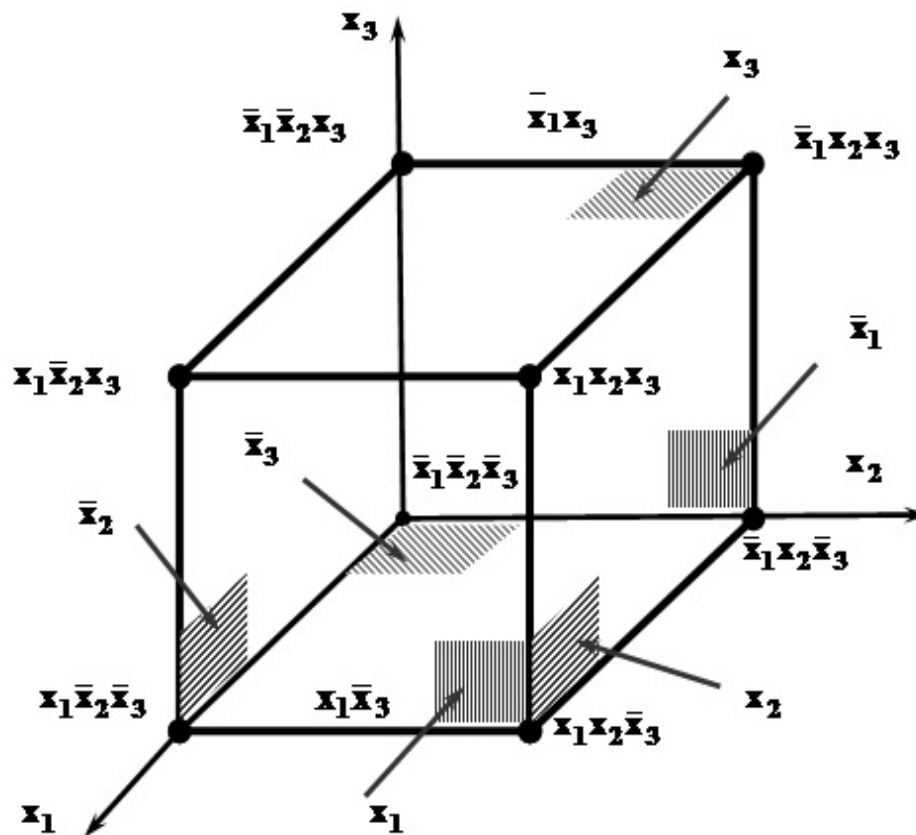
- **Буква** — це змінна або її заперечення.
- **Кон'юнкція** називається **елементарною**, якщо у ній кожна змінна зустрічається не більше одного разу.
- Диз'юнкція елементарних кон'юнкцій називається **диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)**.

- **Ранг кон'юнкції** — число букв, які її утворюють.
- Для ФАЛ від n змінних ДНФ, яка складається із кон'юнкцій рангу n , називається **диз'юнктивною досконалою нормальною формою (ДДНФ)**.

- **Довжина ДНФ L** – число кон'юнкцій, які її утворюють.
- **Найкоротша ДНФ** – ДНФ, яка має мінімальну довжину L у порівнянні із іншими ДНФ, що еквівалентні даній функції.
- **Мінімальна ДНФ (МДНФ)** – ДНФ, яка має мінімальне число букв (сумарний ранг) у порівнянні із іншими ДНФ, що еквівалентні даній функції.

Мінімізація ФАЛ на n-мірному кубі

Проблема побудови МДНФ для геометричного способу завдання ФАЛ на кубі



- Геометричні елементи: вершини, ребра, грані та куб.
- Зіставимо різним геометричним елементам куба: вершинам, ребрам, граням та кубам кон'юнкції різних рангів.
- Сума розмірності геометричного елемента та рангу відповідній йому кон'юнкції дорівнює числу аргументів ФАЛ.

- Кожний геометричний елемент меншого розміру поглинається геометричними елементами більшого розміру: точка належить ребру, ребро — грані і так далі.
- За аналогією, кожна кон'юнкція більшого рангу поглинається усіма кон'юнкціями меншого рангу: $x \vee xzy = x$, $x \vee xy = x$.
- Геометричні еквіваленти називають **інтервалами**.

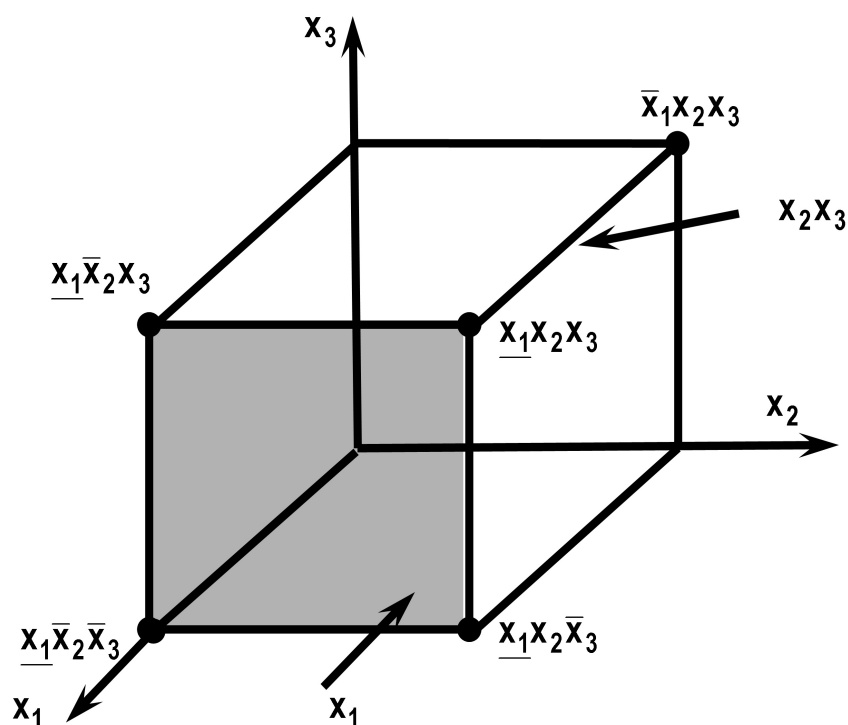
- **Інтервалом L -го рангу** називається така підмножина вершин куба, що відповідає кон'юнкціям рангу L .
- Наприклад, кон'юнкції x_1 відповідають 4 вершини: $\{100, 101, 110, 111\}$ – грань або інтервал першого рангу.
- Задання деякої ДНФ заданої ФАЛ еквівалентно заданню деякого покриття множини T_1 інтервалами, які визначаються кон'юнкціями в ДНФ.

- Інтервал J називається **максимальним**, якщо не існує ніякого іншого інтервалу J' , у якого ранг менше, ніж у J , і такого, що виконується наступне співвідношення:

$$J \subset J' \subset T_1.$$

Приклад

- Нехай f є функція алгебри логіки, яка дорівнює 1 у відмічених точках.



$f(x_1, x_2, x_3)$

$$J_1 = x_1; J_2 = x_1x_2; J_3 = x_2x_3$$

J1 и **J3** – максимальні інтервали,
J2 – не являється максимальним інтервалом.

- Задача про мінімізацію розглядається , як задача о знаходженні мінімальної ДНФ.
- Треба знайти покриття множини T_1 , при якому сумарний ранг R буде мінімальним:

$$R = \sum_{i=1}^n r_i,$$

де r_i - ранги усіх інтервалів, які образують покриття для заданої ФАЛ.

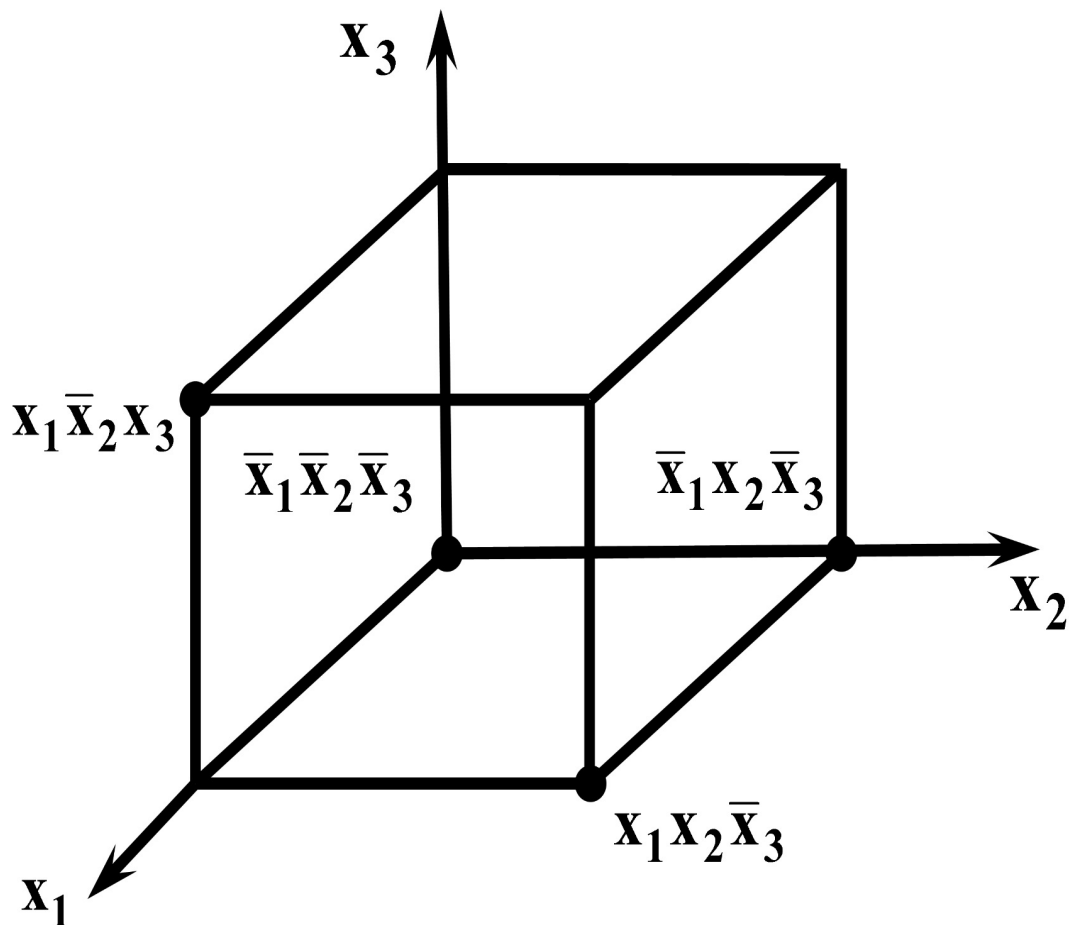
- ДНФ називається **скороченою (СДНФ)**, якщо вона відповідає покриттю множини T_1 усіма максимальними інтервалами.
- Мінімальна ДНФ утворюється зі СДНФ шляхом вилучення з покриття множини T_1 максимальними інтервалами деяких “зайвих” інтервалів.

■ ДДНФ R=12

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3$$

СДНФ=МДНФ $f_1(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$

R=7

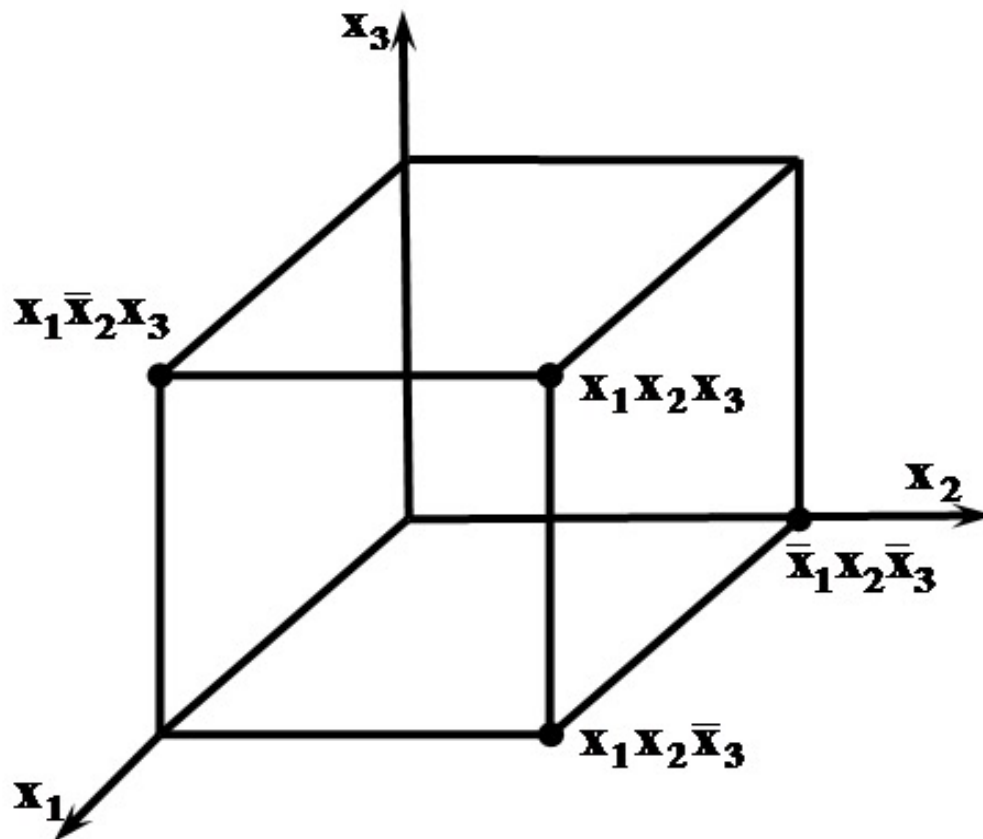


ДДНФ $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3$

R=12

■ СДНФ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3$ R=6

■ МДНФ $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$. R=4

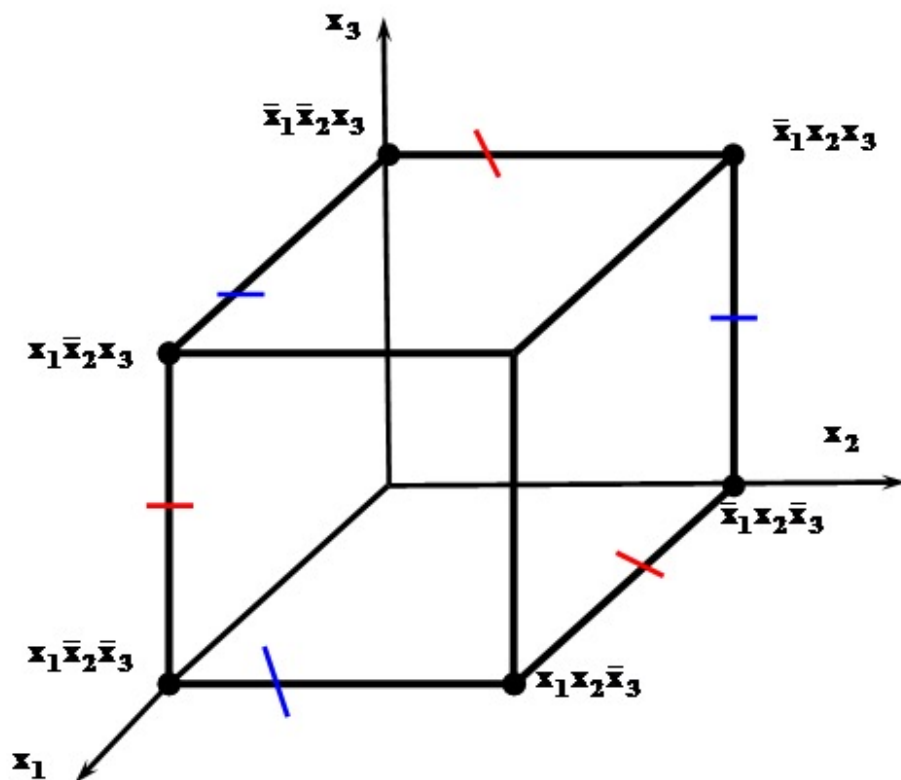


Мінімізація ФАЛ на n -мірному кубі

Алгоритм розв'язання задачі мінімізації:

- Побудова по заданій функції СДНФ;
- Викидання зі СДНФ “зайвих” максимальних інтервалів.

- Мінімальна форма неоднозначна, тому що може бути кілька мінімальних форм.



$$T1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$f_{\min,1} = x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_3$$

$$f_{\min,2} = \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3$$

- Досконала ДНФ або ДДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \\ \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \quad R = 18$$

- Скорочена ДНФ або СДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3;$$
$$R = 12$$

- Мінімальні ДНФ або МДНФ:

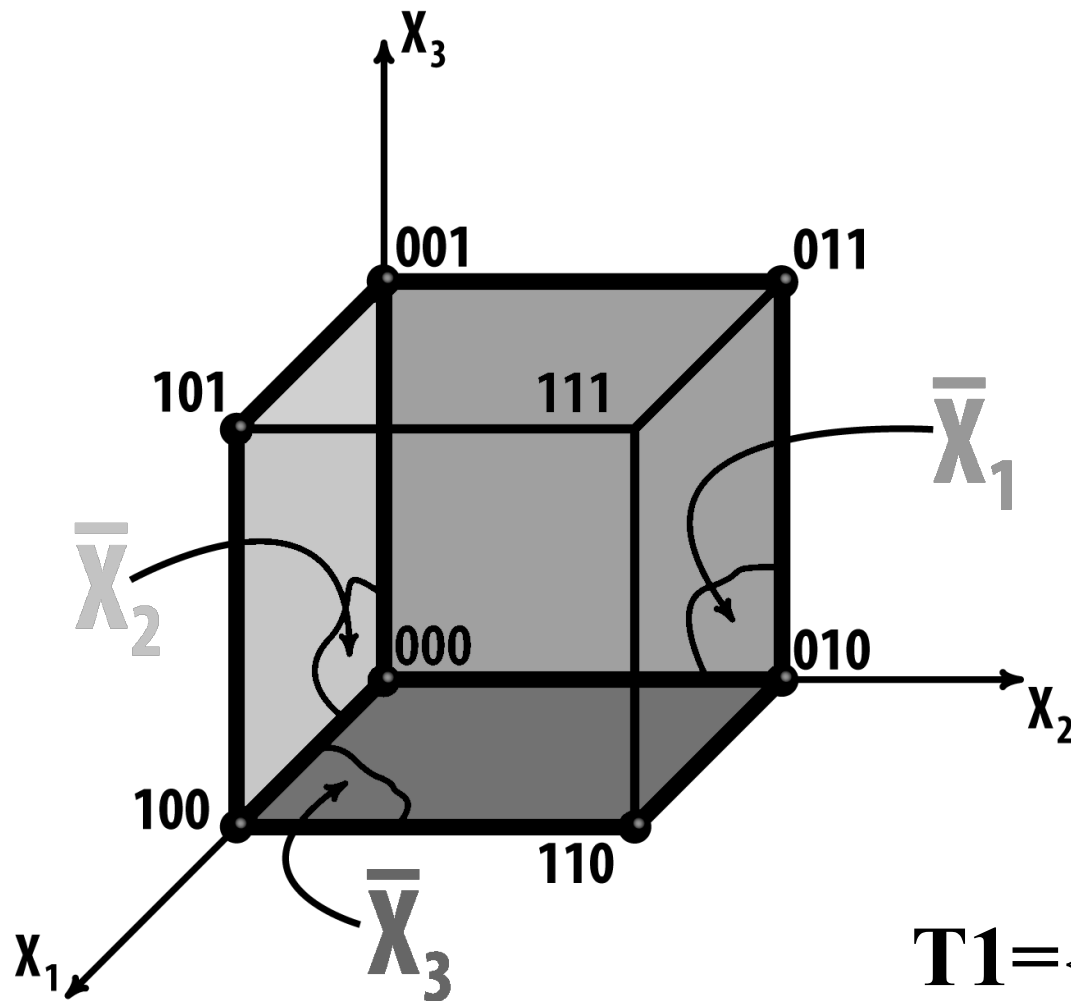
$$R = 6$$

$$f_{\min,1} = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_2 \bar{x}_3$$

$$f_{\min,2} = \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_3$$

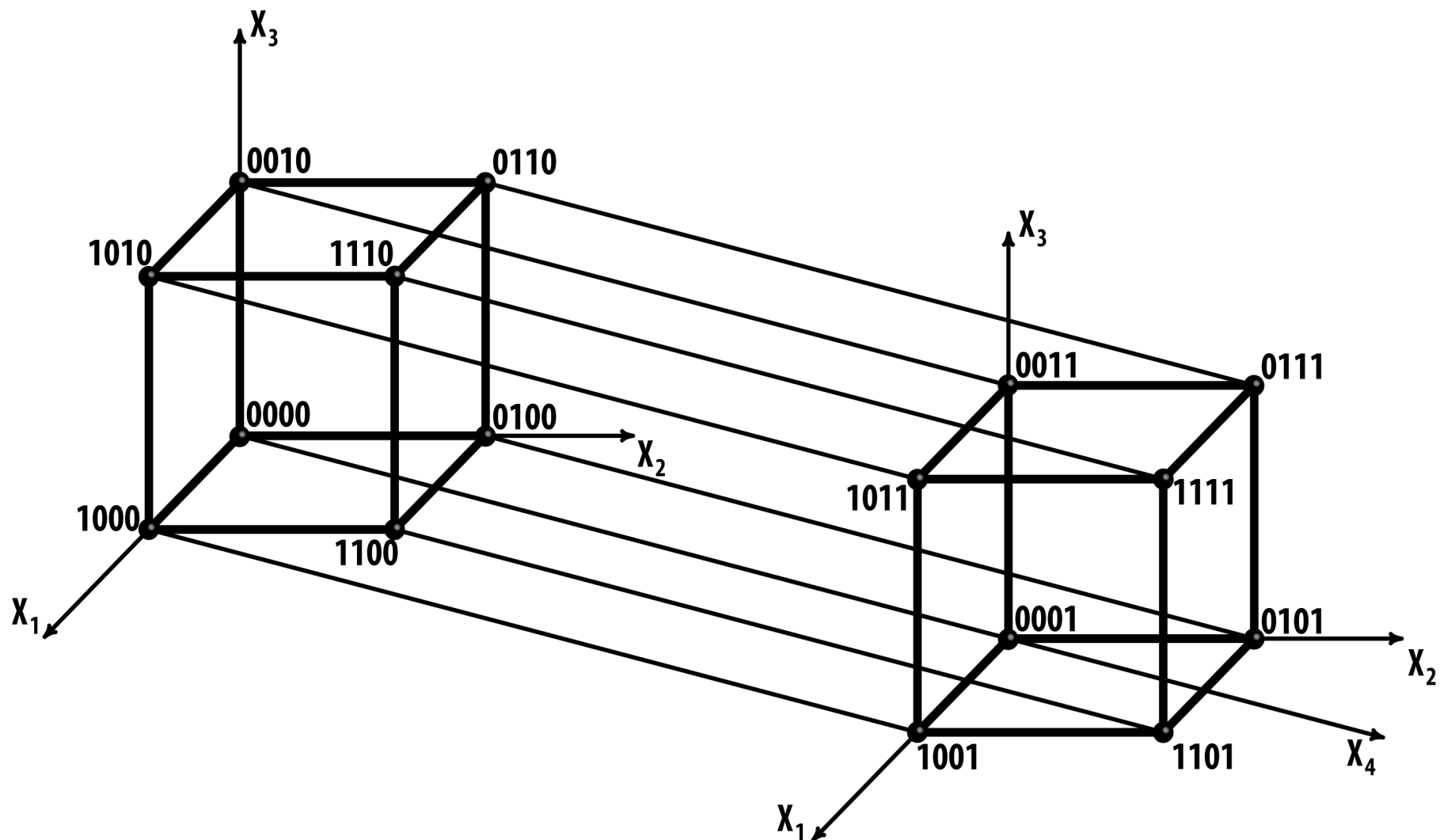
$$\text{СДН}\Phi = \text{МДН}\Phi \quad f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$$

$R=3$



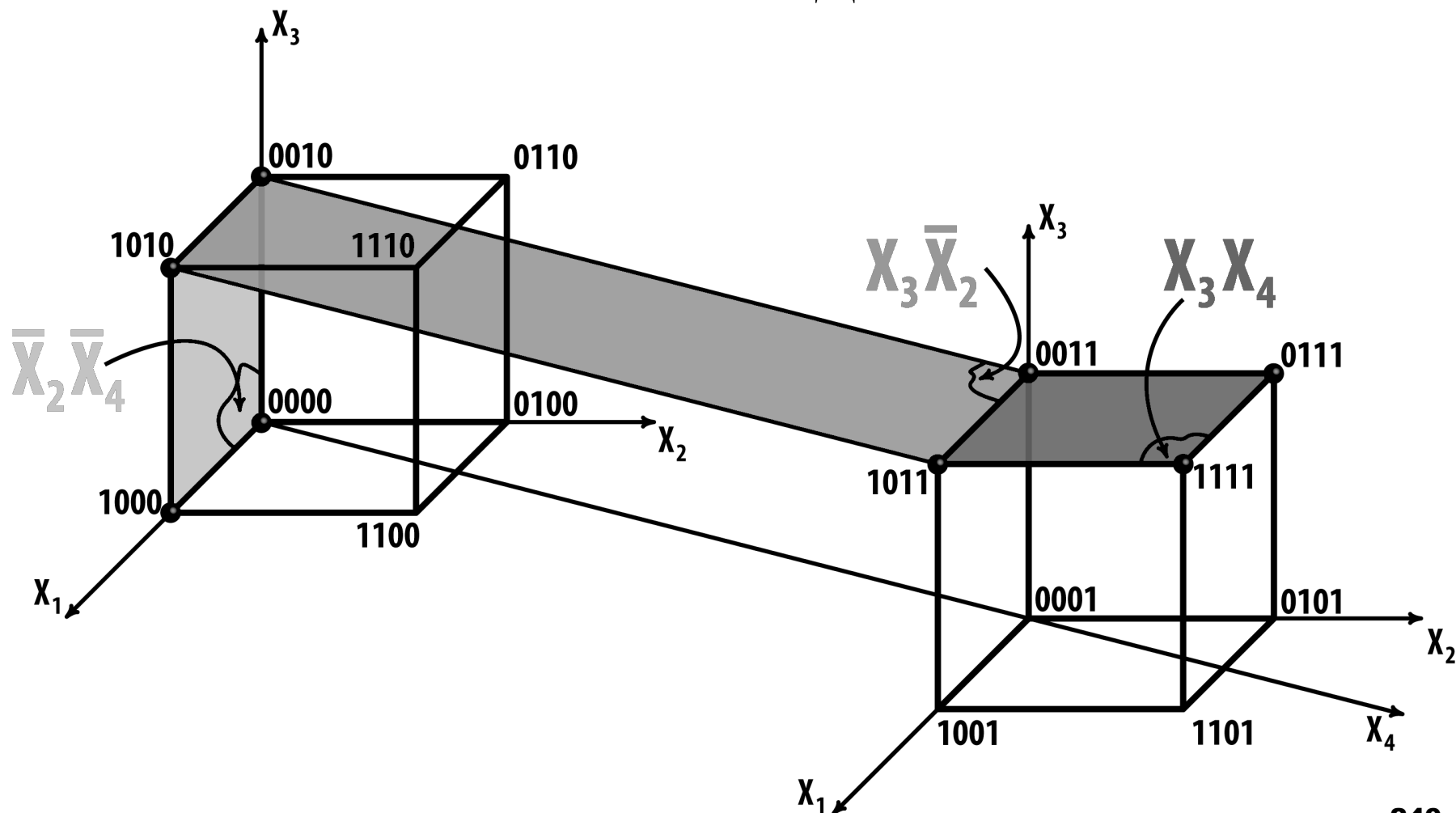
$$T1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Мінімізація ФАЛ на 4-вимірному кубі



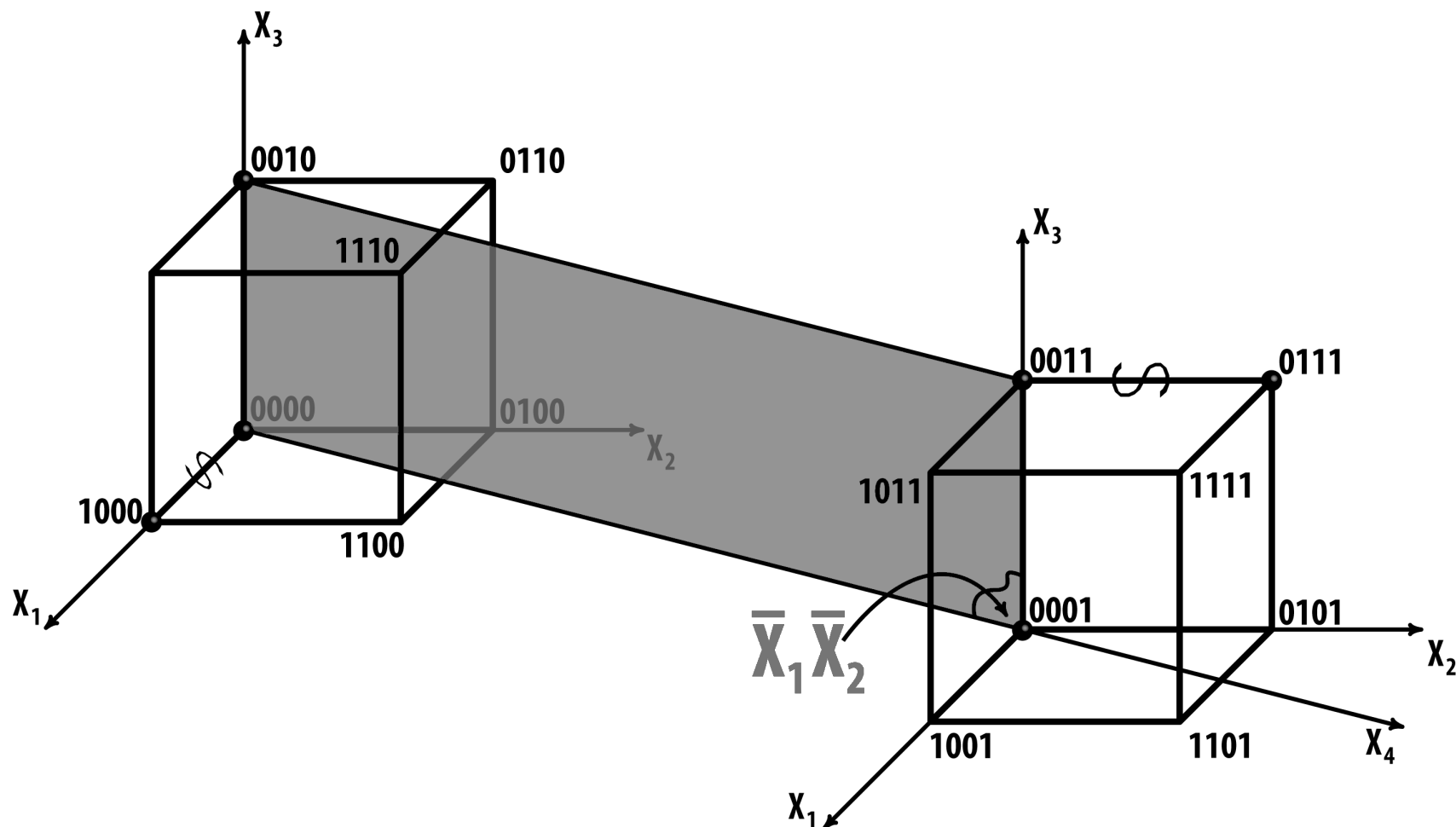
ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана $T_1 = \{0, 2, 3, 7, 8, 10, 11, 15\}$.

Знайти МДНФ.

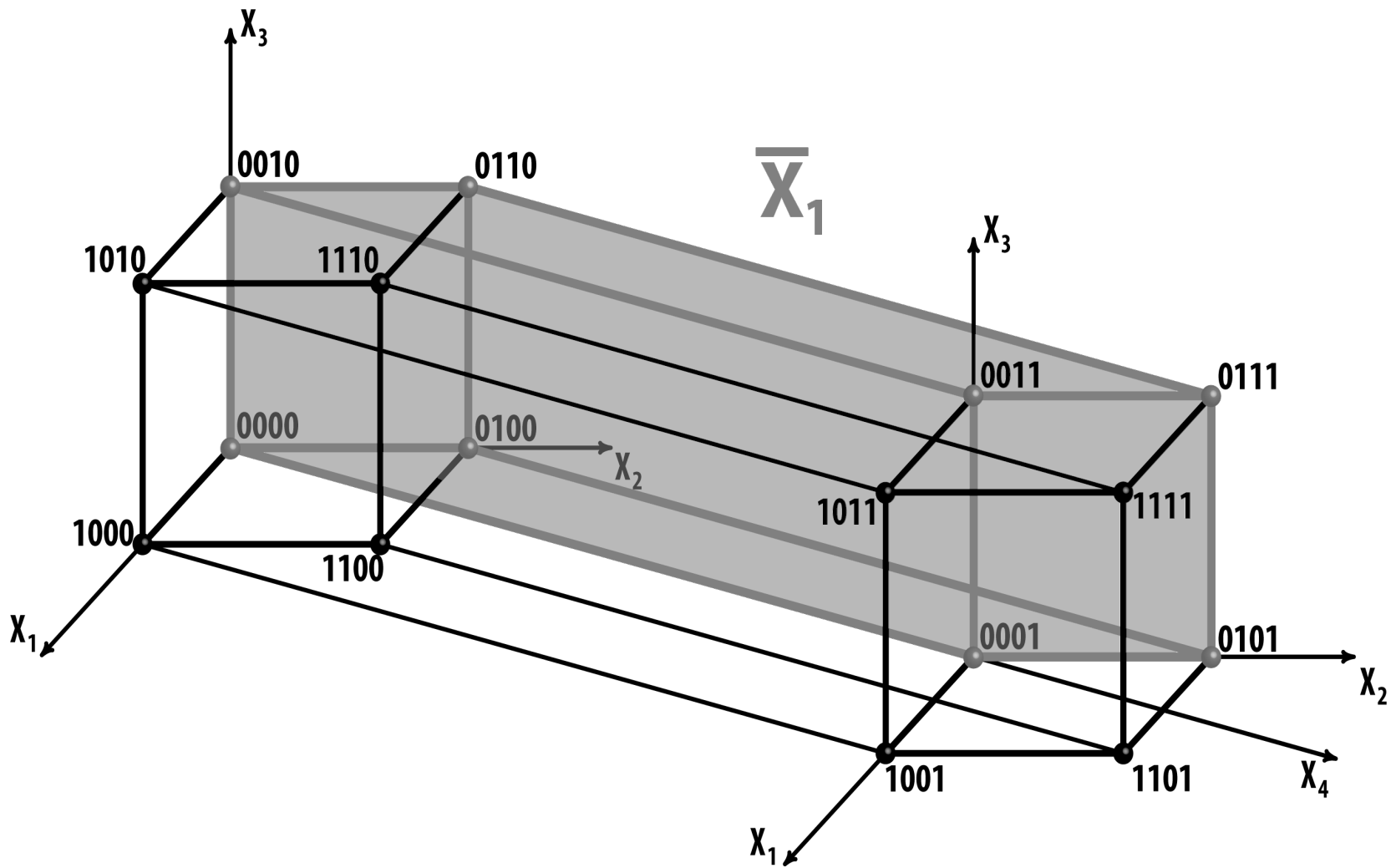


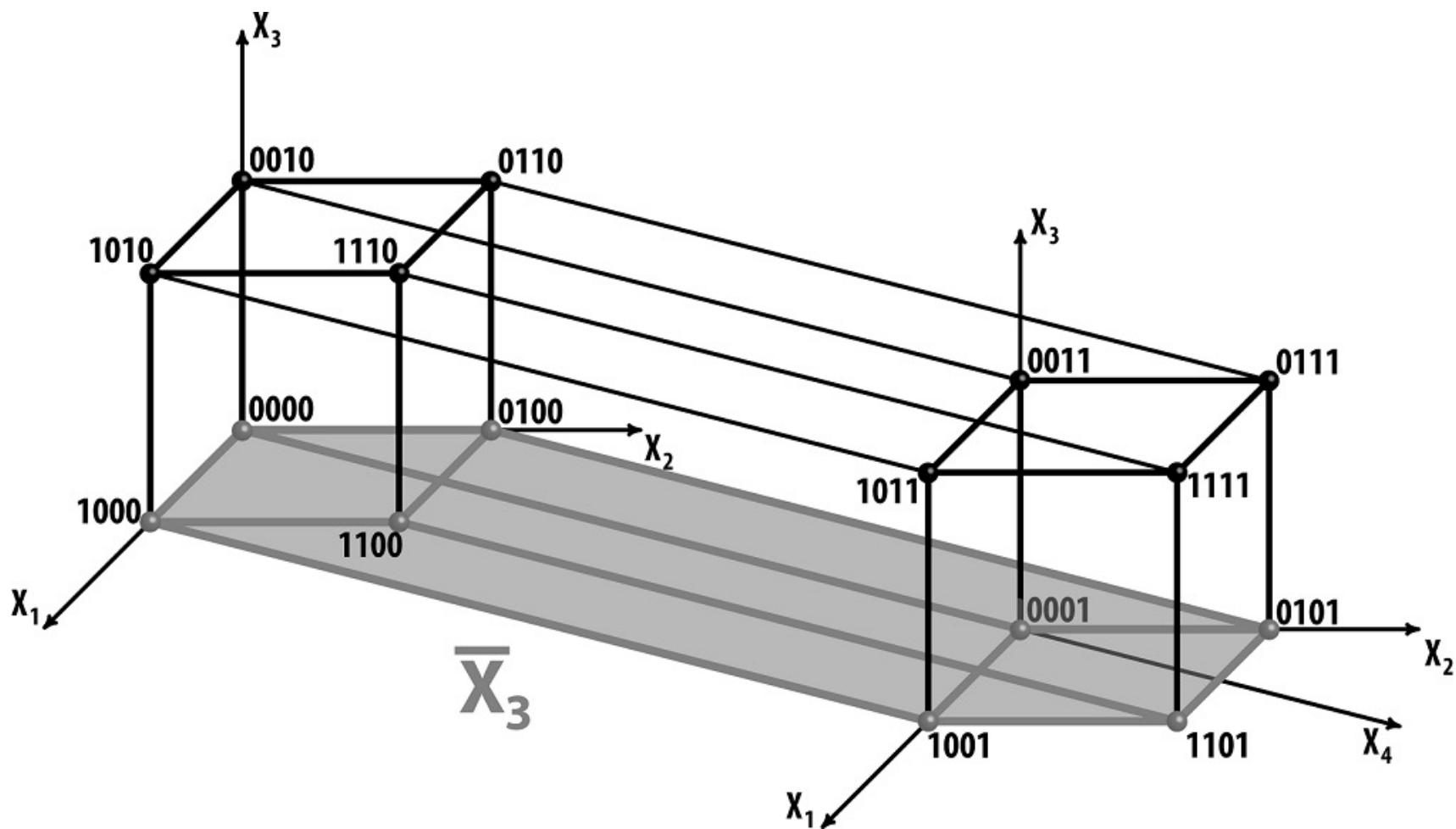
- СДНФ= $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 x_4, R = 6$
- МДНФ= $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_3 x_4, R = 4$

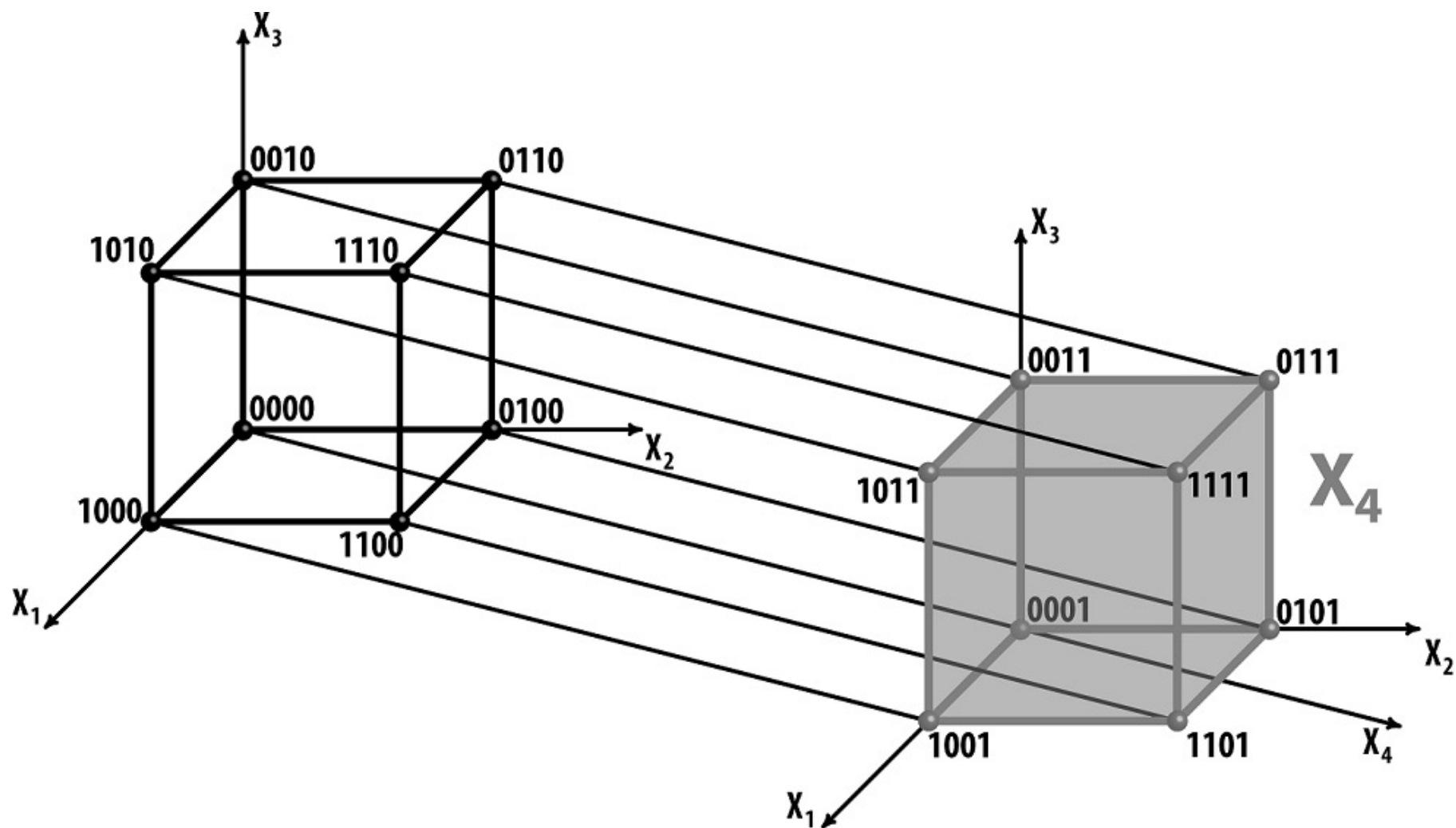
ФАЛ $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задана $T_1 = \{0, 1, 2, 3, 7, 8\}$.
Знайти МДНФ.

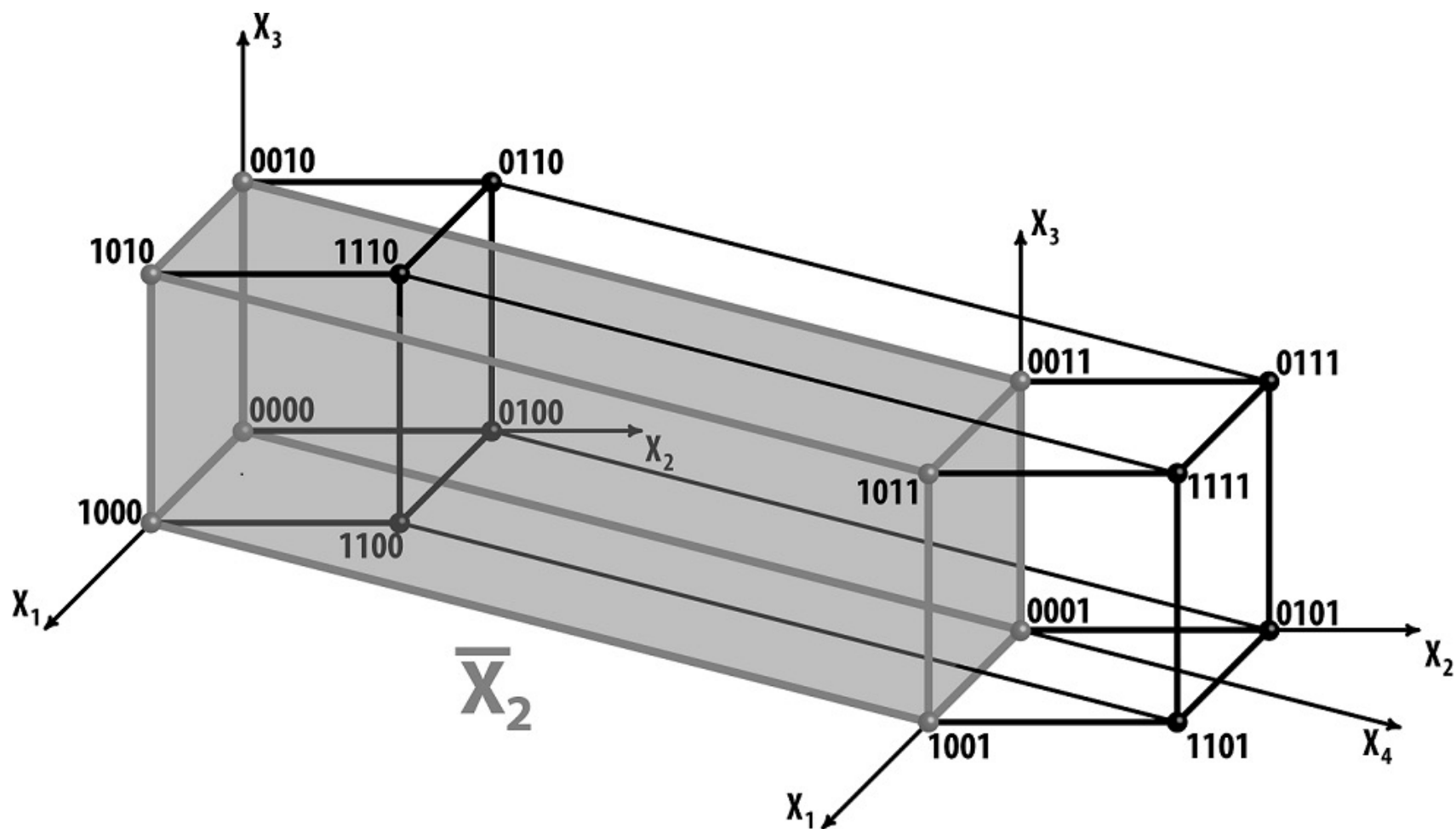


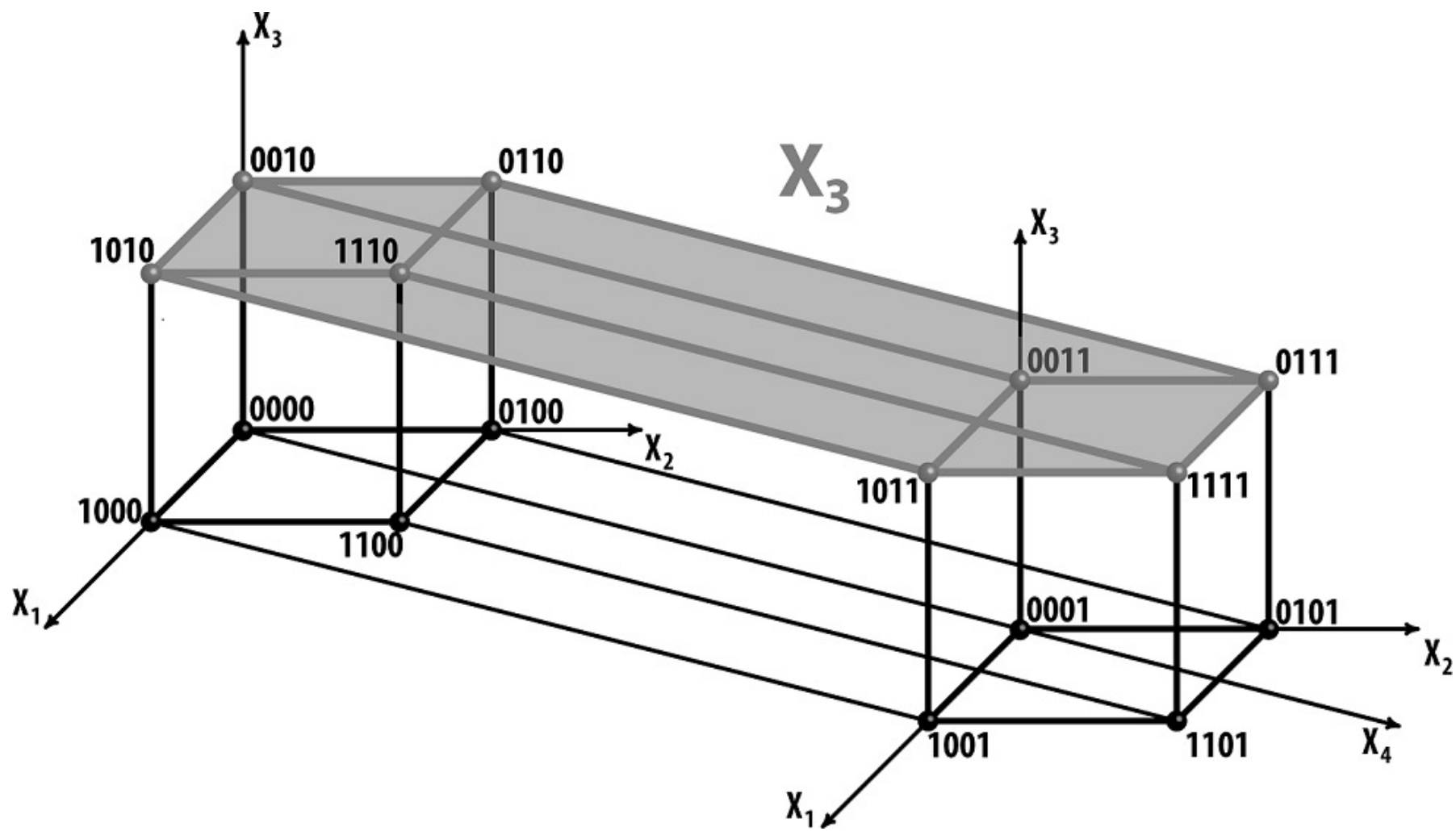
■ МДНФ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4$











Картки Карно

F		$x_3 x_4$			
		00	01	11	10
$x_1 x_2$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

Groupings:
 S_1 (blue): $x_1 x_2$
 S_2 (red): $x_3 x_4$
 S_3 (green): $x_1 x_3$

Графічний метод мінімізації: картки Карно-Вейча

Карти Карно використовуються при $n = 2 \div 6$.

При $n > 6$ - практично непридатні

Карти Карно -

- графічний метод відображення булевих функцій;
- графічний аналог таблиці істинності, що задає ФАЛ, організований таким чином, щоб полегшити процес склеювання;
- плоска розгортка n —вимірних кубів.

Основні принципи побудови карт Карно

- Карта Карно – спеціальна таблиця, що задає ФАЛ.
- Значення змінних розташовуються в заголовках рядків і стовпців карти.
- Кожному набору аргументів функції ставиться у відповідність одна комірка/клітинка таблиці.
- Значення змінних розташовуються так, щоб сусідні (що мають спільний кордон) рядки і стовпці відрізнялися значенням однієї змінної (для склеювання).
- Перший і останній рядки (стовпці) вважаються сусідніми.

Діаграми Вейча

Діаграми Вейча принципово не відрізняються від карт Карно.

Відмінності:

- порядок проходження наборів значень,
- позначення: Карно - $\{0,1\}$; Вейча - $\{x, y \dots\}$.

Карти Карно / діаграми Вейча, $n=2$

Карти Карно

$(x_1 \ x_2)$			
00	01	11	10

Діаграми Вейча

$x \backslash y$	1	0
1		
0		

	y	$\bar{y}$
x	xy	$x\bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x}y$	$\bar{x}\bar{y}$

Карти Карно / діаграми Вейча, n=3

Карти Карно

		$(x_2 \ x_3)$			
		00	01	11	10
(x_1)	0				
	1				

Діаграми Вейча

		y		z	
		$xy\bar{z}$	xyz	$x\bar{y}z$	$x\bar{y}\bar{z}$
x					
$\bar{x}$		$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
		x			

		y		$\bar{y}$	
		110	111	101	100
x					
$\bar{x}$		010	011	001	000
		$\bar{z}$	z	$\bar{z}$	z

Карти Карно / діаграми Вейча, n=4

Карти Карно

		$(x_3 x_4)$			
		00	01	11	10
$(x_1 x_2)$	00				
	01				
	11				
	10				

Діаграми Вейча

		y		$\bar{y}$		
x $\bar{x}$	$\bar{x}$					$\bar{w}$
	x					w
	$\bar{x}$					$\bar{w}$
	x					w
		$\bar{z}$	z	$\bar{z}$		

Приклад

N	x	y	z	F(x,y,z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

$F(x,y,z)$

$$T_1 = \{0, 2, 3, 7\}$$

$\begin{matrix} yz \\ x \end{matrix}$	00	01	11	10
0	1		1	1
1			1	

Карти Карно

Алгоритм отримання МДНФ на картах Карно

1. Будується карта Карно, відповідна даним ФАЛ.
2. Комірки або клітини карти об'єднуються в групи, що позначають операції склеювання. В об'єднанні беруть участь тільки сусідні одиниці.
3. Кількість комірок, що можна об'єднати в групу дорівнює: 2^n , $n = 2, 3, 4, \dots$

При цьому група може мати тільки квадратну або прямокутну форму.

Алгоритм отримання МДНФ на картах Карно

4. Задача склеювання полягає в знаходженні набору максимальних груп комірок. Кількість груп в такому наборі має бути мінімальною.

5. Максимальна група — це група, яка не входить цілком в жодну іншу групу.

Кожна одиниця карти Карно повинна входити хоча б в одну групу.

Алгоритм отримання МДНФ на картах Карно

6. Кожній максимальній групі комірок ставиться у відповідність елементарна кон'юнкція, яку складають змінні, що мають однакове значення для всіх комірок групи.

Змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідають одиничні значення, із запереченням — якщо нульові.

7. Диз'юнкція всіх отриманих кон'юнкцій і є скорочена ДНФ — СДНФ.

8. Видалення «зайвих» груп та отримання МДНФ.

Приклад: знайти МДНФ для ФАЛ

$$T_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Після склеювання 8
сусідніх комірок:

$$f_{\min} = \bar{x}_1, \quad R = 1$$

$x_3, x_4 \backslash x_1, x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11				
10				

Приклад: знайти МДНФ для ФАЛ

$$T_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12\}$$

$$f = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4$$

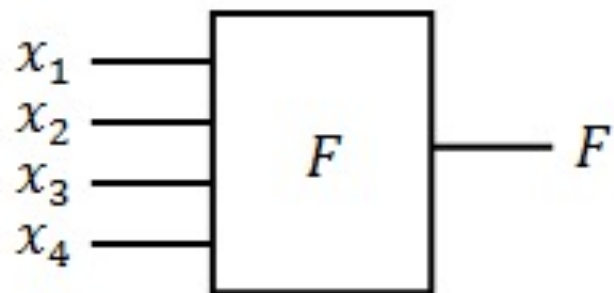
$$R = 3$$

$x_3, x_4 \backslash x_1, x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			
10	1			

Приклад: знайти МДНФ для ФАЛ
 $T_1 = \{0, 2, 8, 10\}$

$$f_{\min} = \bar{x}_2 \bar{x}_4$$

$$R = 2$$



$x_3, x_4 \backslash x_1, x_2$	00	01	11	10
00	1]			[1
01				
11				
10	1]			[1

Мінімізація частково визначених функцій

- Схеми, на входи яких деякі комбінації вхідних сигналів ніколи не подаються, породжують — заборонені комбінації. Для заборонених комбінацій вихідні сигнали не визначені: або 0, або 1.
- При синтезі таких схем можна довільно задати значення вихідних сигналів для заборонених комбінацій.
- Зазвичай довизначають так, щоб отримана схема була найбільш простою.

Мінімізація частково визначених функцій

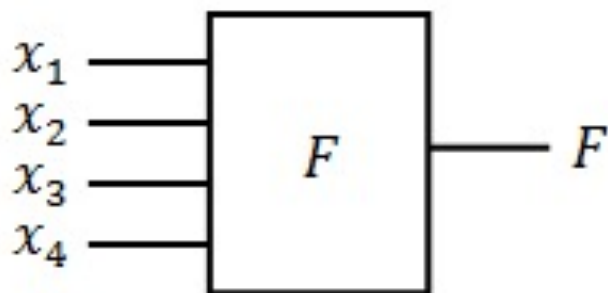
- Робота цифрових схем із забороненими комбінаціями вхідних сигналів описується **неповністю визначеними або частково визначеними** ФАЛ.
- Частково визначені ФАЛ — ФАЛ, значення яких визначені не на всіх можливих наборах аргументів.
- У таблицях істинності на тих наборах, де ФАЛ не визначена ставиться *.

$F: T_1 = \{0,1,2,4,6\}$

$T_* = \{5,7,13,15\}$

Частково визначена функція

Заборонені набори



$$x_2 x_4 \neq 1$$

$x_3 x_4$ $x_1 x_2$	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	*	*	1
11		*	*	
10				

Мінімізація частково визначених функцій

- Приклад: змінюючи в деякій неповністю визначеній ФАЛ * на нуль або одиницю можна отримати різні повністю визначені ФАЛ.

$$T_1 = \{0, 1, 2, 4, 6, 7\}$$

$$T_* = \{3, 5, 8, 12\}$$

$$T_1 = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7\} \quad T_1 = \{0, 1, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

$\begin{matrix} X_3X_4 \\ X_1X_2 \end{matrix}$	00	01	11	10
00	1	1	*	1
01	1	*	1	1
11	*			
10	*			

$\begin{matrix} X_3X_4 \\ X_1X_2 \end{matrix}$	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1	1	1
11				
10				

$\begin{matrix} X_3X_4 \\ X_1X_2 \end{matrix}$	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1		1	1
11				
10	1			

У загальному випадку, якщо ФАЛ від n змінних не визначена на t , $t \leq n$ наборах аргументів, то шляхом довільного довизначення можна отримати 2^t різних повністю визначених функцій.

Мінімізація частково визначених функцій

- Мінімізація неповністю визначених ФАЛ зводиться до пошуку мінімальної МДНФ серед усіх МДНФ повністю визначених ФАЛ, еквівалентних даній функції.
- Повністю визначена ФАЛ називається еквівалентній деякій частково визначеній (ЧВ) ФАЛ, якщо її значення збігаються зі значеннями ЧВ ФАЛ на тих наборах, на яких вона визначена.

Ех. 1 Мінімізація частково визначених функцій

ЧВ ФАЛ

$X_3X_4 \backslash X_1X_2$	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	*		
11				
10				

Довизначення ФАЛ

$X_3X_4 \backslash X_1X_2$	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1		
11				
10				

$$\begin{aligned} \text{МДНФ1} &= \\ &\bar{X}_1\bar{X}_3, \\ \Rightarrow R &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{МДНФ } F = \text{МДНФ1} = \bar{X}_1\bar{X}_3, \\ R=2$$

$$\text{МДНФ2} = \bar{X}_1\bar{X}_2\bar{X}_3 \vee \bar{X}_1\bar{X}_3\bar{X}_4, R=6 \Rightarrow$$

$X_3X_4 \backslash X_1X_2$	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	0		
11				
10				

Ех. 2 Мінімізація частково визначених функцій

ЧВ ФАЛ

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	*	1
01	1	*	1	1
11	*			
10	*			

Карти Карно

Довизначення ФАЛ

$$МДНФ = \bar{x}_1, R=1$$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	0			
10	0			

Ех. 3 Мінімізація частково визначених функцій

ЧВ ФАЛ

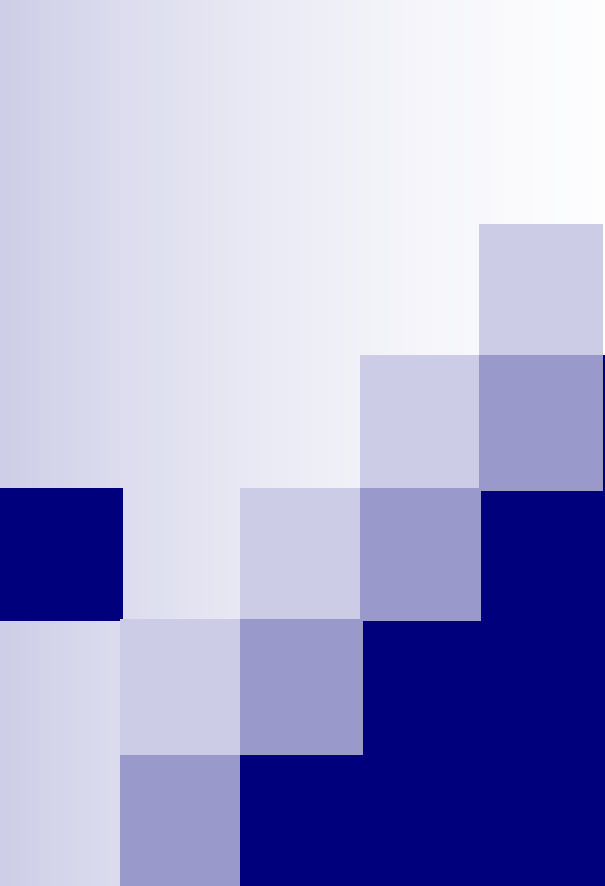
$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	*	1
01	1	*	1	1
11	*			*
10	*			1

Карти Карно

Довизначення ФАЛ

$$МДНФ = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4, R=2$$

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	1
11	1			1
10	1			1



МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

Метод Квайна-Мак-Класкі
(Quine–McCluskey method)

Метод Квайна

- При мінімізації за методом Квайна припускається, що ФАЛ задана в ДДНФ.
- Елементарні кон'юнкції рангу n , які входять в ДДНФ, називаються **мінітермами** рангу n .

Метод Квайна складається із наступних етапів

1) Знаходження первинних імплікант

Всі мінітерми даної ФАЛ порівнюються між собою попарно на предмет склеювання.

Якщо мінітерми $\mathbf{m_i}$ та $\mathbf{m_j}$ допускають склеювання, то виписується кон'юнкція, що є результатом склеювання і одночасно мінітермом рангу $\mathbf{n-1}$: $\mathbf{m_i = ax_i, m_j = a\bar{x_i}}$;

$$\mathbf{ax_i \vee a\bar{x_i} = a.}$$

- Мінітерми **n -го** рангу, для яких відбулося склеювання відзначаються.
- Після побудови всіх мінітермів **$(n-1)$ -го** рангу знову порівнюють їх попарно, виписують мінітерми **$(n-2)$ -го** рангу й відзначають, які мінітерми **$(n-1)$ -го** рангу склеюються і т. д.
- Етап закінчується, коли отримані мінітерми **k -го** рангу вже не склеюються між собою.
- Всі невідмічені мінітерми називаються первинними або простими імплікантами.

Зауваження

Якщо на першому етапі методу Квайна, деякі мінітерми n -го рангу жодного разу не склеювалися, то вони називаються **найпростішими** і далі не підлягають обробці, а одразу записуються в МДНФ.

■ Приклад:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) : T_1 = \{3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13\}$$

■ ДДНФ:

$$\begin{aligned} & \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \\ & \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \\ & \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \end{aligned}$$

$$R = 32$$

Мінітерми

4 рангу

$$3 : \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 *$$

$$4 : \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 *$$

$$5 : \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 *$$

$$7 : \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 *$$

$$9 : x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 *$$

$$B : x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 *$$

$$C : x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 *$$

$$D : x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 *$$

3 рангу

$$\bar{x}_1 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_2 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 *$$

$$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 *$$

$$\bar{x}_1 x_2 x_4$$

$$x_2 \bar{x}_3 x_4 *$$

$$x_1 \bar{x}_2 x_4$$

$$x_1 \bar{x}_3 x_4$$

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 *$$

2 рангу

$$x_2 \bar{x}_3$$

- Подальше склеювання неможливе.
- Первинні імпліканти:

$$x_2 \bar{x}_3$$

$$\bar{x}_1 x_3 x_4$$

$$x_1 \bar{x}_2 x_4$$

$$\bar{x}_2 x_3 x_4$$

$$\bar{x}_1 x_2 x_4$$

$$x_1 \bar{x}_3 x_4$$

СДНФ =

$$x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee x_1 \bar{x}_3 x_4$$

$$R = 17$$

2) Побудова імплікантної таблиці та розміщення позначок

- Для знаходження мінімального покриття інтервалами максимального рангу необхідно викинути «зайві» інтервали.
- Складається таблиця, число рядків якої дорівнює числу отриманих імплікант ФАЛ, що мінімізується.
- Число стовпців збігається із числом мінітермов ДДНФ.
- Якщо деякий мінітерм ДДНФ покривається первинним імплікантом, то на перетині відповідного рядка та стовпця ставиться позначка.

Таблица позначок

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_2x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$x_2\bar{x}_3$		✓	✓				✓	✓
$\bar{x}_2x_3x_4$	✓					✓		
$\bar{x}_1x_3x_4$	✓			✓				
$\bar{x}_1x_2x_4$			✓	✓				
$x_1\bar{x}_2x_4$					✓	✓		
$x_1\bar{x}_3x_4$					✓			✓

3) Знаходження істотних імплікант

- Якщо в стовпці знаходиться всього одна позначка, то відповідна імпліканта називається **істотною**.
- Істотна імпліканта не може бути виключена із правої частини ДДНФ, тому що без неї не буде отримане покриття всієї множини T_1 даної функції.

- Тому з таблиці позначок виключаємо рядки, що відповідають істотним імплікантам, і відповідні стовпці мінітермов, що покриваються ними.
- Приклад:

Для нашої функції f істотна імпліканта $x_2\bar{x}_3$.

Мінітерми, які вона покриває:

$$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4, \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4, x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4, x_1x_2\bar{x}_3x_4.$$

Таблица позначок

	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_2x_2\bar{x}_3x_4$	$\bar{x}_1x_2x_3x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	$x_1\bar{x}_2x_3x_4$	$x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$x_1x_2\bar{x}_3x_4$
$x_2\bar{x}_3$ *		✓	✓				✓	✓
$\bar{x}_2x_3x_4$	✓					✓		
$\bar{x}_1x_3x_4$	✓			✓				
$\bar{x}_1x_2x_4$			✓	✓				
$x_1\bar{x}_2x_4$					✓	✓		
$x_1\bar{x}_3x_4$					✓			✓

4) Викреслювання зайвих стовпців

Якщо в таблиці є два стовпці з позначками в однакових рядках, то один з них викреслюється (тому що покриття одного забезпечує й покриття іншого).

5) Викреслювання зайвих первинних імплікант

Якщо після етапу 4 у таблиці є рядки без єдиної позначки, то вони викреслюються із таблиці.

6) Вибір мінімального покриття максимальними інтервалами

Досліджується отримана таблиця: вибирається така сукупність первинних імплікант, що включає позначки у всіх стовпцях (принаймні по 1 у кожному стовпці).

При декількох варіантах віддається перевага варіанту покриття з мінімальним сумарним числом букв у первинних імплікантах.

	$\bar{X}_1\bar{X}_2X_3X_4$	$\bar{X}_1X_2X_3X_4$	$X_1\bar{X}_2\bar{X}_3X_4$	$X_1\bar{X}_2X_3X_4$
$\bar{X}_1X_3X_4$	✓	✓		
$\bar{X}_2X_3X_4$	✓			✓
$\bar{X}_1X_2X_4$		✓		
$X_1\bar{X}_2X_4$			✓	✓
$X_1\bar{X}_3X_4$			✓	

- Для розглянутої функції вибираємо покриття з імплікант:

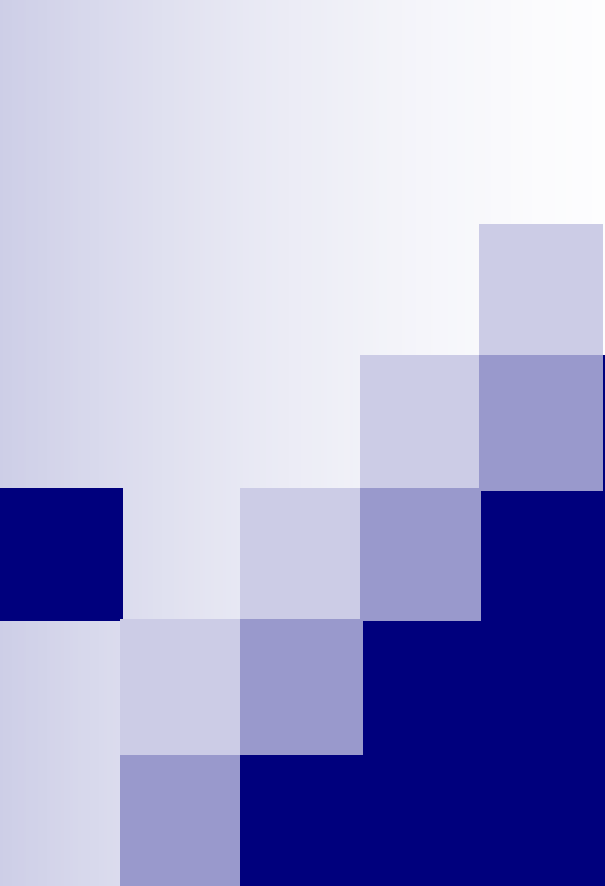
$$x_1 \bar{x}_2 x_4, \bar{x}_1 x_3 x_4$$

- тому що вони спільно покривають мінітерми, що залишилися.

- Мінімальна ДНФ для цієї ФАЛ:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4$$

$$R = 8$$



Метод Мак-Класкі

Ідея методу Мак-Класкі: модернізація першого етапу методу Квайна

I. Кожному мінітерму ДДНФ ставиться відповідний двійковий еквівалент-номер:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \Leftrightarrow 0011$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \Leftrightarrow 0100$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \Leftrightarrow 0101$$

II. Усі номери-мінітерми розбиваємо на групи за кількістю одиниць у цих номерах.

В i -ту групу входять мінітерми, у запису яких саме i одиниць.

III Попарне порівняння або перший етап методу Квайна виконується тільки між сусідніми групами, тому що тільки ці групи відрізняються для вхідних мінітермів в одному розряді. Створення нових мінітермів: у розрядах, що відповідають виключеним за правилом склеювання змінним, ставимо риску:

$$\begin{array}{l} 0110 \\ 0100 \end{array} \Rightarrow 01_0.$$

Така модифікація зручна ще й відсутністю громіздкого запису.

Особливості подальшого склеювання:

правило склеювання можна застосовувати тільки для тих мінітермів, що мають ризику в однакових розрядах та відрізняються окрім цього значенням одного розряду.

$$\begin{array}{r} 0 - 01 \\ 1 - 01 \end{array} \Rightarrow - - 01$$

$$\begin{array}{r} 0 - 01 \\ 0 - 11 \end{array} \Rightarrow 0 - - 1$$

$$\begin{array}{r} 0 - 1 - \\ 1 - - 1 \end{array} \Rightarrow \text{---} - 1$$

Пункти 2-6, як у методі Квайна.

Ех. Задана функція алгебри логіки, яка дорівнює одиниці на наборах з номерами:

$$T_1 = \{0,1,2,3,7,11,15\}.$$

Мінімізувати її методом Мак-Класкі.

Розв'язання

Розбиваємо мінітерми на групи за кількістю одиниць:

- 0000 - нульова група
- 0001, 0010 - перша група
- 0011 - друга група
- 0111, 1011 - третя група
- 1111 - четверта група

$$T1 = \{0,1,2,3,7,11,15\}.$$

Номер групи	Мінітерми	Двійкове представлення
0	m0	0000
1	m1	0001
	m2	0010
2	m3	0011
3	m7	0111
	m11	1011
4	m15	1111

Номер групи	Мінітерми		Імпліканти 1 рівня		Імпліканти 2 рівня	
0	m0	0000	m(0,1) 000- m(0,2) 00-0		m(0,1,2,3) 00 - - m(0,2,1,3) 00 - -	
1	m1 0001 m2 0010		m(1,3) 00-1 m(2,3) 001-			
2	m3 0011		m(3,7) 0-11 m(3,11) -011		m(3,7,11,15) - -11 m(3,11,7,15) - -11	
3	m7 0111 m11 1011		m(7,15) -111 m(11,15) 1-11			
4	m15 1111					


$$\text{СДНФ} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_3 x_4.$$

Далі будуємо таблицю, розставляємо позначки, ..., як у методі Квайна.

	0000	0001	0010	0011	0111	1011	1111
00- -*	✓	✓	✓	✓			
--11*				✓	✓	✓	✓

Істотні імпліканти: $\bar{X}_1\bar{X}_2$, $X_3 X_4$.

Робимо перетворення таблиці згідно 3-6 пункту методу Квайна.

Результат: $\text{СДНФ}=\text{МДНФ} = \bar{X}_1\bar{X}_2 \vee X_3 X_4$.

$R=4$.

Особливості мінімізації часткових ФАЛ

- 1. При виконанні першого етапу методу Квайна-Мак-Класкі на **усіх** заборонених наборах покладають * одиницею.
- 2. При побудові імплікантної таблиці виписуються тільки ті стовпці мінітермов, де вхідна ФАЛ дорівнює одиниці.

- Ех. Частково визначена ФАЛ:

$$T_1 = \{0, 3, 7\}, T_* = \{1, 2, 5\}.$$

Метод Мак-Класкі

Номер групи	Мінітерми	Двійкове представлення
0	m0	0000
1	m1	0001
	m2	0010
2	m3	0011
	m5	0101
3	m7	0111

Номер групи	Мінітерми		Імпліканти 1 рівня		Імпліканти 2 рівня	
0	m0	0000	m(0,1) 000- m(0,2) 00-0		m(0,1,2,3) 00 - - m(0,2,1,3) 00 - -	
1	m1 m2	0001 0010	m(1,3) 00-1 m(1,5) 0-01 m(2,3) 001-		m(1,3,5,7) 0 - - 1 m(1,5,3,7) 0 - - 1	
2	m3 m5	0011 0101	m(3,7) 0-11 m(5,7) 01-1			
3	m7	0111				


$$\text{СДНФ} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_4.$$

Далі будуємо таблицю, розставляємо позначки, ..., як у методі Квайна.

	0000	0011	0111
00- -*	✓	✓	
0--1*		✓	✓

Істотні імпліканти: $\bar{x}_1\bar{x}_2$, $\bar{x}_1x_4$.

Робимо перетворення таблиці згідно 3-6 пункту методу Квайна.

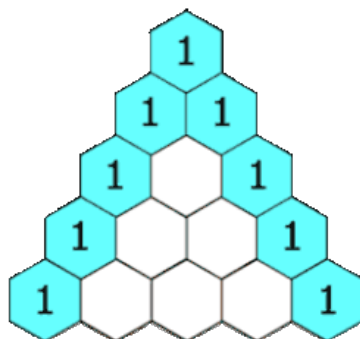
Результат: СДНФ=МДНФ = $\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1x_4$.

R=4.

Тема 6

КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

303



Тема 6 Комбінаторний аналіз

План

- 1. Комбінаторні правила додавання та множення.
- 2. Комбінаторні з'єднання без повторень елементів: перестановки розміщення сполучення.
- 3. Комбінаторні з'єднання з повторенням елементів: перестановки розміщення сполучення.
- 4. Принцип включення-виключення.



КОМБІНАТОРНІ ПРАВИЛА ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ



Правило додавання (суми)

- Якщо об'єкт a може бути обраний m способами, а об'єкт b – n іншими способами, тоді вибір " a або b " може бути здійснений $m+n$ способами.
- Вибір " a або b " є взаємовиключним (" a чи b "), тобто жоден із способів вибору об'єкту a не співпадає з будь-яким способом вибору об'єкту b .



Правило додавання (загальний випадок)

- Якщо об'єкт a_1 може бути обраний m_1 способами, об'єкт a_2 – m_2 іншими способами, ... , а об'єкт a_k – m_k способами, тоді вибір « a_1 або a_2 або ... або a_k » може бути здійснений

$m_1 + m_2 + \dots + m_k$ способами.



Правило множення (добутку)

- Якщо об'єкт a може бути обраний m способами, і після кожного такого вибору, і незалежно від нього, об'єкт b може бути обраний n способами, тоді вибір " a і b " (впорядкована пара об'єктів (a, b)) може бути здійснений $m \cdot n$ способами.
- Вибір a і b – незалежний: конкретний вибір об'єкта a не впливає на число способів вибору об'єкта b .



Правило множення (загальний випадок)

- Якщо об'єкт a_1 може бути обраний m_1 способами, і після цього, і незалежно від цього, об'єкт a_2 – m_2 способами, ..., a_k – m_k способами, тоді вибір « a_1 і a_2 і, ..., і a_k » може бути здійснений $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ способами.



Розв'язання комбінаторних задач за правилами додавання та множення

Задача 1	Розв'язання
З Києва до Харкова протягом доби відправляється 3 потяга і 1 літак. Скільки існує варіантів виїхати з Києва до Харкова?	■ З Києва до Харкова можна дістатися або потягом, або літаком (вибір "або" і є взаємовиключним). За правилом додавання маємо $N=3+1=4$ способи.



▪ Задача 2	▪ Розв'язання
У вазі лежать 3 яблука, 4 груші і 1 слива. Скількома способами дитина може взяти один фрукт?	Дитина може вибрати або яблуко, або грушу, або сливу (вибір – "або" і є взаємовиключним). За правилом додавання: $N=3+4+1=8$ способів.



▪ Задача 3	▪ Розв'язання
Скільки різних танцюючих пар можна скласти з 3-х дівчаток і 2-х юнаків?	Для танцюючої пари необхідно вибрати і хлопця, і дівчину. Причому число способів вибрати дівчину не залежить від того, якого хлопця вже вибрали. За правилом множення маємо $N=3 \times 2=6$ пар.



Задача 4

Нехай є 7 різних конвертів, 3 різні марки і 6 різних листівок. Скількома способами можна відправити конверт з маркою та вкладеною листівкою?

Розв'язання

- Для того, щоб відправити конверт з маркою і листівкою, необхідно вибрати і конверт, і марку, і листівку. Причому число способів вибрати марку не залежить від того, який саме конверт вже вибрали, а число способів вибрати листівку не пов'язане з тим, які конкретно конверт і марку обрано.
- За правилом множення маємо $N=7 \times 3 \times 6=126$ способів.

Задача 5

- Нехай є три прапори різних кольорів. На флагштоку підіймається сигнал, що складається не менше, ніж із двох прапорів. Скільки різних сигналів можна підняти на флагштоку, якщо порядок прапорів у сигналі враховується?

Розв'язання

- Сигнал можна скласти або із 2-х прапорів, або із 3-х. Позначимо через N_2 – кількість способів скласти сигнал із 2-х прапорів, а через N_3 – із 3-х відповідно. Одночасне виконання цих двох дій неможливо.
- Тоді, загальна кількість способів скласти сигнал за правилом суми дорівнює: $N=N_2+N_3$.



Розв'язання

- Кількість способів вибрати перший прапор для сигналу, що складається із 2 прапорів, дорівнює 3. Кількість способів вибрати другий прапор для сигналу, що складається із 2 прапорів, дорівнює 2, бо один з 3 прапорів вже був використаний.
- Треба підняти і перший, і другий прапори, але кількість способів вибрати другий прапор для сигналу не залежить від того, який конкретно прапор був обраний на першому етапі.
- Тоді, за правилом множення знаходимо: $N_2 = 3 \times 2 = 6$.
- Аналогічно, отримуємо, $N_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$,
- тоді $N = N_2 + N_3 = 6 + 6 = 12$.

КОМБІНАТОРНІ З'ЄДНАННЯ БЕЗ ПОВТОРЕНЬ ЕЛЕМЕНТІВ

316





Нехай задана множина A , що складається з n різних об'єктів або об'єктів, що вважаються в контексті завдання різними.

Комбінаторні з'єднання без повторень елементів включають перестановки, сполучення і розміщення.

Формула кількості
перестановок без
повторень:

$$P_n = n!.$$

Типове смислове навантаження:
«Скількома способами можна
переставити n різних об'єктів?».

Перестановки
без повторень
елементів

$$P_n$$



Задача

- Скільки різних перестановок можна згенерувати із елементів множини $\{1,2,3\}$.

Розв'язання

- Кількість усіх перестановок у множині, що має 3 різні елементи, дорівнює: $P_3=3!=6$

↓
123
132
213
231
312
321



Формула кількості сполучень:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Типове смислове навантаження:
«Скількома способами можна
вибрати m об'єктів з n різних
об'єктів без урахування порядку
їх вибору?».

Сполучення з 3 по 2:

$$C_3^2 = 3 \quad \xrightarrow{12 \ 13 \ 23}$$

Сполучення
без
повторень

$$C_n^m$$

$$0 \leq m \leq n$$

$$C_n^1 = n$$

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^n = 1$$



Формула кількості розміщень:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Типове смислове навантаження:
«Скількома способами можна вибрати m об'єктів з n різних об'єктів з урахуванням порядку їх вибору (в кожній вибірці переставити їх місцями)».

Розміщення без повторень

$$A_n^m$$

$$0 \leq m \leq n$$

$$A_n^m = C_n^m \times P_m$$

$$0 \leq m \leq n$$



Задача 2

- Скількома способами можна переставити букви у слові "добрива" так, щоб вони містили буквосполучення "до"?

Розв'язання

- Спочатку визначимо, скількома способами можна переставити букви слова "добрива" без обмежень. Оскільки усі букви у слові "добрива" різні та нас цікавить тільки порядок їх розташування, то $P_7=7!$. Кількість перестановок зі буквосполученням "до" дорівнює – $P_6=6!$, бо тепер переставляється 6 різних об'єктів: букви "б", "р", "и", "в", "а" та складний об'єкт "до".



Задача 3

- Чотири спортсмени повинні вразити 8 мішеней (кожен по 2). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?

Розв'язання

- Для кожного стрілка має значення, які мішені йому будуть розподілені, але не має значення у якому порядку він буде в них стріляти. Тому число варіантів вибору двох мішеней із 8 для першого стрілка дорівнює: $C_8^2 = 8!/(2! 6!)$, для другого – $C_6^2 = 6!/(2! 4!)$, для третього, відповідно, – $C_4^2 = 4!/(2! 2!)$, для останнього – $C_2^2 = 1$.
- За правилом добутку маємо:

$$N = C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 \times C_2^2 = \frac{8!}{2!6!} \times \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{2!2!} = \frac{8!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!}$$

Задача 4

- На книжковій полиці розміщується 30 томів книг. Скількома способами можна розставити їх так, щоб 1 і 2 том не стояли поруч?

Розв'язання

- Всього способів розмістити 30 книжок на полиці дорівнює $P_{30}=30!$.
- Задача може бути розв'язана через зворотну.
- Число способів розставити книжки так, щоб 1 і 2 том стояли поруч позначимо: N_{12} .
- Тоді, число способів розставити книжки так, щоб 1 і 2 том не стояли поруч: $N = P_{30} - N_{12}$.



- На книжковій полиці розміщується 30 томів книг. Скількома способами можна розставити їх так, щоб 1 і 2 том не стояли поруч?
- Число способів розставити їх так, щоб 1 і 2 том стояли поруч дорівнює: $2! \times 29!$.
- Перший співмножник враховує перестановки між 1 та 2 томами (12 або 21), а другий – перестановки 28 томів, що залишились, плюс один складний об'єкт, який утворюється 1 та 2 томами, що стоять поруч.
- Тоді, число способів розмістити 30 книжок на полиці так, щоб 1 і 2 том не стояли поруч дорівнює: $N = 30! - 2! \times 29!$.



З'єднання з повтореннями елементів

326



Формула кількості перестановок з повтореннями:

$$P_{n;n_1,n_2,\dots,n_k} = P(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \\ = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}, \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = n.$$



Типове смислове навантаження: «Кількість способів, якими можна переставити n об'єктів, серед яких 1-й об'єкт повторюється n_1 раз, 2-й об'єкт – n_2 раз, ..., k -й об'єкт – n_k раз».

Слід зазначити, що в переважній більшості завдань в сукупності є і унікальні (що не повторюються) об'єкти, в цьому випадку відповідні значення n_i дорівнюють одиниці, і в практичних розрахунках їх можна не записувати в знаменник.

Перестановки з повтореннями елементів

328



Задача	Розв'язання
■ Скількома способами можна переставити букви у слові "каша"?	■ Усього в слові "каша" чотири літери, серед яких дві однакові: ■ $P_{4;2,1,1} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12.$



Формула кількості розміщень з повтореннями:

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Типове смислове навантаження:

«Дана множина, що складається з n об'єктів, будь-який об'єкт можна вибирати неодноразово.

Скількома способами можна вибрати m об'єктів, якщо важливий порядок їх розташування у вибірці? ».

Розміщення з повтореннями

$$\tilde{A}_n^m$$

$$n <> m$$



Для більшої ясності зручно уявити, що об'єкти вибираються послідовно (хоча це зовсім не обов'язкова умова).

Зокрема, можливий випадок, коли з n наявних об'єктів m разів буде обраний якийсь один об'єкт.

Розміщення з повтореннями



■ Задача	■ Розв'язання
У кондитерській продають 4 типи тістечок. Скількома способами 8 різних людей можуть купити по одному тістечку?	Для даної задачі, має значення не тільки склад, а й порядок здійснення купівлі, бо тістечка отримують різні люди. Перше куплене тістечко отримає перша людина, друге – друга і так далі. Кількість типів тістечок дорівнює 4, кількість тістечок, що куплено 8. Кожного типу тістечок мається стільки, скільки потрібно. Тому за теоремою про розміщення із повтореннями маємо: $N = \tilde{A}_4^8 = 4^8.$



Формула кількості сполучень з повтореннями:

$$\begin{aligned}\tilde{C}_n^m &= C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1} = \\ &= \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}, n \neq m.\end{aligned}$$

Типове смислове навантаження: «Дана множина, що складається з n об'єктів, будь-який об'єкт можна вибрати неодноразово.

Скількома способами можна вибрати m об'єктів, якщо не важливий порядок їх розташування у вибірці?».

Сполучення з
повтореннями

$$\tilde{C}_n^m$$

$$n \langle \rangle m$$



Тобто, тут у вибірці можуть виявитися однакові об'єкти, і, якщо $m > n$, то повторення будуть обов'язково.

За умовчанням передбачається, що вихідна сукупність містить не менш ніж m об'єктів кожного виду, і тому вибірка може повністю складатися з однакових об'єктів.

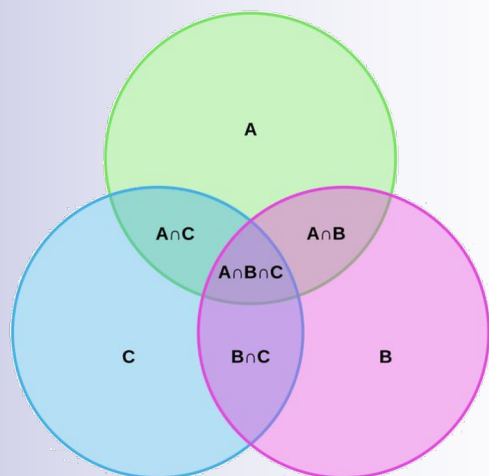
Сполучення з повтореннями



▪ Задача	▪ Розв'язання
У кондитерській продають 4 типи тістечок. Скількома способами одна людина може купити 8 тістечок?	Оскільки тістечка купує одна людина, то не має значення у якому порядку вона їх вибирає, а враховується тільки склад купівлі, тобто скільки тістечок якого типу було вибрано. Кількість типів тістечок дорівнює 4, кількість тістечок, що куплено, в свою чергу, дорівнює 8. Вважається, що кожного типу тістечок є стільки, скільки потрібно. Тоді, за теоремою про сполучення із повтореннями маємо: $N = \tilde{C}_4^8 = C_{4-1+8}^{4-1} = C_{11}^3 = C_{11}^8.$



Принцип / формула включення-виключення



Метод решета, символічний
метод, принцип перехресної
класифікації

- Нехай множина A містить N елементів та множина властивостей - $H = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.
- Кожний об'єкт A може володіти або не володіти однією/одночасно декількома/ всіма властивостями множини H .
- Введемо ряд позначень.
 - $N(\alpha_i)$ – кількість об'єктів, які володіють властивістю α_i ;
 - $N(\bar{\alpha}_i)$ – кількість об'єктів, які не володіють властивістю α_i .

- $N(\alpha_i, \alpha_j)$ – кількість об'єктів,
що володіють двома властивостями .
- $N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$ – кількість об'єктів,
що володіють трьома властивостями .
- $N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – кількість об'єктів,
що володіють усіма властивостями .
- $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$ – кількість об'єктів ,
що не володіють ні однією з n властивостей.

- При довільному n справедлива формула включення-виключення:

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = & N - \sum_{i=1}^n N(\alpha_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(\alpha_i, \alpha_j) - \\ & - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

- Формула включення-виключення визначає кількість об'єктів, що не володіють ні однією з властивостей, заданих множиною N .



Наприклад:

- На фірмі працює 67 співробітників. З них 47 володіють англійською мовою, 35 – німецькою, 20 – французькою; одночасно англійською та німецькою володіють – 23 співробітника, англійською та французькою – 12, німецькою та французькою – 11, трьома мовами володіють 5 співробітників. Скільки співробітників не володіють ні однією із перерахованих мов?

Розв'язання.

Визначимо наступні властивості:

α_1 – "володіти англійською мовою";

α_2 – "володіти німецькою мовою";

α_3 – "володіти французькою мовою".

■ За формулою включення-виключення маємо:

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3) = N - \sum_{i=1}^3 N(\alpha_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} N(\alpha_i, \alpha_j)$$

$$- N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) +$$


$$\begin{aligned} &+ N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \\ &= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5 = 6. \end{aligned}$$

■ Окремі випадки формули включення-виключення

1. Якщо всі властивості α_i попарно несумісні, тобто

$$N(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \forall i, j = 1, \dots, n; i \neq j,$$

то формула включення-виключення має вигляд:

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = N - \sum_{i=1}^n N(\alpha_i).$$

2. Якщо кожне число $N^{(k)} = N(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik})$ залежить не від характеру властивостей, а лише від їх кількості, то формула має вигляд:

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n) = & N - C_n^1 \cdot N^{(1)} \\ & + C_n^2 \cdot N^{(2)} + \dots + (-1)^k \cdot C_n^k \cdot N^{(k)} + \dots + \\ & + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot N^{(n)}, \end{aligned}$$

де $N^{(k)}$ - кількість об'єктів, що володіють k властивостями.

3. Символічний вид формули включення-виключення

Нехай $\bar{\alpha} = 1 - \alpha$

$$N(1) = N$$

$$N(-a) = -N(a)$$

$$N(a + b) = N(a) + N(b)$$

Тоді, вираз, що становить ліву частину формули включень-виключень:

$$\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_n$$

розглядається як алгебраїчне множення.

- Формальний запис формули включення-виключення дозволяє знайти число об'єктів, які володіють одними і не володіють іншими властивостями в будь-яких поєднаннях.
- Наприклад:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1 \bar{\alpha}_2 \alpha_3) &= \\ &= N[\alpha_1 (1 - \alpha_2) \alpha_3] = \\ &= N(\alpha_1 \alpha_3) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3). \end{aligned}$$

Задача 1.

- На заміську прогулянку поїхало 92 чоловіка. Бутерброди з ковбасою узяли 47 чоловік, з сиром – 38 чоловік, з шинкою – 42 людини, з сиром і з ковбасою – 28 чоловік, з ковбасою і з шинкою – 31 людина, і з сиром і з шинкою – 26 чоловік. Всі три види бутербродів узяли 25 чоловік, а декілька чоловік замість бутербродів захопили з собою пиріжки. Скільки чоловік узяли з собою пиріжки?

- Задача 2. При вивченні читацьких смаків студентів виявилось, що 60% студентів читають журнал А, 50% - журнал В, 50% - журнал С, 30% - журнали А і В, 20% - журнали В і С, 40% - журнали А і С, 10% - журнали А, В і С.

З'ясувати, скільки відсотків студентів:

- 1) не читає жоден з журналів;
- 2) читає в точності два журнали;
- 3) читає не менше двох журналів.

Розв'язання.

Загальну кількість студентів приймемо за 100 (у відсотках), тоді:

α_1 - властивість студентів «читати журнал А»,
 $N(\alpha_1)=60$ - кількість студентів, які читають журнал А (у відсотках),

α_2 - властивість студентів «читати журнал В»,
 $N(\alpha_2)=50$ - кількість студентів, які читають журнал В (у відсотках),

α_3 - властивість студентів «читати журнал С»,
 $N(\alpha_3) = 50$ - кількість студентів, які читають журнал С (у відсотках).

Згідно з умовою задач, $N(a_1a_2) = 30\%$ - кількість студентів, які читають журнали А і В,

$N(a_1a_3) = 20\%$ - кількість студентів, які читають журнали А і С,

■ $N(a_2a_3) = 40\%$ - кількість студентів, які читають журнали В і С,

■ Всі три журнали читають: $N(a_1a_2a_3) = 10\%$.

- За формулою включення-виключення жоден з журналів не читає:

- $$\begin{aligned} N(a_1 a_2 a_3) &= N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) + \\ &+ N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + N(a_2 a_3) - \\ &\quad - N(a_1 a_2 a_3) = \\ &= 100 - 60 - 50 - 50 + 30 + 20 + 40 - 10 = 20\%. \end{aligned}$$

Читає в точності два журнали:

$$\begin{aligned} & N(\alpha_1 \alpha_2 \bar{\alpha}_3) + N(\alpha_1 \bar{\alpha}_2 \alpha_3) + N(\bar{\alpha}_1 \alpha_2 \alpha_3) = \\ & = N[\alpha_1 \alpha_2 (1 - \alpha_3)] + N[\alpha_1 (1 - \alpha_2) \alpha_3] + \\ & \quad + N[(1 - \alpha_1) \alpha_2 \alpha_3] = \\ & = N(\alpha_1 \alpha_2) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) + N(\alpha_1 \alpha_3) - \\ & \quad - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) + N(\alpha_2 \alpha_3) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \\ & = N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) + N(\alpha_2 \alpha_3) - 3N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \end{aligned}$$

Читає не менш двох журналів (2 або 3):

$$\begin{aligned} & N(\alpha_1 \alpha_2 \bar{\alpha}_3) + N(\alpha_1 \bar{\alpha}_2 \alpha_3) + \\ & + N(\bar{\alpha}_1 \alpha_2 \alpha_3) + N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \\ & = 60 + 10 = 70\%. \end{aligned}$$

■ Задача 3.

Кожен учень класу або дівчинка, або має світле волосся, або любить математику. У класі 20 дівчат, з них 12 блондинок, і одна блондинка любить математику. Всього в класі 24 учнів є блондинами, математику з них люблять 12, а всього учнів, які люблять математику, 17; з них 6 дівчат.

Скільки учнів в даному класі?

- Розв'язання.
- Загальна кількість учнів в класі невідома,
 $N = ?$.

Нехай α_1 – «дівчинка», тоді $N(\alpha_1) = 20$.

- α_2 – «мати світле волосся / бути блондином»,
 $N(\alpha_2) = 24$.
- α_3 – «любити математику», $N(\alpha_3) = 17$.

- Згідно з умовою задачі дівчат-блондинок:
 $N(a_1 a_2) = 12$.
- Дівчат, які люблять математику, всього:
 $N(a_1 a_3) = 6$,
- учнів блондинів, що люблять математику також: $N(a_2 a_3) = 12$.
- Одна блондинка любить математику:
 $N(a_1 a_2 a_3) = 1$.

- За формулою включення-виключення:

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3) &= \\ &= N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + \\ &\quad + N(\alpha_1 \alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_3) + N(\alpha_2 \alpha_3) \\ &\quad - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \\ &= N - 20 - 24 - 17 + 12 + 6 + 12 - 1 = \\ &= N - 32. \end{aligned}$$

- Згідно з умовою задачі, кожен учень класу або дівчинка, або має світле волосся, або любить математику, тобто учнів, що володіють трьома властивостями немає в класі, тому:

$$N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3) = 0.$$

- Тоді, маємо

$$N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3) = N - 32 = 0, N = 32.$$

- В класі 32 учня.

- Задача 5. На екскурсії були студенти першого та другого курсів. Всі вони були або програмісти, або економісти. Чоловіків було 16, а студентів, які навчаються за програмної інженерії - 24. Економісток було рівно стільки, скільки чоловіків-програмістів. Скільки студентів було на екскурсії?
- Розв'язання.
- Загальна кількість студентів на екскурсії невідома, $N = ?$.

■ Нехай α_1 - «чоловік», тоді, $N(\alpha_1)=16$.

α_2 - «програміст», $N(\alpha_2)=24$.

Згідно з умовою задачі дівчат-економісток:

$$N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2)$$

була така ж кількість, що і чоловіків-
програмістів: $N(\alpha_1 \alpha_2)$

$$N(\alpha_1 \alpha_2) = N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2).$$

- За формулою включення-виключення :

$$N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2) =$$

$$= N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_2) =$$

$$= N - 16 - 24 + N(\alpha_1 \alpha_2) \Rightarrow$$

$$N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2) - N(\alpha_1 \alpha_2) = N - 40 \Rightarrow$$

$$0 = N - 40 \Rightarrow$$

$$N = 40.$$

Задача про безлад

Нехай множина $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Розглянемо перестановки елементів множини A .

■ Елемент перестановки називається **нерухомим**, якщо ~~а~~ ^{або} елемент стоїть на своєму місці.

Наприклад: при $n=5$,

5 2 4 3 1 – елемент “2” – нерухомий;

1 2 3 4 5 – усі елементи нерухомі.

- **Безладом** називається перестановка, яка не має нерухомих елементів, тобто

$$\forall i = \overline{1, n}; a_i \neq i.$$

■ *Постановка задачі:*

Визначити D_n - кількість безладів у n -елементній множині,

або кількість перестановок чисел $1, 2, \dots, n$ таких, що $\forall i = \overline{1, n}; a_i \neq i$?

D_n називають **субфакторіалом**.

■ Розв'язання

Загальна кількість перестановок – $N = n!$.
Позначимо через α_i така властивість перестановки, коли i -й елемент стоїть на своєму місці, тобто $a_i = i$.

- $N(\alpha_i)$ - число перестановок, що володіють властивістю α_i .
- $N(\alpha_i) = (n - 1)!$ - в цих перестановках один елемент знаходиться на своєму місці.

- Так як число перестановок не залежить від того, який саме елемент знаходиться на своєму місці:

$$N(\alpha_1) = \dots = N(\alpha_n) = (n - 1)! = N^{(1)}$$

- Нехай $N^{(2)}$ - число перестановок, в яких тільки два елементи знаходяться на своїх місцях:

$$N^{(2)} = (n - 2)!$$

,...,

і відповідно,

$N(k)$ - кількість перестановок, в яких тільки k елементів знаходяться на своїх місцях:

$$N(k) = (n - k)!$$

За формулою включень-виключень маємо:

$$D_n = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_n^k (n - k)! = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n - k)!$$

- Розпишемо формулу (1)

$$\begin{aligned} D_n &= n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! + \\ &+ \dots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot 0! = \\ &= n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \right). \end{aligned}$$

3 Задача про зустріч

Постановка задачі:

- Визначити кількість таких перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, що точно k елементів з n знаходяться на своїх місцях ($a_i = i$), а решта $n - k$, $k \leq n$ знаходяться в безладі.
- Інакше: нас цікавлять перестановки, в яких рівно k елементів нерухомі.

■ *Розв'язання:*

- Із загальної кількості елементів деяким чином вибирається **k**, які залишаються на своїх місцях, інші **n-k** елементів знаходяться в безладі. Кількість способів, якими можна переставити **n** елементів при таких умовах, дорівнює

$$D_{n,k} = C_n^k \cdot D_{n-k}.$$

■ Перестановки без фіксованих пар

Постановка задачі:

Позначимо через E_n - число таких перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, що жодна з цих перестановок не містить жодної з упорядкованих фіксованих пар:

$$\{ (1, 2), (2, 3), \dots, (n - 1, n) \}.$$

- *Розв'язання:*
- Для обчислення E_n використовуємо принцип включення і виключення. Будемо говорити, що перестановка має властивість α_i , якщо вона містить i -ту впорядковану пару $(i, i+1)$.
- Для обчислення скористаємося другим окремим випадком для формули включень-виключень.

- Число всіх перестановок $N = n!$.

Перестановки, що володіють властивістю α_i , виходять як перестановки елементів

$$1, 2, \dots, i-1, i+2, \dots, n$$

та пари $(i, i+1)$, що розглядається як один елемент.

Отже, незалежно від α_i ,

$$N^{(1)} = (n-1)!.$$

- Для перестановок, що володіють двома властивостями, тобто мають дві впорядковані пари, наприклад $(i, i+1)$ і $(k, k+1)$, розглянемо два випадки:
 - 1) $k > i+1$, пари йдуть не підряд;
 - 2) $k = i+1$, пари розташовані одна за одною.

1) Якщо $k > i+1$, то пари йдуть не підряд.

У цьому випадку маємо перестановки двох пар, як окремих, складних елементів:

$$(i, i+1) \text{ і } (k, k+1)$$

і $(n - 4)$ елементи, що лишилися, тобто всього переставляються $(n - 4 + 2) = (n - 2)$ елемента.

2) Якщо $k=i+1$, то перестановки складаємо з однієї впорядкованої трійки елементів:

$$(i, i+1, i+2)$$

та $(n-3)$ інших елементів, тобто теж з $(n-3+1) = (n-2)$ елементів.

Таким чином, число перестановок, що володіють двома властивостями, так само:

$$N^{(2)} = (n-2)!.$$

Аналогічно, число перестановок, що володіють k властивостями, залежить тільки від k та дорівнює:

$$N^{(k)} = (n - k)!.$$

Тоді, загальне число перестановок без фіксованих пар дорівнює:

$$E_n = N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_{n-1}) = n! - C_{n-1}^1 (n-1)! + C_{n-1}^2 (n-2)! + \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} 0!.$$

- *Наприклад:*
- 1. Скільки різних слів можна згенерувати з букв слова "тік-так", щоб ніякі однакові літери не йшли один за одним?
- Розв'язання.
- Всего в слові "тік-так": 6 букв серед яких дві букви "до" і дві букви "т".
- Нехай α_1 - дві букви "т" йдуть один за одним,
- α_2 - дві літери "до" йдуть один за одним.

Відповідь:

$$N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1 \alpha_2) = \\ \frac{6!}{2!2!} - \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{2!} + 4! = 84.$$

- Скількома способами можна переставити цифри в числі 123123 так, щоб ніякі дві однакові цифри не знаходилися поруч?

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3) &= N - C_3^1 \cdot N^{(1)} + C_3^2 \cdot N^{(2)} - C_3^3 \cdot N^{(3)} \\ &= \frac{6!}{2!2!2!} - 3 \cdot \frac{5!}{2!2!} + 3 \frac{4!}{2!} - 3!. \end{aligned}$$

- 
- За пустелі йде караван з 5 верблюдів. Подорож триває багато днів і нарешті, всім набридає бачити перед собою одного і того ж верблюда. Скількома способами можна переставити верблюдів так, щоб попереду кожного верблюда йшов інший, ніж раніше?

Відповідь:

$$\begin{aligned} N(\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_4) &= P_5 - C_4^1 \cdot P_4 + C_4^2 \cdot P_3 - C_4^3 P_2 + C_4^4 P_1 = \\ &= 5! - 4 \cdot 4! + 6 \cdot 3! - 4 \cdot 2! + 1 \end{aligned}$$



Перелік рекомендованої літератури

1. Levin O. Discrete mathematics: An open introduction. – Independently published, 2019. – 407 p.
2. Нікольський Ю. В. Дискретна математика: підруч. / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина; за ред. В. В. Пасічника. 5-є вид., випр. та допов. Львів: Магнолія, 2019. – 432 с.
3. Журавчак Л. М. Дискретна математика. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2019. – 420 с.
4. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручнику – Львів, Видавець І.Є. Чижигов, 2013. – 487с.
5. Трохимчук Р. М. Дискретна математика у прикладах і задачах : навч. посібник / Р. М. Трохимчук, М. С. Нікітченко ; М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ : Київський університет, 2017. – 248 с.
6. Дейбук В.Г., Костащук Н.Г., Вацек Д.О. Практичні заняття з дискретної математики. – Чернівці: Рута, 2019. – 156 с.



Перелік рекомендованої літератури

1. Назарова І.А. Дискретний аналіз: навчально-методичний посібник / І.А. Назарова. – Донецьк: ДВНЗ “ДонНТУ”, 2012. – 277 с. – Режим доступу: <http://ea.donntu.edu.ua:8080/jspui/handle/123456789/27328>. – Назва з екрану.
2. Методичні вказівки до самостійної роботи за курсом "Дискретна математика" [Електронний ресурс]: для студентів, що навчаються за спеціальностями 121 Інженерія програмного забезпечення, 122 Комп'ютерні науки, 123 Комп'ютерна інженерія, 125 Кібербезпека денної форми навчання / укладач І.А. Назарова, О.А. Тихонова. – Покровськ, 2019. – 105 с. – Режим доступу: <http://89.185.3.253:9080/download.php?rec=22361>. – Назва з екрану.



Перелік рекомендованої літератури

3. Методичні вказівки до самостійної роботи за курсом "Дискретний аналіз" для студентів, що навчаються за спеціальністю 121 Інженерія програмного забезпечення денної форми навчання [Електронний ресурс] / укладач І.А. Назарова. – Покровськ, 2019. – 55 с. – Режим доступу: <http://89.185.3.253:9080/download.php?rec=22346>. – Назва з екрану.

4. Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання індивідуального завдання за курсом "Дискретний аналіз" [Електронний ресурс]: для студ. спец. 121 Інженерія програмного забезпечення денної форми навчання / укладач І.А. Назарова. – Покровськ, 2017. – 52 с. – Режим доступу: <http://89.185.3.253:9080/download.php?rec=22081>. – Назва з екрану.