

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЖОРСТКИХ ЗАДАЧ КОШІ

Назарова І.А., к.т.н., доцент, iryna.nazarova@donntu.edu.ua;

Бервін М.С., магістр, mykhailo.bervin.kita@donntu.edu.ua

Донецький національний технічний університет, м. Луцьк, Україна

В останні роки при розв'язанні задачі Коші явними багатостадійними методами Рунге-Кутти або багатокроковими методами Адамса-Башфорта значна кількість дослідників стикається з несподіваним ефектом. Незважаючи на повільну зміну функцій, що є розв'язком, розрахунок доводиться вести з не виправдано дрібним кроком інтегрування. Спроби збільшити крок і тим самим зменшити час вирішення завдання, призводять лише до великого зростання похибки. Задачі Коші, що мають таку властивість, отримали назву жорстких. Для коректного розв'язання задач з такими властивостями і використовуються чисельні методи, що базуються на неявних різницевих схемах. В докладі представлено результати досліджень авторів, що стосуються паралельного розв'язання жорстких задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР) з вбудованими методами оцінки локальної апостеріорної похибки і алгоритмами керування кроком інтегрування.

Для розв'язання задачі Коші для СЗДР

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(t, Y(t)), Y : R \rightarrow R^m; F : R \times R^m \rightarrow R^m,$$

де: m — порядок, Y — вектор невідомих, а F — права частина системи з заданими початковими умовами: $Y(t_0) = Y_0$, застосовано два класи методів, що базуються на неявних схемах: блокові багатоточкові та повністю неявні багатостадійні методи.

Повністю неявний s -стадійний метод типа Рунге-Кутти (ПНМРК) описується наступним чином:

$$Y_{n,i} = Y_{n,0} + h \cdot \sum_{i=1}^s b_i K_i, i = \overline{1, s},$$

$$K_i = F \left[t_n + c_i h; Y_n + h \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j \right],$$

де: $c = (c_1, \dots, c_s)^T$, $b = (b_1, \dots, b_s)^T$ та $A = (a_{ij}), i, j = \overline{1, s}$ задають унікальний варіант методу й вибираються з міркувань точності. До переваг ПНМРК [1] слід віднести добрі характеристики стійкості, достатні для розв'язання жорстких задач Коші. Недоліками цих методів є висока обчислювальна складність, обумовлена необхідністю розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНАР) на базі ітераційного процесу для визначення ms стадійних коефіцієнтів. Це може бути метод Ньютона та його модифікації або метод простої функціональної ітерації:

$$\begin{cases} K_i^{(0)} = F[t_n + c_i h; G_i^{(0)}] \\ K_i^{(l+1)} = F[t_n + c_i h; G_i^{(l)}] \end{cases},$$

де: $G_i^{(0)} = Y_n$, $G_i^{(l)} = Y_n + h \cdot \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j^{(l)}$, $i = \overline{1, s}$.

При паралельному розв'язанні СЗДР на основі ПНМРК окрім паралелізму методу використовується і системний паралелізм. Ітераційний процес є суто послідовним, проте він дозволяє розподілити обчислення l -тої ітерації $K(h)$ на s незалежних процесів. Процесори розбиваються на s груп. Кожен з процесорів паралельно обчислюватиме частку компонент вектору $G_i^{(l)}$ на кожній ітерації. Усередині ітераційного процесу кожний процесор у групі обмінюється своїми даними з усіма процесами групи [2].

Блокові або багатоточкові паралельні методи розв'язання задачі Коші особливо актуальні, оскільки добре узгоджуються з архітектурою паралельних архітектур і дозволяють отримувати розв'язок одночасно у декількох точках сітки інтегрування [1-2]. Рівняння однокрокових блокових різнице-вих методів у вживанні до СЗДР для блоку з k точок можуть бути записані таким чином:

$$Y_{n,i} = Y_{n,0} + ih \left[b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j} \right]; i = \overline{1, k}; n = \overline{1, N},$$

де: N – кількість блоків сітки інтегрування.

Для обох класів методів розроблено та проаналізовано методи оцінки крокової похибки такі, як дублювання кроку, локальна екстраполяції Річардсона-Ромберга та метод вкладених форм [2]. Отримані теоретичні та експериментальні характеристики якості паралельних алгоритмів, такі як прискорення та ефективність, загальні накладні витрати на паралелізм [3-4].

Вочевидь, що якість розроблених алгоритмів розв'язання СЗДР істотно залежить від декількох параметрів, співвідношення розміру задачі та числа процесорів, властивостей чисельного методу та паралельної системи. За рахунок проведених досліджень, найкращі характеристики паралелізму при розв'язанні СЗДР отримані при застосуванні блокових вкладених методів, їх динамічні характеристики в $2s$ перевищують аналогічні характеристики ПНМРК. Результат повторюється при довільних умовах, але для багатовимірних задач, складних правих частин СЗДР, наявності високошвидкісних мереж передачі даних із топологією гіперкуб, застосування як системного так і блокового паралелізму методу, маємо найкращі показники ефективності.

Висновки. За результатами проведених теоретичних досліджень та багатовимірної експерименту на модельних жорстких завданнях СЗДР отримані наступні результати. Блокові k -точкові однокрокові методи мають безумовні переваги перед повністю неявними багатостадійними методами

типу Рунге-Кутти, як для послідовної, так і для паралельної реалізації. Такий результат не залежить ані від способу оцінки локальної апостеріорної похибки, ані від методу реалізації ітераційного процесу, що існує для всіх неявних різницевих схем, ані від архітектури паралельної системи тощо.

Найкращі результати прискорення та ефективності отримані для систем ЗДР великого розміру із складною правою частиною на основі неявних однокрокових вкладених блокових методів. Перспективним напрямком дослідження є розробка та аналіз ефективності відображення отриманих методів на графічні процесори в рамках технології CUDA.

Література

1. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. — Springer, 2010. — 614 p.
2. Фельдман Л.П., Назарова І.А. Паралельні однокрокові методи чисельного розв'язання задачі Коші. — Донецьк, Україна: ДонНТУ, 2011. — 185с.
3. Grama A., Gupta A., Karypis G., Vipin K. Introduction to Parallel Computing. — Addison Wesley, 2003. — 856 p.
4. Назарова І.А., Дмитрієва О.А. Паралельні обчислення. — Покровськ: ДВНЗ ДонНТУ, 2020. — 246с.

Анотація

В докладі представлено результати оцінки ефективності застосування паралельних архітектур з розподіленою пам'яттю для розв'язання жорсткої задачі Коші для СЗДР. Дослідження проведено на прикладі двох класів методів, що базуються на неявних різницевих схемах з вбудованими способами оцінки локальної апостеріорної похибки для змінного кроку інтегрування: блокові багатоточкові та багатостадійні повністю неявні однокрокові методи. Проведена розробка паралельних алгоритмів, відображень їх на паралельну архітектуру, теоретичне оцінювання ефективності та масштабованості отриманих методів із застосуванням динамічних метричних систем, реалізація відповідних програмних додатків, багатовимірний та багаторазовий експеримент на базі інтерфейсу MPI.

Ключові слова: жорстка задача Коші, неявні різницеві схеми, блокові методи, оцінка локальної похибки, паралельні алгоритми, прискорення, ефективність.

Abstract

The report presents the results of evaluating the effectiveness of using parallel architectures with distributed memory for solving the hard Cauchy problem for SODE. The research is conducted on the example of two classes of methods based on implicit difference schemes with built-in local posterior error estimation methods for a variable integration step: block multipoint and multistage fully implicit one-step methods. The development of parallel algorithms, their mapping to parallel architecture, theoretical evaluation of the efficiency and scalability of the obtained methods using dynamic metric systems, implementation of relevant software applications, multidimensional and multiple experiments based on the MPI interface were carried out.

Keywords: stiff Cauchy problem, implicit difference schemes, block methods, local error estimation, parallel algorithms, speedup, efficiency.