

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
Кафедра вищої математики і математики**

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЧАСТИНА 1

**Завдання та методичні вказівки
до виконання індивідуальних робіт здобувачами вищої освіти
за освітнім ступенем «бакалавр» денної та заочної форм навчання
(для технічних та економічних спеціальностей)**

Покровськ
ДВНЗ «ДонНТУ»
2021

УДК 51(072)

M54

Методичні вказівки до індивідуальної роботи з дисципліни “Вища математика. Частина 1” для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем «бакалавр» денної та заочної форм навчання для технічних та економічних спеціальностей / уклад. М. І. Медведєва. - Покровськ: ДВНЗ ДонНТУ, 2021. – 62 с.

Укладач: М. І. Медведєва, доцент кафедри ВМФ ДВНЗ «ДонНТУ», к.ф-м.н.,
доцент

Рецензент: Є. В. Лесіна, доцент кафедри ВМФ ДВНЗ «ДонНТУ», к.ф-м.н.,
доцент

Відповідальний за випуск: Медведєва М.І., зав. кафедрою вищої математики і фізики

Затверджено навчально-методичним відділом ДВНЗ «ДонНТУ»,
протокол № 2 від «28» вересня 2021р.

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики і фізики
протокол № 7 від «03» вересня 2021р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ	5
Тема 1. Векторна алгебра.....	5
Тема 2. Пряма лінія на площині.....	7
Тема 3. Криві другого порядку	10
Тема 4. Матриці і визначники	12
Тема 5. Системи лінійних рівнянь	20
Тема 6. Границя функції	25
Тема 7. Похідна функції. Застосування похідної.....	31
Тема 8. Дослідження функції	36
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ПРИКЛАДІВ.....	38
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	62
ДОДАТКИ.....	63

ВСТУП

Наведені завдання для індивідуальних робіт за основними темами курсу «Вища математика. Частина 1». Зміст робіт охоплює такі розділи: «Аналітична геометрія», «Основи математичного аналізу», «Диференціальне числення». Перед виконанням роботи студенту необхідно вивчити теоретичний матеріал за відповідними розділами дисципліни та розглянути приклади розв'язування типових задач.

Кожне завдання містить 30 варіантів. Номер варіанту повідомляється студентам на першому занятті з дисципліни.

Робота виконується в окремому зошиті в клітинку або на аркушах паперу формату А4 з полями для позначок викладача. Титульна сторінка оформлюється відповідно до вимог кафедри ВМФ (див. Додаток А).

При виконанні індивідуальної роботи необхідно керуватися наступними вимогами (при їх недотриманні робота буде не зарахована):

1. Для кожного завдання потрібно вказати номер та обов'язково записати повну умову.
2. Розв'язання завдань повинні містити необхідні пояснення та обґрунтування, розгорнути розрахунки, формули, що застосовуються для розв'язання, а також необхідні рисунки (якщо потребується).
3. У розрахунках потрібно дотримуватися правил наближених обчислень (як, правило, з точністю – до 0,001, а відсотки – до 0,1). Після кожного завдання необхідно записати відповідь.

Завдання, в яких будуть наведені відповіді без розгорнутих розрахунків та пояснень вважаються невиконаними.

Робота, яка виконана не за своїм варіантом або не відповідає вимогам за оформленням, завданнями або структурою повертається без перевірки і вважається не зарахованою.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Тема 1. Векторна алгебра

Завдання 1.1. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. За даними таблиці 1.1 знайти:

1) $(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 5\vec{b})$;

2) $|3\vec{a} - 2\vec{b}|$;

3) $np_{\vec{a}}\vec{b}$, $np_{\vec{b}}\vec{a}$;

4) косинус кута між векторами $3\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - 5\vec{b}$;

5) при якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{i} + m\vec{j} + N\vec{k}$ взаємно ортогональні
(де N – номер варіанта).

Таблиця 1.1

Варіант	$\vec{a}$	$\vec{b}$
1	$2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$	$\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$
2	$-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$	$\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$
3	$5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$	$2\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}$
4	$\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$	$-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
5	$2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$	$-2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$
6	$5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$	$\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$
7	$3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$	$-2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$
8	$-7\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$	$\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$
9	$\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$	$2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$
10	$4\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$	$\vec{i} - 3\vec{j} - 8\vec{k}$
11	$3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$	$2\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$
12	$-\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$	$2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$
13	$4\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$	$5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
14	$3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$	$-2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$
15	$-4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$	$5\vec{i} - 2\vec{j} - 7\vec{k}$
16	$\vec{i} - 3\vec{j} + 7\vec{k}$	$5\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$
17	$4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$	$7\vec{i} + 3\vec{j} - 8\vec{k}$
18	$-\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$	$2\vec{j} - 5\vec{k}$
19	$\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$	$2\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$

Варіант	$\bar{a}$	$\bar{b}$
20	$3\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}$	$2\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$
21	$3\bar{i} - 8\bar{j} + 2\bar{k}$	$3\bar{i} - 2\bar{j} - 8\bar{k}$
22	$3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$	$6\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$
23	$4\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$	$7\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$
24	$-5\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$	$-\bar{i} + 3\bar{j} - 6\bar{k}$
25	$-3\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$	$4\bar{i} + 7\bar{j} - 8\bar{k}$
26	$4\bar{i} + 3\bar{j} - 7\bar{k}$	$5\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$
27	$2\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$	$4\bar{i} + 2\bar{j} - 5\bar{k}$
28	$-4\bar{i} + 2\bar{j} + 5\bar{k}$	$3\bar{i} + 2\bar{j} - 8\bar{k}$
29	$-\bar{i} + 2\bar{j} + 8\bar{k}$	$8\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$
30	$7\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$	$2\bar{i} + \bar{j} - 7\bar{k}$

Завдання 1.2. Дано координати точок A , B і C (табл. 1.2). Знайти:

- 1) координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.
- 2) косинус кута між векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$;
- 3) довжини діагоналей паралелограма, який побудований на векторах $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$;
- 4) координати четвертої вершини D паралелограма $ABCD$.
- 5) проекцію вектора $\overline{AC} + \overline{AB}$ на осі координат;

Таблиця 1.2

Варіант	A	B	C
1	(1; -2; 3)	(0; 1; 1)	(2; -4; 1)
2	(0; -3; 6)	(-12; -3; -3)	(-9; -3; -6)
3	(3; 3; -1)	(5; 5; -2)	(4; 1; 1)
4	(-1; 2; -3)	(3; 4; -6)	(1; 1; 0)
5	(-4; -2; 0)	(-1; -2; 4)	(3; -2; 1)
6	(5; 3; -1)	(5; 2; 0)	(6; 2; 0)
7	(-3; -7; -5)	(1; -1; 1)	(2; 3; 0)
8	(2; -4; 6)	(0; -2; 4)	(6; -8; 10)
9	(0; 1; -2)	(3; 1; 2)	(4; 1; 1)
10	(3; 3; -1)	(1; 5; -2)	(4; 1; 1)
11	(2; 1; -1)	(2; -1; -4)	(4; 2; 1)
12	(-1; -2; 1)	(-4; -2; 5)	(-5; 2; 2)

Варіант	A	B	C
13	(6; 2; -3)	(6; 3; -2)	(7; 3; -3)
14	(1; 1; 4)	(-3; 2; 1)	(-5; -10; -1)
15	(2; -8; -1)	(4; -6; 0)	(-2; -5; -1)
16	(3; 0; -2)	(1; -3; -6)	(0; 3; 2)
17	(0; 2; -4)	(8; 2; 2)	(6; 2; 4)
18	(3; 3; -1)	(5; 1; -2)	(4; 1; 1)
19	(-4; 3; 0)	(0; 1; 3)	(-2; 4; -2)
20	(1; -1; 0)	(-2; -1; 4)	(8; -1; -1)
21	(7; 0; 2)	(7; 1; 3)	(8; -1; 2)
22	(2; 3; 2)	(-1; -3; -1)	(-7; -2; 3)
23	(2; 2; 7)	(0; 0; 6)	(-2; 5; 7)
24	(-1; 2; -3)	(1; 1; -2)	(1; 3; -2)
25	(0; 3; -6)	(9; 3; 6)	(12; 3; 3)
26	(3; 3; -1)	(5; 1; -2)	(4; 1; -3)
27	(-2; 1; 1)	(2; 3; -2)	(2; -1; 1)
28	(1; 4; -1)	(-2; 4; -5)	(8; 4; 0)
29	(0; 1; 0)	(0; 2; 1)	(1; 2; 0)
30	(-4; 0; 4)	(-1; 6; 7)	(1; 1; 0)

Тема 2. Пряма лінія на площині

Завдання 2.1. Дано пряма $l: Ax + By + C = 0$ і точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ (табл. 2.1). Знайти:

- 1) довжину відрізка M_1M_2 і координати точки N , що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ ;
- 2) рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2 ;
- 3) точку перетину прямої M_1M_2 і прямої l ;
- 4) рівняння прямої, що проходить через точку M_1 паралельно прямій l ;
- 5) рівняння прямої, що проходить через точку M_2 перпендикулярно прямій l ;
- 6) тангенс кута між прямими M_1M_2 і l ;
- 7) відстань від точки M_1 до прямої l ;
- 8) рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 і нахилена під кутом 45° до прямої l ;

9) зробити рисунок.

Таблиця 2.1

Варіант	Умова	λ
1	$x_1 = 3, y_1 = 4, x_2 = -2, y_2 = 2, A = 4, B = -1, C = 3$	0,5
2	$x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = -3, y_2 = 6, A = -2, B = 5, C = -3$	-2
3	$x_1 = 3, y_1 = 7, x_2 = -2, y_2 = 5, A = 7, B = 6, C = -2$	2
4	$x_1 = 2, y_1 = 1, x_2 = 8, y_2 = 6, A = 5, B = 5, C = 1$	-3
5	$x_1 = -5, y_1 = 7, x_2 = 3, y_2 = 2, A = -1, B = 3, C = -6$	-0,5
6	$x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = -3, y_2 = 0, A = 2, B = 4, C = -3$	-1
7	$x_1 = -4, y_1 = 5, x_2 = 3, y_2 = 2, A = 2, B = -3, C = 1$	2,5
8	$x_1 = 4, y_1 = -2, x_2 = 1, y_2 = 3, A = 5, B = -1, C = 2$	-3
9	$x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = 4, y_2 = 3, A = -5, B = -3, C = 1$	3,5
10	$x_1 = -2, y_1 = 3, x_2 = 1, y_2 = 0, A = 2, B = -3, C = 1$	5
11	$x_1 = 4, y_1 = 2, x_2 = 3, y_2 = 1, A = 8, B = -2, C = 3$	-4
12	$x_1 = 3, y_1 = 6, x_2 = 1, y_2 = 5, A = 7, B = -1, C = 3$	-5
13	$x_1 = 7, y_1 = -2, x_2 = 3, y_2 = 1, A = 2, B = -3, C = 4$	1,5
14	$x_1 = 0, y_1 = 12, x_2 = -9, y_2 = 3, A = 2, B = 10, C = -3$	3,5
15	$x_1 = 3, y_1 = 6, x_2 = 1, y_2 = 5, A = 7, B = -1, C = 3$	-8
16	$x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = 5, y_2 = 10, A = 3, B = 2, C = -1$	3
17	$x_1 = 1, y_1 = -3, x_2 = 2, y_2 = 9, A = 1, B = -2, C = 3$	2
18	$x_1 = -5, y_1 = 2, x_2 = 1, y_2 = -3, A = 2, B = -5, C = 4$	-0,5
19	$x_1 = -5, y_1 = -5, x_2 = 5, y_2 = -1, A = 2, B = -3, C = 4$	2
20	$x_1 = 0, y_1 = -2, x_2 = 3, y_2 = 3, A = 5, B = 1, C = 4$	-3
21	$x_1 = 3, y_1 = -2, x_2 = 1, y_2 = 6, A = 2, B = 5, C = -1$	4
22	$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 4, y_2 = -1, A = 2, B = -3, C = 0$	-3
23	$x_1 = 3, y_1 = -2, x_2 = 1, y_2 = 0, A = -1, B = 2, C = 3$	-5
24	$x_1 = -2, y_1 = 1, x_2 = 3, y_2 = -1, A = 2, B = -3, C = 7$	4
25	$x_1 = -1, y_1 = -2, x_2 = 0, y_2 = 1, A = 3, B = 6, C = -2$	-4
26	$x_1 = 5, y_1 = 1, x_2 = 0, y_2 = -3, A = 5, B = 1, C = 3$	-2
27	$x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = 8, y_2 = 4, A = 9, B = 1, C = 0$	3
28	$x_1 = 4, y_1 = -2, x_2 = 3, y_2 = -8, A = 4, B = 3, C = -2$	-3
29	$x_1 = 1, y_1 = -2, x_2 = 5, y_2 = 4, A = 2, B = 1, C = -7$	4
30	$x_1 = 4, y_1 = 5, x_2 = -1, y_2 = -3, A = 1, B = -1, C = 3$	-5

Завдання 2.2. В трикутнику ABC відомі координати двох вершин A, B і точки M – перетину висот трикутника (табл. 2.2). Знайти:

- 1) рівняння сторін трикутника;
- 2) довжину висоти AN ;
- 3) рівняння медіани BL ;

- 4) рівняння перпендикуляра, поставленого із середини сторони AB , і точку перетину його з прямою, що проходить через вершину A паралельно стороні BC ;
- 5) систему лінійних нерівностей, які визначають трикутник.
- Зробити рисунок.

Таблиця 2.2

Варіант	A	B	M
1	$(-5; 4)$	$(2; 1)$	$(2; 4)$
2	$(-4; 3)$	$(5; -1)$	$(5; 3)$
3	$(-3; 4)$	$(-1; 2)$	$(3; 4)$
4	$(2; 2)$	$(7; -1)$	$(4; 2)$
5	$(5; 4)$	$(8; 1)$	$(8; 4)$
6	$(6; 5)$	$(6; 2)$	$(5; 5)$
7	$(1; 4)$	$(10; -1)$	$(6; 4)$
8	$(5; 6)$	$(7; 2)$	$(-7; 6)$
9	$(3; 5)$	$(11; 1)$	$(6; 5)$
10	$(4; -4)$	$(12; -6)$	$(12; -4)$
11	$(8; -3)$	$(12; -5)$	$(6; -3)$
12	$(8; -1)$	$(14; -3)$	$(8; -1)$
13	$(-5; 0)$	$(4; -2)$	$(2; 0)$
14	$(-4; 1)$	$(5; -2)$	$(3; 1)$
15	$(-3; 2)$	$(6; -2)$	$(2; 2)$
16	$(-2; 4)$	$(7; 0)$	$(5; 4)$
17	$(-3; 3)$	$(6; -1)$	$(4; 3)$
18	$(-3; -5)$	$(6; -2)$	$(2; 0)$
19	$(-2; 5)$	$(7; 1)$	$(4; -5)$
20	$(-1; 1)$	$(8; -3)$	$(4; 1)$
21	$(-2; 4)$	$(7; 0)$	$(5; 4)$
22	$(1; 6)$	$(5; 2)$	$(7; 6)$
23	$(2; 4)$	$(5; 1)$	$(6; 4)$
24	$(2; 5)$	$(11; 3)$	$(7; 5)$
25	$(1; 4)$	$(9; 0)$	$(7; 4)$
26	$(-6; 5)$	$(6; 2)$	$(3; 5)$
27	$(-4; 4)$	$(5; 1)$	$(2; 4)$
28	$(15; 5)$	$(5; 1)$	$(2; 5)$
29	$(-3; 1)$	$(6; -3)$	$(6; 1)$
30	$(5; 6)$	$(9; 3)$	$(6; 6)$

Тема 3. Криві другого порядку

Завдання 3.1. Знайти канонічне рівняння еліпса, його фокуси. Зробити рисунок (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Варіант	Умова	Варіант	Умова
1	$a=3, c=1$	16	$b=8, c=2$
2	$b=4, c=6$	17	$b=5, c=3$
3	$a=6, \varepsilon=\frac{1}{3}$	18	$c=8, \varepsilon=\frac{3}{4}$
4	$c=6, \varepsilon=\frac{1}{3}$	19	$a=4, \varepsilon=\frac{1}{2}$
5	$c=5, \varepsilon=\frac{1}{4}$	20	$b=8, \varepsilon=\frac{1}{2}$
6	$a=5, c=2$	21	$b=4, c=1$
7	$b=5, \varepsilon=\frac{1}{3}$	22	$a=5, \varepsilon=\frac{1}{4}$
8	$a=6, c=2$	23	$a=6, c=2$
9	$c=7, \varepsilon=\frac{2}{3}$	24	$c=4, \varepsilon=\frac{1}{5}$
10	$b=3, c=1$	25	$b=7, \varepsilon=\frac{1}{7}$
11	$c=1, \varepsilon=\frac{1}{3}$	26	$a=5, c=1$
12	$a=4, c=1$	27	$b=6, c=3$
13	$b=5, c=3$	28	$b=6, \varepsilon=\frac{2}{5}$
14	$a=5, c=1$	29	$a=4, \varepsilon=\frac{3}{4}$
15	$c=2, \varepsilon=\frac{2}{3}$	30	$b=10, \varepsilon=\frac{5}{7}$

Завдання 3.2. Знайти канонічне рівняння гіперболи, її фокуси. Зробити рисунок (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Варіант	Умова	Варіант	Умова
1	$c=5, a=3$	16	$b=4, a=6$
2	$c=4, a=1$	17	$c=2, a=1$
3	$b=2, a=5$	18	$c=6, a=5$

4	$\dot{a}=2, \varepsilon=3,5$	19	$b=3, \varepsilon=4,5$
5	$c=3, \varepsilon=\frac{5}{3}$	20	$a=5, \varepsilon=\frac{3}{2}$
6	$a=5, \varepsilon=\frac{17}{3}$	21	$b=3, \varepsilon=\frac{3}{2}$
7	$a=1, \varepsilon=\frac{4}{3}$	22	$c=2, \varepsilon=\frac{7}{2}$
8	$c=2, \varepsilon=1,5$	23	$b=4, \varepsilon=2,5$
9	$c=2, \varepsilon=\frac{7}{3}$	24	$a=1, \varepsilon=\frac{7}{3}$
10	$b=2, \varepsilon=\frac{5}{4}$	25	$c=3, \varepsilon=\frac{9}{2}$
11	$c=5, a=1$	26	$c=3, a=2$
12	$a=4, \varepsilon=\frac{7}{3}$	27	$b=2, \varepsilon=\frac{5}{2}$
13	$c=3, \varepsilon=\frac{5}{3}$	28	$a=3, \varepsilon=\frac{5}{3}$
14	$c=4, a=3$	29	$b=5, a=9$
15	$b=1, \varepsilon=1,5$	30	$c=3, \varepsilon=3,5$

Завдання 3.3. Визначити, які лінії задані наступними рівняннями (табл. 3.3). Знайти їх канонічні рівняння і побудувати ці лінії.

Таблиця 3.3

Варіант	Рівняння кривих	
1	$x^2 - 4x - 5 = y$	$2x^2 + y^2 - 2 = 0$
2	$y^2 + xy = 0$	$x^2 + y^2 - 10x = 0$
3	$x = 2y^2 - 12y + 14$	$x^2 + y^2 + 6y = 0$
4	$x = \sqrt{2 - y^2}$	$x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$
5	$y = -x^2 + 4x$	$3x^2 + 4y^2 + 24x - 12y - 12 = 0$
6	$y^2 = 6x - 12$	$16x^2 - 9y^2 + 8x - 18y = 144$
7	$y^2 + 4y - 2x + 2 = 0$	$x^2 - y^2 + 2x - 6y = 0.$
8	$x^2 + 6xy + 9y^2 = 16$	$x^2 + y = 2x$
9	$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$	$y = -5 - \sqrt{-3x - 21}$
10	$x^2 + y^2 - 8x = 0$	$x = -4y^2 + y$
11	$y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$	$16x^2 + 16y^2 + 48x - 8y - 43 = 0$

Варіант	Рівняння кривих	
12	$y = -7 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$	$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
13	$x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$	$8x^2 + 4y^2 + 16x - 32y = 32$
14	$x = 5 - \frac{2}{3}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$	$y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$
15	$y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 - x}$	$x^2 + y^2 - 10x - 14y - 151 = 0$
16	$y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$	$y = 4x^2 - 8x + 7$
17	$x = -2\sqrt{-5 - yx - y^2}$	$x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$
18	$x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$	$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$
19	$y = \sqrt{9 - x^2}$	$9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$
20	$y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$	$16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$
21	$y = -\sqrt{25 - x^2}$	$x^2 + 9y^2 - 6x - 27 = 0$
22	$x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$	$9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$
23	$x = -\sqrt{4 - y^2}$	$9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$
24	$x = -2 + \sqrt{9 - y^2}$	$4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$
25	$x = +\sqrt{16 - y^2}$	$2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$
26	$y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$	$4x^2 - 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$
27	$y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$	$4x^2 + 16y^2 - 4x + 8y - 7 = 0$
28	$x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$	$y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$
29	$y = 3 - 4\sqrt{x - 1}$	$x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$
30	$x = -4 + 3\sqrt{y + 5}$	$2x^2 + 2y^2 - 4x + y = 0$

Тема 4. Матриці і визначники

Завдання 4.1. За даними табл. 4.1 знайти матриці:

1) $(2A + C) \cdot (2B - C^T)$; 2) $(A^T + B) \cdot (2C - A)$.

Таблиця 4.1

Варіант	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Варіант	A	B	C
2	$\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 2 & 10 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -5 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

Варіант	A	B	C
16	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & -4 & 2 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 7 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 7 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Варіант	A	B	C
30	$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Завдання 4.2. Знайти матрицю, обернену до матриці A (табл. 4.2). Зробити перевірку.

Таблиця 4.2

Варіант	A	Варіант	A
1	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & -5 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 3 & -4 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ 6 & -4 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & 10 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & -5 \\ 8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & -4 & -1 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & -5 & -1 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -3 & -7 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

Варіант	A	Варіант	A
10	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} -3 & 7 & 7 \\ -4 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 \\ 5 & -5 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 4 & 10 & -5 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 9 \\ 3 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Завдання 4.3. Обчислити ранг матриці A (табл. 4.3).

Таблиця 4.3

Варіант	A	Варіант	A
1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 & 8 \\ 0 & 8 & 12 & 13 & 10 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -1 & 4 \\ 10 & -6 & 19 & -1 & 12 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & -9 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 14 \\ -1 & 7 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Варіант	A	Варіант	A
4	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 7 & 16 \\ 4 & 9 & 22 \\ 3 & 8 & 19 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 9 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 12 & 6 & -4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & -11 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -3 & 4 & 7 \\ 3 & -4 & 9 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 16 & 10 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 13 & 3 & 3 \\ 4 & 10 & 21 & 7 & 5 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 9 & 1 & 8 \\ 5 & -8 & 13 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & -2 & 5 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & -1 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

Варіант	A	Варіант	A
12	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & 14 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 9 & 4 & -4 \\ 3 & -4 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 13 & 0 & 3 \\ 7 & 7 & -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -1 & 10 \\ -4 & -1 & 7 & 1 & 10 \\ 6 & 1 & -4 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & -1 & 2 \\ 1 & -8 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

Завдання 4.4. Обчислити визначник матриці A (табл. 4.4).

Таблиця 4.4

Варіант	A	Варіант	A
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Варіант	A	Варіант	A
4	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & -7 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 4 & 0 \\ -3 & -3 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 & 3 \\ -1 & -3 & 5 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

Варіант	A	Варіант	A
12	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -7 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \\ 7 & 4 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 7 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Тема 5. Системи лінійних рівнянь

Завдання 5.1. Розв'язати систему рівнянь (табл. 5.1) методом Крамера і методом оберненої матриці.

Таблиця 5.1

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
1	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 17, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13, \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \end{cases}$	17	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 4x_3 = -12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 17, \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 28, \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -10, \end{cases}$

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
4	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 18, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 26, \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 3, \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4, \end{cases}$
6	$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$	21	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ -2x_1 + 2x_2 = 2, \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15, \end{cases}$	22	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -6, \\ 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$
8	$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -15, \\ 3x_2 + 3x_3 = 15, \end{cases}$	23	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \end{cases}$
9	$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 11, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = -4, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 9, \end{cases}$
10	$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \end{cases}$	25	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_3 = -7, \end{cases}$
11	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \end{cases}$	26	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 17, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \end{cases}$	27	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 - 1x_3 = -3, \end{cases}$
13	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1, \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
14	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \end{cases}$	29	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -7, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \end{cases}$
15	$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -15, \\ 3x_2 + 3x_3 = 15, \end{cases}$	30	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$

Завдання 5.2. Розв'язати систему рівнянь (табл. 5.2) методом Гаусса.

Таблиця 5.2

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -11, \end{cases}$	16	$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_4 = 7, \\ 7x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 8, \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4, \\ -2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -11, \end{cases}$
3	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_4 = -13, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 18, \\ 2x_1 - 5x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 13, \end{cases}$	18	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18, \end{cases}$	19	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 13, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -13, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4, \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -8, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = -5, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \end{cases}$	20	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = -2, \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = -13, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 14, \end{cases}$
6	$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ -4x_2 + x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$	21	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 10, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$
7	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$	22	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -7, \end{cases}$

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
8	$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 14, \end{cases}$	23	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -10, \\ 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -16, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 = -1, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -8, \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \end{cases}$	24	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -15, \end{cases}$
10	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$	25	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 21, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 13, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18, \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 + 6x_3 + x_4 = 12, \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_4 = 1, \end{cases}$	26	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -11, \\ 3x_2 + x_4 = -9, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 11, \end{cases}$
12	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -6, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9, \\ -4x_1 - 5x_3 + x_4 = -7, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 14, \end{cases}$	27	$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = -1, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \end{cases}$
13	$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_4 = 17, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 5, \end{cases}$	28	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 8, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9, \\ 5x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 5, \end{cases}$
14	$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 17, \\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -8, \end{cases}$	29	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7, \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6, \end{cases}$
15	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -6, \\ -4x_2 + 5x_3 + x_4 = -7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$	30	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -4, \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

Завдання 5.3. За теоремою Кронекера – Капеллі дослідити сумісність системи (табл. 5.3). Методом Жордана-Гаусса знайти загальний розв’язок. Знайти один частинний розв’язок системи рівнянь і всі базисні розв’язки системи.

Таблиця 5.3

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
---------	-----------------	---------	-----------------

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
1	$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 11, \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 9, \end{cases}$	17	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ 5x_1 - 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_4 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 - 4x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = -3, \end{cases}$	19	$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 7, \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 5, \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 3, \\ -2x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \end{cases}$	21	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 10, \end{cases}$
7	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 = 3, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -2, \end{cases}$	22	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -5, \\ -3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ -3x_1 - 4x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 9, \end{cases}$	23	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 3x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$
9	$\begin{cases} 3x_1 + x_3 - x_4 = -2, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \end{cases}$	24	$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_4 = 13, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \end{cases}$
10	$\begin{cases} -5x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = -2, \end{cases}$	25	$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_3 + x_4 = -3, \end{cases}$

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
11	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 8, \end{cases}$
12	$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$	27	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ -x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$
13	$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ -x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$
14	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ -3x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 9, \end{cases}$	29	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ -x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 12, \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 - 5x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$	30	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

Тема 6. Границя функції

Завдання 6.1. Знайти границі функції (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Варіант	Границя	Варіант	Границя
1	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 2}$	16	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 4x + 3}$
2	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 3x + 2}$	17	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 3x - 2}$
3	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$	18	$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x - 2}$
4	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$	19	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 6x + 8}$
5	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$	20	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}$
6	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$	21	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + x - 1}$

Варіант	Границя	Варіант	Границя
7	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$	22	$\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 7x + 2}$
8	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$	23	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$
9	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 5x - 2}$	24	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x - 4}$
10	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$	25	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - 7x + 2}$
11	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$	26	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$
12	$\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 5x - 2}$	27	$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{2x^2 - 3x + 1}$
13	$\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 - 4x + 1}{3x^2 - 7x + 2}$	28	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 4x + 3}$
14	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 4x + 3}$	29	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$
15	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + x - 1}$	30	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$

Завдання 6.2. Знайти границі функції (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Варіант	Границя	Границя
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^4 - 2x + 2}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 3} \right)$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^8 + 4x^5 - 3x}{5 - x^8}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x - 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \right)$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 4x}{3x^4 + x^2 + 3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{2x^2 - 4x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} \right)$
4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 4x^3 - 3x}{2x^2 + 7x + 3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 5} \right)$
5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 1}{5x^2 + 6x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{5x^2 + 10} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$
6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3x}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \right)$
7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 - 2}{x^2 - 7}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{2x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 3x - 1} \right)$

Варіант	Границя	Границя
8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 2x^3 + 3}{x^7 + 3x - 5}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3} \right)$
9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2}{6x^5 - x}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x - 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 4} \right)$
10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 - 2x}{1 - x^3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{3x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$
11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x}{x^3 + 5}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 4} \right)$
12	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^7 + 4x^3}{3x^5 - 2x^3 + 7}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2} - \sqrt{3x^2 - x} \right)$
13	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7}{2x^2 - 5x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right)$
14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{3x^2 + x - 2}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{2x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + x - 3} \right)$
15	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^2}{3x^3 + 2x - 9}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 7x} - \sqrt{x^2 - 3x + 4} \right)$
16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 5x + 3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$
17	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 3x^2 + 2}{2x^6 + x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - x - 1} \right)$
18	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 + 2x - 1}{3x^2 - 5x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 7x - 5} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$
19	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x - 4}{2x^2 + x - 4}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$
20	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^2 + 5}{7x^2 - 3x + 1}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 - 5x - 3} \right)$
21	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} \right)$
22	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{19x^7 - 3x^5 + 2x^3}{8x^9 + 7x^7 - 2x^5}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 + 2x} \right)$
23	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 3}{2x^2 + 2}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$
24	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 1}{x - 3}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 2x + 4} \right)$
25	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5}{3x^2 + 7}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 2x} - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} \right)$

Варіант	Границя	Границя
26	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 3}{7x^4 - 2x + 6}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 3} \right)$
27	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^7 + 3x^3 + 3}{4x^8 - 3x^2 + 2}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1} \right)$
28	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 4}{4 - x^2}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 3} \right)$
29	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + 2x + 4}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 2x} - \sqrt{3x^2 + 3} \right)$
30	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$

Завдання 6.3. Знайти границю функції (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

Варіант	Границя	Варіант	Границя
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$	16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 8x}$
2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\arcsin 5x}$	17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sin^2 3x}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin 2x}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2}$	19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos 3x}$
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{1 - \cos 2x}$	20	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{5x^2}$
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x^2}$	21	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\operatorname{arctg} 5x}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin 13x}{\sin^2 3x}$	22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{1 - \cos 2x}$
8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{7 \operatorname{tg} 2x^2}$	23	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 3x}{7x}$
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x \operatorname{arctg} 5x}{\sin^2 3x}$	24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x^2}{1 - \cos 6x}$
10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{100x}{1 - \cos 2x}$	25	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{arctg}^2 3x}$
11	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^2}{2x}$	26	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x^2}$

Варіант	Границя	Варіант	Границя
12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\arctg 3x}$	27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\arctg 5x^2}$
13	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{\arcsin 2x}$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - 3\cos 2x}$
14	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{6\arctg 6x}$	29	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\arctg^2 7x}$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin^2 2x}$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arcsin^2 3x}$

Завдання 6.4. Знайти границю функції (табл. 6.4).

Таблиця 6.4

Варіант	Границя	Варіант	Границя
1	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x+1}\right)^{x+3}$	16	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8+3x}{3x-1}\right)^{x+5}$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x-3}{1+9x}\right)^{3x-2}$	17	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3x}{7+3x}\right)^{\frac{x-1}{3}}$
3	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+5x}{5x-1}\right)^{\frac{2x+5}{7}}$	18	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{3+2x}\right)^{\frac{x}{3}+5}$
4	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{x-10}$	19	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{7x}\right)^{5x-1}$
5	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{5x+4}\right)^{\frac{x-3}{2}}$	20	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x-1}\right)^{\frac{3x}{2}+5}$
6	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+7x}{7x-1}\right)^{x+5}$	21	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x-4}\right)^{11x+5}$
7	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{5x+1}\right)^{\frac{3x-1}{7}}$	22	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x}\right)^{\frac{x+5}{2}}$
8	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+1}\right)^{7x+5}$	23	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3x}{3x-1}\right)^{\frac{5x-1}{3}}$
9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+5}{7x-1}\right)^{\frac{x}{3}-5}$	24	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9+5x}{5x+3}\right)^{2x-1}$
10	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{9}{3x+1}\right)^{3x+4}$	25	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+2x}{2x-3}\right)^{2+3x}$

Варіант	Границя	Варіант	Границя
11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-1} \right)^{5x-4}$	26	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-7} \right)^{\frac{7x-1}{3}}$
12	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{8}{7x} \right)^{\frac{x+3}{2}}$	27	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+4x}{4x-5} \right)^{7x+5}$
13	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{\frac{2x-5}{3}}$	28	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3x-2} \right)^{5x+7}$
14	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+7x}{7x-1} \right)^{\frac{x-3}{7}}$	29	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{1+3x} \right)^{\frac{2x+5}{7}}$
15	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-1}{2+6x} \right)^{\frac{2x-7}{3}}$	30	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x-5}{8x-3} \right)^{8x}$

Завдання 6.5. Дослідити на неперервність функцію, побудувати її графік (табл. 6.5).

Таблиця 6.5

Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	$y = \begin{cases} x+1, & x \leq 1, \\ 2x^2, & 1 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases}$	16	$y = \begin{cases} 3-x, & x < 0, \\ x+3, & 0 \leq x < 2, \\ x^2, & x \geq 2; \end{cases}$
2	$y = \begin{cases} x^2-1, & x < 0, \\ 2x+1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 3, & x > 1; \end{cases}$	17	$y = \begin{cases} x^2-3, & x < -1, \\ -3-x, & -1 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$
3	$y = \begin{cases} 1, & x \leq -1, \\ x+2, & -1 < x < 0, \\ 3x^2, & x \geq 0; \end{cases}$	18	$y = \begin{cases} 2x+5, & x \leq 0, \\ x^2+5, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3; \end{cases}$
4	$y = \begin{cases} x+5, & x \leq 2, \\ x^2+3, & 2 < x \leq 3, \\ 3, & x \geq 3; \end{cases}$	19	$y = \begin{cases} 3x-2, & x < 1, \\ x, & 1 < x < 3, \\ 2x-3, & x > 3; \end{cases}$
5	$y = \begin{cases} x-2, & x < -1, \\ 2x-1, & -1 < x < 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$	20	$y = \begin{cases} 3-2x, & x \leq 0, \\ x^2+3, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$
8	$y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 2, \\ x-1, & x > 2; \end{cases}$	23	$y = \begin{cases} -x^2, & x < -1, \\ 2x-3, & -1 \leq x \leq 2, \\ x^2/4, & x > 2; \end{cases}$

Варіант	Функція	Варіант	Функція
9	$y = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 2 - x, & -1 \leq x < 0, \\ 3x + 2, & x \geq 0; \end{cases}$	24	$y = \begin{cases} x - 3, & x \leq -2, \\ 2x + 4, & -2 < x \leq 1, \\ 3 - x, & x > 1; \end{cases}$
10	$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -2, \\ 2x + 1, & -2 < x \leq 1, \\ 3, & x > 1; \end{cases}$	25	$y = \begin{cases} 3x - 1, & x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$
11	$y = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 < x < 3, \\ 2x - 3, & x > 3; \end{cases}$	26	$y = \begin{cases} x^2/2, & x < -3, \\ 2 - x, & -3 \leq x < 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$
12	$y = \begin{cases} x^2 + 5, & x \leq -1, \\ 3x + 1, & -1 < x \leq 2, \\ 7, & x > 2; \end{cases}$	27	$y = \begin{cases} 5 - 2x, & x \leq -2, \\ x + 3, & -2 < x \leq 1, \\ 2x + 2, & x > 1; \end{cases}$
13	$y = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1, \\ x^2 + 3, & 1 < x \leq 2, \\ 4x - 1, & x > 2; \end{cases}$	28	$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1, \\ x + 3, & -1 \leq x < 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$
14	$y = \begin{cases} 2x, & x < -3, \\ 3 - x, & -3 \leq x \leq 0, \\ 3, & x > 0; \end{cases}$	29	$y = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 3, \\ 1, & 3 < x \leq 4, \\ 2x - 7, & x > 4; \end{cases}$
15	$y = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1, \\ x + 1, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases}$	30	$y = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

Тема 7. Похідна функції. Застосування похідної

Завдання 7.1. Знайти перші похідні функцій (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Варіант	Функції	
1	$y = \sqrt[3]{(x+2)^2} + e^{-x}$	$y = \sin 2x \cdot \ln x$
	$y = \frac{3^{2x}}{\cos(3x-1)}$	$y = \arcsin 2^{\cos(5x+1)}$
2	$y = \cos 3x + \ln \sqrt{x}$	$y = 2^{7x} \cdot \operatorname{tg} 3x$
	$y = \frac{x^3}{\sin(x-3)}$	$y = 3^{\arccos \frac{x}{5}}$
3	$\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \operatorname{tg}(x^2+1)$	$y = \sin 2x \cdot e^{\frac{x}{3}}$
	$y = \frac{x^2}{\cos x}$	$y = \operatorname{arctg} 3^{2x+1}$

Варіант	Функції	
4	$y = \operatorname{ctg} 2x + \log_2 x^3$	$y = \sqrt[3]{x} \cdot \cos 2x$
	$y = \frac{\sin 2x}{e^x}$	$y = 3^{\arcsin \sqrt{x}}$
5	$y = \sin x^2 + 5^{3x}$	$y = \ln(2x + 3) \cdot (x + 1)^3$
	$y = \frac{x + 3}{\cos 3x}$	$y = \arccos \operatorname{tg} x^3$
6	$y = \log_3 2x + \operatorname{tg}(2x - 1)$	$y = 3^{2x} \cdot \sqrt{3x - 1}$
	$y = \frac{\sin x + 1}{\sqrt{x}}$	$y = \sqrt[3]{\cos^2 2^x}$
7	$y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{2x} + 3^{\frac{x}{3}}$	$y = \operatorname{tg} 3x \cdot (x - 1)^2$
	$y = \frac{x^2 + \cos 4x}{3^{2x}}$	$y = 3^{\ln \sqrt[5]{2x-3}}$
8	$y = \sqrt[3]{5x - 1} + \operatorname{arctg}(x - 2)$	$y = \operatorname{ctg}(2\pi - x) \cdot \sqrt[5]{x}$
	$y = \frac{2^x + x}{\cos 2x}$	$y = \sin \operatorname{arctg} 2^{-x^3}$
9	$y = \cos \sqrt{x} + \ln(2 - x)$	$y = \arcsin 3x \cdot e^{-2x}$
	$y = \frac{3x + \ln x}{\sqrt[4]{x - 1}}$	$y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt[3]{x^2}}$
10	$y = \operatorname{tg} x^3 + 3\sqrt{x + 1}$	$y = \log_3 \cdot \sqrt[3]{2 - x}$
	$y = \frac{(3 + x)^2}{2^x}$	$y = \arccos \ln \sqrt[5]{x^2}$
11	$y = \sqrt[5]{(1 - 2x)^3} + \operatorname{tg} 2x$	$y = 3^{x^2} \cdot \sin 2x$
	$y = \frac{3x^2 + x}{\cos 2x}$	$y = \log_5 \sin 2^{2x}$
12	$y = \log_3 \sqrt{x} + 2^{\sin x}$	$y = \operatorname{arctg} x \cdot x^3$
	$y = \frac{x + \sqrt{x}}{\sin 5x}$	$y = \arccos \ln(x^2 + x)$
13	$y = \operatorname{ctg}(2x - 1) + \frac{1}{2x}$	$y = \operatorname{tg} 3x \cdot 3^{-x^2}$
	$y = \frac{\cos(3\pi - x)}{x^3}$	$y = e^{\arcsin \sqrt{x^3}}$
14	$y = \sqrt[3]{(1 - 2x)^2} + 2^{-2x}$	$y = \operatorname{arctg}(x^2 + 1) \cdot 3^x$
	$y = \frac{3^{2x}}{x - 2x^2}$	$y = \cos \ln 2^x$

Варіант	Функції	
15	$y = \operatorname{ctg} 2x + 2^{\sin x}$	$y = \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{2x}$
	$y = \frac{\ln(2x-1)}{\sqrt[3]{x}}$	$y = \ln \sin^2(x+2)$
16	$y = \frac{3}{x^5} + e^{\cos x}$	$y = \sin^2 x \cdot x^2$
	$y = \frac{3x+1}{\cos(2-x)}$	$y = \operatorname{tg} 7^{\sin 3x^2}$
17	$y = \sqrt{\sin x} + 2^{-2x}$	$y = \operatorname{tg} 3x \cdot x^{\frac{2}{3}}$
	$y = \frac{\sin 3x+1}{4^x}$	$y = 5^{\sin^3 x^2}$
18	$y = \log_9 \sin x + \sqrt[3]{x^2}$	$y = \operatorname{ctg} x^2 \cdot (\ln x + 1)$
	$y = \frac{\cos 3x}{x + \ln x}$	$y = \sin \operatorname{arctg} \sqrt{x}$
19	$y = 2\sqrt[3]{x^2} + e^{2x}$	$y = \cos^3 x \cdot 2^{3x}$
	$y = \frac{\sqrt{3x-1}}{\sin 2x}$	$y = \operatorname{arcctg} \sin(x^2 - 5)$
20	$y = \ln^3(2+x) + 3^{2x}$	$y = \operatorname{ctg} 5x \cdot 2^{\sqrt{x}}$
	$y = \frac{x^2 + \sin 3}{2^x}$	$y = \sin \log_2 x^2$
21	$y = \sqrt{2x^2 - x} + e^{3x}$	$y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \ln 3x$
	$y = \frac{3^x}{x^2 + 1}$	$y = \log_5 \arcsin x^2$
22	$y = \sin^2 2x + \frac{3}{2x-1}$	$y = 10^{2x} \cdot x^{10}$
	$y = \frac{\sin(\pi - 2x)}{2^x}$	$y = e^{\operatorname{arcctg} \sqrt{x}}$
23	$y = \log_3 \sin x + 2^{2x}$	$y = \sin x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$
	$y = \frac{3x^2 + \sin x}{\sqrt{x}}$	$y = \sin 7^{\sqrt{x}}$
24	$y = \cos(2x-1) + \sqrt{x^3}$	$y = \sqrt[3]{(2x-1)^2} \cdot \sin 3x$
	$y = \frac{\log_5 2x}{\sin x}$	$y = \operatorname{ctg} 2^{\cos 3x}$
25	$y = 5\sqrt[4]{x^5} + \sin 2^x$	$y = \cos^2 2x \cdot \sqrt{x}$

Варіант	Функції	
	$y = \frac{3\sqrt{x}}{5^{2x}}$	$y = \arcsin \sqrt[3]{2x^2 - x}$
26	$y = \sqrt[5]{2x^2 - x} + \log_2^3 x$	$y = e^{2x-1} \cdot \sin x^2$
	$y = \frac{\cos(3x+1)}{23^x}$	$y = 5^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^3}}$
27	$y = \sin^2 x + 2^{x^2}$	$y = \operatorname{tg}(\pi - x) \cdot x^5$
	$y = \frac{\ln x + x}{2^x}$	$y = \log_3 \sin \sqrt{x^2 - x}$
28	$y = \frac{5}{3x-2} + e^{\sin x}$	$y = \sqrt[3]{2x^2 - 1} \cdot \sin x$
	$y = \frac{3x^5}{\sin(1-x)}$	$y = \operatorname{tg}^2 \ln(x+1)$
29	$y = \sin x^3 + 2^{-x}$	$y = \operatorname{ctg} x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$
	$y = \frac{3x^2 + \cos x}{\ln x}$	$y = \sin 2^{\operatorname{tg} x^2}$
30	$y = \frac{4}{(x+2)^5} + \cos e^x$	$y = \cos^2 x \cdot 5^x$
	$y = \frac{3^{x+1}}{\sin 3x}$	$y = \operatorname{ctg} \log_3 \sqrt{x}$

Завдання 7.2. Знайти похідну другого порядку (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Варіант	Функція	Варіант	Функція
1	$y = \sin 2x + x^2$	16	$y = 2^{3x} + \ln x$
2	$y = e^{-2x} + \sqrt{x} + 5$	17	$y = \cos(2x-3) + 2x$
3	$y = \sqrt[5]{2x+3} + \log_2 x$	18	$y = 10^{-x} + (x-3)^2$
4	$y = \operatorname{tg} 3x + 3^{2x-1}$	19	$y = 3x^5 - \sin 3x$
5	$y = \sqrt[3]{x^2} + \ln(2x+3)$	20	$y = \cos 5x - e^{-2x+1}$
6	$y = 2^{x^2} - 12 \sin x$	21	$y = \sqrt[3]{x} + \ln x^2$
7	$y = 2 \sin(3\pi + x) + x^{-3}$	22	$y = 2\sqrt[3]{x^{-1}} + \ln 3x$
8	$y = 10^{-\frac{x}{5}} + \sqrt[7]{x^4}$	23	$y = 2x + 3 - 5e^{-x}$
9	$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$	24	$y = \frac{1}{2x^3} + 3^{2x-1}$
10	$y = 7^{\frac{x}{7}} + 3 \log_2 x$	25	$y = 3\sqrt{x-3} + 2 \sin 5x$

Варіант	Функція	Варіант	Функція
11	$y = \frac{2}{3x-1} + 3^x$	26	$y = \operatorname{arctg} 2x$
12	$y = e^{-2x} + \frac{1}{3x^2}$	27	$y = \frac{3}{5x} + \sin(6\pi - x)$
13	$y = 3x^2 - 2x + 1 + 2^{3x}$	28	$y = \sqrt[3]{(3x+1)^2} + \cos 2x$
14	$y = (5x-1)^{10} + e^{-5x}$	29	$y = 2\ln 3x + \sin(2-x)$
15	$y = \log_3 x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	30	$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + e^{\frac{x}{5}}$

Завдання 7.3. Обчислити наближено (табл. 7.3).

Таблиця 7.3

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$\sin 29^\circ$	11	$\cos 61^\circ$	21	$\operatorname{tg} 61^\circ$
2	$\log_2 2,02$	12	$\sqrt[3]{8,02}$	22	$\cos 44^\circ$
3	$\cos 46^\circ$	13	$\log_3 2,98$	23	$\log_2 1,99$
4	$\operatorname{tg} 29^\circ$	14	$\sin 31^\circ$	24	$\sin 44^\circ$
5	$\sqrt{3,99}$	15	$\cos 31^\circ$	25	$\sqrt[3]{7,99}$
6	$\sin 59^\circ$	16	$\operatorname{tg} 59^\circ$	26	$\operatorname{tg} 31^\circ$
7	$\log_3 3,01$	17	$\cos 59^\circ$	27	$\log_3 2,99$
8	$\operatorname{ctg} 31^\circ$	18	$\operatorname{tg} 46^\circ$	28	$\cos 29^\circ$
9	$\sin 46^\circ$	19	$\sin 61^\circ$	29	$\log_5 4,99$
10	$\operatorname{tg} 44^\circ$	20	$\sqrt{4,02}$	30	$\sqrt[3]{7,98}$

Завдання 7.4. Знайти границі, за допомогою правила Лопіталя (табл. 7.4):

Таблиця 7.4

Варіант	Границя	Варіант	Границя
1	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$	16	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2^x - 1}$
2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + 3^x)}{x^2 + 2x + 5}$	17	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x}$	18	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$
4	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - \cos x}{\sin 3x}$	19	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 2^{x^2}}{\sin x - x}$

Варіант	Границя	Варіант	Границя
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x^2}$	20	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{3x}}{x^2}$
6	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{1-e^x}$	21	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x^2 + x}$
7	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\arcsin 2x}$	22	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{x^2 + 7x}$
8	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\tg x}$	23	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$
9	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x}$	24	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{1 - e^{2x}}$
10	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{2x} - 1}{\ln(1+x)}$	25	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{\ln(1+x^2)}$
11	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+2x)}{x^2}$	26	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 3x}$
12	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$	27	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg 3x + x}{\sin x}$
13	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \cos x}{\sin x}$	28	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{e^{2x}}$
14	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - x}{x^2}$	29	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3^x - \cos 2x}$
15	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{\arctg x}$	30	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\tg 2x}$

Тема 8. Дослідження функції

Завдання 8.1. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Варіант	$y = f(x)$	Варіант	$y = f(x)$
1	$y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$	16	$y = \frac{e^{2(2+x)}}{2(2+x)}$
2	$y = \frac{1 - 2x^3}{x^2}$	17	$y = \frac{8x}{4 + x^2}$
3	$y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$	18	$y = \frac{8x}{4 - x^2}$

Варіант	$y = f(x)$	Варіант	$y = f(x)$
4	$y = \frac{x^3 - 32}{x^2}$	19	$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$
5	$y = \frac{x^3}{1 - x^2}$	20	$y = \ln \frac{x}{x + 2}$
6	$y = \frac{e^{3-x}}{3 - x}$	21	$y = \frac{x}{1 - x^2}$
7	$y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$	22	$y = \frac{x^2}{(x - 1)^2}$
8	$y = \frac{x^2}{1 - x^2}$	23	$y = \frac{12x}{9 - x^2}$
9	$y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$	24	$y = \frac{12x}{9 + x^2}$
10	$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$	25	$y = \frac{e^{2-x}}{2 - x}$
11	$y = x^2 + \frac{1}{x^2}$	26	$y = x^2 - \ln x^2$
12	$y = \frac{1 - x^2}{x^2}$	27	$y = x + \frac{1}{x}$
13	$y = \frac{x}{1 + x^2}$	28	$y = \frac{x^3}{x - 1}$
14	$y = \frac{(x - 1)^2}{x^2}$	29	$y = \frac{x^3}{x + 1}$
15	$y = x^2 e^{-x}$	30	$y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТИПОВИХ ПРИКЛАДІВ

Приклад 1. Дано вектори $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ і $\bar{b} = 3\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$. Знайти:

1) $(3\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - 5\bar{b})$;

2) $|3\bar{a} - 2\bar{b}|$;

3) $np_{\bar{b}} \bar{a}$;

4) косинус кута між векторами $3\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{a} - 5\bar{b}$;

6) при якому значенні m вектори $\bar{a}$ і $\bar{i} + m\bar{j} - 5\bar{k}$ взаємно ортогональні.

Розв'язання. 1) За умовою дано вектори $\bar{a} = (1; 2; -1)$ і $\bar{b} = (3; 3; -2)$. Скориставшись формулами множення вектора на число і додавання векторів:

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \text{ і } (x_1, y_1, z_1) \pm (x_2, y_2, z_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$$

Відповідно, знаходимо

$$\begin{aligned} 3\bar{a} + \bar{b} &= 3(1; 2; -1) + (3; 3; -2) = (3; 6; -3) + (3; 3; -2) = \\ &= (3 + 3; 6 + 3; -3 + (-2)) = (6; 9; -5). \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\bar{a} - 5\bar{b} = (1; 2; -1) - 5(3; 3; -2) = (1; 2; -1) - (15; 15; -10) = (-14; -13; 9).$$

Скористаємося формулою скалярного добутку:

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Тоді

$$(3\bar{a} + \bar{b}) \cdot (\bar{a} - 5\bar{b}) = (6; 9; -5) \cdot (-14; -13; 9) = 6 \cdot (-14) + 9 \cdot (-13) + (-5) \cdot 9 = -246.$$

2) Спочатку знаходимо вектор $(3\bar{a} - 2\bar{b})$:

$$3\bar{a} - 2\bar{b} = 3(1; 2; -1) - 2(3; 3; -2) = (3; 6; -3) - (6; 6; -4) = (-3; 0; 1).$$

Скориставшись формулою

$$|\bar{a}| = |(x_1, y_1, z_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},$$

знаходимо

$$|3\bar{a} - 2\bar{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3,162.$$

3) Проекцію вектора на вектор знаходимо за формулою

$$np_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

Тоді

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{(1; 2; -1) \cdot (3; 3; -2)}{|(3; 3; -2)|} = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{22}} = \frac{11\sqrt{22}}{22} = \frac{\sqrt{22}}{2} \approx 2,345.$$

4) Косинус кута між векторами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ знаходимо за формулою:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Тоді

$$\cos \varphi = \frac{-246}{\sqrt{6^2 + 9^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{(-14)^2 + (-13)^2 + 9^2}} = \frac{-246}{\sqrt{142} \cdot \sqrt{446}} \approx -0,978.$$

5) Два вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю, називаються взаємно ортогональними. Тоді

$$(1; 2; -1) \cdot (1; m; -5) = 1 + 2m + 5 = 0 \Rightarrow m = -3.$$

Відповідь: 1) -246 ; 2) $\sqrt{10} \approx 3,162$; 3) $\frac{\sqrt{22}}{2} \approx 2,345$; 4) $-0,978$; 5) $m = -3$.

Приклад 2. Дано точки $A(1; 3; 5)$, $B(2; 3; -2)$, $C(2; 2; 5)$. Знайти:

- 1) координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.
- 2) косинус кута між векторами $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$;
- 3) довжини діагоналей паралелограма, який побудований на векторах $\overline{BA}$ і $\overline{BC}$;
- 4) координати четвертої вершини D паралелограма $ABCD$.
- 5) проекцію вектора $\overline{AC} + \overline{AB}$ на осі координат.

Розв'язання. 1) Координати вектора $\overline{AB}$ знаходимо за формулою

$$\overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Тоді

$$\overline{AB} = (2 - 1, 3 - 3, -2 - 5) = (1; 0; -7).$$

Аналогічно

$$\overline{AC} = (2 - 1, 2 - 3, 5 - 5) = (1; -1; 0),$$

$$\overline{BC} = (2 - 2, 2 - 3, 5 - (-2)) = (0; -1; 7).$$

2) За формулою косинуса кута між векторами дістаємо:

$$\begin{aligned}\cos(\overline{BA}, \overline{BC}) &= \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{(-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 7 \cdot 7}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-7)^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 7^2}} = \\ &= \frac{49}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \frac{49}{50} = 0,980.\end{aligned}$$

3) Відомо, що в паралелограмі, який побудований на векторах $\overline{BA} = \vec{a}$ і $\overline{BC} = \vec{b}$, одна вектор-діагональ $\overline{BD}$ є сумою $\vec{a} + \vec{b}$, а інша вектор-діагональ $\overline{CA}$ є різницею $\vec{a} - \vec{b}$ цих векторів (рис. 1).

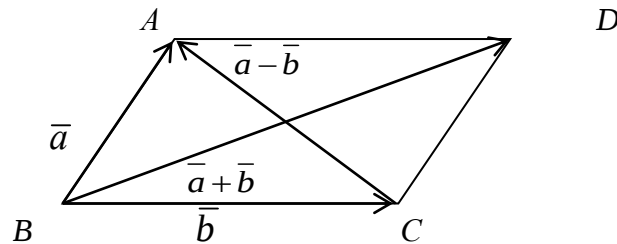


Рис. 1. Правило паралелограма

Знаходимо координати діагоналей:

$$\overline{CA} = -\overline{AC} = (-1; 1; 0),$$

$$\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{BC} = -\overline{AB} + \overline{BC} = (-1 + 0; 0 - 1; 7 + 7) = (-1; -1; 14).$$

Знаходимо довжини діагоналей паралелограма:

$$|\overline{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \approx 1,414,$$

$$|\overline{BD}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 14^2} = \sqrt{198} \approx 14,071.$$

4) Знайдемо координати вершини $D = (x_D, y_D, z_D)$. В п. 3 знайдено координати вектора $\overline{BD} = (-1; -1; 14)$. Крім того, координати цього вектора $\overline{BD} = (x_D - x_B, y_D - y_B, z_D - z_B) = (x_D - 2, y_D - 3, z_D + 2)$. Тоді

$$\overline{BD} = (x_D - 2, y_D - 3, z_D + 2) = (-1; -1; 14).$$

$$x_D - 2 = -1 \Rightarrow x_D = 1, \quad y_D - 3 = -1 \Rightarrow y_D = 2,$$

$$z_D + 2 = 14 \Rightarrow z_D = 12.$$

Отже, координати вершини $D = (1, 2, 12)$.

5) Знаходимо координати вектора $\overline{AC} + \overline{AB}$:

$$\overline{AC} + \overline{AB} = (1 + 1; -1 + 0; 0 - 7) = (2; -1; -7).$$

Тоді проекції вектора $\overline{AC} + \overline{AB}$ на осі Ox , Oy , Oz відповідно 2, -1 і -7.

Відповідь: 1) $\overline{AB} = (1; 0; -7)$; $\overline{AC} = (1; -1; 0)$, $\overline{BC} = (0; -1; 7)$; 2) 0,980; 3) $\sqrt{2} \approx 1,414$, $\sqrt{198} \approx 14,071$; 4) $D = (1, 2, 12)$; 5) 2, -1 і -7.

Приклад 3. Дано пряма $l: 4x - 3y + 1 = 0$ і точки $M_1(2; 1)$, $M_2(4; -1)$. Знайти:

- 1) довжину відрізка M_1M_2 і координати точки N , що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = -3$;
- 2) рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2 ;
- 3) точку перетину прямої M_1M_2 і прямої l ;
- 4) рівняння прямої, що проходить через точку M_1 паралельно прямій l ;
- 5) рівняння прямої, що проходить через точку M_2 перпендикулярно прямій l ;
- 6) тангенс кута між прямими M_1M_2 і l ;
- 7) відстань від точки M_1 до прямої l ;
- 8) рівняння прямої, яка проходить через точку M_1 і нахилена під кутом 45° до прямої l ;
- 9) зробити рисунок.

Розв'язання. 1) Довжину відрізка M_1M_2 знаходимо за формулою

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Тоді

$$|M_1M_2| = \sqrt{(4 - 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,828.$$

Координати точки $N(x, y)$, що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні λ , знаходимо за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1.$$

Тоді

$$x = \frac{2 - 3 \cdot 4}{1 - 3} = 5, \quad y = \frac{1 - 3 \cdot (-1)}{1 - 3} = -2.$$

Отже, отримали точку $N(5, -2)$.

2) Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Тоді

$$\frac{y - 1}{-1 - 1} = \frac{x - 2}{4 - 2} \Rightarrow 2(y - 1) = -2(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3.$$

Отже, шукане рівняння $y = -x + 3$.

3) Для того, щоб знайти точку перетину двох прямих, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y = -x + 3, \\ 4x - 3y + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 3, \\ 4x - 3(-x + 3) + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{13}{7}, \\ x = \frac{8}{7}. \end{cases}$$

Отже, $A\left(\frac{8}{7}; \frac{13}{7}\right)$ – точка перетину прямих M_1M_2 і l .

4) Шукана пряма l_1 і пряма l паралельні, тому з умови паралельності прямих $k_{l_1} = k_l$. З рівняння прямої l знаходимо її кутовий коефіцієнт. Маємо: $4x - 3y + 1 = 0$ або $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$. Тоді $k_{l_1} = k_l = \frac{4}{3}$. Оскільки пряма l_1 проходить через точку $M_1(2; 1)$, то її рівняння має вид: $y - y_{M_1} = k_{l_1}(x - x_{M_1})$ або $y - 1 = \frac{4}{3}(x - 2)$. Звідси $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$.

5) Для визначення рівняння прямої l_2 використовуємо умову перпендикулярності двох прямих, а саме, $k_{l_2} = -\frac{1}{k_l} = -1: \left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{3}{4}$. Оскільки пряма l_2 проходить через точку $M_2(4; -1)$, то її рівняння має вид: $y - y_{M_2} = k_{l_2}(x - x_{M_2})$ або $y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 4)$. Звідси $y = -\frac{3}{4}x + 2$.

6) Кут між прямими визначаємо за допомогою формули:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|,$$

де $k_1 = -1$ і $k_l = \frac{4}{3}$ – кутові коефіцієнти відповідно прямих M_1M_2 і l . Тоді

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{4}{3} + 1}{1 + \frac{4}{3} \cdot (-1)} \right| = \left| \frac{\frac{7}{3}}{-\frac{1}{3}} \right| = 7.$$

7) Відстань d від точки M_1 до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюємо за формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тоді

$$d = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{5} = 1,2.$$

8) Кут між прямими дорівнює 45° , тобто $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Позначимо l_2 – кутовий коефіцієнт шуканої прямої. Тоді

$$\left| \frac{k_2 - k_l}{1 + k_2 k_l} \right| = \left| \frac{k_2 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3} k_2} \right| = \operatorname{tg} 45^\circ = 1, \quad \frac{k_2 - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3} k_2} = \pm 1,$$

$$1) \quad k_2 - \frac{4}{3} = 1 + \frac{4}{3} k_2, \quad 2) \quad k_2 - \frac{4}{3} = -\left(1 + \frac{4}{3} k_2\right),$$

$$k_2 \left(1 - \frac{4}{3}\right) = 1 + \frac{4}{3}, \quad k_2 \left(1 + \frac{4}{3}\right) = -1 + \frac{4}{3},$$

$$k_2 = -7. \quad k_2 = \frac{1}{7}.$$

Оскільки шукана пряма проходить через точку $M_1(2; 1)$, то її рівняння має вид: $y - y_{M_1} = k_2(x - x_{M_1})$:

$$1) \quad y - 1 = -7(x - 2), \quad 2) \quad k_2 - 1 = \frac{1}{7}(x - 2),$$

$$y = -7x + 15. \quad y = \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}.$$

9) Зробимо рисунок (рис. 2).

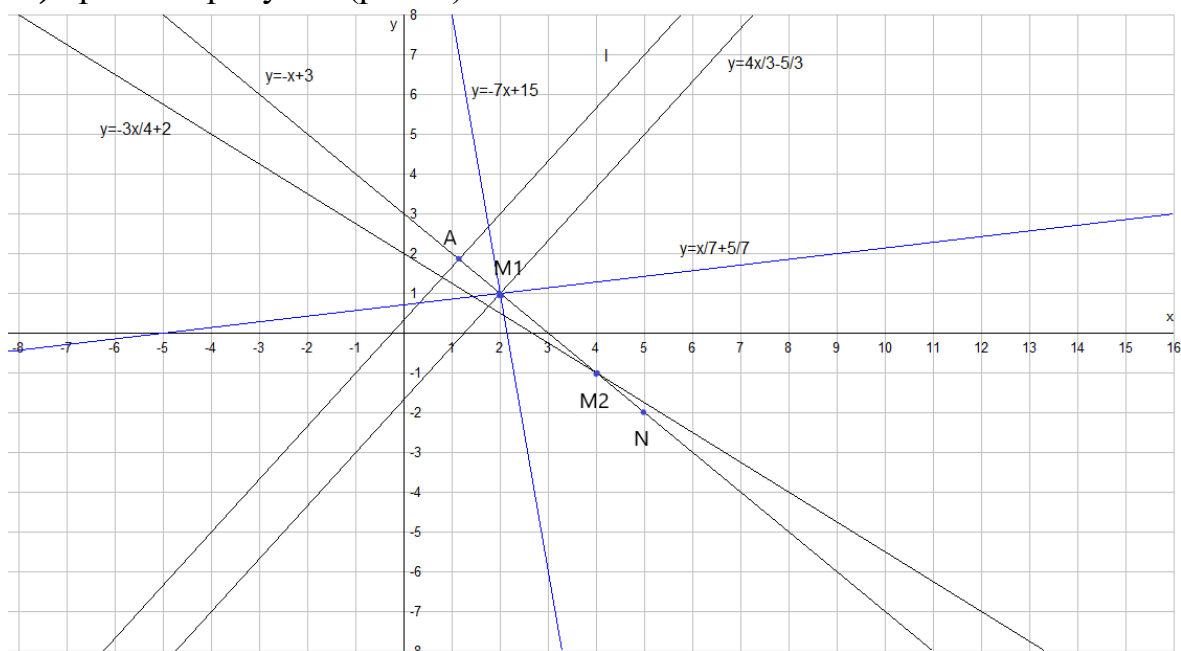


Рис. 2. Рисунок до прикладу 3

Відповідь: 1) $2\sqrt{2} \approx 2,828$, $N(5, -2)$; 2) $y = -x + 3$; 3) $A\left(\frac{8}{7}; \frac{13}{7}\right)$; 4)

$$y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}; 5) \quad y = -\frac{3}{4}x + 2; 6) \quad 7; 7) \quad 1, 2; 8) \quad y = -7x + 15 \text{ і } y = \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}.$$

Приклад 4. В трикутнику ABC відомі координати двох вершин $A(2;8)$, $B(4;10)$ і точки $M(1;8)$ – точки перетину висот трикутника. Знайти:

- 1) рівняння сторін трикутника;
- 2) довжину висоти AN ;
- 3) рівняння медіани BL ;
- 4) рівняння перпендикуляра, поставленого із середини сторони AB , і точку перетину його з прямою, що проходить через вершину A паралельно стороні BC ;
- 5) систему лінійних нерівностей, які визначають трикутник.

Зробити рисунок.

Розв’язання. 1) Рівняння прямої, яка проходить через точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ знаходимо за формулою:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Тоді

$$\frac{y - 8}{10 - 8} = \frac{x - 2}{4 - 2} \Rightarrow \frac{y - 8}{2} = \frac{x - 2}{2} \Rightarrow y - 8 = x - 2 \Rightarrow y = x + 6.$$

Рівняння сторони AB : $y = x + 6$.

Пряма BM перпендикулярна стороні AC , тобто $k_{AC} = -\frac{1}{k_{BM}}$. Кутовий коефіцієнт k_{BM} прямої, що проходить через дві точки $B(x_B, y_B)$ і $M(x_M, y_M)$, можна обчислити за формулою

$$k_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B}.$$

Тоді

$$k_{BM} = \frac{8 - 10}{1 - 4} = \frac{2}{3}.$$

Отже, $k_{AC} = -\frac{3}{2} = -1,5$. Оскільки пряма AC проходить через точку $A(2;8)$, то її рівняння має вид: $y - y_A = k_{AC}(x - x_C)$ або $y - 8 = -1,5(x - 2)$. Звідси $y = -1,5x + 11$.

Зауважимо, що $y_A = y_B$, тобто пряма AM проходить перпендикулярно до осі Oy . Крім того, $AM \perp BC$, тобто пряма BC проходить через точку B перпендикулярно до осі Ox . Отже, рівняння BC : $x = 4$.

2) Довжину висоти AN знаходимо за формулою відстані від точки A до прямої BC :

$$|AN| = d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 0 \cdot 8 + 0|}{\sqrt{4^2 + 0^2}} = 2.$$

3) Точка L – середина сторони AC (BL – медіана). Знаходимо спочатку координати точки C , як координати точки перетину прямих AC і BC :

$$\begin{cases} y = -1,5x + 11, \\ x = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5, \\ x = 4. \end{cases}$$

Отримали точку $C(4; 5)$. Скориставшись формулами середини відрізка, знаходимо координати точки L :

$$x_L = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3, \quad y_L = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{8 + 5}{2} = 6,5.$$

Отже маємо точку $L(3; 6,5)$.

Знаходимо рівняння медіани BL :

$$\begin{aligned} \frac{y - y_L}{y_B - y_L} &= \frac{x - x_L}{x_B - x_L} \Rightarrow \frac{y - 6,5}{10 - 6,5} = \frac{x - 3}{4 - 3} \Rightarrow \frac{y - 6,5}{3,5} = \frac{x - 3}{1} \\ y - 6,5 &= 3,5(x - 3) \Rightarrow y = 3,5x - 4. \end{aligned}$$

Отже, рівняння медіани – $y = 3,5x - 4$.

4) Нехай точка K – середина сторони AB . Тоді

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + 4}{2} = 3, \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{8 + 10}{2} = 9.$$

Отримали точку $K(3; 9)$. Кутовий коефіцієнт шуканої прямої: $k_1 = -\frac{1}{k_{AB}} = -1$.

Відповідно її рівняння має вид: $y - y_K = k_1(x - x_K)$ або $y - 9 = -(x - 3)$. Звідси $y = -x + 12$.

Рівняння прямої, що проходить через вершину A паралельно стороні BC : $x = 2$ (пряма проходить через точку $A(2; 8)$ і перпендикулярна осі Ox). Знаходимо точку перетину:

$$\begin{cases} y = -x + 12, \\ x = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 10, \\ x = 2. \end{cases}$$

Отримали точку $(2; 10)$.

5) Кожна пряма ділить площину на дві півплощини. Спочатку запишемо систему, яка складається з рівнянь сторін трикутника:

$$\begin{cases} y = x + 6, \\ y = -1,5x + 11, \\ x = 4. \end{cases}$$

Вибираємо довільну точку площини, що знаходиться всередині трикутника, наприклад, точку з координатами $(3; 8)$. Підставляємо координати цієї точки в кожне із рівнянь і визначаємо знак нерівності:

$$\begin{cases} 8 < 3 + 6, \\ 8 > -1,5 \cdot 3 + 11, \\ 3 < 4. \end{cases}$$

Отже, система нерівностей, що задає трикутник ABC має вид:

$$\begin{cases} y \leq x + 6, \\ y \geq -1,5x + 11, \\ x \leq 4. \end{cases}$$

Зробимо рисунок (рис. 3).

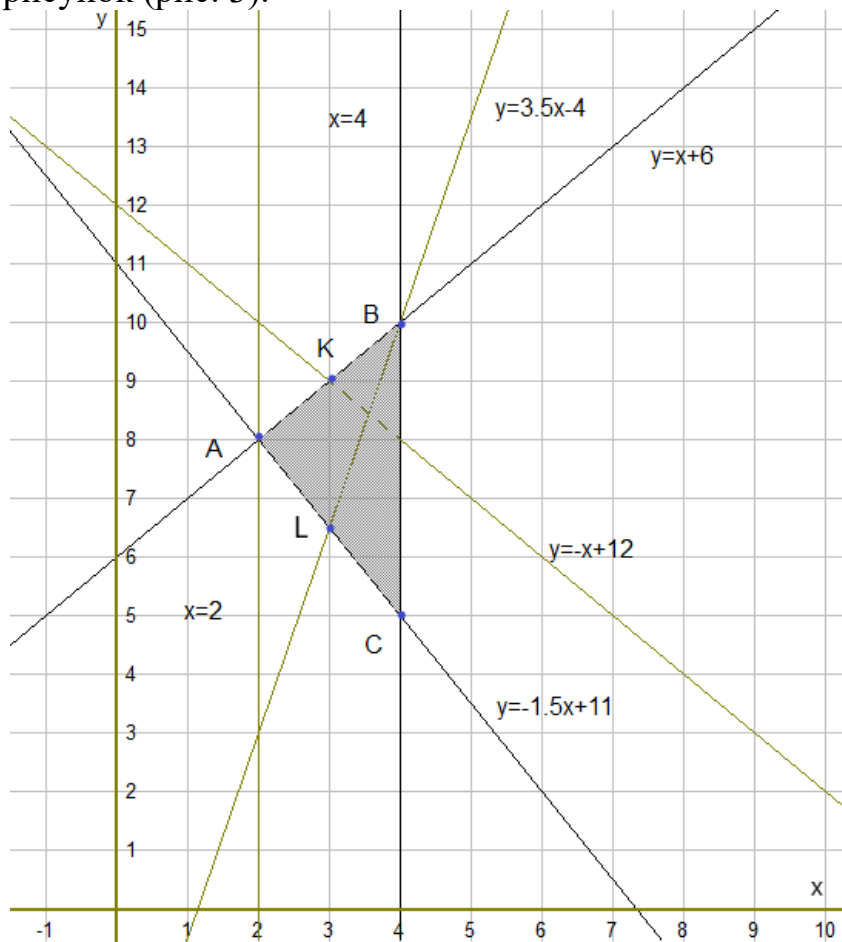


Рис. 3. Рисунок до прикладу 4

Відповідь: 1) $AB: y = x + 6$, $AC: y = -1,5x + 11$, $BC: x = 4$; 2) 2; 3) $y = 3,5x - 4$; 4) $y = -x + 12$, (2; 10).

Приклад 5. Знайти канонічне рівняння еліпса і його фокуси, якщо $a = 3$, $\varepsilon = 0,5$. Зробити рисунок.

Розв'язання. За формулою $\frac{c}{a} = \varepsilon$ дістаємо: $c = a\varepsilon = 1,5$. Скориставшись формулою $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, дістаємо:

$$1,5 = \sqrt{3^2 - b^2} \Rightarrow 1,5^2 = 9 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 2,25 = 7,75.$$

Канонічне рівняння еліпса має вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ або в нашому випадку } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7,75} = 1.$$

Фокуси: $F_1(-1,5;0)$, $F_2(1,5;0)$.

Зробимо рисунок (рис. 4).

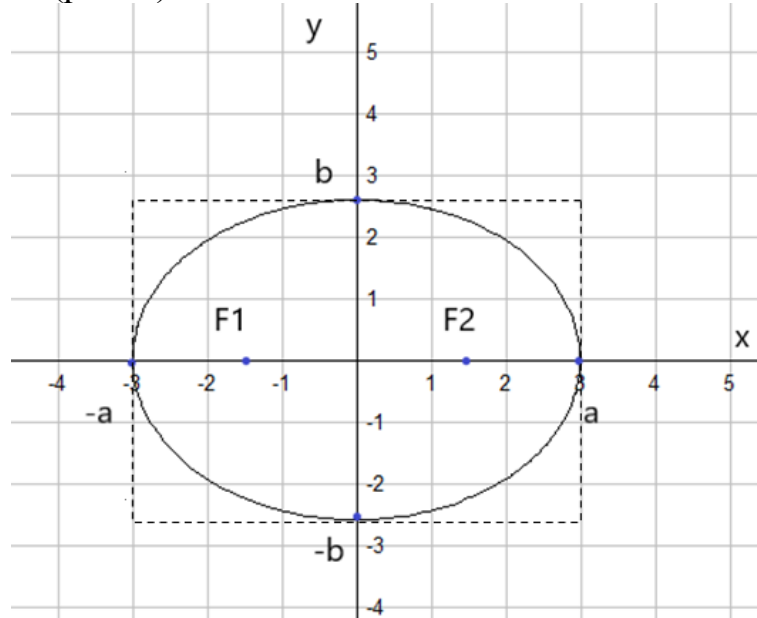


Рис. 4. Еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7,75} = 1$

Відповідь: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7,75} = 1$, $F_1(-1,5;0)$, $F_2(1,5;0)$.

Приклад 6. Знайти канонічне рівняння гіперболи та її фокуси, якщо $a=3$, $c=5$. Зробити рисунок.

Розв'язання. Скориставшись формулою $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, дістаємо:

$$5 = \sqrt{3^2 + b^2} \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16.$$

Канонічне рівняння гіперболи має вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ або в нашому випадку } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Фокуси: $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$. Знаходимо асимптоти гіперболи:

$$y = \pm \frac{b}{a}x, \text{ або } y = \pm \frac{4}{3}x$$

Зробимо рисунок (рис. 5).

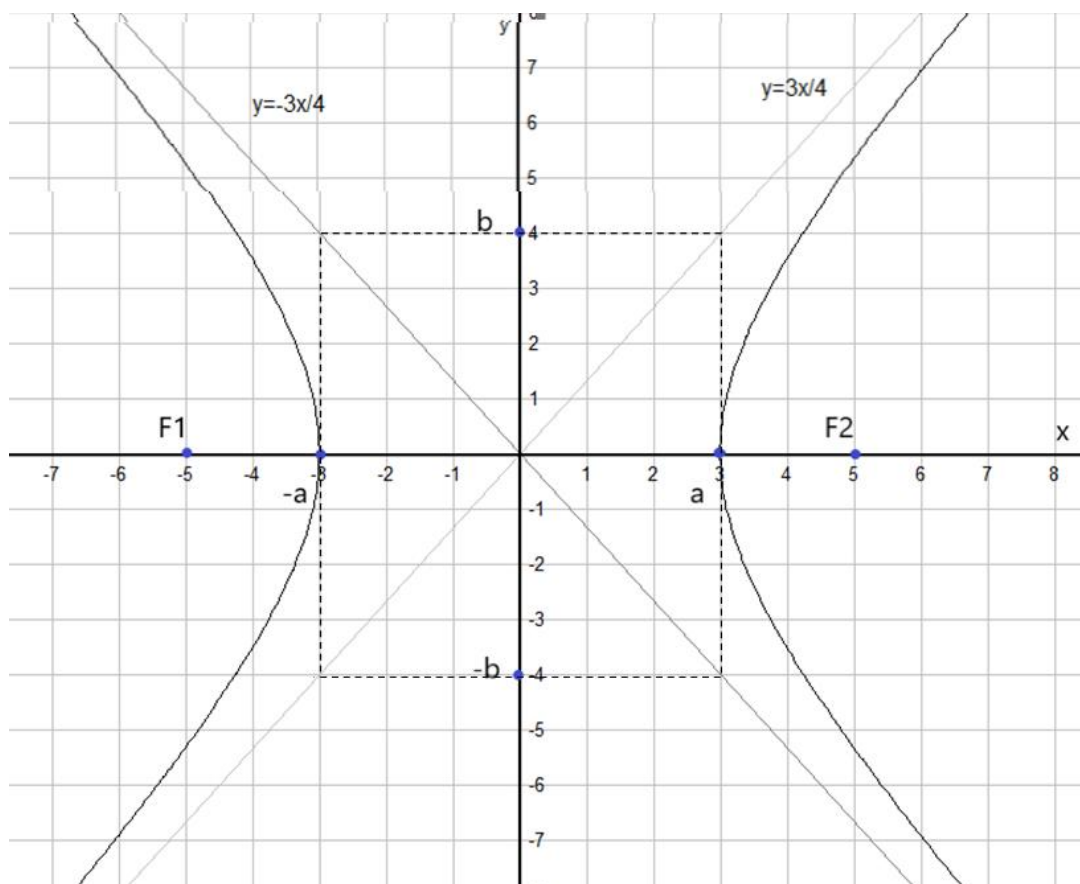


Рис. 5. Гіпербола $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Відповідь: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

Приклад 7. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайти: 1) $2A \cdot B + C^T$; 2) матрицю обернену для матриці A .

Розв'язання. 1) Знаходимо матрицю $2A$:

$$2A = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 5 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -8 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо добуток матриць:

$$2A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -8 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 0 & (-2) \cdot 4 + 4 \cdot 2 \\ 6 \cdot 2 + (-8) \cdot 1 & 6 \cdot 3 + (-8) \cdot 0 & 6 \cdot 4 + (-8) \cdot 2 \\ 10 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 10 \cdot 3 + 0 \cdot 0 & 10 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 4 & 18 & 8 \\ 20 & 30 & 40 \end{pmatrix}.$$

Матриця, яка одержана з матриці C заміною всіх рядків відповідними за номером стовпцями, називається транспонованою по відношенню до матриці C , тобто

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$2A \cdot B + C^T = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 4 & 18 & 8 \\ 20 & 30 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & -6+3 & 0-4 \\ 4+2 & 18+2 & 8+5 \\ 20-1 & 30+0 & 40-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 6 & 20 & 13 \\ 19 & 30 & 38 \end{pmatrix}.$$

2) Обчислимо визначник матриці C :

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 \cdot (-1) -$$

$$-(-1) \cdot 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 5 \cdot 0 = -15.$$

Оскільки $\det(C) \neq 0$, то існує обернена матриця C^{-1} .

Обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елементу матриці A .

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4; \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -1; \quad C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 6; \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3;$$

.....

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 23; \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -13; \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді

$$C^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 6 & -6 & -3 \\ 23 & -13 & -4 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку, помножив, наприклад, обернену матрицю на матрицю A :

$$\begin{aligned} C^{-1} \cdot C &= -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 6 & -6 & -3 \\ 23 & -13 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -4-3-8 & -8-2+10 & 4-0-4 \\ 6-18+12 & 12-12-15 & -6-0+5 \\ 23-39+16 & 46-26-20 & -23-0+8 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -15 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Відповідь: 1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 6 & 20 & 13 \\ 19 & 30 & 38 \end{pmatrix}$; 2) $-\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 6 & -6 & -3 \\ 23 & -13 & -4 \end{pmatrix}.$

Приклад 8. Обчислити ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 18 & 11 & 2 \\ 3 & 10 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконуємо елементарні перетворення матриці, що не змінюють її рангу: від елементів четвертого рядка віднімаємо відповідні елементи третього рядка, потім помножимо елементи другого рядка на (-2) і додаємо до відповідних елементів третього рядка.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 5 & 18 & 11 & 2 \\ -2 & -8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & -8 & -10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця еквівалентна до вихідної і її ранг не може бути більше двох. Розглянемо в останній матриці будь-який ненульовий визначник другого порядку (якщо такий існує), наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Таким чином, існує ненульовий мінор другого порядку, тому ранг останньої матриці $r=2$, тоді вихідна матриця теж має ранг, що дорівнює двом.

Відповідь: $r=2$.

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} x - 3y + z = -9 \\ x + 5y - z = 13 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

Розв'язання. а) Розв'язуємо за формулами Крамера. Спочатку знаходимо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5+1) + 3(-1+3) + 1(1-15) = -12.$$

Отже, $\Delta \neq 0$, можна скористатися формулами Крамера. Замінюємо перший стовбець стовбцем вільних членів и знаходимо отриманий визначник:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & -3 & 1 \\ 13 & 5 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9(-5+1) + 3(-13+5) + 1(13-25) = 0.$$

Аналогічно знаходимо ще два визначника:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 1 & 13 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1(-13+5) + 9(-1+3) + 1(5-39) = -24.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -9 \\ 1 & 5 & 13 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(25-13) + 3(5-39) - 9(1-15) = 36.$$

За формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{0}{12} = 0, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{12} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{36}{12} = -3.$$

Робимо перевірку:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -9, \\ x + 5y - z = 13, \\ 3x + y - z = 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 - 3 \cdot 2 - 3 = -9, \\ 0 + 5 \cdot 2 + 3 = 13, \\ 3 \cdot 0 + 2 + 3 = 5. \end{cases}$$

б) Розв'язуємо методом оберненої матриці. Знаходимо обернену матрицю:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -14 & -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -14 & -10 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 \cdot (-9) - 2 \cdot 13 - 2 \cdot 5 \\ -2 \cdot (-9) - 4 \cdot 13 + 2 \cdot 5 \\ -14 \cdot (-9) - 10 \cdot 13 + 8 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

в) Знаходимо рішення системи методом Гаусса. Розглянемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -9 \\ 1 & 5 & -1 & 13 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right).$$

Зводимо матрицю до трикутного виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -9 \\ 1 & 5 & -1 & 13 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xleftarrow{-(-2)} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 8 & -2 & 22 \\ 0 & 10 & -4 & 32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 10 & -4 & 32 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 10 \\ \xleftarrow{-} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Отже, отримана наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} x - 3y + z = -9, \\ y - 0,25z = 2,75, \\ -1,5z = 4,5. \end{cases}$$

З останнього рівняння маємо: $z = 4,5 / (-1,5) = -3$. Тоді з другого рівняння:

$y - 0,25z = 2,75 \Rightarrow y = 0,25 \cdot (-3) + 2,75 = 2$. Відповідно з першого рівняння знаходимо $x - 3y + z = -9 \Rightarrow x = -9 + 3 \cdot 2 + 3 = 0$.

Відповідь: (0; 2; -3).

Приклад 10. За теоремою Кронекера – Капеллі дослідити сумісність системи

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Методом Жордана-Гаусса знайти загальний розв'язок. Знайти один частинний і один базисний розв'язок системи рівнянь.

Розв'язання. Розглянемо розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 4 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

Виключимо x_1 з інших рівнянь за допомогою елементарних перетворень. В матриці множимо перший рядок на (-2) і додаємо до другого рядка, потім віднімаємо перший рядок від третього:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Бачимо, що два останніх рядка співпадають, тому один рядок відкидаємо. Потім другий рядок множимо на (-4) і додаємо до першого:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -14 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

Беремо будь-який мінор другого порядку, визначник якого не дорівнює нулю, наприклад,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці: $r(A) = r(A|B) = 2$. За теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна і $r=2$ змінних є базисними. Оскільки в системі $n = 4$ змінних, то $n - r = 2$ змінних є вільними.

В результаті перетворень дістали систему

$$\begin{cases} x_1 + 14x_3 + 11x_4 = -2, \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = -2 + 14x_3 + 11x_4, \\ x_2 = 1 - 3x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

В цій системі x_1, x_2 – базисні змінні, x_3, x_4 – вільні. Тоді загальний розв'язок системи має вид:

$$\begin{cases} x_1 = -2 + 14x_3 + 11x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad x_3 \in R, \quad x_4 \in R.$$

Якщо, наприклад, $x_3 = 1, x_4 = -1$, то $x_1 = -2 + 14x_3 + 11x_4 = -2 + 14 - 11 = 1$, $x_2 = 1 - 3x_3 - 2x_4 = 1 - 3 + 2 = 0$. Тоді $(1; 0; 1; -1)$ – частинний розв'язок системи рівнянь.

Якщо $x_3 = x_4 = 0$, то дістаємо базисний розв'язок: $(-2; 1; 0; 0)$.

Відповідь: $\begin{cases} x_1 = -2 + 14x_3 + 11x_4 \\ x_2 = 1 - 3x_3 - 2x_4 \end{cases} \quad x_3 \in R, \quad x_4 \in R. \quad (1; 0; 1; -1) \quad - \quad \text{частинний}$

розв'язок, $(-2; 1; 0; 0)$ – базисний розв'язок.

Приклад 11. Знайти границі функції:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^2 + x}{x^4 + 4x - 3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 3} \right)$;
 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 5x}{10x}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5} \right)^{3x}$.

Розв'язання.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^2 + x}{x^4 + 4x - 3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4 - x^2 + x}{x^4}}{\frac{x^4 + 4x - 3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}} = 2.$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0, n > 0 \right).$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 3} \right) &= \{ \infty - \infty \} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 3} \right) \left(\sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 3} \right)}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 2x - 1 - (x^2 - x + 3)}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 4}{\sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 3}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(3 - \frac{4}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} + |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{2|x|}. \end{aligned}$$

Якщо $x \rightarrow +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

Якщо $x \rightarrow -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2(-x)} = -\frac{3}{2}$.

3) Використовуємо першу чудову границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 5x}{10x} = \left(\begin{array}{l} \arctg 5x = t \\ 5x = t \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{2} = 0,5.$$

4) Відомо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ (друга чудова границя). Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{2x+5}\right)^{\frac{2x+5}{-6} \cdot \frac{-6 \cdot 3x}{2x+5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-18x}{2x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-18x}{2x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-18}{2 + 5/x}} = e^{-9}.$$

Відповідь: 1) 2; 2) якщо $x \rightarrow +\infty$, то $\frac{2}{3}$; якщо $x \rightarrow -\infty$, то $-\frac{2}{3}$; 3) 0,5; 4) e^{-9} .

Приклад 12. Дослідити на неперервність функцію, побудувати її графік.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x \leq 0; \\ x^2, & 0 < x \leq 2; \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Область визначення функції: $x \in (-\infty; +\infty)$. На інтервалах $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$ функція є неперервною. Тому розриви можуть бути тільки в точках $x = 0$ та $x = 2$, в яких змінюється аналітичне представлення функції.

Знаходимо односторонні границі в точці $x = 0$:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} (4 - x) = 4, \quad f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0.$$

Односторонні границі скінчені і $f(-0) \neq f(+0)$, отже $x = -4$ – точка неусувно-го розриву першого роду. Стрибок функції в точці розриву дорівнює $f(+0) - f(-0) = 0 - 4 = -4$. Зазначимо, що $f(-0) = f(0)$, отже, в точці $x = 0$ функція неперервна зліва.

Розглянемо точку $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^2 = 4, \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (2x) = 4.$$

Таким чином, $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$, в точці $x = 2$ функція неперервна. Будуємо графік функції (рис. 6).

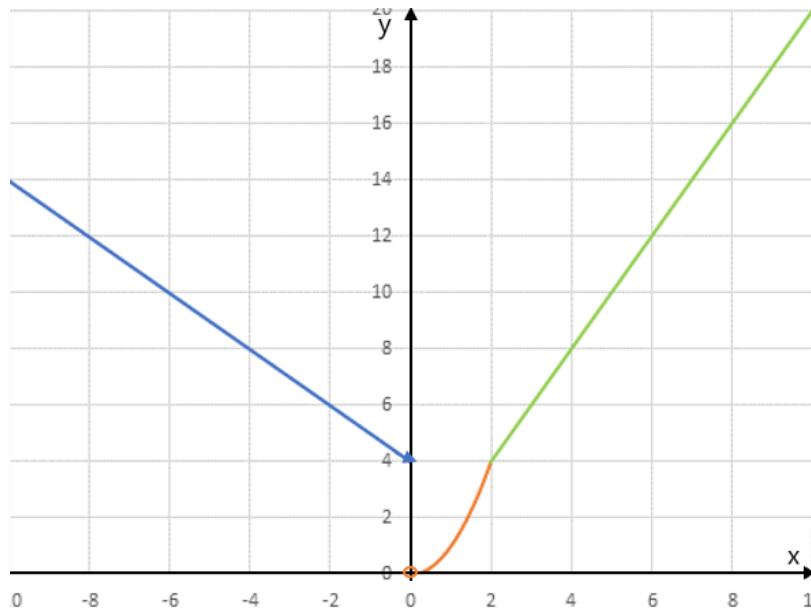


Рис. 6. Графік функції з прикладу 10

Відповідь: точка $x=0$ – – точка неусувного розриву першого роду.

Приклад 13. Знайти похідну першого порядку:

а) $y = 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{x^{-6}}{3} - 4x + 5$; б) $y = \arctg(4x + 3) \cdot x^{-1/4}$;

в) $y = \frac{2\sqrt{x}}{\sin(3x-1)}$; г) $y = \cos(\ln(3x-5)^{1/3})$.

Розв'язування.



а)

$$y' = \left(5x^{2/3}\right)' + \frac{1}{3}(x^{-6})' - 4x' = \frac{5 \cdot 2}{3}x^{2/3-1} - \frac{6}{3}x^{-6-1} - 4 = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^7} - 4.$$

б)

$$\begin{aligned} y' &= (\arctg(4x+3))' \cdot x^{-1/4} + \frac{(4x+3)' \cdot x^{-1/4}}{1+(4x+3)^2} - \frac{1}{4}\arctg(4x+3) \cdot x^{-1/4-1} = \\ &= \frac{4 \cdot x^{-1/4}}{1+(4x+3)^2} - \frac{1}{4}\arctg(4x+3) \cdot x^{-5/4}. \end{aligned}$$

в)

$$y' = 2 \cdot \left(\frac{(\sqrt{x})' \cdot \sin(3x-1) - \sqrt{x} \cdot (\sin(3x-1))'}{\sin^2(3x-1)} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\frac{\sin(3x-1)}{2\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} \cdot \cos(3x-1)}{\sin^2(3x-1)} \right) =$$

$$= \frac{\sin(3x-1) - 6x \cdot \cos(3x-1)}{\sqrt{x} \cdot \sin^2(3x-1)}.$$

г)

$$y' = -\sin\left(\ln(3x-5)^{1/3}\right) \cdot \left(\ln(3x-5)^{1/3}\right)' = -\sin\left(\ln(3x-5)^{1/3}\right) \cdot \frac{\left((3x-5)^{1/3}\right)'}{(3x-5)^{1/3}} =$$

$$= -\sin\left(\ln(3x-5)^{1/3}\right) \cdot \frac{(3x-5)^{1/3-1} (3x-5)'}{3(3x-5)^{1/3}} = -\sin\left(\ln(3x-5)^{1/3}\right) \cdot \frac{(3x-5)^{-2/3}}{(3x-5)^{1/3}} =$$

$$= \frac{\sin\left(\ln(3x-5)^{1/3}\right)}{5-3x}.$$

Відповідь: а) $\frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^7} - 4$; б) $\frac{4 \cdot x^{-1/4}}{1 + (4x+3)^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(4x+3) \cdot x^{-5/4}$;

в) $\frac{\sin(3x-1) - 6x \cdot \cos(3x-1)}{\sqrt{x} \cdot \sin^2(3x-1)}$; г) $\frac{\sin\left(\ln(3x-5)^{1/3}\right)}{5-3x}$.

Приклад 14. Знайти похідну другого порядку функції $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

Розв'язування.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0.$$

$$y'' = (3x^2 - 6x - 9)' = 6x - 6.$$

Відповідь: $6x - 6$.

Приклад 15. Обчислити наближено $y = \sqrt{3x^2 + x - 3}$, якщо $x=4,07$.

Розв'язування. Відомо, що $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$. Нехай $x_0=4$. Тоді $\Delta x = x_2 - x_1 = 0,07$. Знаходимо диференціал функції:

$$df(x) = f'(x)dx = \left(\sqrt{3x^2 + x - 3}\right)' dx = \frac{(3x^2 + x - 3)'}{2\sqrt{3x^2 + x - 3}} dx = \frac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x - 3}} dx.$$

Враховуючи, що $dx = \Delta x$, маємо

$$df(x_0) = \frac{6 \cdot 4 + 1}{2\sqrt{3 \cdot 4^2 + 4 - 3}} \cdot 0,07 = \frac{25}{14} \cdot 0,07 = 0,125.$$

Крім того, $f(x_0) = \sqrt{3 \cdot 4^2 + 4 - 3} = 7$. Отже, $f(x) \approx 7 + 0,125 = 7,125$.

Відповідь: 7,125.

Приклад 16. Знайти границі, за допомогою правила Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{4}\right)}{e^{x+1} - 1}.$$

Розв'язування.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{4}\right)}{e^{x+1} - 1} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{4}\right) \right)'}{(e^{x+1} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{\pi}{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{4}\right)}}{e^{x+1}} = \\ &= \left\{ \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x}{4}\right) = \cos^2 0 = 1 \right\} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 17. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$y = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

Розв'язування. 1) Знаходимо область визначення функції: $x^2 + x + 1 \neq 0$. Знаходимо дискримінант: $D = -3 < 0$. Отже, $x^2 + x + 1 > 0$ для будь-якого x , тобто $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Знаходимо точки перетину з осями координат. Якщо $y=0$, то

$$\frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} = 0 \Rightarrow 3x^2 + x + 2 = 0, D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -23 < 0.$$

Графік функції не має точок перетину з віссю Ox .

Якщо $x=0$, то $\frac{3 \cdot 0 + 0 + 2}{0 + 0 + 1} = 2$. Точка перетину з віссю Oy – $(0; 2)$.

3) Досліджуємо функцію на парність, непарність:

$$y(-x) = \frac{3(-x)^2 - x + 2}{(-x)^2 - x + 1} = \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 - x + 1} \neq \pm y(x).$$

Отже, функція не є ні парною, ні непарною, це функція загального виду.

4) Функція не є періодичною.

5) Функція неперервна в області визначення, не має точок розриву.

6) Досліджуємо функцію на монотонність. Знаходимо першу похідну та порівнюємо її до нуля:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} \right)' = \frac{(3x^2 + x + 2)'(x^2 + x + 1) - (3x^2 + x + 2)(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)^2} = \\ &= \frac{(6x + 1)(x^2 + x + 1) - (3x^2 + x + 2)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2}. \\ \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} &= 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0, \quad D = 4 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 12, \end{aligned}$$

$$\text{Критичні точки функції: } x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{4} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Розбиваємо область визначення функції на інтервали сталого знаку похідної і визначаємо знаки похідної в цих інтервалах. Результати для зручності записуємо в таблицю:

x	$(-\infty; -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	$(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}-1}{2})$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	$(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; \infty)$
$y'(x)$	+	0	-	0	+
$y(x)$	зростає	max	спадає	min	зростає

Таким чином, функція має дві точки екстремуму.

Точка максимуму: $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx -1,366$. Знаходимо максимальне значення функції:

$$y_{\max} = y\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 2}{\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2} + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 3 \approx 4,154.$$

Отже, отримали точку $\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{2\sqrt{3}}{3} + 3\right) \approx (-1,366; 4,154)$.

Точка мінімуму: $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \approx 0,366$. Знаходимо мінімальне значення функції:

$$y\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + 2}{\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + 1} = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,845.$$

Отже, отримали точку $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}; 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \approx (0,366; 1,845)$.

7) Знаходимо точки перегину функції та інтервали опуклості, вгнутості. Для цього знаходимо другу похідну функції та прирівнюємо її до нуля:

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{2x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} \right)' = \frac{(2x^2 + 2x - 1)'(x^2 + x + 1)^2 - (2x^2 + 2x - 1)((x^2 + x + 1)^2)'}{(x^2 + x + 1)^4} = \\ &= \frac{(4x + 2)(x^2 + x + 1)^2 - (2x^2 + 2x - 1)((2x + 1)^2)}{(x^2 + x + 1)^4} = -\frac{2(2x + 1)(x^2 + x - 2)}{(x^2 + x + 1)^3}. \\ -\frac{2(2x + 1)(x^2 + x - 2)}{(x^2 + x + 1)^3} &= 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0, \quad x^2 + x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Критичні точки (другого порядку): $x_1 = -0,5$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$.

Розбиваємо область визначення функції на інтервали сталого знаку другої похідної і визначаємо її знаки в цих інтервалах. Результати для зручності записуємо в таблицю:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; -0,5)$	$-0,5$	$(0,5; 1)$	1	$(1; \infty)$
$y''(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$y(x)$	вгнута	перегин	опукла	перегин	вгнута	перегин	опукла

Отримали три точки перегину:

$$x = -2, \quad y(-2) = \frac{3(-2)^2 - 2 + 2}{(-2)^2 - 2 + 1} = 4, \text{ тобто } (-2; 4),$$

$$x = -0,5, \quad y(-0,5) = \frac{3(-0,5)^2 - 0,5 + 2}{(-0,5)^2 - 0,5 + 1} = 3, \text{ тобто. } (-0,5; 3),$$

$$x = 1, \quad y(1) = \frac{3(1)^2 + 1 + 2}{(1)^2 + 1 + 1} = 2, \text{ тобто } (1; 2).$$

8) Знаходимо асимптоти графіка. Вертикальних асимптот не має (не має точок розриву).

Знаходимо похили асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x + 2}{x(x^2 + x + 1)} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{x + 1 + \frac{1}{x}} \right) = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = 3.$$

Тоді асимптота $y = b + kx$, або $y=3$, тобто отримали горизонтальну асимптоту.

9) Будуємо графік функції (рис 4.2).

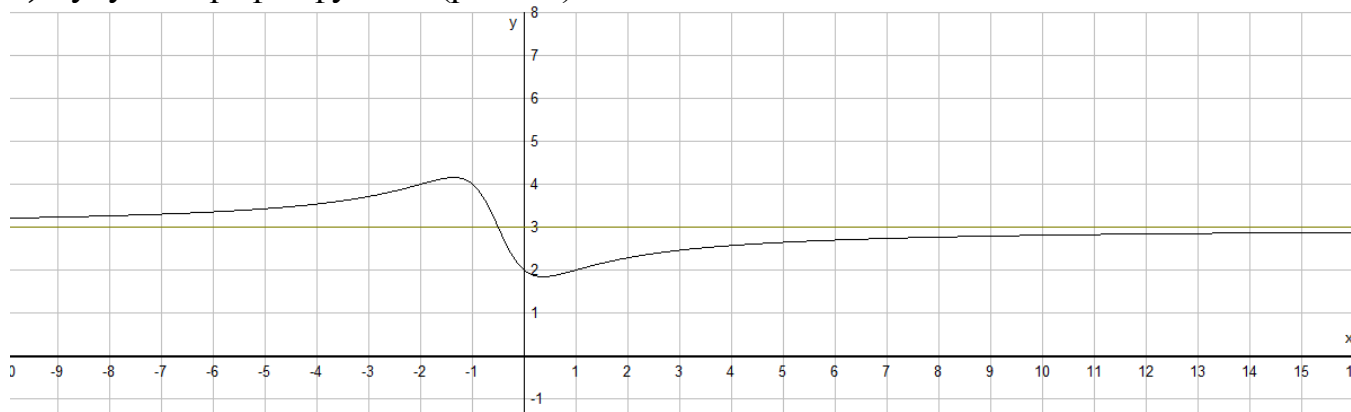


Рис. 7. Графік функції $y = \frac{3x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. — М.: Наука, 1985. — 446 с.
2. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1988. — 432 с.
3. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1988. — 240 с.
4. Валеев, К. Г. Вища математика: навч. посібник / К. Г. Валеев, І. А. Джалладова: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2001. — Ч. 1. — 546 с.
5. Данко, П.Е., Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - В 2-х ч. — 5-е изд., испр. — М.: Высш. шк., 1997.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу (для вузов) / под ред. Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
7. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
8. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. - М.: Наука, 1989. — 655 с.
9. Мартиненко, В.С. Збірник задач з вищої математики / В.С. Мартиненко, С.В. Білоусова, В.О. Борисейко та ін. - Ч. 1. - К. : КНТЕУ, 2000. — 210 с.
10. Пак, В. В. Вища математика / В.В. Пак, Й. Л. Носенко. — К.: Либідь, 1996. — 440 с.
11. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. — Т. 1, 2. — М.: Наука, 1985.
12. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / под ред. Г. И. Кручковича. — М.: Высш, шк., 1970. — 512 с.
13. Стрижак, Т. Г. Математический анализ / Т.Г. Стрижак, Н. Р. Коновалова. — К.: Либідь, 1995. — 240 с.
14. Тевяшев, А.Д. Вища математика у прикладах та задачах / А.Д. Тевяшев, Литвин О.Г. - Ч.1. - Харків: ХНУРЕ; Фактор, 2004. — 592 с.
15. Улітін, Г.М. Курс лекцій з вищої математики : навч. посіб. / Г.М. Улітін, Гончаров А.М. - ч. 1. — Донецьк : ДонНТУ, 2008. — 105 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Титульна сторінка індивідуальної роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩІЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"

Кафедра Вищої математики і фізики

ІНДИВІДУАЛЬНА РОБОТА

з дисципліни Вища математика. Частина 1

ВАРІАНТ № _____

Студента __ курсу групи _____.
спеціальності _____

(підпис) (П.І.Б.)

Перевірив: _____.
(посада, вчене звання, науковий ступень, прізвище та ініціали)

м. Покровськ – 20__ рік