

Міністерство освіти та науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»

Кафедра вищої математики і фізики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ З ВИЩОЇ ТЕМАТИКИ. ЧАСТИНА 2.
«ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ».

Покровськ, 2022

УДК №

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів технічних спеціальностей з Вищої математики. Частина 2. «Інтегральне числення» / [Укл. Н.Ф. Гогольова, Ю. В. Новікова]. – Покровськ: ДонНТУ, 2022. – 55 с.

Методичні вказівки містять основні теоретичні положення, розглянуті типові приклади розв’язання задач та розроблені індивідуальні завдання для самостійної роботи студентів, перелік рекомендованої літератури. Методичні вказівки призначені для студентів технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Укладачі: Гогольова Н.Ф., доц., к.ф.-м.наук, доц. кафедри вищої математики і фізики;

Новікова Ю.В., доц., к.ф.-м.наук, завідувач кафедри вищої математики і фізики.

Рецензент: Артеменко Ю.А., доц., к.т.н., доц. кафедри вищої математики і фізики;

Відповідальний за випуск: к.ф.-м.наук, завідувач кафедри вищої математики і фізики
Новікова Ю.В.

Затверджено навчально-методичним відділом ДВНЗ «ДонНТУ»,
протокол № _____ від _____

Розглянуто на засіданні кафедри _____вищої математики і фізики,
протокол № 6 від 27.05.2022 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. Методичні рекомендації до самостійної роботи за темою «Невизначений інтеграл»	4
1.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Таблиця основних інтегралів. Найпростіші правила інтегрування.	4
1.2. Задачі для самостійного опрацювання	7
1.3. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами.	8
1.4. Задачі для самостійного опрацювання	11
1.5. Інтегрування раціональних дробів.	12
1.6. Задачі для самостійного опрацювання	16
1.7. Інтегрування тригонометричних функцій.	16
1.8. Задачі для самостійного опрацювання	21
1.9. Інтегрування ірраціональних виразів	22
1.10. Задачі для самостійного опрацювання	26
РОЗДІЛ 2. Методичні рекомендації до самостійної роботи за темою «Визначений інтеграл»	27
2.1. Інтегральні суми. Умови існування визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу.	27
2.2. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної у визначеному інтегралі.	30
2.3. Задачі для самостійного опрацювання.	34
2.4. Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих.	35
2.5. Задачі для самостійного опрацювання.	42
РОЗДІЛ 3. Методичні рекомендації до самостійної роботи за темою «Невласні інтеграли»	44
3.1. Невласні інтеграли першого роду	44
3.2. Невласні інтеграли другого роду.	46
3.3. Задачі для самостійного опрацювання	48
ДОДАТКИ	49
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	54

ВСТУП

Самостійна робота – обов’язковий компонент навчальної та науково-дослідницької роботи студентів. Її ефективність значною мірою визначає якість професійної підготовки у ВНЗ. Студент самостійно, базуючись на своїх мотивах, оцінює предмет навчальної діяльності, визначає загальну мету і конкретні задачі, вибирає адекватні засоби їх вирішення для досягнення результату, здійснює необхідний самоконтроль.

Ефективність самостійної роботи досягається за рахунок максимальної активності самого студента.

Керівництво самостійною роботою студентів здійснюється в процесі співпраці викладача і студента і має на меті сформувати в останнього вміння будувати і використовувати алгоритм розв’язання типових задач, здійснювати типові розрахунки, самостійно працювати з навчальною та довідковою літературою, аналізувати матеріали лекцій.

Методичні вказівки призначені в першу чергу для студентів інженерно-технічних спеціальностей, але може бути корисним для студентів усіх спеціальностей денної та заочної форми навчання, які вивчають в тому чи іншому обсязі вищу математику. Воно адресоване в основному першокурсникам.

Посібник містить необхідний матеріал за розділом курсу «Вища математика. Частина 2»: невизначений інтеграл, визначений інтеграл, невласні інтеграли. Матеріал за даними темами викладено в короткій, конспективній формі і супроводжується розглядом достатньої кількості прикладів і задач. В кінці кожного розділу наведені варіанти завдань для самостійного розв’язання, які спрямовані на перевірку того, як засвоєні знання, необхідні для формування умінь. Наприкінці є додаток, який містить таблицю основних невизначених інтегралів, короткий довідковий матеріал з основних тригонометричних тотожностей, значенням тригонометричних функцій деяких кутів.

РОЗДІЛ I. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗА ТЕМОЮ «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

Мета роботи: Допомогти студентам оволодіти окремими розділами вищої математики «Інтегральне числення. Невизначений інтеграл»; ознайомитися з деякими теоретичними відомостями; сформулювати математичне мислення студентів; розвинути у них практичні навички при розв'язуванні задач.

1.1. Поняття первісної функції і невизначеного інтегралу. Властивості невизначеного інтегралу.

Таблиця основних інтегралів. Найпростіші правила інтегрування.

Означення. Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$, якщо у всіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Первісними для функції $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ є $F(x) = e^{3x}$,

$F(x) = e^{3x} + 12$, $F(x) = e^{3x} - \pi$, $F(x) = e^{3x} + \ln 7$, тому що похідна кожної із цих функцій дорівнює $f(x)$.

Теорема 1. Будь-яка неперервна на проміжку $[a, b]$ функція має на цьому проміжку первісну.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ має на проміжку $[a, b]$ первісну $F(x)$, то вона має на цьому проміжку безліч первісних, причому будь-які дві з них відрізняються лише сталим доданком.

Тобто, якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на $[a, b]$, то всі інші первісні цієї функції мають вигляд $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Означення. Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається множина всіх первісних цієї функції на деякому проміжку:
 $\int f(x)dx = F(x) + C$, $C = \text{const}$,

де $f(x)$ — підінтегральна функція,

$f(x)dx$ — підінтегральний вираз,

x — змінна інтегрування.

Графіком первісної функції є інтегральна крива. З геометричної точки зору невизначений інтеграл являє собою множину інтегральних кривих.

Операцію знаходження невизначеного інтеграла (або первісної) від функції $f(x)$ називають інтегруванням функції $f(x)$.

Приклади

1) $\int 5x^4 dx = x^5 + C$, тому що $(x^5 + C)' = 5x^4$;

2) $\int \cos x dx = \sin x + C$, тому що $(\sin x + C)' = \cos x$;

3) $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$, тому що $(\frac{1}{3}e^{3x} + C)' = \frac{1}{3} \cdot 3e^{3x} = e^{3x}$.

Властивості невизначеного інтегралу

1) Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2) Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3) Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої C , тобто $\int dF(x) = F(x) + C$ або $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

4) Сталий множник можна винести за знак інтеграла

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx, \text{ де } k = \text{const}.$$

5) Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми (різниці) функцій дорівнює алгебраїчній сумі (різниці) інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx.$$

6) Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ де } a, b \in R (a \neq 0);$$

7) *Властивість інваріантності формул інтегрування* — будь яка формула інтегрування при підстановці замість незалежної змінної будь-якої диференційованої функції від цієї змінної зберігає свій вигляд.

Тобто, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ для $x \in [a, b]$, і $u = u(x)$ — будь-яка безліч разів диференційована на цьому проміжку функція, то $\int f(u)du = F(u) + C$

Ця властивість дає можливість знаходити багато інтегралів.

Приклад. $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, тоді згідно властивості 7: $\int 3u^2 du = u^3 + C$.

Зокрема, якщо $u = \operatorname{tg} x$, то $\int 3 \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^3 x + C$, або якщо $u = \ln x$, то

$$\int 3 \ln^2 x \frac{dx}{x} = \int 3(\ln x)^2 d(\ln x) = \ln^3 x + C.$$

Таблиця основних інтегралів

$$1. \int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$$

$\alpha \in \mathbb{R} (\alpha \neq -1).$

$$7. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u du = \operatorname{tgu} + C.$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$$

$$8. \int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctgu} + C.$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$$9. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$4. \int e^u du = e^u + C.$$

$$10. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C.$$

$$11. \int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C.$$

$$12. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

Приклад. $\int \frac{dx}{x^2 - 5} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}} \right| + C.$

Найпростіші правила інтегрування

1) Подання підінтегральної функції у вигляді суми найпростіших дробів шляхом почленного ділення чисельника дробу на її знаменник.

Приклад.
$$\int \frac{7x^2 - 2\sqrt{x} + 1}{x^2} dx = 7 \int \frac{dx}{x} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}^3} + \int \frac{dx}{x^2} = 7x + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + C.$$

2) Перетворення підінтегральної функції за допомогою найпростіших тригонометричних формул

Приклад.
$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

3) Перетворення підінтегральної функції за допомогою властивостей показникової функції

Приклад.

$$\begin{aligned} \int 3^{x+1} 2^{3x-1} dx &= \int 3^x \cdot 3 \cdot \frac{2^{3x}}{2} dx = \frac{3}{2} \int 3^x \cdot 8^x dx = \\ &= \int 24^x dx = \frac{24^x}{\ln 24} + C \end{aligned}$$

1.2 Задачі для самостійного опрацювання

Обчислити невизначені інтеграли

1) $\int x^{-2}(1-x)^3 dx$; 2) $\int \left(5 \sin x + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$;

3) $\int \operatorname{tg}(5x) dx$; 4) $\int \frac{(1-2\sqrt{x})^2}{x^2} dx$; 5) $\int \left(\cos^{-2} x + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$;

6) $\int e^{5x} dx$; 7) $\int \left(\frac{11}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{\sqrt{x^3}} \right) dx$; 8) $\int \left(2^x + x^{-1} + \frac{5}{\sqrt{x^2-7}} \right) dx$;

9) $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$; 10) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$; 11) $\int \frac{(1+2x)^3}{x} dx$;

12) $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$; 13) $\int \frac{(4+3\sqrt{x})^2}{x} dx$; 14) $\int 5^x \left(1 + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x^3}} \right) dx$.

1.3. Заміна змінної у невизначеному інтегралі.

Інтегрування частинами.

Теорема (про заміну змінної у невизначеному інтегралі). Якщо функція $x=\varphi(t)$ визначена, монотонна та неперервно диференційована на $[\alpha, \beta]$, причому множиною значень функції $x=\varphi(t)$ є відрізок $[a, b]$, а функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то на цьому проміжку має місце формула

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

у правій частині якої під t варто розуміти функцію $t=t(x)$, обернену до $x=\varphi(t)$.

Приклади.

$$1) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\sin x} + C,$$

$$2) \int (3x-12)^{15} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 3x-12 \\ dt = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int t^{15} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{(3x-12)^{16}}{48} + C,$$

$$3) \int \frac{x dx}{x^4 + 4} = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{2^2 + t^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{4} \arctg \left(\frac{x^2}{2} \right) + C,$$

$$4) \int \frac{x - \arctg x}{1+x^2} dx = \int \frac{x dx}{1+x^2} - \int \frac{\arctg x dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} y = \arctg x \\ dy = \frac{dx}{1+x^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \int y dy = \frac{1}{2} \ln|t| - \frac{y^2}{2} + C = \frac{\ln|1+x^2|}{2} - \frac{\arctg^2 x}{2} + C.$$

Метод інтегрування частинами

Якщо $u=u(x)$ і $v=v(x)$ — визначені й диференційовані функції, то має місце *формула інтегрування частинами*

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

яка дозволяє обчислення інтеграла $\int u dv$ звести до обчислення більш простішого інтеграла $\int v du$, якщо вдало вибрати функцію $u(x)$.

Метод інтегрування частинами застосовується при знаходженні невизначених інтегралів таких типів:

1. Якщо підінтегральна функція являє собою добуток степеневої функції й тригонометричної або показникової функцій

$$\int P_n(x) \sin kx dx = \left| \begin{array}{ll} u = P_n(x) & du = P'_n(x) dx \\ dv = \sin kx dx & v = \int \sin kx dx = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| ,$$

$$\int P_n(x) \cos kx dx = \left| \begin{array}{ll} u = P_n(x) & du = P'_n(x) dx \\ dv = \cos kx dx & v = \int \cos kx dx = \frac{1}{k} \sin kx \end{array} \right| ,$$

$$\int P_n(x) e^{kx} dx = \left| \begin{array}{ll} u = P_n(x) & du = P'_n(x) dx \\ dv = e^{kx} dx & v = \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} \end{array} \right| ,$$

$$\int P_n(x) a^{kx} dx = \left| \begin{array}{ll} u = P_n(x) & du = P'_n(x) dx \\ dv = a^{kx} dx & v = \int a^{kx} dx = \frac{1}{k \ln a} a^{kx} \end{array} \right| .$$

2. Якщо підінтегральна функція дорівнює добутку степеневої функції на логарифмічну або обернену тригонометричну функцію, то за u приймають останні функції, а степеневу функцію відносять до dv :

$$\int P_n(x) \begin{array}{l} \arcsin f(x) \\ \arccos f(x) \\ \operatorname{arctg} f(x) \\ \operatorname{arcctg} f(x) \\ \ln f(x) \end{array} dx = \left| \begin{array}{ll} \arcsin f(x) \\ \arccos f(x) \\ \operatorname{arctg} f(x) \\ \operatorname{arcctg} f(x) \\ \ln f(x) \\ dv = P_n(x) dx & v = \int P_n(x) dx = \dots \end{array} \right| \quad du = (\dots)' dx$$

3. При обчисленні інтегралів виду $\int a^{kx} \cos mx dx$, $\int e^{kx} \sin mx dx$ байдуже, яку з функцій приймати за u . Інтегрування частинами застосовується двічі (і обидва рази за u приймають функцію того ж самого

класу). У результаті чого, одержимо рівняння для визначення цього інтеграла.

Приклад.

$$\begin{aligned}\int (x-3) \cos 5x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x-3, \quad du = dx \\ dv = \cos 5x \, dx, \quad v = \frac{1}{5} \sin 5x \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{5} (x-3) \sin 5x - \frac{1}{5} \int \sin 5x \, dx = \\ &= \frac{1}{5} (x-3) \sin 5x - \frac{1}{5} \left(-\frac{1}{5} \cos 5x \right) + C = \frac{1}{5} (x-3) \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + C.\end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned}\int x \arctg x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x \, dx, \quad v = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1)-1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C = \frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + C\end{aligned}$$

Приклад.

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x^3 dx, \quad v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \\ &= \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C.\end{aligned}$$

Приклад. $\int e^{3x} \sin 7x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{3x}, \quad du = 3e^{3x} dx \\ dv = \sin 7x \, dx, \quad v = -\frac{1}{7} \cos 7x \end{array} \right\} = -\frac{1}{7} e^{3x} \cos 7x +$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{7} \int e^{3x} \cos 7x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{3x}, \quad du = 3e^{3x} dx \\ dv = \cos 7x dx, \quad v = \frac{1}{7} \sin 7x \end{array} \right\} = -\frac{1}{7} e^{3x} \cos 7x + \\
& + \frac{3}{7} \left(\frac{1}{7} e^{3x} \sin 7x - \frac{3}{7} \int e^{3x} \sin 7x dx \right) = \\
& = -\frac{1}{7} e^{3x} \cos 7x + \frac{3}{49} e^{3x} \sin 7x - \frac{9}{49} \int e^{3x} \sin 7x dx,
\end{aligned}$$

звідки $\frac{58}{49} \int e^{3x} \sin 7x dx = e^{3x} \left(\frac{3}{49} \sin 7x - \frac{1}{7} \cos 7x \right).$

Отже, $\int e^{3x} \sin 7x dx = \frac{7}{58} e^{3x} \left(\frac{3}{7} \sin 7x - \cos 7x \right) + C.$

1.4. Задачі для самостійного опрацювання

Обчислити невизначені інтеграли методом заміни змінної:

$$\begin{aligned}
& 1) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}} dx; \quad 2) \int \frac{e^x + e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx; \\
& 3) \int \sqrt[3]{x^3 - 8} x^2 dx; \quad 4) \int \frac{x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5) \int 10^{2x-5} dx; \quad 6) \int x \sqrt{2x^2 + 7} dx; \quad 7) \int \frac{3 \arcsin^4 x + 9x}{\sqrt{1-x^2}} dx.
\end{aligned}$$

Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами

$$\begin{aligned}
& 1) \int (6x - 7) 9^x dx; \quad 2) \int (4x - 17) \sin(3x) dx; \quad 3) \int \arcsin\left(\frac{5x}{2}\right) dx; \\
& 4) \int \frac{\ln x}{7x^5} dx; \quad 5) \int 2^x \sin(4x) dx; \quad 6) \int (2x + 5) 4^x dx; \\
& 7) \int \arctg(5x + 2) dx; \quad 8) \int x \ln(3 - 2x) dx; \quad 9) \int e^{5x} \cos x dx.
\end{aligned}$$

1.5. Інтегрування раціональних дробів

Дрібно-раціональною функцією або раціональним дробом називається функція, яка дорівнює відношенню багаточленів:

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m},$$

де $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n), b_j (j = 0, 1, 2, \dots, m) \in R, a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

Якщо $n < m$, то раціональний дріб називається *правильним*, якщо $n \geq m$, то дріб називається *неправильним*. Наприклад,

$\frac{2x-1}{x^3-8x+2}$ — правильний раціональний дріб ($n=1, m=3, n < m$);

$\frac{x^2-1}{x^2+4}$ — неправильний дріб ($n=m=2$);

$\frac{x^3-2x^2+5x-1}{x^2+x-5}$ — неправильний дріб ($n=3, m=2, n > m$).

Найпростішими дробами називаються раціональні дробки наступних чотирьох типів:

I. $\frac{A}{x-x_0}$, де $A, x_0 \in R, A \neq 0$;

II. $\frac{A}{(x-x_0)^k}$, де $A, x_0 \in R, A \neq 0$;

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, де $A, B, p, q \in R, p^2-4q < 0$, A и B не дорівнюють нулю

одночасно;

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, де $A, B, p, q \in R, p^2-4q < 0$, A и B не дорівнюють нулю

одночасно, $k=2, 3, \dots$

Інтегрування дробів типу I й II за допомогою заміни зводиться до табличних інтегралів:

$$\int \frac{A}{x-x_0} dx = A \int \frac{dx}{x-x_0} = \left\{ \begin{matrix} u = x-x_0 \\ du = dx \end{matrix} \right\} = A \int \frac{du}{u} = A \ln|u| + C = A \ln|x-x_0| + C;$$

$$\int \frac{A}{(x-x_0)^k} dx = A \int (x-x_0)^{-k} dx = \left\{ \begin{matrix} u = x-x_0 \\ du = dx \end{matrix} \right\} = A \int u^{-k} du = A \frac{u^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-x_0)^{k-1}} + C.$$

Інтегрування дробів типу III можна зробити за допомогою заміни змінної, яка приведе до табличних інтегралів:

$$t = \frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)'$$

$$t = ax + \frac{b}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{a}\left(t - \frac{b}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{a}dt.$$

Теорема. Усякий правильний раціональний дріб може бути представлено єдиним чином у вигляді суми деякої кількості найпростіших раціональних дробів типів I – IV, а саме: у розкладанні дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$)

кожному множнику виду $(x-x_0)^k$ знаменника $Q_m(x)$ відповідає сума k найпростіших дробів I – II типів:

$$\frac{A_1}{x-x_0} + \frac{A_2}{(x-x_0)^2} + \frac{A_3}{(x-x_0)^3} + \dots + \frac{A_{k-1}}{(x-x_0)^{k-1}} + \frac{A_k}{(x-x_0)^k},$$

а кожному множнику виду $(x^2 + px + q)^s$, де $p^2 - 4q < 0$, відповідає сума s найпростіших дробів III – IV типів:

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_{s-1}x + N_{s-1}}{(x^2 + px + q)^{s-1}} + \frac{M_sx + N_s}{(x^2 + px + q)^s}.$$

Приклад. Розкладемо раціональний дріб на суму найпростіших дробів:

$$\frac{3x-1}{(x-1)(x+2)^3(x^2+5x+7)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 5x + 7} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + 5x + 7)^2}.$$

Коефіцієнти $A, B, C, D, M_1, N_1, M_2, N_2$ варто підбирати таким чином, щоб сума всіх дробів, що стоять праворуч дорівнювала даному дробу.

Правило. Щоб розкласти правильний дріб на суму найпростіших, необхідно:

- 1) знаменник $Q_m(x)$ дробу розкласти на лінійні й квадратичні (з від'ємним дискримінантом) множники;
- 2) скласти формулу розкладання даного дробу на суму найпростіших дробів з невизначеними коефіцієнтами;
- 3) привести цю суму до найменшого загального знаменника (він дорівнює знаменнику даного дробу) і дорівняти чисельники;
- 4) отриману тотожність використати для складання системи рівнянь щодо невизначених коефіцієнтів, кількість рівнянь системи повинне дорівнювати числу невизначених коефіцієнтів;
- 5) розв'язати систему рівнянь і підставити знайдені коефіцієнти у формулу розкладання.

Для складання системи рівнянь щодо невизначених коефіцієнтів можна використати наступні твердження:

- 1) два багаточлени рівні тоді, і тільки тоді, коли рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях x ;
- 2) два багаточлени рівні тоді, і тільки тоді, коли їхні числові значення рівні при будь-якому значенні x (у тому числі при значеннях x , рівних корінням знаменника).

Приклад. Знайти інтеграл $\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$.

Розв'язок. Підінтегральна функція являє собою неправильний раціональний дріб ($m=n=3$), тому треба виділити цілу частину:

$$-\frac{5x^3+2}{5x^3-25x^2+20x} \Bigg| \frac{x^3-5x^2+4x}{5}$$

$$25x^2-20x+2$$

Отже, $\frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} = 5 + \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}$.

Отриманий правильний раціональний дріб розкладемо на суму найпростіших дробів. Для цього розкладемо на найпростіші множники знаменник $x^3-5x^2+4x = x(x^2-5x+4) = x(x-1)(x-4)$. Тоді розкладання дробу має вигляд

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4} =$$

$$= \frac{A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x-4)}.$$

Коефіцієнти A , B , C треба підібрати так, щоб чисельник останнього дробу дорівнював чисельнику даного дробу (їхні знаменники рівні):

$$25x^2-20x+2 = A(x-1)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x-1).$$

Складемо систему рівнянь (три рівняння із трьома невідомими A , B , C), підставляючи в рівність чисельників корені знаменника, знайдемо їх:

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2=4A \\ 7=-3B \\ 322=12C \end{array} \Bigg\} \Leftrightarrow A=\frac{1}{2}, B=-\frac{3}{7}, C=\frac{322}{12}=\frac{161}{6}.$$

Отже, $\frac{25x^2-20x+2}{x(x-1)(x-4)} = \frac{1/2}{x} - \frac{7/3}{x-1} + \frac{161/6}{x-4}$.

$$\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx = \int \left(5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{161}{6} \cdot \frac{1}{x-4} \right) dx = 5 \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} -$$

$$- \frac{7}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{161}{6} \int \frac{dx}{x-4} = 5x + \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{7}{3} \ln|x-1| + \frac{161}{6} \ln|x-4| + C.$$

1.6. Задачі для самостійного опрацювання

Обчислити невизначені інтеграли

$$1) \int \frac{x^3 + 1}{(x-2)(x-4)} dx;$$

$$2) \int \frac{x+2}{x^4 + 16x^2} dx;$$

$$3) \int \frac{x^5 - 12x^3 + 7}{x^3 + 2x^2} dx;$$

$$4) \int \frac{2x+1}{x^3 - 4x} dx;$$

$$5) \int \frac{5x^3 - 2x^2 + 9}{x(x+1)(x-3)} dx;$$

$$5) \int \frac{x+1}{3x^4 + 6x^2} dx.$$

1.7. Інтегрування тригонометричних функцій.

Інтеграли від тригонометричних функцій не завжди можна знайти в елементарних функціях. Розглянемо підклас раціональних від $\sin x$ і $\cos x$ функцій, які виражаються у скінченному виді.

1. Універсальна тригонометрична підстановка.

За допомогою універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ функція, раціональна відносно $\sin x$ й $\cos x$, зводиться до функції, раціональної відносно t .

Тобто,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

де $R_1(t)$ – функція, раціональна відносно t ;

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\frac{x}{2} = \arctg t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2}.$$

Інтегрування таких функцій розглянуте вище.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3+5\cos x} &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad x = 2\arctg t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3(1+t^2)+5(1-t^2)} = \\ &= \int \frac{2dt}{8-2t^2} = \frac{2}{-2} \int \frac{dt}{t^2-4} = -\frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = C - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2} \right|. \end{aligned}$$

2. Розглянемо інтеграл $I_1 = \int \sin^m x \cdot \cos^{2n+1} x dx$, де $m \in R, n \in N$

(множник $\cos x$ у непарній степені).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin^m x \cdot \cos^{2n} x \cdot \cos x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^n \cos x dx = \\ &= \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^n \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right\} = \int u^m (1 - u^2)^n du. \end{aligned}$$

Останній інтеграл можна розкласти на суму інтегралів виду $\int u^\alpha du$.

Аналогічно можна знайти $\int \cos^m x \cdot \sin^{2n+1} x dx$, де $m \in R, n \in N$.

(множник $\sin x$ у непарній степені).

Приклад 2.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\sqrt{\cos x}} \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x dx \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{1-u^2}{\sqrt{u}} du = -\int \left(u^{-\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right) du = \int u^{\frac{3}{2}} du - \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\
&= \frac{2}{5} \sqrt{u^5} - 2\sqrt{u} + C = \frac{2}{5} \sqrt{\cos^5 x} - 2\sqrt{\cos x} + C = 2\sqrt{\cos x} \left(\frac{1}{5} \cos^2 x - 1 \right) + C.
\end{aligned}$$

3. Розглянемо інтеграл $I_2 = \int \sin^{2m} x \cdot \cos^{2n} x dx$, де m, n – цілі невід'ємні числа. Степінь підінтегральної функції знижують за допомогою тригонометричних формул:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Приклад 3.

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\
&= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \left(\int dx + \int \cos 2x d(2x) + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \\
&= \frac{1}{4} \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C.
\end{aligned}$$

4. Розглянемо інтеграл $I_3 = \int \operatorname{tg}^m x \sec^{2n+2} x dx$, де $m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$,

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Тут можна застосувати тригонометричну формулу $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int \operatorname{tg}^m x \sec^{2n} x \sec^2 x dx = \int \operatorname{tg}^m x (\sec^2 x)^n d(\operatorname{tg} x) = \int \operatorname{tg}^m x (1 + \operatorname{tg}^2 x)^n d(\operatorname{tg} x) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{tg} x \\ du = d(\operatorname{tg} x) = \sec^2 x dx \end{array} \right\} = \int u^m (1 + u^2)^n du
\end{aligned}$$

Останній інтеграл можна представити у вигляді суми інтегралів виду $\int u^\alpha du$.

Аналогічно можна знайти $\int \operatorname{ctg}^m x \operatorname{cosec}^{2n+2} x dx$ де $m \in R, n \in N$,
 $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, використовуючи формулу $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$.

Приклад 4.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}^4 x dx &= \int \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx = \int (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \operatorname{cosec}^2 x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{ctg} x \\ du = -\operatorname{cosec}^2 x dx \end{array} \right\} = -\int (1 + u^2) du = -\left(\int du + \int u^2 du \right) = \\ &= -\left(u + \frac{u^3}{3} \right) + C = C - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x. \end{aligned}$$

5. Розглянемо інтеграл $I_4 = \int \operatorname{tg}^m x dx$, де $m=2, 3, 4, 5 \dots$

Такий інтеграл можливо, за допомогою заміни, звести до інтегрування раціонального дробу

$$t = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{t^2 + 1}.$$

Приклад 5.

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{t^2 + 1} \end{array} \right| = \int \frac{t^5 dt}{t^2 + 1} = \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt =$$

$$= \int t^3 dt - \int t dt + \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{t^2 + 1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \ln|t^2 + 1| + C =$$

$$= \frac{1}{4} tg^4 x - \frac{1}{2} tg^2 x + \frac{1}{2} \ln(tg^2 x + 1) + C.$$

Аналогічно можна знайти $\int ctg^m x dx$, де $m=2, 3, 4, 5, \dots$ за допомогою заміни :

$$t = ctgx; \quad x = arctgt; \quad dx = -\frac{dt}{t^2 + 1}$$

6. Інтеграли виду: $I_5 = \int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $I_6 = \int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $I_7 = \int \sin mx \cdot \sin nx dx$ легко зводяться до табличних інтегралів після застосування тригонометричних формул:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Приклад 6.

$$\int \cos 2x \cdot \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 7x + \cos 3x) dx = \frac{1}{2} (\int \cos 7x dx + \int \cos 3x dx) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{3} \sin 3x \right) + C = \frac{1}{14} \sin 7x + \frac{1}{6} \sin 3x + C.$$

7. Інтеграл $I_8 = \int \frac{1}{\sin^m x \cdot \cos^n x} dx$, де $m, n \in N$ можна звести до суми

табличних або розглянутих інтегралів, якщо замінити в чисельнику $1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^k, k \in N$.

Приклад 7.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin x \cdot \cos^3 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos^3 x} dx = \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx + \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \\ du = -\sin x \cdot dx \end{array} \right\} = -\int \frac{du}{u^3} + \\ &+ \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} dx = -\int u^{-3} du + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\frac{u^{-3+1}}{-3+1} - \\ &-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{1}{2} u^{-2} - \ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \\ &= \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| + C = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln|tg x| + C. \end{aligned}$$

1.8. Задачі для самостійного опрацювання

Обчислити невизначені інтеграли:

1) $\int \sin^3(3x) \cos^2(3x) dx;$

2) $\int \cos^4(2x-5) dx;$

3) $\int ctg^4(5x) dx;$

4) $\int \operatorname{cosec}^4 x dx;$

5) $\int \frac{dx}{\cos^3(4x+1)};$

5) $\int \cos(2x) \cos(5x) dx;$

6) $\int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x + \cos x};$

7) $\int \frac{dx}{\sin^3(2x)}.$

1.9. Інтегрування ірраціональних виразів

Розглянемо деякі типи інтегралів, що містять ірраціональні вирази.

1) $I_1 = \int R(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів.

Нехай k – найменший загальний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \dots, \frac{r}{s}$ (іншими словами k – найменше спільне кратне натуральних чисел $n, q, \dots, s$). Зробимо підстановку:

$$x = t^k, \quad dx = k t^{k-1} dt.$$

Тоді кожен дробовий степінь x виражається через цілу степінь t і, отже, підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію відносно t (багаточлен або раціональний дріб), методи інтегрування якої розглянуті вище.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} &= \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{3}}} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right\} = \int \frac{6t^5 dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}} - (t^6)^{\frac{1}{3}}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t-1)} = \\ &= 6 \int \frac{t^3 dt}{t-1} = 6 \int \frac{(t^3-1)+1}{t-1} dt = 6 \int \left(\frac{t^3-1}{t-1} + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= 6 \int \left(\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1} + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6 \int \left(t^2+t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| \right) + C = 2t^3 + 3t^2 + 6t + 6 \ln |t-1| + C = \{t = \sqrt[6]{x}\} = \\ &= 2(\sqrt[6]{x})^3 + 3(\sqrt[6]{x})^2 + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |\sqrt[6]{x}-1| + C = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |\sqrt[6]{x}-1| + C \end{aligned}$$

2) $I_2 = \int R(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, (ax+b)^{\frac{p}{q}}, \dots, (ax+b)^{\frac{r}{s}}) dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів, $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Нехай $ax + b = t^k$, де k – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}, \dots, \frac{r}{s}$.

Тоді

$$x = \frac{1}{a}(t^k - b), \quad dx = \frac{k}{a}t^{k-1}dt.$$

За допомогою такої підстановки підінтегральна функція перетвориться у раціональну функцію відносно t .

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + 3\sqrt[4]{2x+1}} &= \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = t^4, \\ x = \frac{1}{2}(t^4 - 1), \\ dx = 2t^3 dt \end{array} \right\} = \int \frac{2t^3 dt}{t^2 + 3t} = 2 \int \frac{t^3 dt}{t(t+3)} = 2 \int \frac{(t^2 - 9) + 9}{t+3} = \\ &= 2 \int \left(\frac{t^2 - 9}{t+3} + \frac{9}{t+3} \right) dt = 2 \int \left(t - 3 + \frac{9}{t+3} \right) dt = 2 \left(\frac{t^2}{2} - 3t + 9 \ln |t+3| \right) + C = \\ &= t^2 - 6t + 18 \ln |t+3| + C = \{t = \sqrt[4]{2x+1}\} = \\ &= \sqrt{2x+1} - 6\sqrt[4]{2x+1} + 18 \ln |\sqrt[4]{2x+1} + 3| + C. \end{aligned}$$

$$3) \quad I_3 = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \text{ де } R - \text{раціональна функція своїх аргументів,}$$

$$a, b, c, d \in R, a \neq 0, b \neq 0, \frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}.$$

Підінтегральну функцію можна раціоналізувати за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$, звідки

$$x = \frac{b - dt^n}{ct^n - a}, \quad dx = \frac{nt^{n-1}(ad - bc)}{(ct^n - a)^2} dt.$$

4) Розглянемо інтеграли виду $I_4 = \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $I_5 = \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $I_6 = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, де R – функція, раціональна щодо своїх аргументів. Якщо інтеграли не є табличними, то позбутися в

підінтегральній функції від квадратного кореня можна за допомогою, так званих, *тригонометричних підстановок*.

$$I_4 = \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx.$$

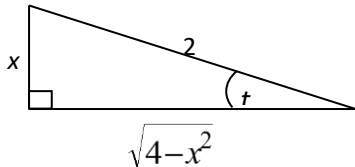
Нехай $x = a \sin t$, тоді $dx = a \cos t dt$,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t \quad \left(-\pi/2 < t < \pi/2; \quad |x| < a\right).$$

Приклад 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \sin t, dx = 2 \cos t dt \\ \sqrt{4-x^2} = 2 \cos t \end{array} \right\} = \int \frac{2 \cos t dt}{(2 \cos t)^3} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} t + C$$

У відповіді треба перейти до змінної x . Це зручніше за все зробити за допомогою прямокутного трикутника. З підстановки $x = 2 \sin t$ знаходимо $\sin t = \frac{x}{2}$. В прямокутному трикутнику $\sin t$ дорівнює відношенню протилежного катета x до гіпотенузи 2. За теоремою Піфагора знаходимо третю сторону трикутника, а потім знаходимо будь-яку тригонометричну функцію кута t .



З рисунка видно, що $\sin t = \frac{x}{2}$, $\operatorname{tg} t = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$$\text{Отже, } \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C.$$

$$I_5 = \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx.$$

Нехай $x = a \operatorname{tg} t$, тоді $dx = \frac{adt}{\cos^2 t} = a \sec^2 t dt$,

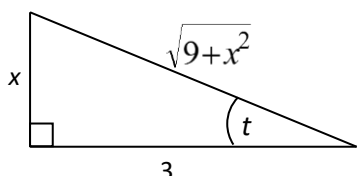
$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 t} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t} = a \sec t, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}; -\infty < x < \infty\right).$$

Приклад 4.

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9+x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \operatorname{tg} t, \quad dx = 3 \sec^2 t dt \\ \sqrt{9+x^2} = \sqrt{9+9 \operatorname{tg}^2 t} = 3 \sec t \end{array} \right\} = \int \frac{3 \sec^2 t dt}{9 \operatorname{tg}^2 t 3 \sec t} = \frac{1}{9} \int \frac{\sec t}{\operatorname{tg}^2 t} dt =$$

$$= \frac{1}{9} \int \frac{dt}{\cos t \cdot \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{9} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin t \\ du = \cos t dt \end{array} \right\} = \frac{1}{9} \int \frac{du}{u^2} =$$

$$= \frac{1}{9} \int u^{-2} du = \frac{1}{9} \frac{u^{-1}}{(-1)} + C = C - \frac{1}{9u} = C - \frac{1}{9 \sin t}$$



$$\operatorname{tg} t = \frac{x}{3}, \quad \sin t = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{9+x^2}} = C - \frac{\sqrt{9+x^2}}{9x}$$

$$6) I_6 = \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx.$$

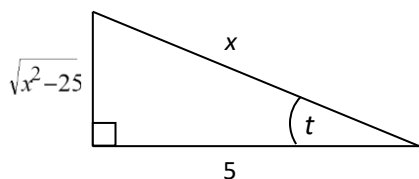
Нехай $x = a \sec t$, тоді $dx = a \sec t \operatorname{tg} t dt$,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2} = a \operatorname{tg} t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}; a < x < +\infty \right).$$

Приклад 5.

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \sec t, \quad dx = 5 \sec t \operatorname{tg} t dt \\ \sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{25 \sec^2 t - 25} = 5 \operatorname{tg} t \end{array} \right\} =$$

$$= 5 \int \operatorname{tg}^2 t dt = 5 \int (\sec^2 t - 1) dt = 5 \left(\int \sec^2 t dt - \int dt \right) = 5(\operatorname{tg} t - t) + C$$



$$\sec t = \frac{x}{5}, \quad \cos t = \frac{5}{x}, \quad t = \arccos \frac{5}{x}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx = 5 \left(\frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5} - \arccos \frac{5}{x} \right) + C = \sqrt{x^2 - 25} - 5 \arccos \frac{5}{x} + C.$$

1.10. Задачі для самостійного опрацювання

Знайти невизначені інтеграли:

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 - 2}\sqrt{x}};$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + 1}$$

$$3. \int x^2 \sqrt{64 - x^2} dx;$$

$$3. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(16 - x^2)^3}};$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}};$$

$$5. \int \frac{2x^2 dx}{\sqrt{(4 + x^2)^3}};$$

$$6. \int \frac{\sqrt{x^2 - 144} dx}{x^2};$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2 - 1} dx}{x};$$

$$8. \int \frac{x}{\sqrt[3]{1 - x}} dx;$$

$$9. \int \sqrt{16 - x^2} dx;$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)^3}};$$

$$11. \int \frac{\sqrt{x^2 - 25} dx}{x^4};$$

$$12. \int \frac{2x + 5}{\sqrt{x - 2} + 1} dx;$$

$$13) \int x^2 \sqrt{36 - x^2} dx;$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{(9 + x^2)^3}};$$

$$15. \int \frac{\sqrt{x^2 - 49} dx}{x^4}.$$

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗА ТЕМОЮ «ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ»

Мета роботи: *Формування у студентів вміння виконувати математичні перетворення й розрахунки, пов'язані із застосуванням основних понять інтегрального числення, вміння самостійно використовувати при розв'язанні задач необхідні методи інтегрування та опрацьовувати спеціальну літературу*

2.1. Інтегральні суми. Умови існування визначеного інтегралу. Властивості визначеного інтегралу.

Нехай функція $f(x)$ визначена на $[a, b]$.

Означення. Розбиттям відрізка $[a, b]$ називається довільна скінченна сукупність точок, серед яких обов'язково повинні бути кінці відрізка

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

У кожного часткового відрізка $[x_{k-1}; x_k]$, що утворилися в результаті розбиття виберемо довільну точку c_k та обчислимо значення функції в цій точці $f(c_k)$.

Побудуємо суму $\sum_{k=0}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$, де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Сума $S_n = \sum_{k=0}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$ називається n -ою інтегральною сумою для

функції $y = f(x)$ на відріжку $[a; b]$, або інтегральною сумою Рімана.

Означення. *Визначеним інтегралом від функції $y = f(x)$ на відріжку $[a; b]$ називається скінченна границя інтегральної суми S_n при необмеженому збільшенні числа відрізків і прямуванні до нуля найбільшої з довжин цих*

відрізків (якщо ця границя існує і не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ та від вибору точок c_k):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max_k \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k.$$

У випадку існування такої границі функція $f(x)$ називається інтегрованою на відрізку $[a; b]$. Числа a і b називаються, відповідно, нижньою і верхньою межами інтегрування.

При сталих межах інтегрування визначений інтеграл являє собою постійне число та не залежить від того, якою буквою позначена змінна

$$\text{інтегрування: } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

Необхідна умова існування визначеного інтегралу: якщо функція $y = f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена на цьому відрізку. Тому надалі ми будемо наперед припускати, що функція $f(x)$ обмежена, тобто $m \leq f(x) \leq M$, якщо $a \leq x \leq b$.

Достатньою умовою існування визначеного інтегралу функції $f(x)$ на $[a; b]$ є її неперервність. Можна довести, що якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ має кінцеве число точок розриву першого роду, то вона інтегрована.

Геометричний зміст визначеного інтегралу: якщо функція $y = f(x)$ інтегрована і невід'ємна на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y=0$, $x=a$, $x=b$.

Основні властивості визначеного інтеграла

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$3. \int_a^b dx = b - a.$$

4. Сталый множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k = \text{const}.$$

5. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$$

6. Відрізок інтегрування можна розбити на частині:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \pm \int_c^b f(x) dx.$$

Причому ця властивість справедлива для будь-якого розташування точок a , b і c на числовій осі.

7. (Монотонність визначеного інтегралу). Якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ інтегровані функції на $[a; b]$ і для всіх x на $[a; b]$ виконується нерівність $f_1(x) \leq f_2(x)$ та a

$< b$, то $\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$, тобто нерівність можна інтегрувати.

(Збереження знаку підінтегральної функції визначеним інтегралом)

Зокрема, якщо $f(x) \geq 0$, то $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

8. Визначений інтеграл від парної функції у симетричних межах $[-a; a]$ дорівнює подвоєному інтегралу в межах від 0 до a

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

9. Визначений інтеграл від непарної функції у симетричних межах $[-a; a]$ дорівнює нулю

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Оцінка визначеного інтегралу

1. (Про оцінку модуля інтеграла)

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

2. (Про оцінку інтеграла по області).

$$\text{Якщо } f(x) \text{ неперервна на } [a; b], \text{ то } m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a),$$

$$\text{де } m = \min_{[a,b]} f(x), \quad M = \max_{[a,b]} f(x) \text{ і } a \leq b.$$

3. **Теорема про середнє.** Якщо $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то існує точка

$$\xi \in [a, b] \text{ така, що } \int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b-a).$$

2.2. Обчислення інтегралу. Формула Ньютона-Лейбниця. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Нехай функція $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$. Тоді для кожного $x \in [a, b]$ вона буде інтегрованою і на відрізку $[a, x]$. Замінімо верхню межу b визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ змінної x , одержимо вираз $\int_a^x f(x)dx$, що є функцією від x .

Позначимо цю функцію через $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тут змінну інтегрування ми

позначимо через t , щоб не плутати її з верхньою межею інтегрування x .

Функція $\Phi(x)$ має наступні властивості:

1) якщо функція $f(t)$ неперервна на $[a, b]$, то $\Phi(x)$ також неперервна на цьому проміжку;

2) якщо функція $f(t)$ неперервна в точці $t = x$, то в цій точці функція $\Phi(x)$ має похідну, рівну $f(x)$, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Остання рівність говорить про те, що функція $\Phi(x)$ є первісною для $f(x)$ на $[a, b]$. Звідси випливає дуже важливе твердження: усяка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція має на цьому відрізку первісну. Якщо $F(x)$ інша первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Формула Ньютона-Лейбниці. Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює приросту будь якої первісної на проміжку інтегрування:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Тут $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$ на $[a, b]$.

З формули Ньютона-Лейбниці та другої властивості функції $\Phi(x)$ випливає, що всі методи інтегрування для невизначеного інтеграла справедливі для визначеного інтеграла.

Приклад 1.

Обчислити інтеграли: 1) $\int_1^2 (5x^4 - 1) dx$; 2) $\int_0^2 (2x - e^x) dx$.

Розв'язок.

$$1) \int_1^2 (5x^4 - 1) dx = 5 \int_1^2 x^4 dx - \int_1^2 dx = x^5 \Big|_1^2 - x \Big|_1^2 = (32 - 1) - (2 - 1) = 30.$$

$$2) \int_0^2 (2x - e^x) dx = 2 \int_0^2 x dx - \int_0^2 e^x dx = x^2 \Big|_0^2 - e^x \Big|_0^2 = 4 - e^2 + 1 = 5 - e^2.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі

Розглянемо $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ функція. Введемо нову змінну інтегрування t , пов'язану зі змінною x співвідношенням $x=\varphi(t)$, де $t \in [\alpha; \beta]$, а $x \in [a, b]$.

Функція $\varphi(t)$ повинна бути неперервно-диференційованою. Крім того, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тоді має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Слід зазначити, що при обчисленні визначеного інтеграла вже немає необхідності повертатися до старого змінної інтегрування, тому що межі інтегрування змінилися відповідно до підстановки.

Приклад 2. Обчислити інтеграли 1) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

Розв'язок.

1. Зробимо заміну змінної інтегрування: $t=\sqrt{x}$. Звідси знаходимо: $x=t^2$, $dx=2t dt$. Обчислимо нові межі інтегрування: при $x=0$ маємо $t=\sqrt{0}=0$, при $x=4$ одержуємо $t=\sqrt{4}=2$. Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} &= \int_0^2 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_0^2 \frac{(t+1)-1}{1+t} dt = 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2 \int_0^2 dt - 2 \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = \\ &= 2 \cdot t \Big|_0^2 - 2 \cdot \ln |t+1| \Big|_0^2 = 2 \cdot (2-0) - 2(\ln 3 - \ln 1) = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

2. Покладемо $x=2 \sin t$, тоді $dx=2 \cos t dt$. Знаходимо нові межі інтегрування: при $x=0$ одержуємо $0=2 \sin t$, $\sin t=0$, $t=0$. При $x=2$ одержуємо $2=2 \sin t$, $\sin t=1$, $t=\pi/2$.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\cos^2 t} \cdot \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t dt = \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = 2(t + \frac{1}{2}\sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin \pi - 0 - \frac{1}{2}\sin 0) = \pi \end{aligned}$$

Інтегрування частинами.

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на $[a, b]$, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = (u \cdot v) \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграли: 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x) \cdot \cos 2x dx$;

2) $\int_1^e (1-x^2) \cdot \ln x dx$.

Розв'язок.

$$\begin{aligned} 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+x) \cos 2x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = 1+x \\ dv = \cos 2x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} (1+x) \cdot \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{2} (1 + \frac{\pi}{2}) \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 0 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{4} \cos \pi - \frac{1}{4} \cos 0 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_1^e (1-x^2) \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = (1-x^2) dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = \frac{1}{x} dx \\ v = x - \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right\} = \\ &= (x - \frac{1}{3} x^3) \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e (x - \frac{1}{3} x^3) \cdot \frac{1}{x} dx = e - \frac{1}{3} e^3 - 0 - \int_1^e (1 - \frac{1}{3} x^2) dx = \\ &= e - \frac{1}{3} e^3 - (x - \frac{1}{9} x^3) \Big|_1^e = e - \frac{1}{3} e^3 - e + \frac{1}{9} e^3 + 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} - \frac{2}{9} e^3 \end{aligned}$$

2.3. Задачі для самостійного опрацювання

1. Не обчислюючи інтегралів, вказати, який з них більше

а) $\int_0^1 e^x dx$; $\int_0^1 x dx$;

б) $\int_1^2 (x^2 + 1) dx$; $\int_1^2 x dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx$.

2. Оцінити інтеграл, тобто. вказати два числа, між якими знаходиться значення інтегралу:

а) $\int_1^4 (x^2 + x - 5) dx$;

б) $\int_0^2 e^{x^2} dx$.

3. Знайти середнє значення на інтервалі інтегрування:

а) $f(x) = \cos x$; $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$; б) $f(x) = 3x^2 + x$; $x \in [0; 2]$.

4. Обчислити вказані інтеграли:

а) $\int_0^1 x^3 dx$;

б) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}$;

в) $\int_0^1 x 4^x dx$;

г) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+5}}$.

д) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$;

е) $\int_{\frac{3}{4}}^2 \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

ж) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$;

з) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}\sqrt{x}}$.

2.4. Геометричні застосування визначеного інтегралу: обчислення площ, об'ємів тіл обертання, довжин дуг кривих.

Обчислення площ плоских фігур

1. З геометричного змісту визначеного інтегралу випливає, що якщо $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a, b]$, то площа криволінійної трапеції обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і віссю Ox , виражається формулою (рис. 2.1, а)

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx.$$

2. Якщо ж $f(x) \leq 0$ для всіх $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq 0$, у цьому випадку

(рис. 2.1, б)

$$S = -\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

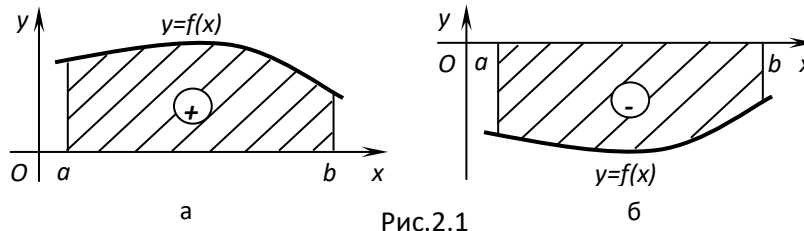


Рис.2.1

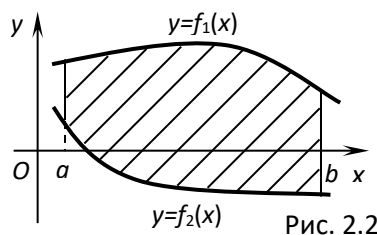


Рис. 2.2

3. Якщо фігура обмежена графіками функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ таких, що $f_1(x) \geq f_2(x)$ для усіх $x \in [a, b]$ (рис. 2.2), то

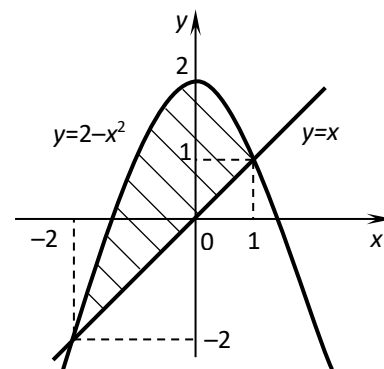
$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx.$$

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x$, $y=2-x^2$.

Розв'язок. Знайдемо точки перетину та побудуємо задані лінії.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = -2; \\ x_2 = 1, \\ y_2 = 1. \end{cases}, \text{ тобто } a = -2, b = 1.$$



Тоді

$$S = \int_{-2}^1 ((2 - x^2) - x) dx = \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx =$$

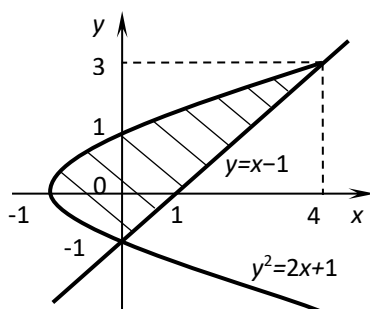
$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 8 \right) = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Зауваження. Часто буває зручним використати для обчислення площ фігур формули, у яких інтегрування ведеться по змінній y , при цьому x вважається функцією від y , тобто

$$S = \int_c^d f(y) dy \quad \text{та} \quad S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y)) dy$$

Приклад 2. Обчислити площу, обмежену лініями $y^2 = 2x + 1$, $y = x - 1$.

Розв'язок. Знайдемо точки перетину цих графіків функцій



$$\begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2(y + 1) + 1 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y - 3 = 0 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = -1. \end{cases} \end{cases}$$

Площа фігури дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 \left((y+1) - \frac{y^2-1}{2} \right) dy = \\ &= \int_{-1}^3 \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + \frac{3}{2} \right) dy = \left(-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}y \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{16}{3} (\text{ед}^2) \end{aligned}$$

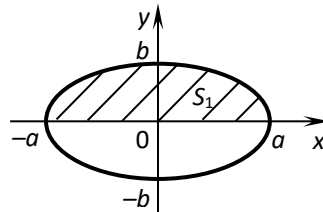
4. Якщо крива, що обмежує зверху криволінійну трапецію, задана у параметричному виді $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, де $t \in [\alpha, \beta]$, то площу знаходимо за формулою

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt.$$

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, де $0 \leq t \leq 2\pi$.

Розв'язок. У силу

симетрії еліпса



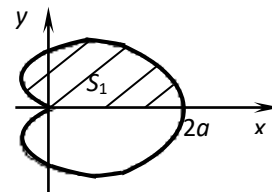
$$\begin{aligned} S &= 2S_1 = 2 \int_{-a}^a y dx = 2 \int_{\pi}^0 b \cdot \sin t \cdot (-a \sin t) dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \\ &= ab \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = \pi ab (\text{ед}^2). \end{aligned}$$

5. Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho(\varphi)$ і двома полярними радіусами $\varphi = \alpha$ й $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(\varphi))^2 d\varphi.$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$.

Розв'язок.



$$\begin{aligned} S &= 2S_1 = 2\left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi\right) = \\ &= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = a^2 \left(\left(\varphi + 2\sin \varphi \right) \Big|_0^{\pi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \right) = \pi a^2 + \frac{a^2}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \pi a^2 + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{3}{2} \pi a^2 \text{ (ед}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Обчислення довжини дуги

1. Якщо крива $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ є гладкою (тобто похідна $f'(x)$ — неперервна функція), то довжина дуги цієї кривої в межах між від $x = a$ до $x = b$, обчислюється за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2. У тому випадку, коли крива задана рівняннями у параметричній формі $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ (функції $\varphi(t), \psi(t)$ та їх похідні неперервні), довжина дуги кривої, що відповідає монотонній зміні параметра t від α до β , обчислюється за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (\alpha < \beta).$$

3. Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то довжина дуги кривої при зміні полярного кута φ від $\varphi = \varphi_1$ до $\varphi = \varphi_2$, знаходиться за формулою

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi \quad (\varphi_1 < \varphi_2).$$

Приклад 5. Знайти довжину дуги:

1) $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ від $x = 0$ до $x = 2$;

2) астроїди $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$;

3) кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Розв'язок. 1) Знайдемо похідну $y' = \frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})$, тоді

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^2 \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2} dx = (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) \Big|_0^2 = e - e^{-1} \approx 1,45.$$

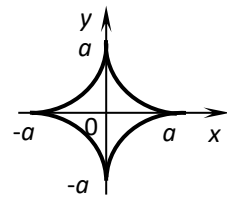
2) У силу симетрії астроїди щодо координатних осей, досить знайти довжину однієї чверті всієї кривої і результат помножимо на 4. При цьому параметр t буде змінюватися від 0 до $\pi/2$.

Знаходимо $\varphi'(t) = x'_t$ й $\psi'(t) = y'_t$:

$$x'_t = -3a \cdot \cos^2 t \cdot \sin t, \quad y'_t = 3a \sin^2 t \cdot \cos t.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} &= \\ &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cdot \cos^2 t} = \\ &= 3a \sqrt{\sin^2 t \cdot \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3a \sin t \cos t. \end{aligned}$$

Одержуємо



$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a \sin t \cos t dt = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt =$$

$$= -3a \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(-1 - 1) = 6a.$$

3) Кардіоїда симетрична щодо полярної осі, тому обчислимо довжину половини її дуги (полярний кут φ змінюється від 0 до π), а потім помножимо на 2. Знайдемо $\rho'(\varphi) = -a \sin \varphi$. Тоді

$$\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} = \sqrt{a^2(1 + \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} = a\sqrt{2 + 2\cos \varphi} =$$

$$= a\sqrt{2(1 + \cos \varphi)} = a\sqrt{4\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = 2a \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Тепер знаходимо

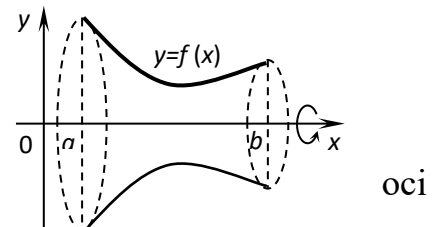
$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} =$$

$$= 8a(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = 8a.$$

Обчислення об'ємів тіл обертання

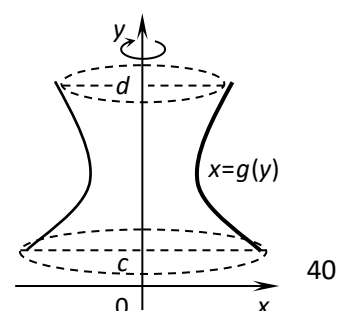
1. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $y = f(x)$, віссю абсцис і двома прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$), знаходиться за формулою

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$



2. Аналогічно, об'єм тіла обертання навколо Oy криволінійної трапеції, обмеженої неперервною кривою $x = g(y)$, віссю ординат і двома прямими $y = c$ і $y = d$, обчислюється за формулою

$$V_y = \pi \int_c^d (g(y))^2 dy.$$



3. Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, то формули для обчислення об'єму тіла обертання навколо осей координат приймають вид

$$V_x = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (\psi(t))^2 \varphi(t) dt \quad \text{та} \quad V_y = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (\varphi(t))^2 \psi(t) dt$$

Приклад 6. Обчислити об'єм тіла, отриманого обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1: 1) \text{ навколо осі } O_x, 2) \text{ навколо осі } O_y.$$

Розв'язок.

$$1) V_x = \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a b^2 (\text{ед}^3);$$

$$2) V_y = \pi \int_{-b}^b a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Big|_{-b}^b = \frac{4}{3} \pi a^2 b (\text{ед}^3).$$

Обчислення площ поверхонь тіл обертання

1. Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі O_x дуги гладкої кривої $y = f(x)$ між точками з абсцисами $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2. Якщо крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$, то

формула для обчислення площі поверхні тіла обертання приймає вигляд

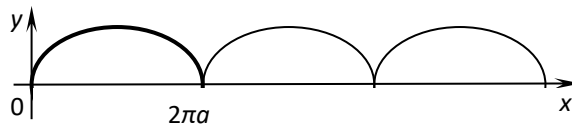
$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Приклад 7. Знайти площу поверхні обертання навколо осі O_x однієї

арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Розв'язок. Знаходимо $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \sin t$. Підставляємо отримані вирази у формулу для S_x та, з огляду на те, що параметр t змінюється від 0 до 2π , одержимо:

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \frac{t}{2}) d(\cos \frac{t}{2}) = \\ &= 16\pi a^2 \left(\frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 16\pi a^2 \left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 \right) = \frac{64\pi a^2}{3} (\text{ед}^2). \end{aligned}$$



2.5. Задачі для самостійного опрацювання.

1. Знайти площу плоскої фігури, яка обмежена зазначеними лініями. Зробити рисунок.

а) $y = 4 - x^2$; $y = 0$; б) $y = x^2 \sqrt{9 - x^2}$; $y = 0$; $x \in [0; 3]$;

в) $\rho = 1 - \sin \varphi$; $\rho = 1$; г) $xy = 4$; $y = 0$; $x = 1$; $x = 4$;

д) $y = x^2 \sqrt{4 - x^2}$; $y = 0$; $x \in [0; 2]$; е) $\rho = \sqrt{\cos(2\varphi)}$.

2. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням зазначених ліній:

а) $V_{ox} : y = e^x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$;

б) $V_{ox} : y = x^2$; $y = 0$; $x = 2$;

в) $V_{oy} : x^2 - y^2 = 4$; $y = \pm 2$;

$$\text{г) } V_{oy} : \begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}; \quad y \geq 3;$$

$$\text{д) } V_{ox} : x = y^2; \quad y = x;$$

$$\text{е) } V_{ox} : y = 2^x; \quad y = 2^{3x}; \quad x = 1.$$

3. Знайти довжину лінії або її частини, яка відповідає вказаному інтервалу зміни аргументу.

$$\text{а) } \begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \end{cases};$$

$$\text{б) } y = 1 - \ln(\cos x); \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right];$$

$$\text{в) } \rho = 2(1 + \cos \varphi); \quad \varphi \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\text{г) } y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x; \quad x \in \left[0; \frac{7}{9}\right];$$

$$\text{д) } y = \frac{x^2 - 2 \ln x}{4}; \quad x \in [1; 2].$$

4. Знайти площу поверхні, отриманої обертанням даної лінії або її частини, яка відповідає вказаному інтервалу зміни аргументу:

$$\text{а) } y^2 = 4x; \quad x \in [0; 1]; \quad (Ox);$$

$$\text{б) } y = \frac{x^3}{3}; \quad x \in [0; 1]; \quad (Ox);$$

$$\text{в) } y = \frac{x^2}{2}; \quad x \in [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]; \quad (Oy);$$

$$\text{г) } x^2 + (y - 1)^2 = 16; \text{ від } A(4; 1) \text{ до } B(2\sqrt{3}; 3); \quad (Oy);$$

$$\text{д) } \begin{cases} x = 9t^2 \\ y = 3t(3 - t^2) \end{cases}; \quad (Ox).$$

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗА ТЕМОЮ «НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ»

Мета роботи: Навчити студентів володінню апаратом математичного аналізу, достатнім для опрацювання математичних моделей, пов'язаних з подальшою практичною діяльністю фахівців; опонувати необхідні теоретичні знання з теми «Невизначені інтеграли» для їх застосування в системі дисциплін за спеціальністю.

При визначенні визначеного інтеграла передбачалося, що:

- 1) відрізок інтегрування $[a, b]$ кінцевий;
- 2) підінтегральна функція $f(x)$ визначена і обмежена на $[a, b]$.

Якщо порушується хоча б одна із цих умов, то інтеграл називається *невласним*. При цьому, якщо порушено тільки першу умову, то говорять про невластний інтеграл першого роду (або інтегралі з нескінченними межами інтегрування). Якщо порушено тільки другу умову, тобто підінтегральна функція має нескінченний розрив на відрізку $[a, b]$, то говорять про невластний інтеграл другого роду (або інтегралі від необмеженої функції).

3.1. Невласні інтеграли першого роду

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a, +\infty)$, тоді *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ називається

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо ця границя існує і приймає скінченне значення, то невластний інтеграл називається *збіжним*, якщо ж границя не існує або дорівнює нескінченності, то невластний інтеграл *розбігається*.

Аналогічно визначаються невластні інтеграли виду:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

З геометричної точки зору збіжність невласного інтеграла першого роду означає, що фігура, яка обмежена кривою $f(x) \geq 0$, прямими $x = a$ і $y = 0$ та нескінченно витягнута в напрямку осі Ox , має кінцеву площу.

Нехай підінтегральна функція $f(x)$ має первісну $F(x)$. Тоді відповідно до формули Ньютона-Лейбниці та означенню невласного інтеграла будемо мати

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a). \end{aligned}$$

$$\text{Аналогічно } \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$$

Отже, невласні інтеграли збігаються тоді і тільки тоді, коли існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ і $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

Приклади. Дослідити на збіжність 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$.

Розв'язок.

1) Згідно з означенням маємо

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається й дорівнює $\pi/4$.

2) Згідно з означенням для $\alpha \neq 1$ маємо

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1 \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Якщо ж $\alpha = 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln b = +\infty$.

Таким чином, невластний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається при $\alpha > 1$, і розбігається якщо $\alpha \leq 1$.

3.2. Невласні інтеграли другого роду

Розглянемо функцію $y = f(x)$, що визначена на проміжку $[a, b]$ і необмежена при $x \rightarrow b-0$ (зліва), тобто $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$. Точку $x = b$ при

цьому будемо називати *особою точкою* для функції $f(x)$.

Будемо вважати, що для кожного $\varepsilon > 0$ на відрізку $[a, b-\varepsilon]$ функція $f(x)$ інтегрована.

Означення. Якщо існує кінцева границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$, то інтеграл

називається *збіжним невластним інтегралом* другого роду від функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ має розрив другого роду у точці $x = a$, то згідно з означенням будемо вважати

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{a+\delta}^b f(x) dx.$$

Якщо ж функція $f(x)$ необмежена в околі точки $x = c$ ($a < c < b$), то будемо вважати

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{c+\delta}^b f(x) dx.$$

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то згідно з визначенням невластного інтеграла другого роду маємо

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} F(b-\varepsilon) - F(a) = F(b) - F(a).$$

Якщо первісна $F(x)$ неперервна на $[a, b]$, то невластний інтеграл можна обчислювати безпосередньо.

Приклади. Обчислити 1) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Розв'язок.

1) підінтегральна функція $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ в точці $x = 1$ має розрив другого роду

(тобто необмежена), тоді за визначенням невластного інтеграла другого роду напишемо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{1-x^2} \Big|_0^{1-\varepsilon} = \\ &= 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} = 1, \end{aligned}$$

Тобто границя кінцева, невластний інтеграл збігається й дорівнює 1.

2) У цьому випадку підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ має розрив

другого роду в точці $x = 0$. За означенням маємо:

$$\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^4 x^{-\frac{3}{2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} \right) \Big|_{\varepsilon}^4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} - 1 \right) = +\infty,$$

Таким чином. цей невластний інтеграл є розбіжним.

У загальному випадку можна довести, що невластний інтеграл другого роду $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ збігається якщо $\alpha < 1$ й розбігається при $\alpha \geq 1$.

Зауваження. Може виявитися, що заміною змінною невласний інтеграл другого роду зводиться до невласного інтеграла першого роду (і навпаки) або перетворюється у визначений інтеграл.

Для невласних інтегралів *першого роду* справедливі **ознаки збіжності**.

Теорема 1 (ознака порівняння). Нехай для будь якого $a \leq x < +\infty$ виконується нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тоді

1) якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ збігається, то й збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

2) якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ розбігається, то й розбігається інтеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ неперервні, додатні ($f(x) > 0$ й $g(x) > 0$) й існує кінцева границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$, то невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ й $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

3.3. Задачі для самостійного опрацювання

Дослідити на збіжність інтеграли:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx$;

б) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{e^{-x} + 3}$;

в) $\int_1^5 \frac{dx}{x-2}$;

г) $\int_2^3 \frac{x dx}{\sqrt{x-2}}$;

д) $\int_0^{\infty} x^5 dx$;

е) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$;

ж) $\int_0^2 \frac{dx}{2x-4}$;

з) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln^7 x}$.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А. ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

- | | |
|---|--|
| 1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$
$\alpha \in \mathbb{R} (\alpha \neq -1).$ | 7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u du = \operatorname{tgu} + C.$ |
| 2. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$ | 8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctgu} + C.$ |
| 3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$ | 9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C.$ |
| 4. $\int e^u du = e^u + C.$ | 10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$ |
| 5. $\int \sin u du = -\cos u + C.$ | 11. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$ |
| 6. $\int \cos u du = \sin u + C.$ | 12. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C.$ |

ДОДАТОК Б. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

ЗНАКИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Четверть	Величина кута	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	+	−	−	−
III	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	−	−	+	+
IV	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	−	+	−	−

ДЕЯКІ ЗНАЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Величина кута α значення функцій	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	−	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	−	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$	−

ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Величина кута β значення функції	$\alpha + \frac{\pi}{2}$	$\alpha + \pi$	$\alpha + \frac{3\pi}{2}$	$\alpha + 2\pi$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$tg \beta$	$-ctg \alpha$	$tg \alpha$	$-ctg \alpha$	$tg \alpha$	$-tg \alpha$	$ctg \alpha$	$-tg \alpha$	$ctg \alpha$	$-tg \alpha$
$ctg \beta$	$-tg \alpha$	$ctg \alpha$	$-tg \alpha$	$ctg \alpha$	$-ctg \alpha$	$tg \alpha$	$-ctg \alpha$	$tg \alpha$	$-ctg \alpha$

ПЕРЕТВОРЕННЯ СУМИ (РІЗНИЦІ) ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1.	$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	2.	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$
3.	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	4.	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$
5.	$tg \alpha + tg \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$	6.	$tg \alpha - tg \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$
7.	$ctg \alpha + ctg \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$	8.	$ctg \alpha - ctg \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБУТКІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

1.	$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
2.	$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$
3.	$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ СУМИ (РІЗНИЦІ)

1.	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
2.	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
3.	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
4.	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
5.	$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg \alpha - tg \beta}{1 + tg \alpha tg \beta}$
6.	$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha tg \beta}$
7.	$ctg(\alpha - \beta) = \frac{ctg \alpha ctg \beta + 1}{ctg \beta - ctg \alpha}$
8.	$ctg(\alpha + \beta) = \frac{ctg \alpha ctg \beta - 1}{ctg \alpha + ctg \beta}$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ЧЕРЕЗ ОДНУ З НИХ

Функція	$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$tg \alpha$	$ctg \alpha$
$\sin \alpha$	$\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$	—	$\pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{tg \alpha}{\pm\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + ctg^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\frac{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$	$\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	—	$\frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$	$\frac{ctg \alpha}{\pm\sqrt{1 + ctg^2 \alpha}}$
$tg \alpha$	$\frac{2tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$	$\frac{\sin \alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	—	$\frac{1}{ctg \alpha}$
$ctg \alpha$		$\frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{tg \alpha}$	—

ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

1.	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2.	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$
3.	$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$
4.	$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В.П. Вища математика у трьох частинах. Частина II : навч. посіб. - Х. : Веста, 2008. - 240 с.
2. Валєєв К.Г. Вища математика у 2-х ч. : навч. посіб. - К. : КНЕУ, 2001. – 546 с.
3. Соколенко О.І. Вища математика : підручник. - К. : Академія, 2003. - 432 с.
4. Фортуна В.В. Вища та прикладна математика : навч. посіб. - Львів : вид-во Магнолія 2006, 2013. - 647 с.
5. Вища математика. Практикум : навч. посіб. - К. : ЦУЛ, 2003. - 536 с.
6. Вища математика : навч.-метод. посіб. - К. : КНЕУ, 2002. - 606 с.
7. Методичні вказівки до індивідуальної роботи студентів з дисципліни «Вища математика. Ч.2» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання [Електронний ресурс] / уклад. Ю.В. Новікова, Є.В. Лесіна. – Покровськ: ДонНТУ, 2022 р. – 61 с.