

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»**

Кафедра вищої математики і фізики

**Методичні вказівки до індивідуальної роботи студентів
з дисципліни «Вища математика. Ч.2»**

для студентів інженерно-технічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Покровськ, 2022

Методичні вказівки до індивідуальної роботи студентів з дисципліни «Вища математика. Ч.2» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання [Електронний ресурс] / уклад. Ю.В. Новікова, Є.В. Лесіна. – Покровськ: ДонНТУ, 2022 р. – 61 с.

Методичні вказівки містять варіанти завдань індивідуальної роботи з дисципліни «Вища математика. Ч.2» за темами: функції багатьох змінних, інтегральне числення (визначений та невизначений інтеграл) та диференціальні рівняння. Також у посібник включено вимоги до виконання та оформлення індивідуальної роботи, зразок виконання завдань та список літературних джерел.

Методичні вказівки призначені для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Укладачі: _____ Ю.В. Новікова, в.о. зав. каф. ВМФ, к.ф.-м.наук, доцент
(підпис)

_____ Є.В. Лесіна, доц. каф. ВМФ, к.ф.-м.наук, доцент
(підпис)

Рецензенти: _____ Л.Г. Сергієнко, доц. каф. ВМФ, к. пед. наук, доцент
(підпис)

Відповідальний
за випуск: _____ Ю.В. Новікова, в.о. зав. каф. ВМФ, к.ф.-м.наук, доцент

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ,
протокол № 1 від 07.09.2021 р.

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики і фізики
протокол № 3 від 16.02.2022 р.

Донецький національний технічний університет, 2022

© Новікова Ю.В., Лесіна Є.В.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
ЗАВДАННЯ ДО ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ	5
Тема 1. Функції багатьох змінних	5
Тема 2. Невизначений інтеграл	16
Тема 3. Визначений інтеграл та його застосування	24
Тема 4. Диференціальні рівняння	31
ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ	41
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	58
ДОДАТОК А.....	59
ДОДАТОК Б.....	60
ДОДАТОК В	61

ВСТУП

Основними завданнями вивчення дисципліни «Вища математика. Ч.2» є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів, а також отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін інженерно-технічного циклу.

У результаті вивчення даної навчальної дисципліни студент має навчитися проводити математичні обчислення, аналізувати та обробляти отримані результати, а також робити логічні висновки.

Велику роль у формуванні навичок студентів щодо застосування теоретичних знань у самостійній роботі відіграє виконання індивідуальних завдань. Підготовка індивідуального завдання передбачає: систематизацію, закріплення, розширення теоретичних і практичних знань з навчальної дисципліни та їх застосування до розв'язання конкретних задач.

Методичні вказівки до індивідуальної роботи студентів з дисципліни «Вища математика. Ч.2» містять 30 варіантів завдань за темами: функції багатьох змінних, невизначений інтеграл, визначений інтеграл та його застосування, диференціальні рівняння.

Індивідуальне завдання виконується самостійно при консультуванні з викладачем упродовж вивчення дисципліни.

Індивідуальну роботу студенти виконують у зошиті в клітинку або на аркушах паперу формату А4 з полями для позначок викладача. Приклад оформлення титульної сторінки наведено у Додатку В.

Для кожного завдання потрібно вказати номер та переписати його умову. Розв'язання завдань повинні містити усі пояснення та обґрунтування, а також необхідні рисунки. Оформлену роботу у встановлений термін студент має здати на перевірку. Після перевірки, у разі необхідності, доопрацювати завдання у цьому ж зошиті, зберігаючи номер відповідного завдання.

ЗАВДАННЯ ДО ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Тема 1. Функції багатьох змінних

1. Знайти та зобразити область визначення заданих функцій.

Варіант	Функція	
1.	a) $z = \frac{3xy}{2x-5y}$	б) $z = \sqrt{y-x-8}$
2.	a) $z = \arcsin(x-y)$	б) $z = \ln(2-x-y) + \sqrt{x}$
3.	a) $z = \sqrt{y^2 - x^2}$	б) $z = \ln(1-x^2-y^2) + \sqrt{x-y}$
4.	a) $z = \ln(4-x^2-y^2)$	б) $z = y + \arcsin(x+2)$
5.	a) $z = \frac{2}{6-x^2-y^2}$	б) $z = \sqrt{x^2+y^2-1} + \ln(9-x^2-y^2)$
6.	a) $z = \sqrt{x^2+y^2-9}$	б) $z = \sqrt{y-x} - 2\sqrt{y+x}$
7.	a) $z = \arccos(2x+y)$	б) $z = \sqrt{2x} - \sqrt{1-x-y}$
8.	a) $z = \sqrt{25-x^2-y^2} + x$	б) $z = \arcsin(3-x-y)$
9.	a) $z = \ln(3x+4y-12) + \sqrt{x-1}$	б) $z = \arcsin \frac{x}{y^2}$
10.	a) $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$	б) $z = \arcsin \frac{x^2}{y} + xy$
11.	a) $z = \sqrt{x-y+7} + \ln(x-4)$	б) $z = \frac{\sqrt{y-2x^2}}{y}$
12.	a) $z = \ln \sqrt{x^2+y^2-4}$	б) $z = \arcsin(2x+y-4)$
13.	a) $z = \sqrt{36-9x^2-4y^2}$	б) $z = \ln(4+4x-y^2)$
14.	a) $z = \sqrt{5-x-5y}$	б) $z = \arcsin(3x+y)$

15.	a) $z = \arccos(x - 3y)$	б) $z = \frac{x}{4 - 4x^2 - y^2}$
16.	a) $z = \arccos \frac{x+y}{y}$	б) $z = \sqrt{2x+y} - \ln(2-x-y)$
17.	a) $z = \ln(x^2 - 2 - y)$	б) $z = \arcsin \frac{y}{x+y}$
18.	a) $z = \frac{xy}{\sqrt{2x-5y}}$	б) $z = \frac{1}{\sqrt{y-x}} + \ln(2x-3y-6)$
19.	a) $z = \frac{4xy}{x-3y+1}$	б) $z = \ln(6-x-y) + \frac{x}{y}$
20.	a) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2 - 5}}$	б) $z = \frac{1}{x-2} - \ln(x-y)$
21.	a) $z = \ln(5x-y)$	б) $z = \sqrt{\frac{xy}{(x+y)}}$
22.	a) $z = y - \sqrt{y^2 - x^2 - 1}$	б) $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$
23.	a) $z = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 9}$	б) $z = \arcsin \frac{2x}{y} + \ln(x-3)$
24.	a) $z = \ln(25 - x^2 - y^2)$	б) $z = \frac{x}{x+y} - \sqrt{3-x+2y}$
25.	a) $z = \frac{x^3 y}{3+x-y}$	б) $z = \sqrt{x-2y} + \frac{1}{x+y-1}$
26.	a) $z = \frac{xy}{2x-5y-10}$	б) $z = \ln \sqrt{y-x-7}$
27.	a) $z = \frac{x^3 y}{1+x+y}$	б) $z = \sqrt{3x-2y} + \frac{1}{x+y}$
28.	a) $z = \ln(2 - x^2 - y)$	б) $z = \frac{5x}{xy} - \sqrt{3-x^2+y}$
29.	a) $z = \sqrt{x^2 - y^2 - 9}$	б) $z = \arcsin \frac{2+x}{y} + \ln(x-3y)$
30.	a) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$	б) $z = \frac{xy}{x+y-2} - \ln(x+y-4)$

2. Перевірити, чи задовольняє задана функція u вказаному рівнянню.

Варіант	Функція	Рівняння
1.	$u = \frac{y}{x}$	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
2.	$u = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3$	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$
3.	$u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
4.	$u = x^y$	$y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x}$
5.	$u = \frac{xy}{x+y}$	$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$
6.	$u = e^{xy}$	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
7.	$u = x^{y^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$
8.	$u = y \sqrt{\frac{y}{x}}$	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
9.	$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$
10.	$u = \sqrt{\frac{y}{x}}$	$y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
11.	$u = \sin(x - 3y)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
12.	$u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
13.	$u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
14.	$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = 0$

15.	$u = \frac{x}{x^2 + y^2}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
16.	$u = xe^{\frac{y}{x}}$	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
17.	$u = \arctg \frac{y}{x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
18.	$u = \ln(x + e^{-y})$	$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
19.	$u = \ln(x^2 - y^2)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
20.	$u = e^{\cos(x+3y)}$	$9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
21.	$u = e^x (x \cos y - y \sin y)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
22.	$u = \sqrt{\frac{y^3}{x}}$	$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
23.	$u = 3 + \ln(x^2 + (y+1)^2)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
24.	$u = e^{-\cos(4y+x)}$	$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
25.	$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
26.	$u = \ln(x + e^{-y})$	$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
27.	$u = \sqrt{x^2 + y^2}$	$y \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + u^2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$
28.	$u = e^{x^2+xy+y^2}$	$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$
29.	$u = \cos(x + y^2)$	$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial x} = 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$
30.	$u = \sin^2(y - 3x)$	$9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

3. Обчислити наближено.

Варіант	Числовий вираз	
1.	a) $\sqrt{1,98}(2,03)^{1,98}$	б) $\cos 61^\circ \sin 47^\circ$
2.	a) $\frac{(1,03)^2}{\sqrt[4]{(2,05)^3}}$	б) $\cos^3 62^\circ \sin 48^\circ$
3.	a) $\sqrt{3,98}(1,03)^{3,98}$	б) $\cos^3 59^\circ \sin^2 32^\circ$
4.	a) $\operatorname{arcctg} \frac{2,03^2}{0,99}$	б) $\cos^3 59^\circ \sin 32^\circ$
5.	a) $\operatorname{arctg} \frac{1,04^2}{0,98}$	б) $\cos 59^\circ \operatorname{tg} 32^\circ$
6.	a) $\arcsin \frac{1,04^2}{0,98}$	б) $\sin 181^\circ \operatorname{tg} 32^\circ$
7.	a) $0,97^{1,05}$	б) $\cos 122^\circ \operatorname{tg}^2 33^\circ$
8.	a) $\sqrt[5]{2,97^3 + 2,02^2 + 1}$	б) $\cos 49^\circ \operatorname{tg} 118^\circ$
9.	a) $e^{1,02} \ln \sqrt[3]{0,98}$	б) $\operatorname{ctg} 59^\circ \operatorname{tg} 32^\circ$
10.	a) $\frac{10}{(2,98)^3 (5,03)^2}$	б) $\cos 136^\circ \operatorname{tg} 121^\circ$
11.	a) $(3,02)^2 \sqrt[5]{0,97}$	б) $\cos^2 151^\circ \operatorname{tg} 32^\circ$
12.	a) $\ln(\sqrt{4,02} - \sqrt[3]{0,97})$	б) $\operatorname{ctg} 58^\circ \sin^2 132^\circ$
13.	a) $\ln(\sqrt{2,02} - \sqrt[3]{0,99})$	б) $\sin 92^\circ \cos 46^\circ$

14.	a) $\sqrt{(3,1)^2(4,2)^2}$	б) $\sin^3 88^\circ \cos 44^\circ$
15.	a) $(3,03)^4(1,98)^2$	б) $\cos^2 92^\circ \operatorname{ctg} 46^\circ$
16.	a) $(2,01)^3(2,98)^5$	б) $\sin 92^\circ \cos^2 137^\circ$
17.	a) $(\sqrt{0,97})^{1,02}$	б) $\sin 181^\circ \cos^3 211^\circ$
18.	a) $\ln(\sqrt{5,02} - \sqrt[3]{1,99})$	б) $\operatorname{tg}^2 46^\circ \sin 29^\circ$
19.	a) $\sqrt{(2,03)^3 + (1,05)^3}$	б) $\sin 212^\circ \cos^2 226^\circ$
20.	a) $\sqrt{(2,03)^2 + (1,01)^3}$	б) $\sin 301^\circ \cos^4 121^\circ$
21.	a) $3,01 \cdot e^{0,03}$	б) $\sin^3 182^\circ \operatorname{tg} 136^\circ$
22.	a) $(0,95)^3(1,04)^4$	б) $\operatorname{tg} 48^\circ \cos^2 62^\circ$
23.	a) $\ln(\sqrt{0,92} - \sqrt[5]{1,99})$	б) $\operatorname{tg} 137^\circ \sin^3 61^\circ$
24.	a) $(0,99)^{3,01}$	б) $\sin^2 32^\circ \cos^3 136^\circ$
25.	a) $(1,04)^3 e^{1,05}$	б) $\sin^2 33^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$
26.	a) $\ln(\sqrt{1,01} - \sqrt[3]{2,99})$	б) $\operatorname{ctg}^2 46^\circ \sin 134^\circ$
27.	a) $\sqrt[3]{1,06^2 + 2,03^4}$	б) $\sin^2 89^\circ \cos 151^\circ$
28.	a) $(0,99)^3(1,02)^5$	б) $\operatorname{tg} 152^\circ \cos^3 46^\circ$
29.	a) $\operatorname{arctg}(1,99^2 - \sqrt{0,95})$	б) $\operatorname{tg} 32^\circ \sin 133^\circ$
30.	a) $(0,98)^{2,01}$	б) $\operatorname{ctg}^2 46^\circ \cos 131^\circ$

4. Знайти градієнт функції $z = z(x, y)$, заданої неявно в даній точці M_0 .

Варіант	Функція та точка
1.	$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$, в даній точці $M_0(2; 1; 1)$
2.	$x^3y + xy^3 + z^3 - 3xyz = 3$, в даній точці $M_0(-2; 0; 1)$
3.	$3x - x^3y^2 + xy^3 + xz^2 - 3xyz = 0$, в даній точці $M_0(-1; 2; 1)$.
4.	$e^z - y^3 + xz^2 - 3xyz = 0$, в даній точці $M_0(-1; 2; 0)$
5.	$e^{2z} - xy^3 + z^2 - 3xyz = 0$, в даній точці $M_0(2; 2; 0)$
6.	$z^3 - xy^3 + z^2 - 3xy = y^2$, в даній точці $M_0(2; 2; 1)$
7.	$xz^3 - xy + z^2 - 3xy = x^2$, в даній точці $M_0(1; 2; 1)$
8.	$xz^3 - x^4z + e^y - 3xy = y^3$, в даній точці $M_0(1; 2; -1)$
9.	$z^3 - xy^3 + e^{2x} - 3xy = y^2z$, в даній точці $M_0(2; 1; 1)$
10.	$z^3 - xy^3 + 3xy - y^2z = x$, в даній точці $M_0(2; -1; 1)$
11.	$2z^3 - xy^3 + e^{2x} - xy = y^2z$, в даній точці $M_0(1; 1; 1)$
12.	$xyz^3 - xy^3 + 3xy - y^2z = 4$, в даній точці $M_0(0; 2; 1)$
13.	$5yz^3 - 4xy^3 + e^z - 3xy = yz$, в даній точці $M_0(2; 1; 0)$
14.	$2xz^3 - xy^3 + e^y - 3xyz = z$, в даній точці $M_0(2; 0; 1)$

15.	$4y - 3xy^3z + e^{xy} - xy = yz,$	в даній точці $M_0(0; 1; 3)$
16.	$zy - 3xz^3 - z + e^{xz} - xy = y,$	в даній точці $M_0(2; 1; 0)$
17.	$3zy - xz^3 - yz + e^x - xy = 1,$	в даній точці $M_0(0; 1; -1)$
18.	$zy - 2xy^3 - xyz + e^{xz} = 1,$	в даній точці $M_0(0; 1; 2)$
19.	$2xy^3 - 5xyz + e^{xz} - 3y = 4x,$	в даній точці $M_0(1; 1; 0)$
20.	$z - 6xy - 2y^3z - xy + e^z = 0,$	в даній точці $M_0(2; 1; 1)$
21.	$15zy - y^3z - xy + e^x = y,$	в даній точці $M_0(0; -1; 2)$
22.	$4x - xy - y^3 - 3xyz + e^x = z,$	в даній точці $M_0(0; 1; -2)$
23.	$y - xy - y^3 - 3xyz + 3yz^4 - z = 5,$	в даній точці $M_0(1; 1; -2)$
24.	$xy - y^{-3} - 3xy^2z + e^{-xy} = z^2,$	в даній точці $M_0(0; -1; 2)$
25.	$7xy - x^2y^{-3} - 3xy^2z + e^{-y} = z^{-2},$	в даній точці $M_0(-1; 0; 1)$
26.	$3 - xy - xy^{-2}z + e^{-xz} = yz^{-1},$	в даній точці $M_0(0; -1; -2)$
27.	$xyz - y^{-1}z - xy^2 + e^{-x} = 4z^3,$	в даній точці $M_0(0; 2; 2)$
28.	$e^x - 6xy - 5yz - y^2z - z^{-2} = 0,$	в даній точці $M_0(0; -1; 1)$
29.	$xyz - y - xy^2z + e^{xy} = z^2,$	в даній точці $M_0(-1; 0; 2)$
30.	$5yz - x^3y - xy^{-2}z + e^y = z,$	в даній точці $M_0(2; 0; -1)$

5. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні Q у точці M_0

Варіант	Задана поверхня та точка
1.	$Q: z = 3x^2 - xy + x + y, \quad M_0(1; 3; 4)$
2.	$Q: z = x^2 + y^2 - 3, \quad M_0(1; -1; -1)$
3.	$Q: z = x^2 + 3xy - 6y, \quad M_0(4; 1; 22)$
4.	$Q: z = \ln(x^2 - 2y^2), \quad M_0(3; 2; 0)$
5.	$Q: z = x^2 - y^2 + 6x + 3y, \quad M_0(2; 3; 16)$
6.	$Q: z = 2x^2 - y^2 + xy - 4y, \quad M_0(1; 2; -8)$
7.	$Q: z = 2x^2 - y^2 + 6xy - 3y, \quad M_0(1; 1; 4)$
8.	$Q: z = x^2 - 5xy^2 + 6xy - 3x, \quad M_0(1; 0; -2)$
9.	$Q: z = 4x^2 - xy^2 + x - y, \quad M_0(1; 1; 3)$
10.	$Q: z = x^2 + y^2 + 2xy - 3x, \quad M_0(1; -1; 6)$
11.	$Q: z = \ln(x^2 - y^2 + 1), \quad M_0(1; -1; 0)$
12.	$Q: z = x^2 - x^2y + 2x - y, \quad M_0(-1; 1; -3)$
13.	$Q: z = x^2 - x^2y^3 + xy - 2y, \quad M_0(1; 1; -1)$
14.	$Q: z = y^2 - xy^2 + xy - 2y + 2x, \quad M_0(1; 0; 2)$
15.	$Q: z = x^2 - x^2y + 2x + 5y, \quad M_0(0; 1; 5)$
16.	$Q: z = \ln(4x^2 - 2y^2 - 1), \quad M_0(1; 1; 0)$
17.	$Q: z = 3x^2 - 5y + 2xy + 5y, \quad M_0(1; 2; 7)$
18.	$Q: z = x^2 - y^2 + 2xy + y, \quad M_0(1; 1; 3)$
19.	$Q: z = \ln(5x^2 - y^2), \quad M_0(1; 2; 0)$
20.	$Q: z = 3x^2 + 2y^2 - xy, \quad M_0(-1; 3; 24)$

21.	$Q: z = x^2 + y^2 - 4x + 2y, \quad M_0(2; -1; -5)$
22.	$Q: z = 2x^2 - 2y^2 + 2xy + 4x - y, \quad M_0(1; 1; 5)$
23.	$Q: z = x^2 - y^3 - 3xy + 4y + 2x, \quad M_0(1; 1; 3)$
24.	$Q: z = \ln(7x - 2y), \quad M_0(1; 3; 0)$
25.	$Q: z = 3x^2 - 2y^3 + 2xy + y, \quad M_0(1; 1; 4)$
26.	$Q: z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1, \quad M_0(2; 3; 19)$
27.	$Q: z = 3x^2 - 2xy^3 + 2xy + y, \quad M_0(1; 1; 4)$
28.	$Q: z = x^2y + y^2 - 2xy + 3y - 4x, \quad M_0(2; 1; -2)$
29.	$Q: z = 3x^2 - 2y^3 + 2xy + y, \quad M_0(1; 1; 4)$
30.	$Q: z = 3x^2 - 3xy^3 + 2xy + y, \quad M_0(1; 1; 3)$

6. Знайти екстремум заданої функції.

Варіант	Функція
1.	$z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$
2.	$z = 4(x - y) - x^2 - y^2 + 1$
3.	$z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 11y + 1$
4.	$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2$
5.	$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$
6.	$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$
7.	$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$
8.	$z = 2x^2 + 2xy - 3y^2 - 10x + 16y - 7$
9.	$z = 10xy - 3x^2 - 2y^2 - 26x + 18y - 1$

10.	$z = 3 - 3x^2 - 8xy + 5y^2 + 4x + 26y$
11.	$z = 5x^2 + 2xy - 3y^2 - 18x - 10y + 4$
12.	$z = 12x + 12y - 3x^4 - 3y^4$
13.	$z = x^2 - 2y^3 - 2x + 6y$
14.	$z = x^3 + y^3 - 3xy$
15.	$z = x^3 - xy^2 + x^2y$
16.	$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
17.	$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
18.	$z = xy(12 - x - y)$
19.	$z = 2x^4 + xy^3$
20.	$z = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 9x + 9y$
21.	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$
22.	$z = y\sqrt{x} + y^2 - x + 6y$
23.	$z = 27x^3 + 8y^3 - 18xy$
24.	$z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3$
25.	$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$
26.	$z = 2x^4 + 2y^4 - 64x - 64y$
27.	$z = \frac{1}{5}x^5 + xy^2 + 2xy - 15x$
28.	$z = 3x^3 + xy^2 - 6xy - 27x$
29.	$z = x^3 + y^3 - 9xy + 2$
30.	$z = x^4 + y^4 - 2x^2.$

Тема 2. Невизначений інтеграл

1. Знайти невизначений інтеграл методом безпосереднього інтегрування.

Варіант	Інтеграли	
1.	$\int \frac{dx}{\sqrt{4+9x^2}}$	$\int (2x+3)^3 dx$
2.	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$	$\int \frac{dx}{4x^2-9}$
3.	$\int \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x-2}} \right) dx$	$\int e^{2x-4} dx$
4.	$\int \frac{3}{\sqrt{4x^2-9}} dx$	$\int (5x-7)^5 dx$
5.	$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5}}$	$\int 5e^{2-x} dx$
6.	$\int \frac{dx}{(x+2)^2}$	$\int e^{7x-1} dx$
7.	$\int \frac{dx}{16-9x^2}$	$\int \left(\frac{1}{\sin^2(5-x)} - 2 \right) dx$
8.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-8}}$	$\int \left(\frac{5}{4-7x} + \cos(4-3x) \right) dx$
9.	$\int \left(\sqrt[3]{x-2} \right)^3 dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$
10.	$\int \frac{dx}{16-9x}$	$\int \frac{1}{\sin^2(5-x)} dx$
11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$	$\int \cos(4-3x) dx$
12.	$\int \left(\sqrt[4]{x-2} \right)^3 dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9-9x^2}}$

13.	$\int \frac{dx}{4-9x^2}$	$\int \frac{dx}{9x-3}$
14.	$\int \frac{dx}{1-2x}$	$\int e^{-2x} dx$
15.	$\int \frac{dx}{4-2x}$	$\int 3^{-2x} dx$
16.	$\int \frac{dx}{x^5}$	$\int \frac{dx}{x-3}$
17.	$\int \frac{dx}{1-x}$	$\int e^{3-2x} dx$
18.	$\int \frac{dx}{4-x}$	$\int 3^{1-2x} dx$
19.	$\int \frac{dx}{4-x^2}$	$\int \frac{dx}{9x}$
20.	$\int \frac{dx}{4-2x}$	$\int e^{-2x-3} dx$
21.	$\int \frac{dx}{2x^5}$	$\int 3^{4x} dx$
22.	$\int \frac{dx}{6-9x}$	$\int \frac{1}{\sin^2(4-x)} dx$
23.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}}$	$\int \cos(5-3x) dx$
24.	$\int (\sqrt[4]{x}-4)^3 dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x}}$
25.	$\int \frac{dx}{9x}$	$\int \frac{1}{\cos^2(4-x)} dx$
26.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-10}}$	$\int \cos(5x-3) dx$
27.	$\int (\sqrt[4]{2x}-4)^3 dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{9x-2}}$
28.	$\int \frac{dx}{6-2x}$	$\int \frac{1}{\sin^2(5-x)} dx$

29.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2}}$	$\int \cos(5 - x) dx$
30.	$\int (\sqrt[5]{x} - 4)^3 dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{6x}}$

2. Знайти невизначений інтеграл методом заміни змінної.

Варіант	Інтеграли	
1.	$\int \frac{dx}{(x+2)\ln(x+2)}$	$\int \frac{x dx}{\cos^2(3x^2 + 5)}$
2.	$\int \frac{(1 + \operatorname{tg} 5x)^3}{\cos^2 5x} dx$	$\int \frac{\sin 2x}{5 + \cos^2 x} dx$
3.	$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 + \ln x}}$	$\int \frac{\sin 2x}{4 - 3\sin^2 x} dx$
4.	$\int \sin\left(\frac{4}{x} + 5\right) \frac{dx}{x^2}$	$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
5.	$\int e^{\frac{4}{x}} \frac{dx}{x^2}$	$\int \frac{\cos 3x}{3\sin 3x - 5} dx$
6.	$\int \sqrt[4]{\sin^3 2x} \cdot \cos 2x dx$	$\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$
7.	$\int \frac{e^{3x}}{4 + e^{3x}} dx$	$\int \sin(\ln x - 5) \cdot \frac{1}{x} dx$
8.	$\int \frac{\sqrt[3]{4 + \ln x}}{x} dx$	$\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}$
9.	$\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2x dx$	$\int \cos(\ln x + 5) \frac{dx}{x}$
10.	$\int e^{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$	$\int \frac{dx}{x \cdot \cos^2(4 - \ln x)}$
11.	$\int \ln^2 x \frac{dx}{x}$	$\int e^{\frac{4}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$
12.	$\int \frac{x^3 dx}{5 - 4x^4}$	$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 4}}$
13.	$\int \frac{3\sqrt{\ln 3x - 1}}{2x} dx$	$\int \sin(4 + \operatorname{tg} x) \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$

14.	$\int \frac{dx}{x \cdot (4\ln^2 x + 9)}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cdot \sin^2 \sqrt{x}}$
15.	$\int e^{2x} \cdot \cos(e^{2x} + 3) dx$	$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{4 - e^{4x}}} dx$
16.	$\int x^3 \cdot \sqrt[4]{5x^4 - 3} dx$	$\int 2^{-x^3+4} \cdot 3x^2 dx$
17.	$\int \cos(3 - e^x) \cdot e^x dx$	$\int e^{\arctg 2x} \frac{dx}{1 + 4x^2}$
18.	$\int \sin(4 + \sqrt{5 - x}) \cdot \frac{dx}{\sqrt{5 - x}}$	$\int e^{\arctg x} \cdot \frac{dx}{9 + 9x^2}$
19.	$\int \sqrt{\sin^3 6x} \cdot \cos 6x dx$	$\int \frac{x^2 dx}{4x^3 - 5}$
20.	$\int x \cdot \sin(3 - 4x^2) dx$	$\int 2^{\sin(x)+5} \cdot \cos x dx$
21.	$\int (1 + \ln x)^5 \frac{dx}{x}$	$\int \frac{3^x}{9^x + 4} dx$
22.	$\int \sin(\ln x + 5) \frac{dx}{x}$	$\int \sin 5x \cdot (1 + \cos 5x)^7 dx$
23.	$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1} dx$	$\int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$
24.	$\int \frac{x^3}{7 - 4x^4} dx$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{7x^2 - 3}}$
25.	$\int \cos(\ln x + 5) \frac{dx}{x}$	$\int \cos 5x \cdot (1 + \sin 5x)^7 dx$
26.	$\int \frac{x^2 + 6}{x^3 - 2} dx$	$\int e^{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$
27.	$\int \frac{x^3}{23 - x^4} dx$	$\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2 - 3}}$
28.	$\int (\ln x + 5) \frac{dx}{x}$	$\int \sin 4x \cdot (1 + \cos 4x)^7 dx$
29.	$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 3} dx$	$\int e^{x^{-2}} \cdot \frac{dx}{x^3}$
30.	$\int \frac{x^3}{7 - 6x^4} dx$	$\int \frac{xdx}{5x^2 - 3}$

3. Знайти невизначений інтеграл методом інтегрування частинами.

Варіант	Інтеграли	
1.	$\int x \sin x dx$	$\int x \ln x dx$
2.	$\int x^2 e^{-x} dx$	$\int \sqrt{9-x^2} dx$
3.	$\int x^2 \ln x dx$	$\int x^2 \sin 3x dx$
4.	$\int \arccos 2x dx$	$\int x \cdot \cos 2x dx$
5.	$\int x^2 \cdot 2^x dx$	$\int (4x-2) \cos 2x dx.$
6.	$\int e^{2x} \cdot \cos x dx$	$\int x \cdot 3^x dx$
7.	$\int x^2 \cdot e^{-3x} dx$	$\int e^{-3x} \cdot \cos x dx$
8.	$\int (9x^2 + 1) \cdot e^{3x} dx$	$\int x^7 \cdot \ln 2x dx$
9.	$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$	$\int \arctg 5x dx$
10.	$\int x \cdot \ln^2 5x dx$	$\int x^2 \cdot 4^{-x} dx$
11.	$\int x \cdot e^{-2x} dx$	$\int (6x^2 + 1) \cdot \sin 2x dx$
12.	$\int x^2 \cdot e^{-3x} dx$	$\int e^{\frac{-x}{2}} \cdot \sin x dx$
13.	$\int x \cdot \ln^2 x dx$	$\int e^x \cdot \sin 3x dx$
14.	$\int x \cdot \sin \frac{x}{2} dx$	$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$
15.	$\int x^3 \cdot \ln x dx$	$\int x^2 \cdot \cos x dx$

16.	$\int x \cdot \ln^2 x dx$	$\int e^{-x} \cdot \cos 2x dx$
17.	$\int x \cdot \cos \frac{x}{2} dx$	$\int x^2 \cdot \ln^2 x dx$
18.	$\int e^{2x} \cdot \sin x dx$	$\int x \cdot 2^x dx$
19.	$\int x \cdot e^{3x} dx$	$\int e^x \cdot \sin \frac{3}{2} x dx$
20.	$\int \arcsin \frac{x}{2} dx$	$\int e^{-2x} \cdot \sin \frac{x}{2} dx$
21.	$\int \arctg \frac{3x}{2} dx$	$\int x^3 \cdot e^{3x} dx$
22.	$\int e^{-3x} \cdot \sin x dx$	$\int \arctg 2x dx$
23.	$\int x \cdot \sin 3x dx$	$\int x \cdot \ln^2 x dx$
24.	$\int \cos x \cdot e^{2x} dx$	$\int \arcsin 2x dx$
25.	$\int e^{-x} \cdot \sin x dx$	$\int \arctg 6x dx$
26.	$\int (x-1) \cdot \sin 3x dx$	$\int x^3 \cdot \ln^2 x dx$
27.	$\int \cos x \cdot e^{3x} dx$	$\int \arcsin 2x dx$
28.	$\int e^{-3x} \cdot \cos x dx$	$\int \arctg 2x dx$
29.	$\int x \cdot \sin 7x dx$	$\int 4x \cdot \ln^2 x dx$
30.	$\int \cos 3x \cdot e^{2x} dx$	$\int \arcsin 2x dx$

4. Знайти інтеграли: а) від дробово-раціональної функції, б) від тригонометричної функції.

Варіант	Інтеграли	
1.	$\int \frac{1}{x^2 + 6x - 7} dx$	$\int \sin 5x \cos 4x dx$
2.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 2} dx$	$\int \sin \frac{x}{3} \sin 2x dx$
3.	$\int \frac{1}{x^2 + 3x - 7} dx$	$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$
4.	$\int \frac{1}{x^2 - 6x - 4} dx$	$\int \sin 5x \cos 2x dx$
5.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x - 6} dx$	$\int \sin \frac{x}{3} \sin x dx$
6.	$\int \frac{1}{x^2 + 8x - 7} dx$	$\int \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{3} dx$
7.	$\int \frac{1}{x^2 - 8x - 4} dx$	$\int \sin 9x \cos 4x dx$
8.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 12} dx$	$\int \sin \frac{x}{3} \sin 3x dx$
9.	$\int \frac{1}{x^2 + 3x - 5} dx$	$\int \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{3} dx$
10.	$\int \frac{1}{x^2 - 12x - 7} dx$	$\int \sin 6x \cos 4x dx$
11.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 14} dx$	$\int \sin x \cos 8x dx$
12.	$\int \frac{1}{x^2 + 6x - 6} dx$	$\int \sin 15x \cos 4x dx$
13.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 16} dx$	$\int \sin \frac{x}{3} \sin 4x dx$
14.	$\int \frac{1}{x^2 + 10x - 7} dx$	$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{2x}{3} dx$

15.	$\int \frac{1}{x^2 + 16x - 4} dx$	$\int \sin 5x \cos 14x dx$
16.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 20} dx$	$\int \sin \frac{x}{3} \sin 6x dx$
17.	$\int \frac{1}{x^2 + 12x - 18} dx$	$\int \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{2} dx$
18.	$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 4} dx$	$\int \sin 15x \cos 14x dx$
19.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x - 20} dx$	$\int \sin \frac{6x}{3} \sin 2x dx$
20.	$\int \frac{1}{x^2 + 12x + 18} dx$	$\int \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{2x}{3} dx$
21.	$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 4} dx$	$\int \sin 4x \cos 4x dx$
22.	$\int \frac{1}{x^2 - 4x - 18} dx$	$\int \sin \frac{x}{2} \sin 2x dx$
23.	$\int \frac{1}{x^2 + 12x + 22} dx$	$\int \cos \frac{x}{6} \sin \frac{x}{3} dx$
24.	$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 5} dx$	$\int \sin(-4x) \cos 4x dx$
25.	$\int \frac{1}{x^2 + 4x + 18} dx$	$\int \sin \frac{x}{2} \sin 3x dx$
26.	$\int \frac{1}{x^2 - 12x + 22} dx$	$\int \cos 5x \cdot \sin 2x dx$
27.	$\int \frac{1}{x^2 - 2x - 4} dx$	$\int \sin 2x \cos 4x dx$
28.	$\int \frac{1}{x^2 - 4x - 18} dx$	$\int \sin \frac{x}{2} \sin 2x dx$
29.	$\int \frac{1}{x^2 + 12x + 22} dx$	$\int \cos \frac{4x}{6} \sin \frac{x}{3} dx$
30.	$\int \frac{1}{x^2 - 7x + 4} dx$	$\int \cos \frac{x}{6} \sin \frac{2x}{3} dx$

Тема 3. Визначений інтеграл та його застосування

1. Обчислити визначені інтеграли.

Варіант	Інтеграли		
1.	a) $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3} dx,$	б) $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}},$	в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$
2.	a) $\int_0^{-1} \frac{x^4-4}{2-x^2} dx,$	б) $\int_{-1}^0 2x(x^2-1)^{15} dx,$	в) $\int_0^1 x e^{-x} dx$
3.	a) $\int_1^2 (3x^2-2x+1) dx$	б) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$	в) $\int_1^e x \ln x dx$
4.	a) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$	в) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arctg 2x dx$
5.	a) $\int_1^2 (x^2-2x+3) dx$	б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$	в) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$
6.	a) $\int_0^4 (x^2+3)^2 dx$	б) $\int_0^2 (e^x-1)^{10} e^x dx$	в) $\int_1^e x \ln x dx$
7.	a) $\int_1^4 \frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1} dx$	б) $\int_2^9 \sqrt{x-1} dx$	в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$
8.	a) $\int_{-2}^0 \left(\frac{x}{2}+1\right)^3 dx$	б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+5\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx$	в) $\int_0^1 x \cdot \arctg 2x dx$
9.	a) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx$	б) $\int_0^{\sin 1} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	в) $\int_0^1 \arcsin x dx$
10.	a) $\int_{100}^{101} (\sqrt{x}+2) dx$	б) $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$	в) $\int_0^3 \ln(x+3) dx$
11.	a) $\int_4^9 \left(\frac{2x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$	б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx$	в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

12.	a) $\int_4^9 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$	б) $\int_{\sqrt{\ln 2}}^{\sqrt{\ln 3}} x e^{x^2} dx$	в) $\int_0^{2\pi} (2x+1) \cos 3x dx$
13.	a) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x}}{x} dx$	б) $\int_{-\sqrt[3]{3}}^0 x^2 e^{\frac{1}{3}x^3+1} dx$	в) $\int_0^2 \ln(x+3) dx$
14.	a) $\int_1^8 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 3x + 5 \right) dx$	б) $\int_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{1}{2} x \sin x^2 dx$	в) $\int_0^{\pi/4} x \cos 2x dx$
15.	a) $\int_0^1 \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} \right) dx$	б) $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{x dx}{5\sqrt{1-x^2}}$	в) $\int_{-1}^0 x \sin 3x dx$
16.	a) $\int_{-2}^{-1} \left(x + \frac{1}{3x^5} + \frac{1}{2} \right) dx$	б) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$	в) $\int_0^{\pi/2} x \sin 2x dx$
17.	a) $\int_{-2}^2 (x^2 + x + 1) dx$	б) $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$	в) $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$
18.	a) $\int_2^5 \left(\frac{1}{x} + 2^x - x \right) dx$	б) $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}$	в) $\int_{-1}^1 x \cdot \arctg x dx$
19.	a) $\int_3^5 \left(\frac{1}{x^2} + e^{2x} - x \right) dx$	б) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(5+2x)^5}$	в) $\int_0^1 \arctg 6x dx$
20.	a) $\int_0^1 (x\sqrt{x} - 2x + 1) dx$	б) $\int_1^2 e^{1/x} \frac{dx}{x^2}$	в) $\int_0^3 \ln(x+11) dx$
21.	a) $\int_{-1}^2 (x^3 + \sqrt[3]{x}) dx$	б) $\int_1^e \cos \ln x \frac{dx}{x}$	в) $\int_0^1 \arcsin 7x dx$
22.	a) $\int_1^{27} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$	б) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{3(1-2e^x)}$	в) $\int_0^{\pi/2} x \arctg 2x dx$
23.	a) $\int_{-1}^2 (3x^2 + 4x - 1) dx$	б) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$	в) $\int_0^3 x \ln(x+17) dx$
24.	a) $\int_{-1}^3 (2 + x - 3x^2) dx$	б) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$	в) $\int_1^e \ln 7x dx$
25.	a) $\int_{-1}^8 (\sqrt[3]{x} - x + 3x^2) dx$	б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$	в) $\int_0^1 \arcsin x dx$

26.	а) $\int_1^4 \frac{4+3\sqrt{x}}{x^2} dx$	б) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$	в) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$
27.	а) $\int_0^{-2} \frac{x^4 - 4}{2+x^2} dx$	б) $\int_{-1}^0 3x^2 (x^3 + 6)^{11} dx$	в) $\int_0^1 x e^{-2x} dx$
28.	а) $\int_1^2 (4x^3 + 3x^2) dx$	б) $\int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx$	в) $\int_1^e x^3 \ln x dx$
29.	а) $\int_0^{16} (\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}) dx$ $\int_0^3 x \ln(x+17) dx$	б) $\int_2^3 \frac{x dx}{x^4 - 4}$	в)
30.	а) $\int_1^{27} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \right) dx$	б) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{4(1-2e^x)}$	в) $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{arctg} 2x dx$

2. Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність

Варіант	Інтеграли	
1.	$\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^3}$	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$
2.	$\int_0^4 \frac{dx}{2-\sqrt{x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+x^2}$
3.	$\int_0^e x \ln^2 x dx$	$\int_0^{\infty} \frac{x-2}{x^2+1} dx$
4.	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$	$\int_0^{\infty} x \sin 2x dx$
5.	$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$	$\int_0^{\infty} \sin 3x dx$
6.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	$\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$

7.	$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}$
8.	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arctg x + \arctg \frac{\pi}{4}}{1+x^2} dx$
9.	$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^4 x}$
10.	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$	$\int_{-\infty}^0 x e^{2x} dx$
11.	$\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^3}$	$\int_0^{\infty} \frac{4x dx}{x^4 + 1}$
12.	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$	$\int_{-\infty}^0 x^3 e^{x^2} dx$
13.	$\int_0^3 (x-2)^{-3} dx$	$\int_0^{\infty} e^{\sqrt{x}} dx$
14.	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$	$\int_0^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2 + 1} dx$
15.	$\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$	$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^4}$
16.	$\int_0^9 \frac{dy}{2-\sqrt{y}}$	$\int_{-\infty}^e x e^{-x} dx$
17.	$\int_0^1 e^{-\frac{4}{x}} \frac{dx}{x^2}$	$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$
18.	$\int_0^2 \frac{dx}{(1-x)^2}$	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x + 2)^2}$
19.	$\int_{-1}^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$	$\int_{-\infty}^0 x e^{5x} dx$

20.	$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln x}}$
21.	$\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$	$\int_0^{\infty} x \sin \frac{7}{3} x dx$
22.	$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^4}$	$\int_2^{\infty} x \sin x dx$
23.	$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{11}}$	$\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$
24.	$\int_0^e x \ln 5x dx$	$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$
25.	$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$	$\int_0^{\infty} x e^{-2x} dx$
26.	$\int_{-1}^3 \frac{dx}{x^3}$	$\int_0^{\infty} x^5 e^{-x^6} dx.$
27.	$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$	$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4+9x^2}$
28.	$\int_{-3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$	$\int_0^{\infty} \frac{x+3}{x^2+1} dx$
29.	$\int_0^e x^3 \ln x dx$	$\int_5^{\infty} \sin 0,5x dx$
30.	$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{2+\ln x}}$

3. Обчислити:

а) площу фігури, обмеженої лініями, б) об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої заданими лініями.

Варіант	Завдання	
1.	а) $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$	б) $y = 2\sin x$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$
2.	а) $y = x^2$, $4x - y = 0$	б) $y = 2\cos x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \pi/2$
3.	а) $y = (x+1)^2$, $y = 4$	б) $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = \pm \pi/4$
4.	а) $y = 4 - x^2$, $y = 2x + 1$	б) $y = e^x$, $y = 0$, $x = -1$, $x + y = 1$
5.	а) $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$	б) $y = -x^2 + 3$, $y = x^2 + 1$
6.	$y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$, $x = 0$	б) $y = e^{2x}$, $x = -4$, $x = 0$, $y = 0$
7.	$y = 4 - x^2$, $y = 0$	б) $y = \ln x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 0$
8.	а) $y = 1 + e^x$, $x = 0$, $x = -4$, $y = 0$	б) $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $x = 0$
9.	а) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $y = 2x + 9$, $y = 0$	б) $y = e^{2x}$, $y = e^{-2x}$, $y = 2$
10.	а) $y = 4x^2$, $y = x^2 + 3$	б) $y = \cos x$, $y = 0$, $-1 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
11.	а) $y = x^2 - 3x$, $y = x$	б) $y = x^2$, $y = 4$, $xy = 1$, $0 \leq x \leq 1$
12.	а) $y = e^x$, $y = e$, $x = -1$	б) $y = (x+1)^2$, $y^2 = x$, $y = 0$, $y = 1$
13.	а) $y = 4x - x^2$, $y = -3$	б) $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
14.	а) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$	б) $y = e^x$, $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$
15.	а) $y = -x^2 - 7x + 10$, $y = 0$	б) $x^2 + y^2 = 1$, $y \leq \sqrt{\frac{3}{2}}x$

16.	a) $y = 4 - x^2$, $2x - y + 1 = 0$	б) $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$
17.	a) $y = -\frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$	б) $y = e^{-2x}$, $y = e^{2x}$, $x = 1$
18.	a) $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$	б) $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 0$
19.	a) $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$	б) $y = 2\sin x$, $y = 1$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$
20.	a) $y = x^2 - 1$, $y = 7x - 7$	б) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$
21.	a) $y = x^3$, $4x - y = 0$	б) $y = 2\sin x$, $y = 2\cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$
22.	a) $y = \frac{1}{x}$, $y = x$, $x = e$	б) $y = \operatorname{tg} x$, $y = 0$, $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$
23.	a) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$	б) $y = \frac{1}{x}$, $x + y = 2$
24.	a) $y = x^2 - 3x$, $y = x$	б) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$
25.	a) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = -3$	б) $y = \frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 0$, $x = e$, $y = 0$
26.	a) $y = \sin x$, $x = \pi$, $y = -x$	б) $y = 2x - x^2$, $y = 0$
27.	a) $xy = 1$, $y = x^2$, $y = 4$, $x > 0$	б) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$
28.	a) $y = \sin x$, $y = \frac{2}{\pi}x$	б) $y = \sqrt{x}$, $x + y = 2$, $x = 0$
29.	a) $y = 2\sin x$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$	б) $y = x$, $y = 4 - x$, $y = 0$, $x = 3$
30.	a) $y = -x^2 + 3$, $y = x^2 + 1$	б) $y = e^{2x}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

Тема 4. Диференціальні рівняння

1. Знайти загальний або частинний розв'язок диференціальних рівнянь.

Варіант	Рівняння
1.	$1. y' \ln y \cos x = y, \quad y(0) = 1$ $2. (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$ $3. y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ $4. y' + \frac{y}{x} - x^2 y^4 = 0$ $5. (x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$ $6. y'' = (2y' + 1)\operatorname{tg} y, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $7. y'' + 4y' = 2x^2$ $8. y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0$
2.	$1. yy' + xe^y = 0, \quad y(1) = 0$ $2. x \sin \frac{y}{x} y' + x = y \sin \frac{y}{x}$ $3. xy' - y = x^2 \cos x$ $4. y^2 \ln x - y - xy' = 0$ $5. (x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$ $6. (3x - x^2)y'' + (3 + 2x)y' = 0, \quad y(2) = -\frac{1}{3}, \quad y'(2) = -\frac{1}{2}$ $7. x^3 y'' + x^2 y' = 1$ $8. y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$
3	$1. e^{1+x^2} \operatorname{tg} y dx + \frac{(1+e^x)}{\cos^2 y} dy = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$ $2. xy' \ln \frac{y}{x} = x + y \ln \frac{y}{x}$ $3. y' \cos x + y = 1 - \sin x$ $4. y' - \frac{y^2}{x-1} = \frac{y}{x-1}$ $5. (x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$

	6. $xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 6, \quad y'(1) = 2$ 7. $y'' + y'tgx = \sin 2x$ 8. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$
4.	1. $y' + \cos(x + 2y) = \cos(x - 2y), \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$ 2. $xy' - y = xtg \frac{y}{x}$ 3. $y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x$ 4. $4xy' + 3y + e^x y^5 = 0$ 5. $(\sin y + \cos x - y \cos x)dx + (\cos y + x \cos y - \sin x)dy = 0$ 6. $yy'' - (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ 7. $y'' - y = 0$ 8. $y'' - 6y' + 25y = -24\cos 4x + 9\sin 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2$
5.	1. $y = y' \ln y, \quad y(2) = 1$ 2. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)$ 3. $y' \sin x - y \cos x = 1$ 4. $x dy + (y + x^2 y^2) dx = 0$ 5. $(x^2 + \sin y) dx + (1 + x \cos y) dy = 0$ 6. $y'' = y', \quad y(0) = \frac{2}{3}, \quad y'(0) = 1$ 7. $(1 + y)y'' - 5(y')^2 = 0$ 8. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
9.	1. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1$ 2. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$ 3. $xy' - 2y = 2x^4$ 4. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x$ 5. $(e^x \sin y + x) dx + (e^x \cos y + y) dy = 0$ 6. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ 7. $(y''x - y')y' = x^3$ 8. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$

7.	1. $x^2 y^2 y' + 1 = y, \quad y(1) = 2$ 2. $xy' = 2(y - \sqrt{xy})$ 3. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ 4. $y' + 2y = y^2 e^x$ 5. $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$ 6. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ 7. $y'' y' = \frac{(y')^2 + 1}{2x}$ 8. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$
8.	1. $x(y^6 + 1)dx + y^2(x^4 + 1)dy = 0, \quad y(0) = 1$ 2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ 3. $y = x(y' - x \cos x)$ 4. $xydy = (y^2 + x)dx$ 5. $\left(tgy - \frac{y}{\sin^2 x} \right) dx + \left(ctgx + \frac{x}{\cos^2 y} \right) dy = 0$ 6. $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$ 7. $y'' = y' + (y')^2$ 8. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
9.	1. $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx + (\sqrt{xy} + y)dy = 0, \quad y(0) = 1$ 2. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$ 3. $(xy' - 1) \ln x = 2y$ 4. $xy^2 y' = x^2 + y^3$ 5. $e^y dx + (xe^y - 2)dy = 0$ 6. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1), \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -1$ 7. $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ 8. $y'' - 9y' + 18y = 26 \cos x - 8 \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
10.	1. $(x^2 y - x^2)dy = (xy^2 + y^2)dx, \quad y(1) = 1$ 2. $3xyy' + x^2 = 3y^2$

	3. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x}$ 4. $x^2 y' - 2xy + y^2 = 0$ 5. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2xydy = 0$ 6. $y''(x-1) - y' = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 1$ 7. $y^3 y'' = 1$ 8. $y'' + 16y = \cos 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi$
11.	1. $y'(1+x^2) = 1+y^2, \quad y(0) = 1$ 2. $y^2 + x^2 y' = xy y'$ 3. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 3$ 4. $xy' + y - xy^2 \ln x = 0$ 5. $(y - 3x^2)dx + (x - 4y)dy = 0$ 6. $yy'' - (y')^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$ 7. $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$ 8. $y'' + 4y' - 5y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
12.	1. $6xdx - 6ydy = 2x^2 ydy - 3xy^2 dx, \quad y(2) = 0$ 2. $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$ 3. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}$ 4. $y' - 7y - e^{3x} y^2 = 0$ 5. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$ 6. $y'' = y'e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ 7. $(1-x^2)y'' + xy' = 2$ 8. $y'' + y' - 2y = \cos 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
13.	1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^{2y})dy = 0, \quad y(2) = 0$ 2. $xdy = (2y - x)dx$ 3. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$ 4. $y' + 3y = e^{2x} y^2$ 5. $\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0$

	6. $yy'' = 2(y')^2, \quad y\left(-\frac{1}{4}\right) = 1, \quad y'\left(-\frac{1}{4}\right) = 4$ 7. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$ 8. $y'' + y = 2\cos x + 3\sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
14.	1. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy, \quad y(1) = 0$ 2. $2x^3y' = y(2x - y^2)$ 3. $(2xy + 3)dx - x^2dy = 0$ 4. $2xydy = (y^2 - x)dx$ 5. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$ 6. $y''\cos y + (y')^2\sin y = y', \quad y(-1) = \frac{\pi}{6}, \quad y'(-1) = 2$ 7. $y''(e^x + 1) + y' = 0$ 8. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
15.	1. $(1 + e^{2x})y^2y' = e^x, \quad y(0) = 1$ 2. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$ 3. $\cos xdy = (y + 2\cos x)\sin xdx$ 4. $x dy = (x^5y^2 - 2y)dx$ 5. $\left(\frac{1}{x} - y^3 + 4\right)dx + \left(-\frac{1}{y} - 3xy^2\right)dy = 0$ 6. $xy'' - y' + xtg \frac{y'}{x} = 0, \quad y(1) = -1, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}$ 7. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$ 8. $y'' + 9y = 4\sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
16.	1. $(1 + x^2)dy = ydx = 0, \quad y(1) = 1$ 2. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$ 3. $y' + \frac{xy}{1 - x^2} = \arcsin x + x$ 4. $y' - \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x}^2} \arctg x - \frac{2xy}{1+x^2} = 0$ 5. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$ 6. $(2x + 1)y'' + 2y' = 4x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = \frac{2}{3}$

	7. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ 8. $y'' + 5y' = 3x^2 - 2x + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
17.	1. $3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{(1+e^x)}{\cos^2 y} dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$ 2. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$ 3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ 4. $y' - 3x^2 \sqrt[3]{y^4 + \frac{2y}{x}} = 0$ 5. $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^y \cos y)dy = 0$ 6. $y''(2y' + 1) = \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$ 7. $yy'' + 1 = (y')^2$ 8. $y'' + 16y = \sin 4x, \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi$
18.	1. $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, \quad y(0) = 0$ 2. $xyy' = y^2 + 2x^2$ 3. $(1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x$ 4. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ 5. $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + (e^{x^2} + \frac{x}{y})dy = 0$ 6. $y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2$ 7. $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$ 8. $y'' + y' - 2y = \cos 3x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
19.	1. $y \ln^3 y + y' \sqrt{x+1} = 0, \quad y\left(-\frac{15}{16}\right) = e$ 2. $y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}$ 3. $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$ 4. $y' - e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y} + y = 0$ 5. $(y + x \ln y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0$

	6. $y''(y^2 + 1) = 2y(y')^2$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ 7. $(1 + x^2)y'' + 1 + (y')^2 = 0$ 8. $y'' - 3y' = 6x^2 - 5$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$
20.	1. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$, $y(0) = 0$ 2. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ 3. $y' + 3ytg3x = \sin 6x$ 4. $y' - 2ytgx + y^2 \sin^2 x = 0$ 5. $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$ 6. $x^2 y'' - 2xy' + 3 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$ 7. $1 + (y')^2 = yy''$ 8. $y'' + 4y = x^2 + 3x - 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$
21.	1. $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0,5$ 2. $\arctg \frac{y}{x}(xy' - y) = x$ 3. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$ 4. $(x^2 + 2x + y^2)dx + 2xdy = 0$ 5. $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1\arctgy)dy = 0$ 6. $(y - 1)y'' = 2(y')^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$ 7. $(y'')^2 = 1 + (y')^2$ 8. $y'' + y' = e^{-x}$, $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 0$
22.	1. $\frac{dx}{x(y-1)} + \frac{dy}{y(x+2)} = 0$, $y(1) = 1$ 2. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$ 3. $x^2 y' + xy + 1 = 0$ 4. $y' = y^4 \cos x + ytgx$ 5. $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$ 6. $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ 7. $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$ 8. $3y'' - 2y' - 8y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
23.	1. $\sqrt{1 + \cos 2x} + y'\sqrt{1 + \sin y} = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

	2. $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$ 3. $2x(x^2 + y)dx = dy$ 4. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ 5. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$ 6. $2yy'' - y' - (y')^2 = 0, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = -1$ 7. $y''x \ln x = y'$ 8. $y'' + 6y' + 8y = 4xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
24.	1. $\ln(\cos x)y' + y \tan x = 0, \quad y(e) = 1$ 2. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ 3. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$ 4. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$ 5. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$ 6. $y \ln yy'' + (y')^2 = 0, \quad y(0) = e, \quad y'(0) = 1$ 7. $xy'' - y' = x^2 e^x$ 8. $y'' + 6y' + 13y = \sin x + \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
25.	1. $(1 - e^{y^2})dy = \frac{dx}{2y}, \quad y(0) = 0$ 2. $xy' - x \cos^2 \frac{y}{x} = y$ 3. $y' = (x+1)^3 + \frac{2y}{x+1}$ 4. $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$ 5. $(\ln y - 2x)dx + \left(\frac{x}{y} - 2y\right)dy = 0$ 6. $xy'' + y' = 2x \ln x + x, \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y'(1) = \frac{3}{2}$ 7. $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$ 8. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
26.	1. $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad y(0) = 1$ 2. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 9\frac{y}{x} + 9$

	3. $x^3 y' = 1 - 2x^2 y$ 4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$ 5. $(3x^2 + 3xy^2)dx + (3x^2 y + 4y^3)dy = 0$ 6. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = e^2$ 7. $\sqrt{y} y'' = y'$ 8. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
27.	1. $(x^2 + x)ydx + (y^2 + 1)dy = 0, \quad y(0) = 1$ 2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ 3. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$ 4. $y' = \frac{y^2 + y}{x - 3}$ 5. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$ 6. $x^2 y'' = \ln x, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 1$ 7. $y''(1 + y) = (y')^2 + y'$ 8. $4y'' + 4y' + y = \cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
28.	1. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0, \quad y(0) = 1$ 2. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$ 3. $y' + ytgx = \cos^2 x$ 4. $(1 + x^2)dy = (xy + x^2 y^2)dx$ 5. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ 6. $y'' = e^{2y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ 7. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ 8. $4y'' + y = \cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = \frac{1}{2}$
29.	1. $y' + 2y - y^2 = 0, \quad y(0) = 3$ 2. $xy' + y(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0$ 3. $(x^4 + 2y)dx = xdy$ 4. $xdy = (y + xy^2)dx = 0$

	5. $(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)dy = 0$ 6. $2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ 7. $y'' \operatorname{ctg} x = y' + 1$ 8. $y'' + 3y' - 4y = e^{4x}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
30.	1. $(x + xy)dy + (y - xy)dx = 0, \quad y(1) = 1$ 2. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$ 3. $(\ln x + y)dx = xdy$ 4. $3dy = (1 - 3y^2)y \sin x dx$ 5. $(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 4)dy = 0$ 6. $y^3y'' + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$ 7. $y'' + 4y' = \cos 2x$ 8. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОЇ РОБОТИ

Тема 1. Функції багатьох змінних

Приклад 1. Знайти та зобразити на рисунку область визначення функції:

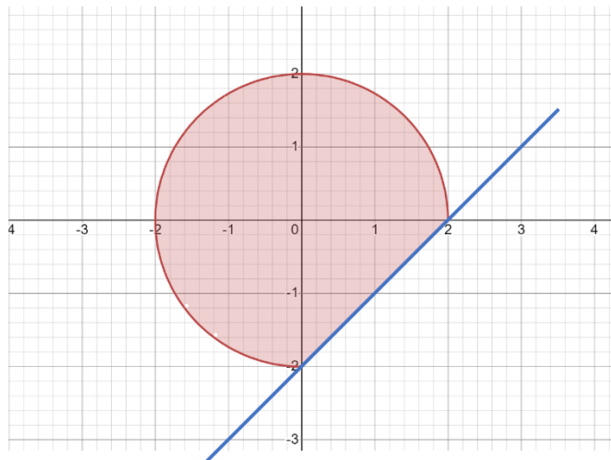
$$z = \sqrt{y - x + 2} + \arcsin \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Розв'язання. Область визначення функції визначимо з системи нерівностей:

$$\begin{cases} y - x + 2 \geq 0, \\ -1 \leq \frac{x^2 + y^2}{4} \leq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y \geq x - 2, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ x^2 + y^2 \geq -4. \end{cases}$$

Графічним образом нерівності $y \geq x - 2$ є півплощина, розміщена над прямою $y = x - 2$. Нерівність $x^2 + y^2 \leq 4$ визначає в площині круг із центром в початку координат і радіусом 2. Нерівність $x^2 + y^2 \geq -4$ не визначає ніякого геометричного об'єкта. Перетин цих множин є областю визначення даної функції.

$$D(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x - 2, x^2 + y^2 \leq 4\}.$$



Приклад 2. Перевірити, чи задовольняє задана функція $u = \sin \frac{y}{x}$ вказаному

рівнянню $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні першого і другого порядків заданої функції:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \left(\sin \frac{y}{x} \right)'_x = \cos \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right); & \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(\sin \frac{y}{x} \right)'_y = \cos \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(-\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right)'_x = \frac{2y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \left(-\frac{y}{x^2} \right) \sin \frac{y}{x} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{2y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x^2} \right)^2 \sin \frac{y}{x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} \right)'_y = -\frac{1}{x} \sin \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(-\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right)'_y = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \left(-\frac{y}{x^2} \right) \left(-\sin \frac{y}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

Підставляємо знайдені частинні похідні в ліву частину заданого рівняння і отримуємо:

$$\begin{aligned}x^2 \left(\frac{2y}{x^3} \cos \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x^2} \right)^2 \sin \frac{y}{x} \right) + 2xy \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^3} \sin \frac{y}{x} \right) + y^2 \left(-\frac{1}{x^2} \sin \frac{y}{x} \right) &= 0, \\ \cancel{\frac{2y}{x} \cos \frac{y}{x}} - \cancel{\frac{y^2}{x^2} \sin \frac{y}{x}} - \cancel{\frac{2y}{x} \cos \frac{y}{x}} + \cancel{\frac{2y^2}{x^2} \sin \frac{y}{x}} - \cancel{\frac{y^2}{x^2} \sin \frac{y}{x}} &= 0, \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Отже, задана функція задовольняє вказаному рівнянню.

Приклад 3. Обчислити наближено $\sin^2 51^\circ \cos 5^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжну функцію $z = \sin^2 x \cos y$. Перейдемо від градусної міри кутів до радіанної: $t = \frac{\alpha \pi}{180}$ радіан. Необхідно обчислити:

$$z\left(\frac{51\pi}{180}; \frac{5\pi}{180}\right) = z\left(\frac{17\pi}{60}; \frac{\pi}{36}\right). \quad \text{Покладемо} \quad x + \Delta x = \frac{17\pi}{60} = \frac{15\pi + 2\pi}{60}; \quad x = \frac{\pi}{4}; \quad \Delta x = \frac{\pi}{30};$$

$$y + \Delta y = \frac{\pi}{36}; \quad y = 0; \quad \Delta y = \frac{\pi}{36}.$$

$$\text{Обчислимо: } z\left(\frac{\pi}{4}; 0\right) = \sin^2 \frac{\pi}{4} \cos 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = 2 \sin x \cos x \cos y = \sin 2x \cos y; \quad \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)}{\partial x} = \sin 2x \cos y \Big|_{\substack{x=\pi/4 \\ y=0}} = 1,$$

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = -\sin^2 x \sin y; \quad \frac{\partial z\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)}{\partial y} = -\sin^2 x \sin y \Big|_{\substack{x=\pi/4 \\ y=0}} = 0.$$

Згідно формули $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$ маємо:

$$z = \sin^2 51^\circ \cos 5^\circ \approx \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{\pi}{30} + 0 \cdot \frac{\pi}{36} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{30} \approx 0,6.$$

Приклад 4. Знайти градієнт функції $z = (x, y)$, заданої неявно в даній точці M_0 .

$$5x^2y^3 + 2xz^3 - y^2z = 0, \quad M_0(-1; 1; 1).$$

Розв'язання. Градієнт функції в точці обчислюється за формулою:

$$\text{grad } z|_{M_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} \right).$$

Похідні неявної функції $z(x, y)$, заданої за допомогою рівняння $F(x, y, z) = 0$, можуть бути обчислені за формулами: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Маємо:

$$F(x, y, z) = 5x^2y^3 + 2xz^3 - y^2z;$$

$$F'_x = 10xy^3 + 2z^3; \quad F'_y = 15x^2y^2 - 2yz; \quad F'_z = 6xz^2 - y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{10xy^3 + 2z^3}{6xz^2 - y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{15x^2y^2 - 2yz}{6xz^2 - y^2}.$$

Обчислимо значення похідних в заданій точці $M_0(-1; 1; 1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{M_0} = -\frac{10xy^3 + 2z^3}{6xz^2 - y^2} \Big|_{M_0} = -\frac{10(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1}{6(-1) \cdot 1 - 1} = -\frac{8}{7},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{M_0} = -\frac{15x^2y^2 - 2yz}{6xz^2 - y^2} \Big|_{M_0} = -\frac{15(-1)^2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1}{6(-1) \cdot 1 - 1} = \frac{13}{7},$$

$$\text{grad } z|_{M_0} = \left(-\frac{8}{7}, \frac{13}{7} \right).$$

Приклад 5. Скласти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні $Q: z = 2x^2 - 3xy + x + 5y$ у точці $M_0(1; 2; 7)$.

Розв'язання. Рівняння поверхні Q задано у явній формі $z = f(x, y)$, отже рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0),$$

а рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{(x-x_0)}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{(y-y_0)}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ та їх значення в точці $M_0(1; 2; 7)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 4x - 3y + 1; & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= \frac{\partial f(1, 2)}{\partial x} = 4 - 6 + 1 = -1; \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -3x + 5; & \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= \frac{\partial f(1, 2)}{\partial y} = -3 + 5 = 2.\end{aligned}$$

Підставляємо знайдені значення в рівняння дотичної площини та нормалі та отримуємо:

$z - 7 = -(x - 1) + 2(y - 2)$ або $x - 2y + z - 4 = 0$ – рівняння дотичної площини;

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-7}{-1} \text{ – рівняння нормалі.}$$

Приклад 6. Знайти екстремум функції $z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 5$.

Розв’язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 12.$$

Знаходимо стаціонарні точки. Для цього прирівнюємо знайдені частинні похідні до нуля і розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0, \\ 3y^2 - 12 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Отже задана функція має чотири стаціонарні точки: $M_1(1; 2)$, $M_2(-1; -2)$, $M_3(1; -2)$, $M_4(-1; 2)$.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 6x; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 6y.$$

Обчислимо значення знайдених похідних в кожній із стаціонарних точок M_i , при цьому покладемо: $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_i}$, $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_i}$, $C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_i}$.

Складаємо вираз $\Delta = AC - B^2$ і проаналізуємо його знак:

- якщо $\Delta > 0$, то функція $z = f(x, y)$ в точці $M(x_0, y_0)$ має максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$;
- якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ в точці $M(x_0, y_0)$ екстремуму не має;
- якщо $\Delta = 0$, то питання про існування екстремуму залишається відкритим і потребує додаткового дослідження.

1) Точка $M_1(1; 2)$:

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_1} = 6x|_{(1; 2)} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_1} = 0; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_1} = 6y|_{(1; 2)} = 12.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot 12 - 0 = 72 > 0.$$

Так як $\Delta > 0$, $A = 6 > 0$, то в точка $M_1(1; 2)$ є точкою мінімуму функції.

2) Точка $M_2(-1; -2)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_2} = 6x|_{(-1; -2)} = -6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_2} = 0; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_2} = 6y|_{(-1; -2)} = -12.$$

$$\Delta = AC - B^2 = -6 \cdot (-12) - 0 = 72 > 0.$$

Так як $\Delta > 0$, $A = -6 < 0$, то в точка $M_2(-1; -2)$ є точкою максимуму функції.

3) Точка $M_3(1; -2)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_3} = 6x|_{(1; -2)} = 6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_3} = 0; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_3} = 6y|_{(1; -2)} = -12.$$

$$\Delta = AC - B^2 = 6 \cdot (-12) - 0 = -72 < 0.$$

Так як $\Delta < 0$, то в точка $M_3(1; -2)$ не є екстремальною точкою функції.

4) Точка $M_4(-1; 2)$.

$$A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_4} = 6x|_{(-1; 2)} = -6, \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_4} = 0; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_4} = 6y|_{(-1; 2)} = 12.$$

$$\Delta = AC - B^2 = (-6) \cdot 12 - 0 = -72 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то в точці $M_4(-1; 2)$ екстремуму немає.

Обчислимо значення функції $z = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 5$ в точках екстремуму $M_1(1; 2)$, $M_2(-1; -2)$. В результаті отримаємо:

$$z_{\max} = z_{\max}(-1; -2) = (-1)^3 + (-2)^3 - 3(-1) - 12(-2) + 5 = 23;$$

$$z_{\min} = z_{\min}(1; 2) = 1^3 + 2^3 - 3 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 5 = -13.$$

Тема 2. Невизначений інтеграл

Приклад 1. Знайти невизначені інтеграл методом безпосереднього інтегрування:

$$\int \left(\frac{5x^3 - x}{x^2} \right) dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

Розв'язання.

$$1) \int \left(\frac{5x^3 - x}{x^2} \right) dx = \int \frac{5x^3}{x^2} dx - \int \frac{xdx}{x^2} = 5 \int x dx - \int \frac{1}{x} dx = 5 \frac{x^2}{2} - \ln x + C,$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

Приклад 2. Знайти невизначені інтеграл методом заміни змінної:

$$\int 3x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + x^3} dx,$$

Розв'язання.

$$1) \int 3x^2 \cdot \sqrt[3]{1 + x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} 1 + x^3 = t \\ d(1 + x^3) = dt \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} \sqrt[3]{(1 + x^3)^4} + C,$$

$$2) \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1 + \ln x}} = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \ln x = t \\ d(1 + \ln x) = dt \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{(t-1)dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{1}{2}} dt - \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C =$$
$$= \frac{2}{3} (1 + \ln x)^{\frac{3}{2}} - 2(1 + \ln x)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \ln x)^3} - 2\sqrt{1 + \ln x} + C = \frac{2}{3} \sqrt{1 + \ln x} \cdot (\ln x - 2) + C.$$

Приклад 3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

$$\int \sqrt[3]{x} \ln x dx, \quad \int x^2 \cos 2x dx.$$

Розв'язання. Застосуємо формулу

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

$$1) \int \sqrt[3]{x} \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = \sqrt[3]{x} dx \\ du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \end{array} \right\} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \ln x - \frac{3}{4} \int x^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \frac{3}{4} x^3 \sqrt{x} - \frac{9}{16} x^3 \sqrt{x} + C = \frac{3}{16} x^3 \sqrt{x} + C.$$

$$\begin{aligned} 2) \int x^2 \cos 2x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \cos 2x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int \frac{1}{2} \cdot 2x \sin 2x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \\ dv = \sin 2x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \left(-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} \sin 2x + \frac{x}{2} \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Приклад 4. Знайти інтеграли:

а) від дробово-раціональної функції $\int \frac{1}{x^2 - 5x + 4} dx$,

б) від тригонометричної функції $\int \sin 5x \cdot \sin 3x dx$.

Розв'язання.

а) Виділимо повний квадрат у знаменнику дробу та застосуємо табличний інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 4} dx &= \int \frac{1}{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 4} dx = \int \frac{1}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} dx = \\ &= \int \frac{1}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} dx = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \right| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x - 4}{x - 1} \right| + C. \end{aligned}$$

б) Застосуємо формулу добутку тригонометричних функцій:

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cdot \sin 3x dx &= \int \frac{\cos 2x - \cos 8x}{2} dx = \frac{1}{2} \int \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \sin 8x + C = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C. \end{aligned}$$

Тема 3. Визначений інтеграл та його застосування

Приклад 1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 \left(\frac{5x^3 - x}{x} \right) dx$, б) $\int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{8 + 19 \ln x}}$, в) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx$.

Розв'язання.

$$a) \int_1^2 \left(\frac{5x^3 - x}{x} \right) dx = \int_1^2 \frac{5x^3}{x} dx - \int_1^2 \frac{x dx}{x} = 5 \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 dx = 5 \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 - x \Big|_1^2 = \left(\frac{40}{3} - \frac{5}{3} \right) - (2 - 1) = \frac{32}{3},$$

$$b) \int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{8 + 19 \ln x}} = \left\{ \begin{array}{l} 8 + 19 \ln x = t \\ d(8 + 19 \ln x) = dt \quad \text{якщо } x = 1: \\ 19 \cdot \frac{1}{x} dx = dt \quad t = 8 + 19 \cdot \ln 1 = 8 \\ \frac{1}{x} dx = \frac{1}{19} dt \quad \text{якщо } x = e: \\ t = 8 + 19 \cdot \ln e = 27 \end{array} \right\} = \frac{1}{19} \int_8^{27} t^{-\frac{1}{3}} dt =$$

$$= \frac{1}{19} \cdot \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \Big|_8^{27} = \frac{3}{19} \cdot \frac{t^{\frac{2}{3}}}{2} \Big|_8^{27} = \frac{3}{38} \sqrt[3]{t^2} \Big|_8^{27} = \frac{3}{38} (\sqrt[3]{27^2} - \sqrt[3]{8^2}) = \frac{15}{38}.$$

$$в) \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin 3x dx \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx =$$

$$= -\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{9} \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{9} \sin(3 \cdot 0) =$$

$$= -\frac{\pi}{18} \cdot \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{9}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$$

Розв'язання.

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^b + \int_1^b \frac{dx}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^b = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln b + 1}{b} - 1 \right) = -\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\ln b + 1}{b} + 1 = -0 + 1 = 1 \Rightarrow$$

інтеграл збігається.

$$2) \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$ має розрив 2-го роду у точці $x = 4$, тому

$$\begin{aligned} \int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} &= \int_2^4 (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx + \int_4^6 (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_2^{4-\varepsilon_1} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{4+\varepsilon_2}^6 (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} 3\sqrt[3]{x-4} \Big|_2^{4-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} 3\sqrt[3]{x-4} \Big|_{4+\varepsilon_2}^6 = 3 \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} (\sqrt[3]{4-\varepsilon_1-4} - \sqrt[3]{2-4}) + \\ &+ 3 \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} (\sqrt[3]{6-4} - \sqrt[3]{4+\varepsilon_2-4}) = 3(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}) = 6\sqrt[3]{2} \Rightarrow \end{aligned}$$

інтеграл збігається.

Приклад 3. Обчислити:

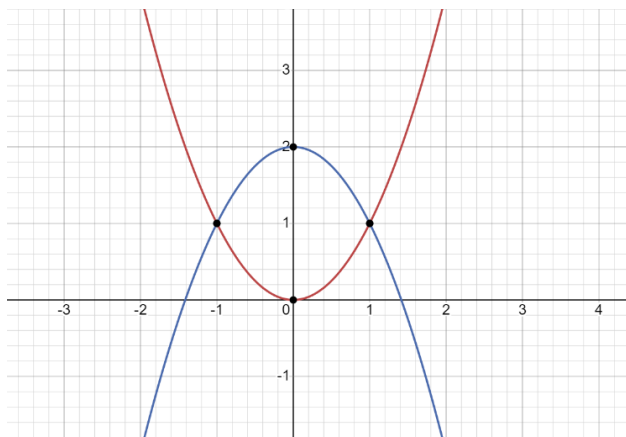
а) площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ та $y = 2 - x^2$.

Розв'язання.

Для того, щоб накреслити рисунок, знайдемо координати точок перетину кривих $y_1(x)$ та $y_2(x)$, в яких $y_1(x) = y_2(x)$:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2, \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

Тоді $x_1 = -1$; $x_2 = 1 \Rightarrow a = -1$; $b = 1$.



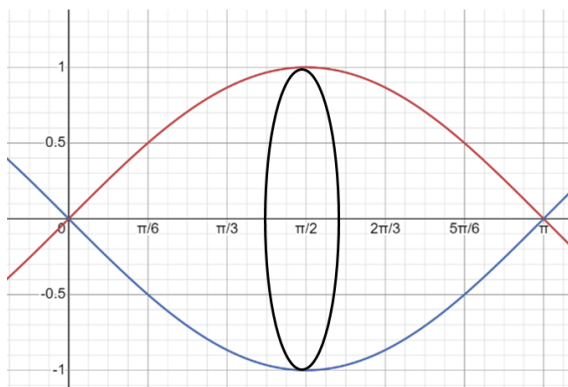
$$S = \int_{-1}^1 \left((2 - x^2) - x^2 \right) dx = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2) dx = 2 \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) \right) = \frac{8}{3} \text{ кв. од.}$$

б) об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої заданими лініями $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.

Об'єм тіла знаходимо за формулою:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



$$V_{Ox} = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2} \text{ куб.од.}$$

Тема 4. Диференціальні рівняння

Знайти загальний або частинний розв'язок диференціальних рівнянь.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші:

$$tgy dx - x \ln x dy = 0, \quad y(e) = \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини даного рівняння на добуток функцій

$$tgy \cdot x \ln x \text{ при } y \neq \pi k, x \neq 1. \text{ Одержимо } \frac{dx}{x \ln x} - \frac{dy}{tgy} = 0.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння маємо: $\int \frac{dx}{x \ln x} - \int \frac{dy}{tgy} = 0$.

$$\ln|\ln x| - \ln|\sin y| = \ln C,$$

$$\ln x = C \sin y.$$

Визначимо з початкових умов довільну сталу C :

$$\ln e = C \sin \frac{\pi}{2}, \quad C = 1.$$

Підставивши знайдене значення довільної сталої у загальний інтеграл, одержимо розв'язок задачі Коші

$$\ln x = \sin y.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}.$$

Розв'язання. Рівняння є однорідним, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} - e^{\frac{ty}{tx}} = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}} = f(x, y).$$

Зробимо заміну: $t = \frac{y}{x}$, звідки $y = xt$, $y' = t + xt'$. Підставимо заміну в

$$\text{рівняння: } t + xt' = t - e^t, \quad xt' = -e^t.$$

Так як $t' = \frac{dt}{dx}$, то можна відокремити змінні: $-\frac{dt}{e^t} = \frac{dx}{x}$.

Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$-\int \frac{dt}{e^t} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\int e^{-t} dt = \ln x + C,$$

$$e^{-t} = \ln x + C.$$

Підставивши $t = \frac{y}{x}$, маємо $e^{-\frac{y}{x}} = \ln x + C$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$y' - y = xe^x.$$

Розв'язання. Рівняння лінійне. Використаємо підстановку

$$y = u(x) \cdot v(x); \quad y' = u'v + uv'.$$

Підставимо y і y' в рівняння і групуємо доданки наступним чином:

$$u'v + \underline{uv}' - \underline{uv} = xe^x ;$$

$$u'v + u(v' - v) = xe^x .$$

Вираз у дужках вважаємо рівним нулю: $v' - v = 0$.

$$\begin{cases} v' - v = 0, \\ u'v = xe^x. \end{cases}$$

1) $v' - v = 0$. Відокремлюючи змінні, маємо:

$$\frac{dv}{v} = dx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int dx,$$

$$\ln|v| = x + C \Rightarrow v = Ce^x.$$

Звідси маємо, що при $C=1$ $v = e^x$. З урахуванням знайденого виразу для $v(x)$ маємо рівняння для визначення функції $u(x)$:

$$2) u' \cdot e^x = xe^x ,$$

$$\frac{du}{dx} = x,$$

$$\int du = \int x dx ,$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C,$$

де C – константа інтегрування. Загальний розв'язок рівняння матиме вигляд

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C \right) e^x.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$xy' - y = x^3 y^2 .$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2 y^2 ,$$

це рівняння Бернуллі

Використаємо підстановку $y = u(x)v(x)$, тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо вираз для y і y' в дане рівняння і, аналогічно тому, як це робили при розв'язуванні лінійного рівняння, групуємо доданки:

$$\frac{u'v + uv' - \frac{1}{x}uv}{x} = x^2 u^2 v^2;$$

$$v \left(u' - \frac{1}{x}u \right) + uv' = x^2 u^2 v^2.$$

Вираз у дужках, як і раніше, вважаємо рівним нулю:

$$\begin{cases} u' - \frac{1}{x}u = 0, \\ uv' = x^2 u^2 v^2. \end{cases}$$

$$1) \quad u' - \frac{1}{x}u = 0;$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |u| = \ln |x| + \ln |C|,$$

$$u = Cx.$$

Для визначення функції $v(x)$ маємо рівняння $uv' = x^2 u^2 v^2$ або враховуючи розв'язок для $u(x) = x$ при $C=1$:

$$xv' = x^2 x^2 v^2,$$

$$\frac{dv}{v^2} = x^3 dx,$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int x^3 dx.$$

Після інтегрування маємо:

$$-\frac{1}{v} = \frac{x^4}{4} + C,$$

$$v = -\frac{4}{x^4 + 4C}.$$

Тоді загальний розв'язок має вигляд:

$$y = -\frac{4x}{x^4 + 4C}.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(ye^x + 2x)dx + \left(e^x - \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умови $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (ye^x + 2x)'_y = e^x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \left(e^x - \frac{1}{y}\right)'_x = e^x,$$

тобто маємо рівняння у повних диференціалах. За формулою

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C$$

маємо

$$\int_{x_0}^x (ye^x + 2x) dx + \int_{y_0}^y \left(e^{x_0} - \frac{1}{y}\right) dy = C$$

або

$$ye^x + x^2 - ye^{x_0} - x_0^2 + ye^{x_0} - \ln y - y_0 e^{x_0} + \ln y_0 = C.$$

Зведемо подібні доданки та зберемо усі константи в одну:

$$ye^x + x^2 - \ln y = C.$$

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші

$$yy'' = (y')^2 - (y')^3, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

Розв'язання. Рівняння не містить явно аргументу x .

Зробимо заміну $y' = z(y)$, $y'' = z'_y y' = z'_y z$.

В результаті отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$yz \frac{dz}{dy} = z^2 - z^3 \Rightarrow \frac{dz}{z - z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Проінтегруємо останню рівність:

$$\int \frac{dz}{z - z^2} = \int \frac{dy}{y}.$$

$$\ln \left| \frac{z}{1 - z} \right| = \ln |y| + \ln |C_1| \Rightarrow \frac{y'}{1 - y'} = C_1 y.$$

Застосуємо початкові умови

$$\frac{2}{1 - 2} = -C_1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Рівняння буде мати вид:

$$\frac{y'}{1 - y'} = 2y.$$

Розв'яжемо рівняння відносно y' :

$$y' = \frac{2y}{1+2y}.$$

Відокремимо змінні:

$$\frac{1+2y}{2y} dy = dx.$$

Проінтегруємо вираз

$$\frac{1}{2} \ln |y| + y = x + C_2.$$

Знайдемо константу C_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln |-1| - 1 &= 0 + C_2, \\ C_2 &= -1. \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння буде мати вид:

$$\frac{1}{2} \ln |y| + y = x - 1.$$

Приклад 7. Знайти розв'язок рівняння

$$x(y'' + 1) + y' = 0.$$

Розв'язання. Рівняння не містить явно змінної y .

Зробимо заміну $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$.

Рівняння набуде вигляду

$$x(z' + 1) + z = 0 \Rightarrow z' + \frac{1}{x} z = -1.$$

Отримали лінійне рівняння відносно змінної z . Щоб розв'язати отримане рівняння застосуємо заміну $z = uv$, $z' = u'v + uv'$.

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{uv}{x} &= -1, \\ u'v + u \left(v' + \frac{v}{x} \right) &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = -1. \end{cases}$$

$$1) \quad v' + \frac{v}{x} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x},$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = -\ln x + \ln C, \quad v = \frac{C}{x}.$$

$$\text{Нехай } C=1, \quad v = \frac{1}{x}.$$

$$2) \quad u'v = -1 \Rightarrow u' = -x \Rightarrow u = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow$$

$$z = uv = \frac{1}{x} \left(-\frac{x^2}{2} + C_1 \right) = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}.$$

Так як $z = y'$, то

$$y' = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}.$$

Після інтегрування маємо, що

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln |x| + C_2.$$

Приклад 8. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' = 6x + 8.$$

Розв'язання. Структура загального розв'язку рівняння буде мати вид:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$$

1) Знайдемо розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$y'' + 3y' = 0.$$

Складемо для нього характеристичне рівняння

$$k^2 + 3k = 0.$$

Його корені $k_1 = 0$, $k_2 = -3$.

Отже

$$y_{з.о.} = C_1 e^{0 \cdot x} + C_2 e^{-3 \cdot x} = C_1 + C_2 e^{-3x}.$$

2) Правою частиною лінійного неоднорідного рівняння є многочлен першого степеня $(6x + 8)$. Тому частинний розв'язок $y_{ч.н.}$ будемо шукати у вигляді

$$y_{ч.н.} = x(Ax + B).$$

Многочлен першого степеня домножили на x тому, що один з коренів характеристичного рівняння дорівнює 0.

$$\text{Тоді } y'_{ч.н.} = 2Ax + B, \quad y''_{ч.н.} = 2A.$$

Підставимо ці вирази в рівняння та отримаємо:

$$2A + 3 \cdot (2Ax + B) = 6x + 8 \quad \text{або} \quad 6Ax + 2A + 3B = 6x + 8.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в лівій і правій частинах останньої рівності.

$$\left. \begin{array}{l} x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} 6A = 6, \\ 2A + 3B = 8. \end{array}$$

Розв'язавши отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь, одержимо

$$A = 1, \quad B = 2.$$

Тоді $y_{ч.н.} = x^2 + 2x$, а загальний розв'язок рівняння має вид:

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x^2 + 2x.$$

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.
2. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навчальний посібник: У 2-х ч. – К.: КНЕУ, 2002. – Ч.2. – 451 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1980.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Київ: Вища школа, 1993.
6. Сборник задач по математике (для втузов). Под ред.. Ефимова А.М., Демидовича Б.П., т.2. М.: Наука, 1981.
7. Вища математика. Збірник задач. За ред.. Дубовика В.П., Юрика. Київ: А.С.К., 2001.
8. Кузнєцов А.В. Сборник задач по высшей математике (типове расчеты). М.: Высшая школа. 1973.

ТАБЛИЦЯ ПОХІДНИХ

$C' = 0, (C = \text{const})$	$x' = 1$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦЮВАННЯ

$(C \cdot u)' = C \cdot u'$	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$

ПОХІДНА СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

$\int du = u + C$	$\int \operatorname{tgu} du = -\ln \cos u + C$
$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$	$\int \operatorname{ctgu} du = \ln \sin u + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + C$
$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$
$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 + a} \right + C$	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right + C$
$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$	
$\int \sqrt{u^2 + a} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a} + \frac{a}{2} \ln \left u + \sqrt{u^2 + a} \right + C$	

ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx, \quad a \neq 0 - \text{стала.}$
2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$

Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»

Кафедра вищої математики і фізики

Індивідуальна робота з дисципліни
«Вища математика. Ч.2»

ВАРІАНТ № __

Виконав:

студент групи _____
(група)

(ПІП)

№ зал. кн. _____

Перевірив:

доцент кафедри ВМФ
Новікова Ю.В.

Покровськ, 2022