

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу «Фізика. Частина II» для студентів інженерно-технічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

ЛУЦЬК 2023

УДК 53

Конспект лекцій з курсу «Фізика. Частина II» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Власенко М.М. - Луцьк, ДонНТУ, 2023 р. – 184 с.

Конспект лекцій написаний у відповідності з робочою програмою навчальної дисципліни «Фізика. Частина II», затвердженою на кафедрі Вищої математики і фізики ДонНТУ для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. У конспекті викладені основи теорії коливань і хвиль, хвильової і квантової оптики, квантової механіки, атомної та ядерної фізики.

Укладач Микола Власенко, доц., к.т.н., доц. каф. ВМФ

Рецензент Людмила Сергієнко, доц., к.п.н., доц. каф. ВМФ

Відповідальна за випуск Юлія Новікова, доц., к.ф.-м.н., зав. каф. ВМФ

Затверджено НМВ ДонНТУ,
протокол № 8 від 30 травня 2023 р.

Розглянуто на засіданні кафедри ВМФ,
протокол № 5 від 17 травня 2023 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ТЕМА 1. Загальні відомості про коливання. Характеристики коливань	5
ТЕМА 2. Гармонічні осцилятори	10
ТЕМА 3. Додавання коливань	18
ТЕМА 4. Згасаючі коливання	26
ТЕМА 5. Вимушені коливання	32
ТЕМА 6. Хвилі	40
ТЕМА 7. Хвильове рівняння	47
ТЕМА 8. Електромагнітні хвилі	55
ТЕМА 9. Інтерференція хвиль	61
ТЕМА 10. Геометрична оптика	70
ТЕМА 11. Хвильова оптика	77
ТЕМА 12. Дифракція світла	85
ТЕМА 13. Поляризоване світло	93
ТЕМА 14. Теплове випромінювання	101
ТЕМА 15. Закони теплового випромінювання	109
ТЕМА 16. Фотоелектричний ефект і ефект Комптона	116
ТЕМА 17. Елементи квантової механіки	126
ТЕМА 18. Хвильові властивості речовини	134
ТЕМА 19. Фізика атомів і молекул	141
ТЕМА 20. Квантові числа	147
ТЕМА 21. Фізика атомного ядра	155
ТЕМА 22. Ядерні перетворення	162
ТЕМА 23. Основи фізики твердого тіла	168
ТЕМА 24. Контактні і термоелектричні явища	177
ЛІТЕРАТУРА	184

ПЕРЕДМОВА

У даному конспекті лекцій з курсу «Фізика. Частина II» подається матеріал як з позицій класичної, так і сучасної фізики: надаються визначення фізичних категорій і понять, пояснюються фізичні закони і наслідки їх дії. Через скорочення часу, який відводиться навчальними планами на вивчення фізики у технічних вишах, виникає потреба стислого і лаконічного викладення даної дисципліни. Підручники з фізики, які можна зайти на просторах інтернету, вражають студентів своїми обсягами і «засиллям» математичного апарату, що часто й густо приводить до нехтування цих джерел інформації. Додатково це також не сприяє самостійній роботі студентів. Тому виникла потреба створити невеликий за обсягом і достатньо доступний для самостійного засвоєння законів фізики конспект лекцій. Даний курс лекцій охоплює в скороченому викладенні практично весь матеріал другої частини фізики, починаючи з теорії коливань і хвиль і закінчуючи основами ядерної фізики і фізики твердого тіла. При цьому максимально приділено увагу фізичному змісту понять, явищ і законів. Все це сприятиме якісному оволодінню основними поняттями, явищами і законами фізики. При підготовці конспекту лекцій були використані матеріали виданих в Україні підручників [1-4].

ТЕМА 1

Загальні відомості про коливання. Характеристики коливань

Загальні відомості про коливання

Коливальним процесом або *коливанням* називають усякий регулярний або майже регулярний процес, в якому будь-яка фізична величина набуває однакових значень через рівні або майже рівні проміжки часу. Коливання — дуже поширений вид рухів. Вони відбуваються скрізь у природі і в усіх галузях техніки. При механічних коливаннях повторюються, наприклад, переміщення тіл і модулі швидкостей. Електромагнітні коливання — це повторювані зміни величин напруги і струму в електричних колах та електричних і магнітних полів навколо струмів. Існують змішані коливання у пристроях, які перетворюють енергію механічних коливань в електричну енергію, і навпаки, наприклад, у мікрофонах та гучномовцях.

Теорія коливань вивчає коливальні рухи різної фізичної природи загальними методами. Вона встановлює закономірності, які характеризують коливальний процес в цілому, незалежно від природи фізичних величин, що здійснюють коливання.

Коливання виникають тоді, коли системі, здатній здійснювати коливальні рухи, надається енергія. У консервативних системах енергія зберігається. Якщо енергія системи зменшується (при наявності сил опору), то коливання згасають і систему називають *не консервативною*.

Стан будь-якої коливальної системи визначається узагальненою координатою, характерною для кожної системи (зміщення, кут відхилення, тиск, температура, електрична напруга і т. п.). Рух систем із сталими параметрами описується лінійними диференціальними рівняннями з повними похідними, що пов'язують узагальнені координати і узагальнені імпульси системи. Порядок цих рівнянь визначається числом степенів вільності системи. Наприклад, плоский рух маятника в полі тяжіння описується лінійним рівнянням другого порядку і відповідає системі з одним степенем вільності. Коливальні системи, рух яких

описується лінійними рівняннями, називають *лінійними*.

Основна задача теорії коливань полягає у визначенні узагальненої координати x коливної системи у будь-який момент часу: $x = x(t)$. Коливання називають періодичним, якщо певні значення x повторюються через рівні проміжки часу T , тобто

$$x(t) = x(t + T),$$

де T - стала величина, яку називають *періодом коливання*. Якщо функція $x(t)$ задовольняє умову періодичності не строго, а тільки наближено, то коливання називають *майже періодичними*. Зображення коливань у координатах (x, t) є основним при розгляді коливального процесу. Це зумовлено перш за все тим, що майже всі прилади, які реєструють коливання, відтворюють саме цю залежність. Крім того, функція $x(t)$ дає основну інформацію про загальний характер коливань, тобто про їхню форму.

Характерною властивістю лінійних коливальних систем є те, що під дією зовнішньої періодичної сили система здійснює коливання з тією самою періодичністю. Ще одна важлива властивість лінійних систем полягає в тому, що для них справджується принцип суперпозиції (незалежного накладання) коливань: якщо на систему незалежно діють дві періодичні сили і кожна окремо зумовлює зміну узагальненої координати відповідно x_1 і x_2 , то результуюча зміна координати $x = x_1 + x_2$.

Характеристики коливань

Найважливішими серед механічних коливальних рухів є гармонічні коливання. *Гармонічними називаються коливання, в процесі яких зміщення x змінюється за законом косинуса (або синуса):*

$$x = x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.1)$$

де A - амплітуда, що дорівнює абсолютному значенню найбільшого відхилення фізичної величини від рівноважного значення; ω - циклічна частота коливань; $\omega t + \varphi_0$ - фаза коливань, що однозначно визначає значення коливальної величини

у момент часу t ; φ_0 - початкова фаза. Вибором початкової фази φ_0 закон гармонічних коливань (1.1) завжди можна звести до функції синуса від аргументу ωt .

Характерною ознакою гармонічного коливання є те, що величини A , ω і φ_0 не змінюються в процесі коливання. Вивчення гармонічних коливань є важливим з двох причин: по-перше, коливання, які зустрічаються у природі і техніці, за своїм характером близькі до гармонічних; по-друге, важливі для практичних застосувань періодичні процеси, що не є гармонічними, але повторюються через рівні проміжки часу, можна зображати як накладання кількох гармонічних коливань.

Вираз (1.1) є розв'язанням диференціального рівняння руху системи, що здійснює гармонічні коливання. Рівняння руху можна отримати, якщо продиференціювати двічі за часом функцію $x(t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (1.2)$$

Цей вираз називають *рівнянням гармонічних коливань*. Вираз (1.2) - лінійне рівняння, воно містить функцію $x(t)$ і її другу похідну у першому степені.

Амплітуду A і початкову фазу φ_0 неможливо визначити із диференціального рівняння. Для цього при розв'язуванні рівняння (1.2) використовують початкові умови, які характеризують конкретний коливальний процес.

Фізичний зміст циклічної частоти ω пов'язаний з поняттями періоду T і частоти ν коливань. *Періодом* називають тривалість одного повного коливання, тобто найменший проміжок часу, через який повторюється довільно обраний стан коливальної системи. За один період фаза коливання отримує приріст 2π :

$$\omega(t + T) + \varphi_0 = \omega t + \varphi_0 + 2\pi,$$

звідси

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.3)$$

Частотою коливання ν називають кількість повних коливань за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Одиниця частоти - герц: 1 Гц - це частота періодичного процесу, в якому відбувається одне коливання за одну секунду (1 Гц = 1 с⁻¹). Із формули (1.3) випливає, що

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Циклічна частота дорівнює числу коливань за 2 π секунд і вимірюється в радіанах за секунду (рад/с).

Гармонічне коливання можна зобразити графічно у вигляді проекції матеріальної точки, що рівномірно обертається по колу, радіус якого дорівнює амплітуді коливання (рис. 1.1). Знайдемо швидкість і прискорення матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання. Швидкість коливального руху визначається як похідна за часом від зміщення (1.1):

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1.4)$$

або

$$v = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}), \quad (1.5)$$

де ωA - амплітуда швидкості. Прискорення цього руху дорівнює похідній за часом від швидкості (1.4):

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) з урахуванням (1.1) перепишемо у вигляді

$$a = -\omega^2 x \quad (1.7)$$

або

$$a = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi), \quad (1.8)$$

де $\omega^2 A$ - амплітуда прискорення.

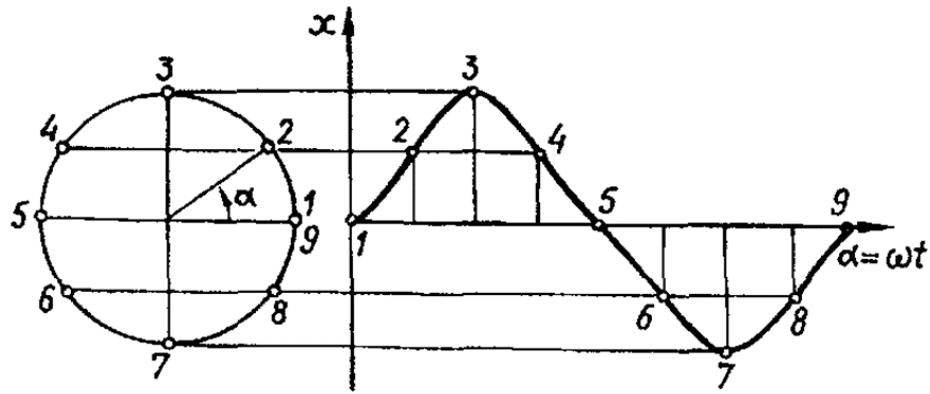


Рисунок 1.1 – Представлення гармонічного коливання

Зміна прискорення матеріальної точки у процесі гармонічних коливань свідчить про те, що на неї діє змінна сила. Другий закон Ньютона дає змогу в загальному вигляді написати рівняння зв'язку між силою і прискоренням матеріальної точки масою m в процесі гармонічних коливань:

$$F = ma = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (1.9)$$

або

$$F = -kx \quad (1.10)$$

де $k = m\omega^2$ - коефіцієнт пропорційності між силою і зміщенням точки. Звідси випливає, що на матеріальну точку діє сила, прямо пропорційна зміщенню і завжди спрямована до положення рівноваги. Частота і фаза коливань сили F збігаються з частотою і фазою прискорення.

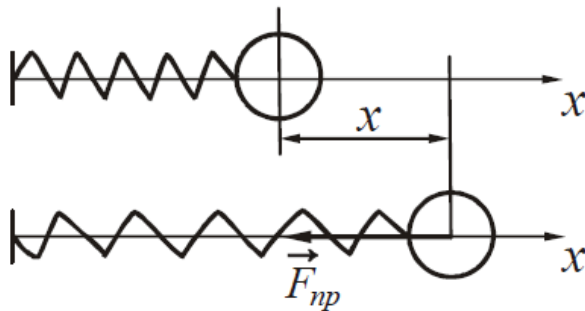
Коливання, які відбуваються в ізольованій системі, тобто під дією одних тільки внутрішніх сил, називають *вільними*. Якщо внутрішні сили консервативні, то механічна енергія коливальної системи залишається сталою (не витрачається на роботу проти сил опору). Такі вільні коливання називають *власними*. Власні коливання відбуваються нескінченно довго.

ТЕМА 2

Гармонічні осцилятори

Пружинний маятник

Пружинний маятник – це тіло масою m , яке прикріплене до пружини жорсткістю k (рис. 2.1). Змістимо тіло від положення рівноваги на відстань x , після чого відпустимо його. Сила пружності, що виникає, прагне повернути тіло до положення рівноваги. За законом Гука



$$F_{\text{пр}} = -kx \quad (2.1)$$

За другим законом Ньютона

$$F_{\text{пр}} = ma \quad (2.2)$$

де a – прискорення, що отримане тілом.

Рисунок 2.1 – Пружинний маятник

Оскільки

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

то

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (2.3)$$

Рівняння (4.3) приведемо до канонічного вигляду. Для цього розділимо обидві частини рівняння на масу m . Отримаємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.4)$$

Введемо позначення:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (2.5)$$

Тоді з урахування (2.5) рівняння (2.4) можна переписати у вигляді:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.6)$$

де ω_0 – це фізичний параметр, що характеризує коливальні властивості системи і який називають **власною частотою** коливань.

Таким чином, рух тіла під дією пружної сили $F = -kx$ описується диференціальним рівнянням гармонічних коливань.

Загальний розв’язок рівняння (2.6) має вигляд:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Період коливань пружинного маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.7)$$

У розглянутому прикладі сила за своєю природою пружна. Може трапитися, що сила іншого походження виявляє ту ж закономірність, тобто виявляється рівною $-kx$, де k – стала додатна величина. Сили такого вигляду, незалежно від їх природи, називаються **квазіпружними**.

Математичний маятник

Одним з найпростіших прикладів гармонічного коливання є коливальний рух математичного маятника. **Математичним маятником** називають матеріальну точку, підвішену на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 2.2).

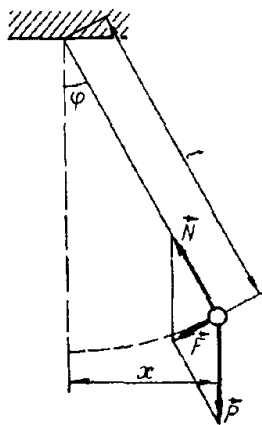


Рисунок 2.2 – Математичний маятник

До математичного маятника за своїми властивостями найбільше подібна

система, що складається з нерозтяжної легкої нитки, до одного з кінців якої підвішена металева кулька. Можна вважати, що центр маси такої системи збігається з центром мас кульки.

Коли система перебуває у спокої, то сила тяжіння врівноважується силою натягу нитки $\vec{N}$. Якщо кульку відхилити на деякий кут φ , то рівнодійна $\vec{F}$ сил натягу $\vec{N}$ і земного тяжіння $\vec{P}$ намагається повернути кульку в положення рівноваги. Ця сила

$$F = mg \sin \varphi \quad (2.8)$$

Оскільки залежність такої сили від кута φ нелінійна, то коливання маятника не будуть гармонічними. Для малих кутів φ можна записати, що $\sin \varphi = \frac{x}{l} \approx \varphi$, і вираз рівнодійної сили буде

$$F = \frac{mg}{l} x \quad (2.9)$$

де l - довжина маятника. При такій умові рівнодійна сила пропорційна куту φ , тому коливання маятника можна вважати гармонічними. Рівняння руху математичного маятника має такий вигляд:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{mg}{l} x, \quad (2.10)$$

Знак "мінус" вказує на те, що рівнодійна сила спрямована до положення рівноваги, а зміщення відраховується від положення рівноваги, тому знак прискорення протилежний знаку зміщення.

Проводячи аналогію між рівняннями (2.4) і (2.10), можна записати, що

$$k = \frac{mg}{l}.$$

Тоді з (2.7) маємо

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.11)$$

Звідси випливає, що період коливань математичного маятника не залежить

від амплітуди коливань (для малих значень кута відхилень φ) і маси маятника, а визначається його довжиною і прискоренням вільного падіння тіл у даному місці Землі.

Фізичний маятник

Фізичним маятником називають тверде тіло, здатне здійснювати коливання навколо нерухомої горизонтальної осі, яка не проходить через центр мас (рис. 2.3).

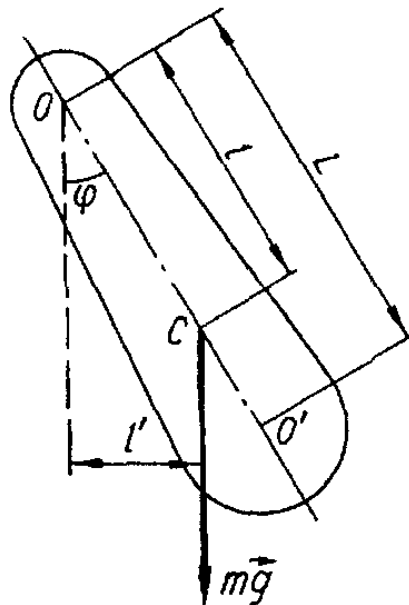


Рисунок 2.3 – Фізичний маятник

Зрозуміло, що у положенні рівноваги фізичного маятника його центр мас C знаходиться на вертикалі з точкою підвісу O , але нижче від неї. При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ , виникає обертальний момент M сили тяжіння, плече якої $l' = l \sin \varphi$. Він намагається повернути маятник у положення рівноваги. Якщо дією моментів сил тертя знехтувати, то з основного рівняння динаміки обертального руху дістанемо рівняння руху фізичного маятника:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi, \quad (2.12)$$

де I - момент інерції тіла відносно горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу O (у даному разі вісь перпендикулярна до площини рисунка); m — маса маятника; знак "мінус" вказує на те, що момент сили намагається повернути маятник до положення рівноваги, а кут відхилення φ від положення рівноваги відраховується у протилежному напрямі. Для малих кутів відхилення $\sin \varphi \approx \varphi$, і рівняння (2.12) набуває вигляду

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgl \varphi. \quad (2.13)$$

Перепишемо рівняння (2.13) у такій формі:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{I} \varphi = 0. \quad (2.14)$$

Підставивши у mgl/I одиниці m , g , l і I , дістанемо, що розмірність цього виразу дорівнює розмірності частоти у квадраті. Тому можна зробити таке позначення: $mgl/I = \omega_0^2$. Тоді рівняння (2.14) за виглядом збігається з рівнянням (2.10), а величина φ буде змінюватися гармонічно з періодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (2.15)$$

Порівнюючи формулу (2.15) з (2.11) доходимо висновку, що величина I/ml вимірюється в одиницях довжини, тобто

$$\frac{I}{ml} = L. \quad (2.16)$$

Величину L називають *зведеною довжиною* фізичного маятника. Очевидно математичний маятник матиме такий самий період коливань, як і фізичний маятник, за умови, що його довжина дорівнює зведеній довжині фізичного маятника. Неважко показати, що $L > l$.

Справді, за теоремою Гюйгенса — Штейнера момент інерції маятника відносно осі, що проходить через точку підвісу O , дорівнює

$$I = I_0 + ml^2,$$

де I_0 - момент інерції маятника відносно паралельної осі, що проходить через його центр мас. Тоді

$$L = \frac{I_0 + ml^2}{ml} = \frac{I_0}{ml} + l > l.$$

Точку O' , що міститься на лінії OC на відстані L від точки підвісу O , називають точкою коливань, або *центром коливань* фізичного маятника. Якщо в цій точці підвісити фізичний маятник, то його період коливань не зміниться.

Коливальний контур

Коливальний контур - це електричне коло, що містить котушку індуктивністю L і конденсатор ємністю C (рис. 2.4).

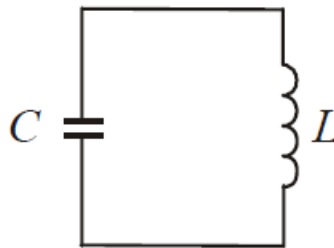


Рисунок 2.4 – Ідеальний коливальний контур

Коливання в контурі можна викликати, надавши обкладкам конденсатора деякий початковий заряд. Замкнемо ключ K в положення 1 (рис. 2.5). На обкладках виникнуть два різнойменні заряди $+q$ і $-q$. Між ними виникне електричне поле, енергія якого

$$W_{el} = \frac{q^2}{2C}. \quad (2.17)$$

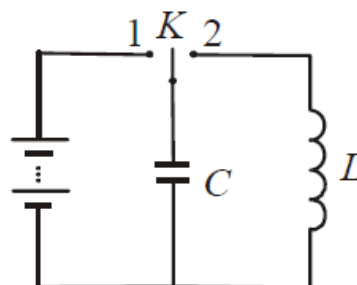


Рисунок 2.5 – Схема зарядження конденсатора

Якщо потім відключити джерело напруги і замкнути конденсатор на індуктивність (ключ K - в положенні 2), то конденсатор почне розряджатися і в контурі потече струм. У результаті цього енергія електричного поля зменшуватиметься, проте виникне магнітне поле з енергією

$$W_m = \frac{LI^2}{2}, \quad (2.18)$$

яка зростає. Активний опір $R = 0$, тому повна енергія не витрачається на нагрівання провідників і залишається величиною сталою

$$W_{el} + W_m = const$$

або

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const. \quad (2.19)$$

Продиференціюємо функцію (2.19) за часом, проведемо скорочення і, розділивши кожен член рівняння на L , отримаємо:

$$I \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} q \frac{dq}{dt} = 0. \quad (2.20)$$

Оскільки за визначенням $\frac{dq}{dt} = I$ то, відповідно,

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}. \quad (2.21)$$

На підставі цього можна записати:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (2.22)$$

Введемо позначення

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (2.23)$$

і приведемо рівняння (2.22) до вигляду.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.24)$$

Розв'язком цього рівняння є функція

$$q = q_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.25)$$

де $q_{\max}$ - максимальне (амплітудне) значення заряду.

Таким чином, заряд на обкладках конденсатора змінюється за гармонічним законом. Період коливань у коливальному контурі обчислюється за формулою, яка називається формулою Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \quad (2.26)$$

Напруга на конденсаторі відрізняється від заряду множником $1/C$ (нагадаємо, що за визначенням $C=q/U$):

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_{\max}}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.27)$$

де $U_{\max} = q_{\max}/C$ - амплітудне значення напруги.

Диференціюючи функцію (2.25) за часом, отримаємо вираз для величини струму:

$$I = -\omega_0 q_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.28)$$

де $I_{\max} = \omega_0 q_{\max}$ - амплітудне значення струму.

Таким чином, струм випереджає за фазою напругу на конденсаторі на $\pi/2$.

ТЕМА 3

Додавання коливань

Додавання коливань однакового напрямку. Биття

Можливі випадки, коли тіло бере участь одночасно у кількох коливальних рухах. Так, кулька, підвішена на пружині у каюті корабля, здійснюватиме коливання у вертикальному напрямі. Кільове хитання корабля також змушує тіло коливатися у вертикальному напрямі. Результуюче зміщення тіла, що бере участь у кількох коливальних рухах, становить геометричну суму незалежних зміщень, які тіло дістає у кожному коливальному русі зокрема. Знайдемо рівняння руху тіла, яке бере участь одночасно у двох однаково напрямлених коливальних рухах з однаковими частотами:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)\end{aligned}\tag{3.1}$$

Якщо тіло одночасно бере участь у двох коливальних рухах, що відбуваються вздовж однієї і тієї самої прямої, то його результуючий рух відбуватиметься також вздовж тієї самої прямої. При цьому будемо користуватися методом векторних діаграм (рис. 3.1).

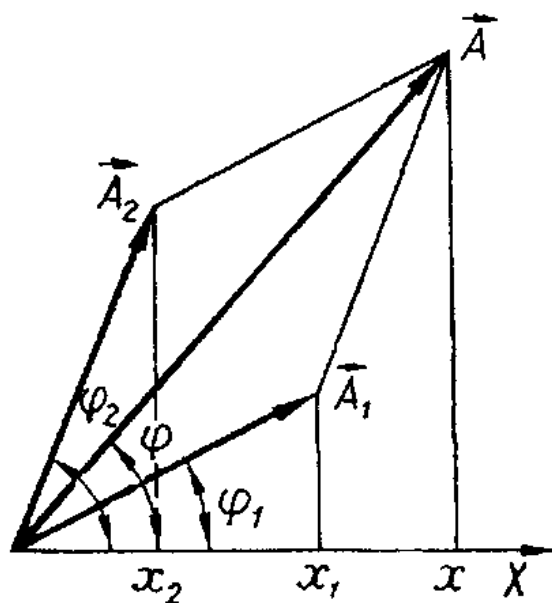


Рисунок 3.1 – Метод векторних діаграм

Результуюче зміщення тіла у будь-який момент часу дорівнює сумі незалежних зміщень, тобто $x = x_1 + x_2$. Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ здійснюють обертання з однаковими кутовими швидкостями ω , то зсув фаз між ними $\varphi_2 - \varphi_1$ з часом не змінюється, і вектор $\vec{A}$ також обертатиметься з кутовою швидкістю ω . Тоді результуюче коливання буде також гармонічним, і його рівняння матиме вигляд

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.2)$$

де A - амплітуда результуючого коливання; φ - початкова фаза. З рис. 3.1 маємо

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (3.4)$$

З (3.3) видно, що амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз складових коливань. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то $A = A_1 + A_2$. Коли $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n + 1)\pi$, тобто складові коливання відбуваються у протилежних фазах, то амплітуда результуючого коливання $A = |A_2 - A_1|$, бо за означенням амплітуда - величина додатна. Оскільки енергія коливального руху пропорційна квадрату амплітуди, то повна енергія результуючого коливання

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.5)$$

де E_1 і E_2 - енергії складових коливань. З (3.5) видно, що повна енергія результуючого коливання також залежить від різниці початкових фаз складових коливань.

Розглянемо випадок додавання коливань одного напрямку з різними частотами, рівняння яких

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Якщо вектори складових амплітуд $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертатимуться з різними кутовими швидкостями (рис. 3.1), то кут між ними змінюватиметься з часом і

результуюча амплітуда також змінюватиметься з часом, тобто коливання буде **негармонічним**. Результуюче зміщення $x = x_1 + x_2$. Для спрощення припустимо, що $A_1 = A_2 = A_0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$. Тоді

$$x = 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi_0 \right). \quad (3.7)$$

Вираз (3.7) описує періодичні коливання з середньою частотою $(\omega_1 + \omega_2)/2$ і модульованою амплітудою зміщення $2A_0$. (Модуляція — це зміна за заданим законом з часом параметрів, що характеризують будь-який стаціонарний процес. Прикладом може бути зміна за певним законом амплітуди, частоти або фази гармонічних коливань). Амплітуда змінюється від 0 до $2A_0$ за законом косинуса з набагато меншою частотою $(\omega_2 - \omega_1)/2$, яка дорівнює половині різниці частот складових коливань.

Звідси видно, що амплітуда результуючого коливання періодично змінюється за абсолютною величиною з часом, тобто

$$A = \left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \quad (3.8)$$

У зв'язку з тим, що період модуля косинуса дорівнює π , період зміни амплітуди

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (3.9)$$

У випадку, коли частоти коливань ω_1 і ω_2 близькі за величинами, виникає явище, яке називають **биттям**. У цьому разі $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$, і результуючий рух можна розглянути як періодичне коливання з пульсуючою амплітудою. Частота таких коливань дорівнює середньому арифметичному значенню частот складових коливань. На рис. 3.2, а показано залежність зміщення x з часом протягом періоду та зміни амплітуди результуючого коливання, що його дістали додаванням коливань однакового напрямку. Амплітуди складових коливань однакові, а їхні частоти ω_1 і ω_2 близькі за величиною (рис. 3.2, б).

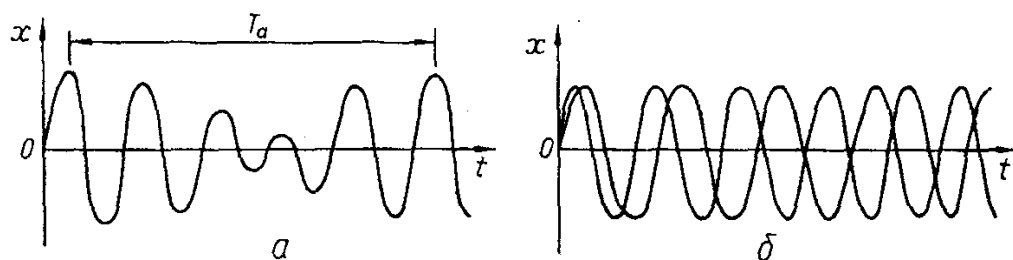


Рисунок 3.2 – Залежність зміщення результуючого коливання (а) і складових (б) від часу

Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Тіло може також брати участь у коливальних рухах, напрями коливань яких не збігаються. Треба встановити характер траєкторії результуючого руху тіла.

Розглянемо випадок, коли тіло одночасно бере участь у двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливальних рухах, частоти яких однакові. Відносно координатних осей OX і OY , які розміщені у напрямках коливальних рухів, рівняння коливань матимуть вигляд

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (3.10)$$

Знайдемо рівняння траєкторії результуючого руху. Для цього рівняння (3.10) перепишемо так:

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t \cdot \cos \varphi_1 - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_1,$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos \omega t \cdot \cos \varphi_2 - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_2.$$

Помножимо перше рівняння на $\cos \varphi_2$, а друге - на $\cos \varphi_1$ і знайдемо їхню різницю; потім помножимо перше рівняння на $\sin \varphi_2$, а друге на $\sin \varphi_1$ і також знайдемо різницю. Отримаємо

$$\frac{x}{A_1} \cos \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \cos \varphi_1 = \sin \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.11)$$

$$\frac{x}{A_1} \sin \varphi_2 - \frac{y}{A_2} \sin \varphi_1 = \cos \omega t \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3.12)$$

Рівняння (3.11) і (3.12) піднесемо до квадрата і складемо їх. У результаті матимемо

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3.13)$$

Співвідношення (3.13) є рівнянням траєкторії результуючого руху тіла, що одночасно бере участь у двох коливаннях, напрями яких взаємно перпендикулярні.

У загальному випадку рівняння (3.13) є рівнянням еліпса. Орієнтація еліпса відносно осей координат і його форма визначаються амплітудами A_1 і A_2 та різницею фаз $\varphi_2 - \varphi_1$, складових коливань.

Розглянемо такі окремі випадки.

1. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). У цьому разі рівняння (3.13) набуває такого вигляду:

$$\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0.$$

Звідси маємо

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (3.14)$$

Отже, якщо фази складових коливань однакові, то траєкторією результуючого руху є пряма лінія, що проходить через початок координат і нахилена до осі OX під кутом $\arctg(A_2/A_1)$ (рис. 3.3, а). Зміщення точки у будь-який момент часу від положення рівноваги знаходимо за співвідношенням

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.15)$$

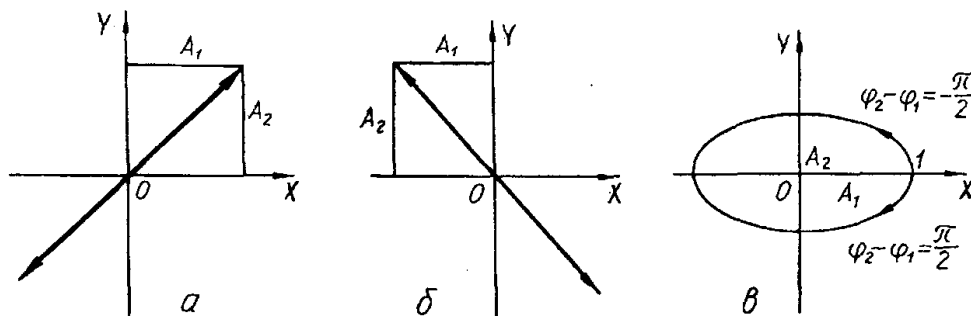


Рисунок 3.3 – Траєкторії руху тіла в залежності від $\varphi_2 - \varphi_1$

Підставивши у (3.15) вирази (3.10) і врахувавши, що $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, знайдемо

$$s = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.16)$$

Звідси видно, що рух тіла - це гармонічне коливання з частотою ω у напрямі прямої (3.14).

2. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n + 1)\pi$. Тоді з рівняння (3.13) дістаємо, що траєкторією руху тіла також буде пряма лінія, рівняння якої

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (3.17)$$

Вона утворює з віссю OX кут $\arctg(-A_2/A_1)$. Результируючий рух у цьому разі також буде гармонічним коливальним рухом (рис. 3.3, б).

3. Різниця фаз $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2n + 1)\frac{\pi}{2}$. Тоді рівняння (3.13) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (3.18)$$

Отже, траєкторія результируючого руху має вигляд еліпса, напівосі якого A_1 і A_2 орієнтовані вздовж координатних осей OX і OY (рис. 3.3, в).

У зв'язку з тим що координати x і y тіла змінюються з періодом $T = 2\pi/\omega$, то воно здійснюватиме рух по еліптичній траєкторії також з періодом T або циклічною частотою ω . Покажемо, що коли $\varphi_2 - \varphi_1 = +\pi/2$, то рух тіла відбувається по еліпсу в напрямі руху стрілки годинника.

Справді, якщо $\varphi_1 = 0$, то рівняння (3.10) матимуть вигляд

$$x = A_1 \cos \omega t; \quad y = A_2 \cos(\omega t + \pi/2).$$

У момент часу $t = 0$ координати точки будуть $x = A_1$, $y = 0$ (точка 1 на рис. 3.3, в). У наступні моменти часу координата x зменшується, а координата y набуває від'ємного значення, тобто рухома точка переміщається від положення 1 вниз у напрямі руху стрілки годинника. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = -\pi/2$, то тіло рухатиметься також по еліптичній траєкторії, але у протилежному напрямі, тобто проти руху стрілки годинника. Якщо амплітуди складових коливань однакові: $A_1 = A_2$, то

еліпс перетворюється в коло.

При додаванні двох взаємно перпендикулярних коливань, частоти яких різні, результуючі рухи відбуватимуться по траєкторіях складних форм, які називають *фігурами Ліссажу*. На рис. 3.4 зображено фігури для випадку, коли частоти складових коливань відносяться як 1:2, 1:3, 2:3 відповідно для різниці фаз коливань: $\varphi_2 - \varphi_1 = 0; \pi/4; \pi/2; 3\pi/4; \pi$. Фігури Ліссажу - це криві лінії, вписані у прямокутник із сторонами, що дорівнюють подвійним значенням амплітуд складових коливань.

Зауважимо, що відношення числа точок дотикання фігур Ліссажу до відповідних сторін прямокутника збігається з відношенням частот складових коливань. Спостереження фігур Ліссажу лежить в основі досить зручного методу дослідження співвідношень між періодами і фазами коливань, а також форми коливань.

Знайдемо енергію результуючого руху тіла при додаванні взаємно перпендикулярних коливань однакових частот.

З формули (3.15) маємо, що квадрат результуючого зміщення матеріальної точки і квадрат її швидкості у будь-який момент часу відповідно дорівнюють:

$$s^2 = x^2 + y^2, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2. \quad (3.19)$$

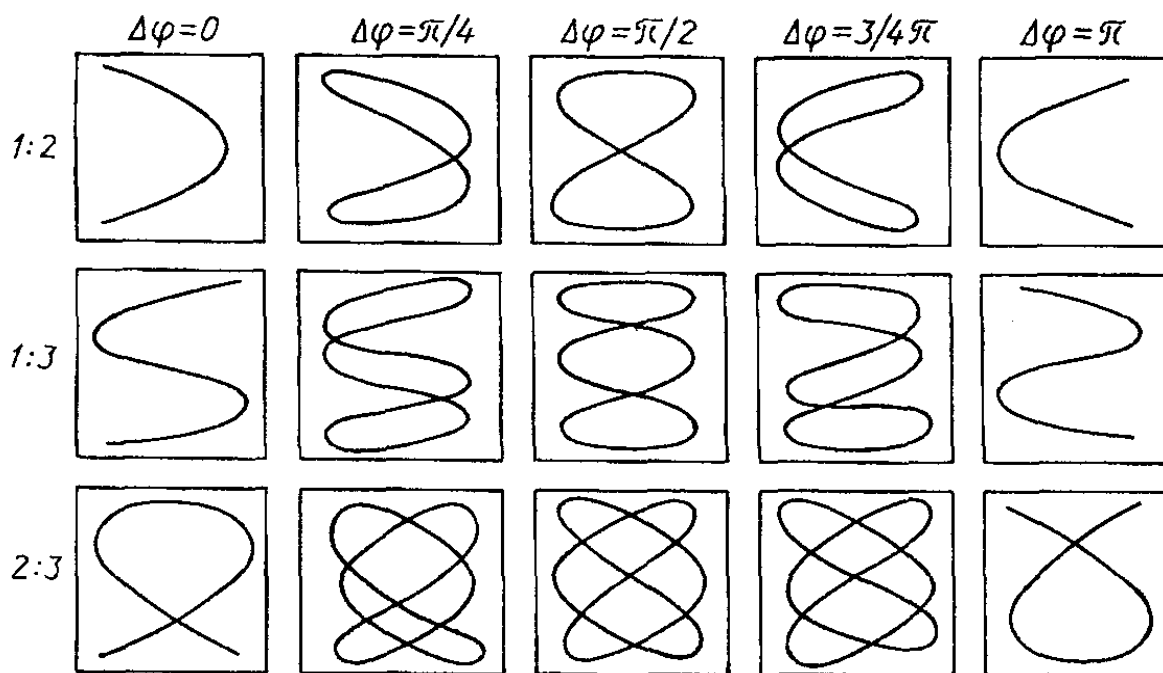


Рисунок 3.4 – Фігури Ліссажу

Оскільки складові коливання мають однакові частоти, то коефіцієнт рівнодіючої сили на основі (1.14) $k = k_x = k_y$. Повна енергія результуючого руху тіла складається з кінетичної і потенціальної енергій:

$$E = W + U. \quad (3.20)$$

На основі рівнянь (1.16), (1.17) з урахуванням виразів (3.19) вираз (3.20) перепишемо так:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{ks^2}{2} = \left(\frac{mv_x^2}{2} + \frac{k_x x^2}{2} \right) + \left(\frac{mv_y^2}{2} + \frac{k_y y^2}{2} \right) = E_x + E_y, \quad (3.21)$$

де E_x і E_y - енергії складових коливань.

З (3.21) видно, що енергія результуючого коливання при додаванні взаємно перпендикулярних коливань, на відміну від енергії результуючого коливання при додаванні коливань однакового напрямку (3.5), не залежить від різниці фаз між ними і дорівнює сумі енергій складових коливань.

Зауважимо, що оскільки обертальний рух рівнозначний результату додавання двох взаємно перпендикулярних коливань, то цим користуються, наприклад, у спрощеній моделі атома, в якій коловий рух електрона навколо ядра трактується як коливання електрона.

В інших випадках гармонічне коливання $x = 2A \cos \omega t$ можна розглядати як результат двох обертань по колу, що описуються рівняннями

$$x = A \cos \omega t; \quad y = A \sin \omega t$$

та

$$x = A \cos \omega t; \quad y = A \sin(\omega t + \pi)$$

і відбуваються у взаємно протилежних напрямках. Таке уявлення виявляється плідним, зокрема, у кристалооптиці.

ТЕМА 4

Згасаючі коливання

Диференціальне рівняння згасаючих коливань

У реальних фізичних системах, які здійснюють коливальний рух, завжди діють сили внутрішнього і зовнішнього тертя та опору середовища. Тому реальні коливальні рухи відбуваються з поступовими втратами енергії коливань на роботу проти сил опору і створення коливань у навколишньому середовищі. Зменшення механічної енергії проявляється в тому, що з часом зменшується амплітуда коливань, оскільки $E \sim A^2$. Через деякий час початковий запас енергії повністю вичерпується і амплітуда коливань зменшується до нуля, тобто коливання системи припиняються. Коливання, які відбуваються з поступовою втратою початкової енергії коливальної системи, називаються **згасаючими**.

Більшість механічних коливань відбуваються при невеликій швидкості коливального руху. В цьому разі сила опору F_{on} пропорційна швидкості:

$$F_{on} = -rv = -r \frac{dx}{dt}, \quad (4.1)$$

де r - коефіцієнт опору; знак "мінус" вказує на те, що вектори $\vec{F}_{on}$ і $\vec{v}$ мають протилежні напрями.

Якщо на коливальну систему діють пружна (або квазіпружна) сила, пропорційна зміщенню, і сила опору (4.1), то за другим законом Ньютона

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -r \frac{dx}{dt} - kx.$$

Поділивши це рівняння на масу m системи, отримаємо диференціальне рівняння згасаючих коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.2)$$

де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ - власна частота вільних коливань системи;

$\beta = r/2m$ - коефіцієнт згасання коливань.

Розв'язок однорідного диференціального рівняння (4.2) при $\beta < \omega_0$ можна записати у вигляді

$$x = A(t) \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.3)$$

де $A(t)$ - амплітуда згасаючих коливань як функція часу; ω - циклічна частота коливань.

Встановимо закономірність зменшення амплітуди $A(t)$ згасаючих коливань і визначимо частоту коливань ω .

Вважатимемо, що втрати енергії системи у процесі коливань в основному зумовлені роботою проти сил опору. За час dt система зміщується на dx і втрачає енергію

$$dE = F_{on} dx = -rv \cdot v dt = -rv^2 dt. \quad (4.4)$$

Звідси випливає, що швидкість зменшення енергії пропорційна кінетичній енергії системи:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2r}{m} \cdot \frac{mv^2}{2}. \quad (4.5)$$

Припустимо, що при невеликому згасанні коливань ($\beta < \omega_0$) кінетична енергія дорівнює половині всієї механічної енергії E . Тоді (4.5) набуває вигляду

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E. \quad (4.6)$$

Це припущення, як видно із (4.6), означає, що енергія згасаючих коливань зменшується тим повільніше, чим меншою стає сама енергія. Розділивши змінні:

$$\frac{dE}{E} = -2\beta dt,$$

проінтегруємо це рівняння і дістанемо

$$\ln E = -2\beta t + C. \quad (4.7)$$

Сталу інтегрування C визначимо із початкових умов. Якщо в початковий момент часу ($t = 0$) механічна енергія системи дорівнювала E_0 , то з (4.7) випливає $C = \ln E_0$. Перейшовши в рівнянні (4.7) від логарифмів до показникової функції, знаходимо

$$E = E_0 e^{-\beta t}. \quad (4.8)$$

Оскільки механічна енергія коливального руху пропорційна квадрату амплітуди, то з (4.8) випливає залежність амплітуди згасаючих коливань від часу:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (4.9)$$

де A_0 - амплітуда коливань у початковий момент часу ($t = 0$). Отже, амплітуда згасаючих коливань зменшується з часом за експоненціальним законом. У загальному випадку закон зменшення амплітуди коливань залежить від характеру сил опору, які діють у системі.

Враховуючи у виразі (4.3) залежність $A(t)$, отримаємо рівняння згасаючих коливань

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (4.10)$$

де частота коливань ω ще підлягає визначенню, а початкові значення амплітуди A_0 і фази φ_0 визначаються для конкретного коливання із початкових умов, як і в разі вільних коливань при відсутності сили опору.

Частоту ω визначимо з умови, що вираз (4.10) є розв'язком диференціального рівняння (4.2). Тобто підстановка у диференціальне рівняння виразів для x , $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{d^2x}{dt^2}$ перетворює ліву частину рівняння в тотожно рівну нулю. Із утвореної таким чином тотожності випливає формула частоти згасаючих коливань

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4.11)$$

Період згасаючих коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (4.12)$$

Отже, частота згасаючих коливань (4.11) завжди менша від частоти ω_0 власних коливань системи, тобто наявність сил опору в системі ($\beta > 0$) зменшує частоту (збільшує період) коливань. При великому згасанні ($\beta = \omega_0$), система,

виведена зі стану рівноваги, не здійснює коливань ($\omega_0 = 0$), а поступово наближається до положення рівноваги. Такий рух називається *aperiodичним* ($T \rightarrow \infty$).

На рис. 4.1 зображено графік згасаючих коливань. Штрихові лінії зображають закон зменшення амплітуди з часом. Згасаючі коливання не є гармонічними, оскільки амплітуда коливань змінюється. У цьому разі під амплітудою розуміють найбільше значення, якого досягає відповідна величина (зміщення, швидкість, прискорення) протягом одного періоду коливань. У строгому розумінні згасаючі коливання не можна також вважати періодичними. За означенням періодичним є такий процес, при якому за кожен період повторюється будь-який стан коливальної системи. Проте в процесі згасаючих коливань стан коливальної системи взагалі точно не повторюється.

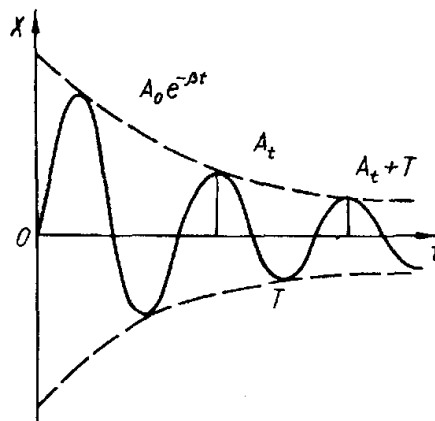


Рисунок 4.1 – Графік згасаючих коливань

Наприклад, якщо у два послідовних моменти часу t_1 і t_2 зміщення системи однакові і дорівнюють нулю, то швидкості в ці моменти неоднакові ($v_2 < v_1$), оскільки амплітуда швидкості зменшується з часом. При малих силах опору, згасаючі коливання являють собою процес приблизно періодичний.

Параметри згасаючих коливань

Відношення амплітуд коливань на початку і в кінці періоду

$$\frac{A_t}{A_{t+T}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T} \quad (4.13)$$

є величина стала для всього процесу коливань і називається **декрементом згасання коливань**. Натуральний логарифм цього відношення називають **логарифмічним декрементом згасання**:

$$\lambda = \beta T \quad (4.14)$$

Згасаючі коливання часто характеризують часом релаксації τ . Це проміжок часу, протягом якого амплітуда коливань зменшується в e разів:

$$\frac{A_t}{A_{t+\tau}} = e^{\beta\tau} = e.$$

Звідси маємо

$$\beta\tau = 1 \quad \text{і} \quad \tau = \frac{T}{\lambda}.$$

Важливою характеристикою реальних коливальних систем є добротність. **Добротністю Q** коливальної системи називається відношення енергії коливань системи в даний момент часу до втрат енергії за один період, помножене на 2π :

$$Q = 2\pi \frac{E_t}{E_{t+T}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}. \quad (4.15)$$

Розклавши функцію $e^{-2\beta T}$ у ряд Тейлора, при $\beta T \ll 1$, отримаємо

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}{2\beta}. \quad (4.16)$$

Великим значенням Q відповідає слабке згасання коливань.

Вважають, що коливання практично припинились, якщо їхня амплітуда зменшилась у 10 разів. Виходячи з цього число n помітних коливань можна пов'язати з добротністю системи:

$$\frac{A_t}{A_{t+nT}} = e^{n\beta T} = e^{\frac{\pi n}{Q}} = 10,$$

звідки

$$n = \frac{Q}{\pi \lg e} = 0,74 \cdot Q.$$

Наприклад, визначимо час t звучання камертона, добротність якого $Q = 3000$, власна частота $\nu_0 = 640$ Гц: $t = n/\nu_0 = 0,74Q/\nu_0 \approx 3,4$ с.

Насправді камертон звучатиме значно триваліший час, оскільки вухо здатне сприймати коливання, які відрізняються за амплітудою не в десятки, а в тисячі разів.

ТЕМА 5

Вимушені коливання

Диференціальне рівняння вимушених коливань

Коливальна система, виведена з положення рівноваги і залишена сама на себе, здійснюватиме вільні згасаючі коливання, поступово втрачаючи початковий запас механічної енергії на роботу проти сил опору середовища. Швидкість згасання вільних коливань реальних систем залежить від параметрів системи та величини сил опору. Для підтримання незгасаючих коливань реальної системи необхідно періодично поповнювати втрати механічної енергії системи на роботу проти сил опору. Таке поповнення енергії можна здійснювати за рахунок роботи зовнішньої сили, що періодично діє на коливальну систему, яка змінюється з часом за гармонічним законом:

$$F = F_0 \cos \Omega t \quad (5.1)$$

де F_0 - амплітуда зовнішньої сили; Ω - її циклічна частота.

Незгасаючі коливання системи, які відбуваються внаслідок дії зовнішньої сили, що змінюється за законом (5.1), називають **вимушеними коливаннями**, а силу F - *змушуючою силою*. Вимушені коливання здійснюють висотні будинки, телевізійні вежі, довгі мости під дією змінних аеродинамічних та інших сил, корпуси і фундаменти машин при обертанні незрівноважених роторів, двигуни автомобілів внаслідок зворотно-поступального руху поршнів, мембрани гучно-мовців під дією змінних електромагнітних полів та ін.

Під дією змушуючої сили виконується робота. Якщо напрям руху коливальної системи збігається з напрямом дії змушуючої сили, то виконуватиметься додатна робота. І навпаки, робота буде від'ємною, якщо напрями дії сили і руху системи протилежні. У першому випадку амплітуда коливань збільшуватиметься, у другому - зменшуватиметься, тобто коливання гальмуватимуться. Якщо змушуюча сила діє протягом тривалого часу, то встановлюються коливання з сталою амплітудою і частотою змушуючої сили, тобто система здійснює гармонічні коливання.

Якщо в коливальній системі діє пружна або квазіпружна сила, а сила опору пропорційна швидкості коливального руху, то основне рівняння динаміки вимушених коливань має вигляд диференціального рівняння:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \Omega t. \quad (5.2)$$

Поділимо це рівняння на масу m коливальної системи і введемо такі позначення:

$$k/m = \omega_0^2, \quad r/m = 2\beta, \quad F_0/m = f_0.$$

Тоді рівняння (5.2) набуває вигляду

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t, \quad (5.3)$$

де ω_0 - циклічна частота власних коливань системи; (β - коефіцієнт згасання коливань; f_0 - амплітуда змушуючої сили, віднесена до одиниці маси.

Рівняння (5.3) є неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку. У теорії диференціальних рівнянь доведено, що загальний розв'язок такого рівняння складається із суми розв'язку відповідного однорідного рівняння (4.2) і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (5.3).

Розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння маємо у попередній лекції. Він характеризує згасаючі коливання, які через деякий проміжок часу практично зникають. Тому знайдемо частинний розв'язок рівняння (5.3). При цьому вважатимемо, що під дією сили (5.1) коливання встановилися, і система здійснює гармонічні вимушені коливання з частотою, яка дорівнює частоті змушуючої сили. Тоді розв'язок шукатимемо у вигляді

$$x = A \cos(\Omega t + \varphi), \quad (5.4)$$

де A - амплітуда усталених коливань; φ - зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою. Величини A і φ необхідно визначити. Для цього знайдемо з (5.4)

$$\frac{dx}{dt} = -A \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t + \varphi), \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -A \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t + \varphi).$$

Підставимо x , $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{d^2 x}{dt^2}$ у рівняння (5.3):

$$\begin{aligned}
& -A \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega t + \varphi) - 2\beta A \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t + \varphi) + \\
& + A\omega_0^2 \cos(\Omega t + \varphi) = f_0 \cos(\Omega t + \varphi).
\end{aligned}
\tag{5.5}$$

Розкладемо синус і косинус суми за відомими тригонометричними формулами і запишемо рівняння (5.5) так:

$$\begin{aligned}
& A((\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\beta \cdot \Omega \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \Omega t - \\
& - A((\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\beta \cdot \Omega \cdot \cos \varphi) \cdot \sin \Omega t = f_0 \cos \Omega t.
\end{aligned}
\tag{5.6}$$

Рівняння (5.6) задовольнятиме усі значення t при умові, що коефіцієнти біля виразів $\sin \Omega t$ і $\cos \Omega t$ у лівій і правій частинах рівняння однакові. Звідси дістаємо

$$\begin{aligned}
& A \cdot (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\beta A \cdot \Omega \cdot \sin \varphi = f_0, \\
& A(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\beta A \cdot \Omega \cdot \cos \varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

Щоб визначити A , піднесемо до квадрата рівняння (5.7) і складемо їх. Тоді матимемо

$$A^2 \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \Omega^2 \right) = f_0^2,$$

звідки знаходимо амплітуду вимушених коливань

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \Omega^2}}, \tag{5.8}$$

а з другого рівняння системи (5.7) - вираз для визначення зсуву фаз φ між коливаннями зміщення системи від положення рівноваги і змушуючою силою:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \tag{5.9}$$

Отже, рівняння усталених вимушених коливань зміщення має вигляд

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \cdot \Omega^2}} \cos(\Omega t + \varphi), \tag{5.10}$$

де зсув фаз φ дається виразом (5.9). Із рівності (4.10) випливає, що вимушені коливання є гармонічними коливаннями з частотою Ω змушуючої сили. Амплітуда коливань даної системи ($\omega_0 = \text{const}$) при незмінних силах тертя і опору середовища ($\beta = \text{const}$) пропорційна амплітуді F_0 змушуючої сили і залежить від

її частоти Ω . Вимушені коливання відстають за фазою від змущуючої сили на величину φ , яка також є функцією Ω (рівність (5.9)).

Явище резонансу

При заданих значеннях амплітуди змущуючої сили f_0 , яка припадає на одиницю маси коливальної системи, і коефіцієнта згасання β амплітуда (5.8) вимушених коливань є функцією тільки частоти Ω змущуючої сили. Функція $A(\Omega)$ проходить через максимум при деякій характерній для даної системи частоті $\Omega = \Omega_{рез}$. Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при частотах Ω змущуючої сили, близьких до $\Omega_{рез}$, називається **резонансом**. Частота змущуючої сили $\Omega_{рез}$, при якій амплітуда коливань досягає найбільшого значення $A_{рез}$, називається *резонансною частотою*.

Очевидно, що максимальне значення амплітуди досягається при мінімальному значенні підкореневого виразу у формулі (5.8). Умовою мінімуму є рівність нулю похідної від підкореневого виразу за частотою, тобто

$$-4(\omega_0^2 - \Omega_{рез}^2) \cdot \Omega_{рез} + 8\beta^2 \cdot \Omega_{рез} = 0.$$

Звідси знаходимо резонансну частоту

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (5.11)$$

Підставивши значення $\Omega_{рез}$ у формулу (5.8), отримаємо резонансне значення амплітуди

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (5.12)$$

Резонансна частота (5.11) при згасанні коливань ($\beta > 0$) завжди менша від власної частоти ω_0 системи. При незначному згасанні ($\beta \approx 0$) $\Omega_{рез} \approx \omega_0$, і резонансна амплітуда (5.12) перетворюється на нескінченність, що означає практично руйнування коливальної системи. На рис. 5.1 показано залежність

амплітуди вимушених коливань від частоти змушуючої сили для різних значень коефіцієнта згасання β . Криві залежності $A(\Omega)$ називають *амплітудними резонансними кривими*. Зі збільшенням β максимуми резонансних кривих знижуються і зміщуються у бік менших частот. При $\beta \geq \omega_0/\sqrt{2}$ явище резонансу зникає, тобто $\Omega_{рез} = 0$, і система отримує статичне зміщення від положення рівноваги $A_0 = f_0/\omega_0^2$ під дією сталої сили F_0 , що дорівнює амплітуді змушуючої сили.

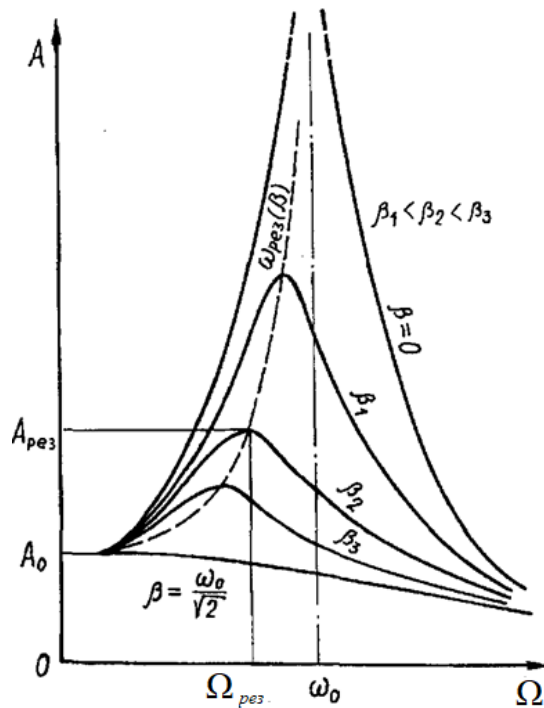


Рисунок 5.1 – Резонансні криві

Вираз для статичного зміщення A_0 разом з формулою (5.12) дає можливість виявити фізичний зміст добротності коливальної системи. При малому згасанні $\beta \ll \omega_0$, згідно з формулою (5.12) $A_{рез} = f_0/(2\beta\omega_0)$, і, як випливає з рівності (4.16), добротність системи

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\beta} \approx \frac{A_{рез}}{A_0}.$$

Добротність при $\beta \ll \omega_0$ показує, у скільки разів амплітуда вимушених коливань у момент резонансу перевищує статичне зміщення A_0 системи під дією сталої сили, що дорівнює амплітуді змушуючої сили. Чим вища добротність

системи, тим вищий та гостріший максимум амплітудної резонансної кривої і тим повільніше згасають її вільні коливання.

Проаналізуємо залежність зсуву фаз від частоти Ω . Якщо $\Omega \ll \omega_0$, то з формули (5.9) випливає, що $\operatorname{tg} \varphi = 0$, тобто фаза вимушених коливань збігається з фазою змушуючої сили. Зі збільшенням частоти Ω , коли вона набуває значень, близьких до ω_0 , $\varphi = -\pi/2$, тобто зміщення коливальної системи відстає від змушуючої сили за фазою на $\pi/2$. При подальшому збільшенні частоти ($\Omega \gg \omega_0$) зсув фаз досягає майже $-\pi$, тобто зміна зміщень і змушуючої сили з часом відбувається майже у протилежних фазах.

Зсув фаз на $\pi/2$ при резонансі має істотне значення для вимушених коливань. Оскільки змушуюча сила випереджає зміщення на $\pi/2$, то вона діє у тому самому напрямі, що й вертальна сила, тобто в напрямі руху. При цьому робота змушуючої сили завжди додатна. Внаслідок цього енергія системи збільшується. Графічну залежність зсуву фаз φ від частоти Ω змушуючої сили показано на рис. 5.2. Криві, що виражають зміну фаз φ при зміні частоти Ω змушуючої сили, називають *фазовими кривими резонансу*.

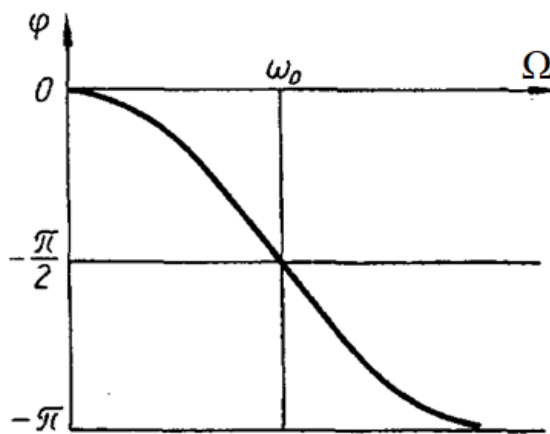


Рисунок 5.2 – Фазова крива резонансу

Вимушені коливання виникають також при періодичній короткочасній дії зовнішніх сил на коливальну систему. Така дія може мати характер удару, поштовхів. У цих випадках також може спостерігатися явище резонансу. Характерним є те, що резонанс відбуватиметься не тільки тоді, коли частота силової дії близька до частоти вільних коливань систем, а й тоді, коли дія

зовнішніх сил повторюється з частотою, кратною частоті власних коливань системи.

Виявляється, що можливі коливання систем під дією сталої сили. Так, при великій швидкості польоту літака його крила можуть раптово набути коливального руху. Коливання із зростаючою амплітудою, що виникають у потоці повітря під дією аеродинамічних сил, називають коливаннями типу *флатер*. При таких коливаннях амплітуда зростає досить швидко і конструкція може зруйнуватися. Ці коливання настають при так званій критичній швидкості польоту. Тому при проектуванні літака необхідно забезпечити конструкції критичну швидкість значно більшу, ніж швидкість самого літака. Поряд з флатером крил літака можуть виникнути подібні коливання будь-якої несучої поверхні.

Небажані коливання можуть виникати під дією повітряних потоків і вихорів у висотних будовах, маяках, телевізійних баштах, лініях електропередач, заводських димарях, вантових мостах тощо. Їхні коливання залишаються незначними, поки вітер не досягне критичної швидкості, при якій частота коливань від дії вихорів дорівнюватиме частоті власних коливань конструкції. При критичному значенні швидкості вітру споруди можуть зруйнуватися. Так сталася катастрофа вантового моста через протоку Такома у США в 1940 р. Міст з трьох прольотів мав довжину 1662 м, один з прольотів - 854 м. У день катастрофи швидкість вітру становила 18 м/с. Частота коливань моста досягла 36 Гц, потім раптово зменшилася до 14 Гц, вертикальні коливання обох підвісних систем відбувалися в протилежних фазах. Це призвело до закручування проїзної частини моста навколо осі, яка проходить вздовж моста, що й зумовило його руйнування. Незгасаючі коливання можуть збуджуватися не тільки внаслідок дії зовнішньої періодичної сил, але й при періодичній зміні параметрів коливальної системи. Такі коливання називають *параметричними*. При певній частоті зміни параметра амплітуда коливань зростає подібно до явищ резонансу. Тому параметричне збудження коливань часто називають *параметричним резонансом*. Прикладом збудження таких коливань може бути добре відомий усім спосіб розкачування гойдалки людиною при присіданні, коли гойдалка перебуває в крайніх

положеннях, і випрямленні, коли гойдалка проходить через положення рівноваги.

Явище резонансу слід враховувати під час конструювання різних машин та споруд. Їхня власна частота повинна значно відрізнятися від частоти змушуючих сил.

Явище резонансу в деяких випадках відіграє і позитивну роль, особливо в акустиці, радіотехніці. Його також використовують у приладах для вимірювання частоти.

ТЕМА 6

Хвилі

Загальні відомості про хвилі

Хвилі – це процес розповсюдження збурень у просторі який супроводжується перенесенням енергії.

Збурення (ξ) - це відхилення будь-якої фізичної величини, що характеризує стан системи, від значення її в стані рівноваги.

Далі розглядатимемо збурення, які носять коливальний характер, тому можна дати більш вузьке визначення хвилі.

Хвиля - це процес розповсюдження коливань у просторі.

Класифікація хвиль.

Залежно від фізичної природи джерела коливань хвилі поділяють на:

- механічні (звукові, ударні, сейсмічні і так далі);
- хвилі на поверхні рідини;
- електромагнітні (шкала електромагнітних хвиль в інтервалі від радіохвиль до гамма-випромінювання).

Механічними хвилями називаються механічні збурення, що виникають у пружному середовищі, тому механічні хвилі мають другу назву - *пружні* хвилі.

Поверхневі хвилі розповсюджуються уздовж вільної поверхні рідини або уздовж поверхні двох рідин, що не змочуються. В утворенні цих хвиль визначальну роль грають сили поверхневого натягу і сили тяжіння. У поверхневих хвилях частинки рідини одночасно здійснюють поперечні і поздовжні коливання, описуючи еліптичні або складніші траєкторії.

Залежно від взаємної орієнтації напрямку коливань і напрямку розповсюдження хвиль розрізняють:

- поперечні хвилі;
- поздовжні хвилі.

Хвиля називається *поперечною*, якщо напрям коливань частинок середовища перпендикулярний напрямку розповсюдження хвилі (рис. 6.1 а).

Хвиля називається *поздовжньою*, якщо напрям коливань частинок середовища співпадає з напрямом розповсюдження хвилі (рис. 6.1 б).

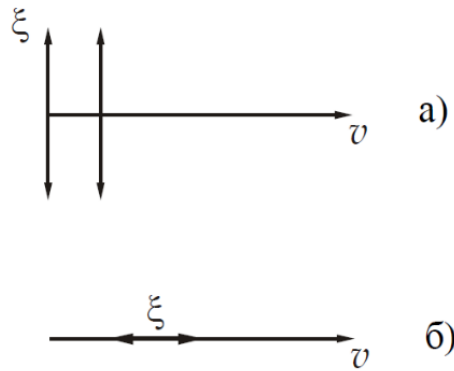


Рисунок 6.1 – Поперечна (а) і поздовжня (б) хвилі

Пружні поперечні хвилі можуть виникнути лише в середовищі, що має опір зсуву, тому у рідкому і газоподібному середовищах можливе виникнення лише поздовжніх хвиль. У твердому середовищі можливе виникнення як поздовжніх, так і поперечних хвиль.

При розповсюдженні від джерела коливань хвильовий процес охоплює все нові області простору.

Область простору, в якій існує хвильовий процес (збурення), називається *хвильовим полем*. Геометричне місце точок, до яких доходять коливання у момент часу t , називається *фронтом хвилі*. Фронт хвилі є тією поверхнею, що відокремлює частину простору, яка вже охоплена хвильовим процесом, від області, в якій коливання ще не виникли. Залежно від геометрії фронту, хвилі поділяють на:

- плоскі (рис. 6.2 а);
- сферичні (рис. 6.2 б).

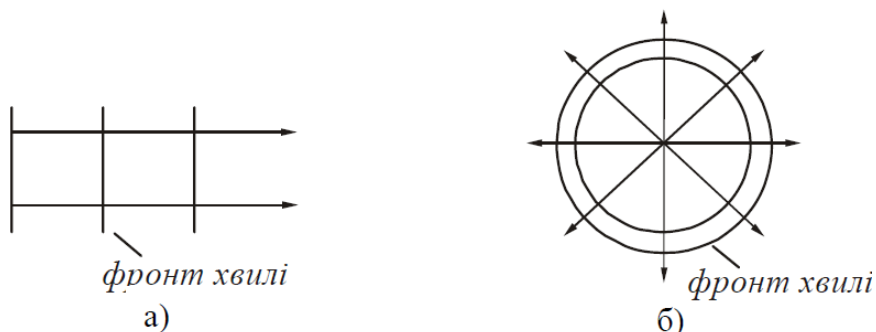


Рисунок 6.2 – Плоска (а) і сферична (б) хвилі

Стрілки на рисунку вказують напрям розповсюдження хвилі. Плоскі хвилі виникають від плоского або видаленого джерела. Їх хвильовими фронтами є площини. Сферичні хвилі виникають від точкового джерела і в просторі їх хвильовими фронтами є сфери.

Характеристики хвиль

Особливе значення в теорії хвиль має уявлення про **гармонічну хвилю**, тобто нескінченну синусоїдальну хвилю, в якій всі зміни стану відбуваються за законом синуса або косинуса (рис. 6.3). Такі хвилі могли б розповсюджуватися в однорідному середовищі без спотворення форми. Далі наведені основні характеристики хвилі.

Довжина хвилі (λ) - відстань між найближчими точками, що коливаються в однаковій фазі (рис 6.3).

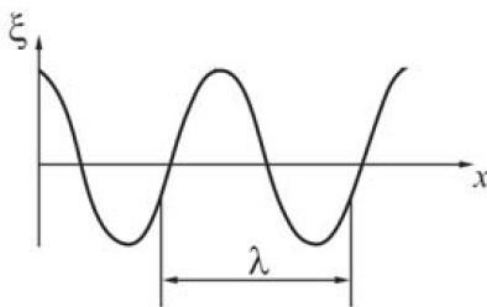


Рисунок 6.3 – Визначення довжини хвилі

Період коливань (T) – час, протягом якого здійснюється один повний цикл коливань.

Амплітуда (A) - максимальне відхилення фізичної величини від положення рівноваги. Довжина хвилі і період зв'язані співвідношенням.

$$\lambda = v \cdot T, \quad (6.1)$$

де v - швидкість розповсюдження хвилі.

Ця формула правильна для хвиль будь-якої природи. З використанням співвідношення (6.1) можна дати інше визначення довжини хвилі.

Довжина хвилі - це відстань, на яку розповсюджується фронт хвилі за час, що дорівнює періоду коливань.

Замість періоду T часто користуються частотою ν , яка дорівнює числу

коливань за одиницю часу $\nu = \frac{1}{T}$. З (6.1) отримаємо

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (6.2)$$

Нагадаємо, що період вимірюється в секундах, частота - в герцах.

Плоска монохроматична хвиля

Гармонічна хвиля називається *монохроматичною*, якщо її частота ν і амплітуда A з часом не змінюються. Якщо фронтом хвилі є площина, то хвиля називається *плоскою*.

Рівняння плоскої монохроматичної хвилі.

Рівнянням хвилі називається вираз, який визначає, як зсув ξ частинки, що коливається, залежить від координати x і часу t : $\xi = \xi(x, t)$. Вісь Ox сумістимо з напрямом розповсюдження хвилі. Хвильові поверхні плоскої хвилі будуть перпендикулярні осі x (рис 6.4).

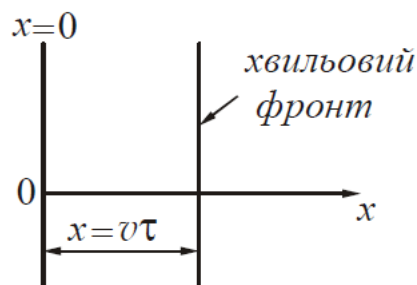


Рисунок 6.4 – Хвильовий фронт плоскої хвилі

Коливання точок, які лежать у площині $x = 0$, тобто коливання джерела мають вигляд:

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t.$$

Щоб пройти шлях від площини $x = 0$ до площини з довільною координатою x , потрібний час

$$\tau = \frac{x}{v},$$

де v - швидкість переміщення фронту хвилі.

Це означає, що коливання частинок, які лежать у площині x , відставатимуть за часом на τ . Їх рівняння має вигляд:

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (6.3)$$

Рівнянню (6.3) можна надати іншого вигляду. Для цього введемо величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (6.4)$$

яка називається хвильовим числом. **Хвильове число** показує, скільки довжин хвиль укладається на відстані 6,28 м. З урахуванням (6.4), а також того, що $\omega = 2\pi/T$, а $\lambda = vT$ отримаємо:

$$\xi(x, t) = A \cos \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right),$$

або

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx). \quad (6.5)$$

Рівняння (6.3) і (6.5) називають рівняннями плоскої хвилі, що біжить.

Фронтом хвилі є площина сталої фази. Зафіксуємо будь-яке значенні фази в рівнянні (6.5), поклавши, що

$$(\omega t - kx) = \text{const.}$$

Продиференціюємо цей вираз за часом:

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0,$$

або

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}.$$

Похідна $\frac{dx}{dt} = v$ дає швидкість, з якою переміщується фазова площина.

Таким чином, швидкість розповсюдження гармонічної хвилі - це швидкість переміщення фазової площини, тому її називають **фазовою швидкістю** ($v = v_{\text{фаз}}$).

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k}. \quad (6.6)$$

Хвилі розповсюджуються з кінцевою швидкістю, залежною від природи хвилі і властивостей середовища.

а) У твердих тілах.

Швидкість розповсюдження поздовжньої хвилі.

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.7)$$

де E - модуль Юнга, ρ - густина середовища.

Швидкість розповсюдження поперечної хвилі.

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (6.8)$$

де G - модуль зсуву.

б) У газах.

Швидкість розповсюдження поздовжньої хвилі (звуку):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \quad (6.9)$$

де γ - показник адіабати газу, M — молярна маса газу. R - молярна газова стала, T - термодинамічна температура.

Крім наведених поперечних і поздовжніх хвиль, які поширюються у суцільних середовищах, існують інші хвильові процеси. Так, на межі поділу двох середовищ можуть поширюватися так звані поверхневі хвилі. До них, наприклад, належать хвилі, що поширюються на поверхні води (на межі вода — повітря). Проте, якщо розглянути ці хвилі докладніше, то виявиться, що вони не поперечні і не поздовжні. Рух частинок у поверхневих хвилях значно складніший.

При поширенні у середовищі сферичної хвилі амплітуда коливань зменшується обернено пропорційно відстані r від джерела хвиль. Рівняння сферичної хвилі має вигляд

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (6.10)$$

де A - величина, яка дорівнює амплітуді коливань на відстані 1 м від джерела хвиль. Величина A має розмірність амплітуди, помноженої на розмірність довжини.

ТЕМА 7

Хвильове рівняння

Хвильове рівняння плоскої монохроматичної хвилі

Рівняння будь-якої хвилі є розв'язанням диференціального рівняння, яке називають хвильовим. Встановимо його вигляд для плоскої монохроматичної хвилі. Згідно з (6.5):

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx).$$

Двічі взявши похідні від цього рівняння за координатою x і часом t .

$$\frac{d\xi}{dt} = -A\omega \sin(\omega t - kx); \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx) = -\omega^2 \cdot \xi(x, t) \quad (7.1)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = Ak \sin(\omega t - kx); \quad \frac{d^2\xi}{dx^2} = -Ak^2 \cos(\omega t - kx) = -k^2 \xi(x, t) \quad (7.2)$$

З порівняння (7.1) і (7.2) випливає, що

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}.$$

Оскільки за формулою (6.6) $v = \frac{\omega}{k}$, то

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}. \quad (7.3)$$

Рівняння (7.3) називається **хвильовим рівнянням** плоскої монохроматичної хвилі в канонічній формі.

Якщо при аналізі фізичних процесів тієї або іншої природи випливає рівняння подібного вигляду, то це означає, що в даному середовищі можливе виникнення хвильових процесів.

У тривимірному просторі хвильове рівняння (7.3) прийме вигляд:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}. \quad (7.4)$$

Перенесення енергії хвилею. Вектор Умова

Частинки середовища, в якому розповсюджується хвиля, не залучаються хвилею до поступального руху, а лише здійснюють коливання біля своїх положень рівноваги, тобто розповсюдження пружних хвиль в середовищі *не пов'язане з перенесенням маси*. При коливальному русі частинок відбувається перенесення енергії за рахунок передачі її від однієї частинки до іншої. Деяке перенесення речовини може здійснюватися при розповсюдженні в середовищі сильних збурень (наприклад, ударних хвиль, що виникають під час вибух); цунамі). коли коливання частинок середовища стають нелінійними.

Джерелом коливального руху в середовищі є коливальна система. За рахунок її енергії виникають коливання частинок середовища, які прилягають до коливального тіла. Внаслідок взаємозв'язку між частинками середовища коливання передаються від однієї частинки до іншої, тобто утворюється хвиля. Коливальні частинки середовища, в якому поширюється хвиля, мають як кінетичну, так і потенціальну енергії деформації. При поширенні хвиль відбувається передавання енергії від однієї частинки до іншої у напрямі поширення хвиль.

Виділимо в середовищі, в якому поширюється плоска хвиля, елементарний об'єм ΔV . Об'єм ΔV беремо таких розмірів, в межах якого можна вважати сталими швидкість зміщення частинок та деформацію.

Кінетична енергія руху частинок, що знаходяться в об'ємі,

$$\Delta W = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V A^2 \omega^3 \cos^2(\omega t - kx). \quad (7.5)$$

Потенціальна енергія пружної деформації об'єму ΔV визначається за формулою

$$\Delta U = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \Delta V = \frac{1}{2} E \Delta V A^2 k^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (7.6)$$

Враховуючи те, що модуль Юнга $E = \rho v^2$, а хвильове число $k = \omega/v$, вираз (7.6) набуває вигляду

$$\Delta U = \frac{1}{2} \rho \cdot \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (7.7)$$

Порівнюючи вирази (7.5) і (7.7), можна зробити висновок, що у виділеному об'ємі середовища ΔV кінетична і потенціальна енергії дорівнюють одна одній і, на відміну від коливальних рухів, змінюються в однакових фазах. При поширенні хвилі у пружному середовищі, як уже зазначалося, поширюється хвиля швидкостей зміщення коливальних частинок та хвиля відносної деформації. Ці хвилі переношують, відповідно, кінетичну і потенціальну енергії. Знайдемо повну енергію E у виділеному об'ємі середовища, де поширюється хвиля:

$$\Delta E = \Delta W + \Delta U = \rho \cdot \Delta V A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Об'ємна густина енергії

$$w = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t - kx). \quad (7.8)$$

З (7.8) видно, що густина енергії в кожний момент часу в різних точках простору різна. Вона пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди коливань частинок середовища та квадрату частоти їхніх коливань. Оскільки квадрат косинуса за період має середнє значення $1/2$, то середнє значення густини енергії $\langle w \rangle$ за часом

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (7.9)$$

Перенесення енергії хвилею характеризують потоком і густиною потоку енергії. Енергію, що переноситься хвилею через деяку поверхню S у перпендикулярному до неї напрямі за одиницю часу, називають **потоком**. Якщо швидкість поширення хвилі v , то через поверхню площею S за одиницю часу пройде потік енергії

$$\Phi = \langle w \rangle S \cdot v. \quad (7.10)$$

Потік енергії в різних точках середовища може мати різну інтенсивність. Для характеристики перенесення енергії в різних точках простору вводять

поняття *густини потоку енергії*, під яким розуміють енергію, що переноситься через одиницю площі поверхні за одиницю часу. За визначенням, середнє значення густини потоку енергії

$$\langle j \rangle = \langle w \rangle v. \quad (7.11)$$

Оскільки швидкість поширення хвилі v є величина векторна, то і густину потоку енергії можна розглядати як вектор, напрям якого збігається з напрямом поширення хвилі. Питання перенесення енергії хвилями в загальному випадку вивчав фізик М. О. Умов (1846 - 1915). Тому вектор $\vec{j}$ називають **вектором Умова**.

Скалярна величина I , що дорівнює модулю середнього значення вектора Умова, називається **інтенсивністю хвилі**, для звукової хвилі - інтенсивністю звуку або силою звуку.

$$I = \langle j \rangle = \langle w \rangle v = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} v. \quad (7.12)$$

Звукові хвилі

Звуковими хвилями називаються пружні хвилі з частотами від 16 Гц до 20 000 Гц, що лежать у межах сприймання органами слуху людини. Ці хвилі є поздовжніми. Вони розповсюджуються в твердих тілах, рідинах і газах.

Хвилі, частота яких менша від 16 Гц, називають **інфразвуковими**, а хвилі з частотами, що перевищують 20 000 Гц, називають **ультразвуковими**.

Звуки можна розрізняти за гучністю, висотою і тембром. Кожній з цих фізіологічних характеристик відповідає певна фізична характеристика звукової хвилі (табл. 7.1).

Фізичному поняттю інтенсивності звуку відповідає фізіологічне відчуття гучності звуку. Гучність (сила звуку) залежить від амплітуди коливання але поняття інтенсивності і гучності звуку не рівнозначні.

Висота звуку визначається частотою його коливань.

Таблиця 7.1 - Характеристики звукової хвилі

Фізіологічні	Фізичні
- Гучність	- сила звуку
- висота	- частота звуку
- тембр	- спектральний склад

Реальний звук є накладанням гармонічних коливань з певним набором частот. Набір частот коливань, присутніх в даному звуці, називається акустичним спектром. Цей набір частот додає кожному звуку певне забарвлення або так званий тембр. Тембр – це відтінок складного звуку, яким відрізняються один від одного звуки однакової сили і висоти.

Акустичний спектр може бути:

- суцільний (присутні коливання всіх частот в інтервалі від ν_1 до ν_2);
- лінійчастий (звук складається з коливань дискретних частот ν_1, ν_2, ν_3 і т. д.).

Шуми мають суцільний акустичний спектр. Коливання з лінійчастим спектром викликають відчуття звуку з більш менш певною висотою. Такий звук називається тональним. Щоб викликати відчуття звуку хвиля повинна мати певну мінімальну інтенсивність, яку називають порогом чутності. Порог чутності залежить від частоти звуку і різний для різних людей. Найбільш чутливе вухо до частот від 1000 до 4000 Гц. Інтенсивність звуку при цьому є величиною порядку 10^{-12} Вт/м² (рис. 7.1).

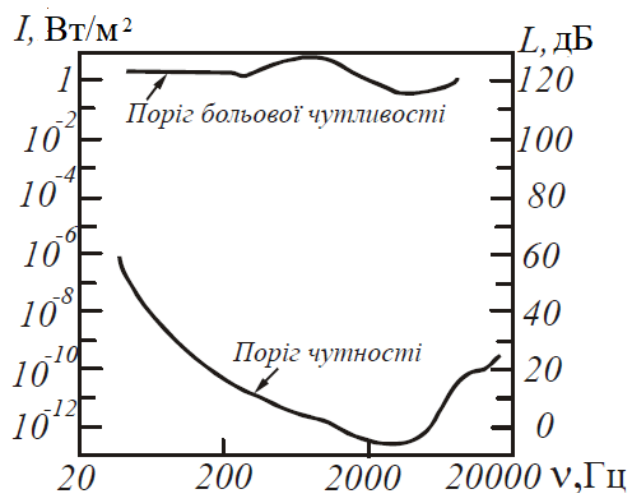


Рисунок 7.1 – Межі звукового сприйняття людини

При інтенсивності $1 \div 10$ Вт/м² вухо перестає сприймати коливання як звук.

Такі коливання спричиняють у ньому відчуття болю і тиску. Це значення інтенсивності називають **порогом больового відчуття**. Поріг больового відчуття також залежить від частоти (рис. 7.1).

Рівень гучності (L) визначається як логарифм відношення інтенсивності I даного звуку до інтенсивності I_0 , що береться за початкову (тобто інтенсивності найслабкішого звуку, що сприймається на слух, $I_0 \approx 10^{-12}$ Вт/м²):

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \quad (7.13)$$

$[L] = \text{Б (бел)}$.

Практично виявилось більш зручним користуватися одиницями в 10 разів меншими, які називають децибелами (дБ).

Весь діапазон інтенсивності, при яких хвиля викликає у вусі звукове відчуття (від 10^{-12} до 10 Вт/м²), відповідає рівням гучності від 0 до 130 дБ (див. праву вісь на рис. 7.1 і таблицю 7.2).

Таблиця 7.2 - Рівень гучності для деяких звуків

Звук	L , дБ
Цокання годинника	20
Шепіт на відстані 1 м	30
Тиха розмова	40
Мова середньої гучності	60
Гучна мова	70
Крик	80

Ультразвуком називаються пружні хвилі з частотами від $2 \cdot 10^4$ до 10^{13} Гц. Ультразвукові хвилі з частотами порядку 10^9 Гц і вище іноді називають *гіперзвуковими*. Верхня межа частот ультразвуку ($10^{12} \div 10^{13}$ Гц в кристалах і рідинах і 10^9 Гц в газах за нормальних умов) відповідає частотам, при яких довжина хвилі ультразвуку стає співставною з міжмолекулярними відстанями (у разі газів – з середньою довжиною вільного пробігу молекул). Для генерування ультразвуків застосовують механічні і електромеханічні випромінювачі. Прикладом механічного випромінювача низькочастотних звуків ($\nu = 20 \div 200$

кГц) великої інтенсивності є сирена.

Основною властивістю ультразвуку є те, що він подібно світлу може випромінюватися у вигляді вузьких направлених променів, оскільки має малу довжину хвилі. Віддзеркалення і заломлення ультразвукових пучків на межі розділу двох середовищ відбувається за законами геометричної оптики.

Для зміни напрямку і фокусування ультразвукових променів застосовуються дзеркала різної форми, звукові лінзи і так далі.

Амплітуди швидкості і прискорення коливального руху частинок середовища, а також амплітуда звукового тиску в ультразвукових хвилях у багато разів більше відповідних величин для чутних звуків. Завдяки великій амплітуді звукового тиску, що створюється потужними ультразвуковими випромінювачами, в рідинах виникає явище кавітації – в ній безперервно утворюються і зникають внутрішні розриви суцільності. Зникнення цих розривів, що мають вид найдрібніших бульбашок, супроводжуються короточасним зростанням тиску до сотень і навіть тисяч атмосфер. Тому ультразвуки мають здібність дробити – вони руйнують тверді тіла, що знаходяться в рідині, живі організми, великі молекули і так далі.

Ультразвуки сильно поглинаються газами і у багато разів слабкіше – рідинами. Наприклад, коефіцієнт поглинання ультразвуку в повітрі приблизно в 1000 разів більше, ніж у воді.

Ультразвуки застосовують у техніці для контрольовано-вимірювальних цілей (гідролокація, дефектоскопія, вимірювання товщини трубопроводів і шару накипу і так далі), а також для здійснення і прискорення різних технологічних процесів.

Здібність ультразвуків дробити використовують для створення емульсій і суспензій, зняття плівок оксидів і знежирення поверхонь деталей, стерилізації рідин, роздрібнення зерен фотоемульсій і т. п.

Руйнуюча дія ультразвукових хвиль в рідині на поверхні твердого тіла помітно збільшується при введенні в рідину дрібних абразивних частинок. Це явище використовується для ультразвукового шліфування і полірування, а також «свердлення» отворів різної форми в склі, кераміці, надтвердих сплавах і

кристалах.

Ультразвуки прискорюють протікання процесів дифузії, розчинення і хімічних реакцій.

Широко використовують ультразвукові хвилі в молекулярній акустиці для дослідження акустичними методами будови і властивостей речовин.

Інфразвук – це пружні хвилі з частотами нижче за область чутних людиною частот. Зазвичай за верхню межу інфразвуку приймають частоти $16 \div 25$ Гц, нижня межа не визначена.

Інфразвуки присутні в шумі атмосфери, в шумі лісу і моря. Джерелом інфразвукових коливань є грозові розряди (грім), а також вибухи і гарматні постріли. У земній корі спостерігаються струси і вібрації інфразвукових частот від найрізноманітніших джерел, зокрема від обвалів, вибухів, руху транспорту.

Інфразвук мало поглинається в середовищі, тому інфразвукові хвилі в повітрі, воді і земній корі можуть розповсюджуватися на дуже далекі відстані. Це явище знаходить практичне застосування в звукометрії, при визначенні місця сильних вибухів, дає можливість передбачити стихійне лихо – цунамі. Звуки вибухів, що містять велику кількість інфразвукових частот, застосовуються для дослідження верхніх шарів атмосфери, для дослідження властивостей водного середовища.

ТЕМА 8

Електромагнітні хвилі

Плоска електромагнітна хвиля

Розглянемо електромагнітну хвилю, що розповсюджується в нейтральному непровідному середовищі зі сталою діелектричною проникністю ε і магнітною μ ($\vec{j}=0$, $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$). Спрямуємо вісь x перпендикулярно хвильовим поверхням. Тоді вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$, а також і їх компоненти за координатними осями не залежатимуть від координат y і z . При цьому рівняння Максвела спрощуються і приймають вигляд:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (8.2)$$

Індекси y і z при E_y і H_z підкреслюють ті обставини, що вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ спрямовані уздовж взаємно перпендикулярних осей y і z . (Нагадаємо, що в цьому випадку $E_x = E_z = 0$, а $H_x = H_y = 0$).

Розв'язком рівняння (8.1) є функція:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_1). \quad (8.3)$$

Розв'язок рівняння (8.2) має аналогічний вигляд:

$$H_z(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_2). \quad (8.4)$$

У цих формулах ω - циклічна частота хвилі: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильове число, а α_1 і α_2 - початкові фази коливань в точці з координатою $x = 0$.

Коливання електричного і магнітного векторів в електромагнітній хвилі відбуваються з однаковою фазою. Поклавши $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, отримаємо:

$$E_y(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx). \quad (8.5)$$

$$H_z(x, t) = H_0 \cos(\omega t - kx). \quad (8.6)$$

Помноживши рівняння (8.5) на одиничний вектор осі y , а рівняння (8.6) - на одиничний вектор осі z , отримаємо рівняння плоскої електромагнітної монохроматичної хвилі у векторному вигляді:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx). \quad (8.7)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx). \quad (8.8)$$

На рис. 8.1 показана «моментальна фотографія» плоскої монохроматичної хвилі. З рисунка видно, що вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ утворюють з напрямом розповсюдження хвилі правогвинтову систему.

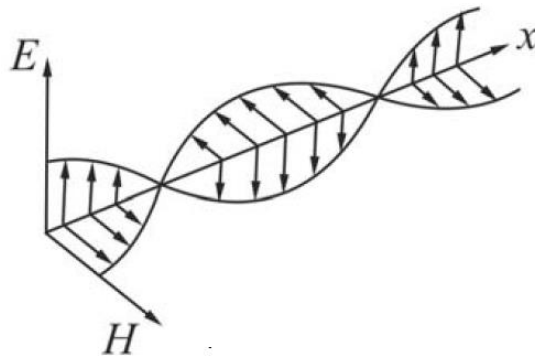


Рисунок 8.1 – Схематичне представлення електромагнітної хвилі

У фіксованій точці простору вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ змінюються з часом за гармонічним законом.

Експериментальне дослідження електромагнітних хвиль

Перші досліди з неслітовими електромагнітними хвилями були здійснені Г. Герцем у 1888 році. За допомогою великих металевих дзеркал і асфальтової призми (розміром більше 1 м і масою 1200 кг) Герц здійснив віддзеркалення і заломлення електромагнітних хвиль і виявив, що обидва ці явища підпорядковуються законам, встановленим в оптиці для світлових хвиль. Відбивши плоску хвилю, яка біжить, за допомогою металевого дзеркала у зворотному напрямі, Герц отримав стоячу хвилю. Відстань між вузлами і пучностями дозволяла

визначити довжину хвилі λ . Помноживши довжину хвилі на відому частоту коливань, Герц розрахував швидкість електромагнітних хвиль. Вона виявилася близькою до швидкості світла. Розташовуючи на шляху хвиль ґрати з паралельних один одному мідних дротів, Герц виявив, що при обертанні ґрат навколо променя інтенсивність хвиль, які пройшли крізь ґрати, сильно змінюється. Коли дроти, які створюють ґрати, були перпендикулярні вектору $\vec{E}$ хвиля проходила крізь ґрати без перешкод. При розташуванні дротів паралельно $\vec{E}$ хвиля крізь ґрати не проходила. Таким чином, була доведена поперечність електромагнітних хвиль.

Основні властивості електромагнітних хвиль

1. Електромагнітні хвилі - це електромагнітні коливання, що поширюються в просторі з кінцевою швидкістю. З теорії Максвелла випливає, що електромагнітні коливання розповсюджуються у вакуумі із швидкістю світла:

$$v_{\text{вак}} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}, \quad (8.9)$$

2. Швидкість розповсюдження електромагнітних хвиль в однорідному ізотропному середовищі дорівнює

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (8.10)$$

тобто вона менша ніж швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі.

3. Електромагнітна хвиля - поперечна хвиля. Це означає, що $\vec{E} \perp \vec{v}$ і $\vec{H} \perp \vec{v}$, тобто напрям коливань векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$ перпендикулярний напрямку розповсюдження хвилі.

4. Електромагнітні хвилі переношують енергію. Об'ємна густина енергії w електромагнітного поля складається з об'ємної густини енергії електричного поля $w_{\text{ел}}$ і об'ємної густини енергії магнітного поля $w_{\text{м}}$:

$$w = w_{el} + w_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}. \quad (8.11)$$

Можна показати, що ці величини однакові, отже

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2. \quad (8.12)$$

Перенесення енергії хвилею прийнято характеризувати вектором густини потоку енергії. Для механічних хвиль цей вектор називається вектором Умова. Нагадаємо, що вектор Умова дорівнює добутку об'ємної густини енергії на вектор фазової швидкості хвилі, тобто

$$\vec{j} = w \cdot \vec{v}.$$

Для електромагнітних хвиль вводять аналогічний вектор, який називають вектором Пойнтінга. **Вектор Пойнтінга** $\vec{S}$ - векторна фізична величина, що чисельно дорівнює енергії, яка переноситься електромагнітною хвилею за одиницю часу крізь одиничну площину, що розташована перпендикулярно напрямку розповсюдження хвилі.

Отримаємо формулу, що зв'язує вектор Пойнтінга з характеристиками електромагнітної хвилі. Згідно (8.10)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}}. \quad (8.13)$$

Тоді модуль вектора Пойнтінга буде дорівнювати

$$S = wv = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} E^2. \quad (8.14)$$

Враховуючи, що $\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2$ отримаємо вираз для розрахунку миттєвого значення вектора Пойнтінга:

$$S = \frac{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot E \cdot E}{\sqrt{\mu\mu_0}} = EH = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx). \quad (8.15)$$

Вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ взаємно перпендикулярні, тобто вектор Пойнтінга можна представити як векторний добуток векторів $\vec{E}$ і $\vec{H}$

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (8.16)$$

Напрямок вектора $\vec{S}$ співпадає з напрямком перенесення енергії. Середнє значення вектора Пойнтінга визначає інтенсивність електромагнітної хвилі:

$$I = \langle S \rangle = \frac{E_0 \cdot H_0}{2}, \quad (8.17)$$

оскільки середнє значення $\cos^2(\omega t - kx)$ за період дорівнює $1/2$.

5. Електромагнітним хвилям, як і будь-яким хвилям, властиві інтерференція, дифракція, а також поляризація.

6. Електромагнітні хвилі поглинаються середовищем, а в діелектрику, окрім цього, зазнають дисперсію.

Шкала електромагнітних хвиль

Електромагнітні хвилі прийнято умовно класифікувати за довжинами хвиль у вакуумі $\lambda = c/\nu$ або за частотою $\nu = \omega/2\pi$ (рис. 8.2). Між сусідніми діапазонами шкали електромагнітних хвиль немає різких границь. Докладніша класифікація дана в таблиці 8.1.



Рисунок 8.2 – Шкала електромагнітних хвиль

Відзначимо, що різні види електромагнітного випромінювання відрізняються лише довжиною хвилі (або, що те ж саме, частотою). Залежно від

довжини хвилі (частоти), міняються властивості хвиль, їх дії, способи отримання і назви окремих ділянок.

Таблиця 8.1 - Шкала електромагнітних хвиль

Назва діапазону хвиль	Зразковий діапазон довжин хвиль		Діапазон частот
	м	Інші одиниці	Гц
Низькочастотні електричні	$\infty \div 10^5$	$\infty \div 100$ км	$0 \div 3 \cdot 10^3$
Радіохвилі	$10^5 \div 10^{-3}$	100 км $\div$ 1 мм	$3 \cdot 10^3 \div 3 \cdot 10^{11}$
Інфрачервоне випромінювання	$2 \cdot 10^{-3} \div 7,6 \cdot 10^{-7}$	2 мм $\div$ 760 нм	$1,5 \cdot 10^{11} \div 4,0 \cdot 10^{14}$
Видиме випромінювання	$7,6 \cdot 10^{-7} \div 3,8 \cdot 10^{-7}$	760 $\div$ 380 нм	$4,0 \cdot 10^{14} \div 8,0 \cdot 10^{14}$
Ультрафіолетове випромінювання	$3,8 \cdot 10^{-7} \div 3 \cdot 10^{-9}$	380 $\div$ 3 нм	$8,0 \cdot 10^{14} \div 10^{17}$
Рентгенівське випромінювання	$10^{-8} \div 10^{-12}$	10 нм $\div$ 1 пм	$3 \cdot 10^{16} \div 3 \cdot 10^{20}$
Гамма-випромінювання	10^{-11} і менше	10 пм і менше	$3 \cdot 10^{19}$ і вище

ТЕМА 9

Інтерференція хвиль

Умови спостереження інтерференції

У середовищі одночасно можуть поширюватися кілька хвиль, які збуджуються різними джерелами. Як показує дослід, поширення однієї хвилі в середовищі не залежить від наявності в ньому інших хвиль.

Якщо в середовищі одночасно поширюється кілька хвиль, то частинка середовища здійснює коливання, які є результатом додавання коливань, що створюються в даній точці простору кожною хвилею. Результируюче зміщення частинки середовища в будь-який момент часу дорівнює геометричній сумі зміщень, які здійснює частинка під дією кожної хвилі окремо.

Тільки за певних умов, при накладанні двох хвиль, амплітуди результируючих коливань різних частинок середовища матимуть неоднакові величини, значення яких з часом не змінюватимуться. В одних місцях хвильового поля коливання підсилюються, в інших — послаблюються. Явище накладання хвиль, при якому амплітуда результируючих коливань різних ділянок середовища з часом не змінюється і в загальному випадку не дорівнює сумі амплітуд складових коливань, називають *інтерференцією* хвиль. Характерною ознакою інтерференції хвиль є існування зон з максимальними і мінімальними амплітудами результируючих коливань. Ці зони чергуються, але не переміщуються.

Для виникнення інтерференційної картини необхідно, щоб виконувалися такі умови: коливання частинок середовища, що збуджуються інтерферуючими хвилями, повинні відбуватись *в однакових напрямках*; частоти їхніх коливань мають бути *однаковими*; зсув фаз між коливаннями частинки, зумовленими інтерферуючими хвилями, *з часом не змінюється*. Хвилі, що відповідають цим умовам, називають *когерентними*. Така назва відповідає і джерелу збудження їх. Поняття про когерентні хвилі і про когерентні джерела хвиль належать до фізичних абстракцій. При певних умовах реальні джерела хвиль і реальні хвилі можна вважати когерентними. Так, можна вважати когерентними джерелами два

стержні у ванні з водою, які приводяться в коливальний рух плоскою пружиною і ударяють своїми кінцями по поверхні води. Явище інтерференції властиве хвилям будь-якої природи.

Розглянемо інтерференційну картину в точці O , що виникає при накладанні двох хвиль, поширюваних від когерентних джерел S_1 і S_2 (рис. 9.1). Зміщення точки, зумовлені хвилями, відповідно визначаються рівняннями

$$\xi_1 = A_1 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda}\right), \quad (9.1)$$

$$\xi_2 = A_2 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r_2}{\lambda}\right), \quad (9.2)$$

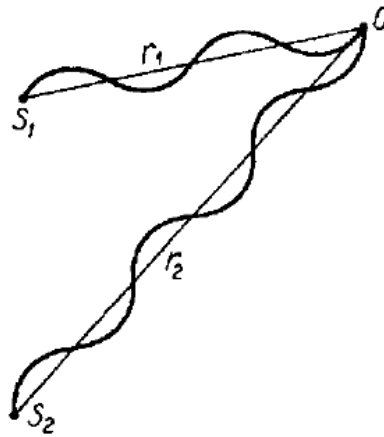


Рисунок 9.1 – Інтерференція двох хвиль у точці O

При додаванні коливань однакового напрямку знайдемо амплітуду результуючого коливання

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (9.3)$$

де $\varphi_1 = 2\pi r_1/\lambda$, $\varphi_2 = 2\pi r_2/\lambda$. Тоді

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi d}{\lambda}.$$

Величину $d = r_2 - r_1$ називають *різницею ходу хвиль*. Амплітуда результуючих коливань залежить від різниці ходу хвиль, що інтерферують. До кожної точки хвильового поля обидві хвилі проходять різні відстані. Це зумовлює зміну різниці фаз при переході від однієї точки до іншої. З формули

(9.3) впливає, що амплітуда результуючих коливань досягає максимального значення $A = A_1 + A_2$ для різниць фаз, коли $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$, тобто коли

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.4)$$

Звідси маємо

$$d = r_2 - r_1 = n\lambda, \quad (9.5)$$

тобто амплітуда буде максимальною у тих точках хвильового поля, для яких різниця ходу дорівнює нулю або цілому числу довжин хвиль. З (9.3) також впливає, що амплітуда результуючих коливань має мінімальне значення $A = |A_1 - A_2|$ для різниць фаз, коли

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = (2n + 1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.6)$$

З останньої формули маємо, що

$$d = r_2 - r_1 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.7)$$

тобто амплітуда коливань буде мінімальною в тих точках хвильового поля, для яких різниця ходу хвиль дорівнює непарному числу довжин півхвиль.

Умови (9.5) і (9.7) зводяться до таких:

$$r_2 - r_1 = \text{const}. \quad (9.8)$$

З аналітичної геометрії відомо, що різниця (9.8) є рівнянням гіперболи з фокусами в точках O_1 і O_2 (рис. 9.2). Отже, геометричне місце точок, в яких коливання взаємно підсилюються або послаблюються, являє собою сукупність гіпербол. На рис. 9.2 суцільними лініями вказано місця, в яких амплітуди результуючих коливань мають максимальне значення; штриховими лініями — місця, в яких амплітуди результуючих коливань мінімальні.

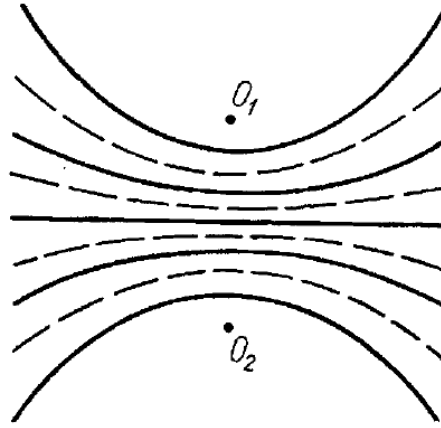


Рисунок 9.2 – Лінії інтерференційних максимумів і мінімумів

В усіх інших точках хвильового поля, для яких різниця ходів хвиль має проміжні значення між $n\lambda$ і $(2n+1)\lambda/2$, амплітуда A результуючих коливань змінюється від точки до точки і набуває проміжних значень між $|A_1 - A_2|$ і $A_1 + A_2$ тобто

$$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2,$$

де A_1 і A_2 - амплітуди коливань даної частинки, зумовлені хвилями, що її досягли. Оскільки енергія коливального руху пропорційна квадрату амплітуди коливань, то енергія коливань частинок, розміщення яких у хвильовому полі задовольняє умову (9.5), визначатиметься співвідношенням

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2}, \quad (9.9)$$

де E_1 і E_2 - відповідно енергії складових коливань. Енергія коливального руху частинок хвильового поля, розміщення яких задовольняє умову (9.7), визначається співвідношенням

$$E = E_1 + E_2 - 2\sqrt{E_1 E_2}, \quad (9.10)$$

Зауважимо, що в явищах інтерференції немає відхилень від закону збереження енергії. У точках хвильового поля, в яких амплітуда має максимальне значення, енергія коливань не дорівнює сумі енергій E_1 і E_2 , а більша на величину $2\sqrt{E_1 E_2}$ (див. формулу (9.9)). У точках, де амплітуда коливань має мінімальне значення, енергія коливань відповідно

менша на величину $2\sqrt{E_1 E_2}$ (див. формулу (9.10)).

Отже, при інтерференції хвиль відбувається перерозподіл енергії і явище інтерференції повністю узгоджується із законом збереження енергії. Основною ознакою інтерференційного додавання хвиль є перерозподіл їхньої енергії по хвильовому полю.

Оскільки енергія (формула (3.21)) результуючого коливання при додаванні взаємно перпендикулярних коливань не залежить від різниці фаз між ними і дорівнює сумі енергій складових коливань, то неможливе явище інтерференції від двох поперечних хвиль, в яких коливання відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках.

Стоячі хвилі

Особливий випадок інтерференції спостерігається при накладанні двох плоских зустрічних хвиль з однаковими частотами і амплітудами. При цьому утворюються так звані *стоячі хвилі*. Практично стоячі хвилі виникають при накладанні падаючої і відбитої хвиль. Розглянемо інтерференцію цих хвиль. Вважатимемо, що хвилі поширюються у середовищі без згасання і амплітуди їх однакові і що падаюча хвиля поширюється в позитивному напрямі осі OX , а відбита хвиля - у протилежному напрямі. Початок координат розмістимо у точці, в якій обидві хвилі мають однакові фази. За початок відліку часу виберемо такий момент, коли фази коливань обох хвиль дорівнюють нулю. Тоді рівняння падаючої і відбитої хвиль

$$\xi_1 = A_0 \sin(\omega t - kx), \quad \xi_2 = A_0 \sin(\omega t + kx). \quad (9.11)$$

Результуюче зміщення знайдемо як суму складових, тобто

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A_0 \cos kx \cdot \sin \omega t. \quad (9.12)$$

Рівняння (9.12) - це рівняння стоячої хвилі. З (9.12) видно, що якщо зафіксувати деяку точку, координата якої x , то для частинки, що знаходиться в цій точці, дістанемо рівняння гармонічного коливання з амплітудою $2A_0 \cos kx$ і

з фазою ωt . Якщо переходити від однієї точки до іншої, то амплітуда змінюватиметься за законом

$$A = \left| 2A_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|. \quad (9.13)$$

Отже, рівняння стоячої хвилі описує гармонічні коливання частинок середовища в просторі, амплітуди коливань яких різні для різних точок. У рівнянні стоячої хвилі, на відміну від рівняння біжучої хвилі, немає швидкості поширення фази. У точках, для яких виконується умова

$$2\pi x/\lambda = \pm \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.14)$$

амплітуда результуючого коливання досягає максимального значення і дорівнює $2A_0$. Ці точки називають *пучностями* стоячої хвилі. Координати пучностей визначаємо з умови (9.14):

$$x_{\text{пучн}} = \pm n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.15)$$

У точках, для яких виконується умова

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.16)$$

амплітуда результуючого коливання в будь-який момент часу дорівнює нулю. Такі точки називаються *вузлами* стоячої хвилі. Частинки середовища, що знаходяться у вузлових точках, коливань не здійснюють. Координати вузлових точок знаходимо з умови (9.16):

$$x_{\text{вузл}} = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.17)$$

З формул (9.16) і (9.17) випливає, що відстань між сусідніми пучностями або між сусідніми вузлами дорівнює $\lambda/2$. Відстань між сусіднім вузлом і пучністю

$$x_{\text{вузл}} - x_{\text{пучн}} = \frac{\lambda}{4}. \quad (9.18)$$

Множник $2A \cos 2\pi x/\lambda$, що входить до рівняння (9.12), для всіх точок, які

лежать між двома сусідніми вузлами, має той самий знак, а при переході через вузол, тобто через нульове значення, міняє знак на протилежний. Це означає, що всі частинки, які знаходяться між сусідніми вузлами, коливаються в однакових фазах. Частинки, що знаходяться з різних сторін вузла, коливаються у протилежних фазах, тобто різниця фаз між ними дорівнює π . Стоячі хвилі можуть утворюватися при інтерференції як поперечних, так і поздовжніх хвиль.

На рис. 9.3 показано миттєвий розподіл зміщень частинок середовища для поперечної стоячої хвилі в момент часу t і $t + T/2$.

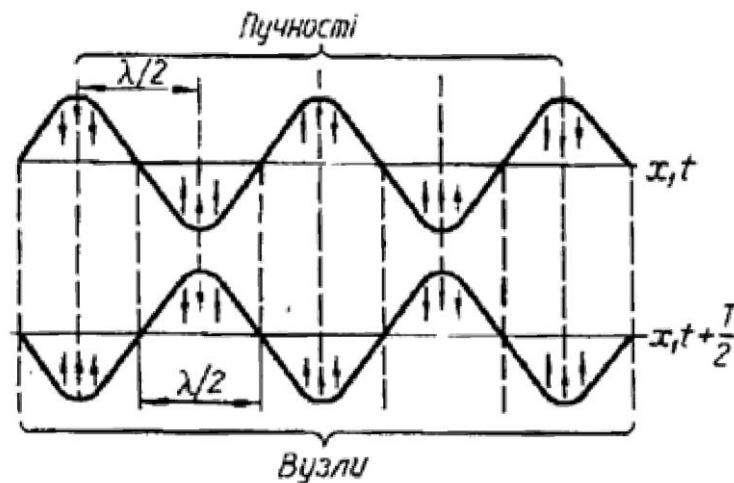


Рисунок 9.3 – Вузли і пучності стоячої хвилі

Стояча хвиля супроводжується утворенням стоячої хвилі швидкостей частинок середовища і стоячої хвилі відносної деформації. Знайдемо рівняння стоячої хвилі швидкостей і стоячої хвилі відносної деформації. Для цього продиференціюємо рівняння (9.12) по t і x . Рівняння стоячої хвилі швидкостей

$$\frac{d\xi}{dt} = 2A_0\omega \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \cos \omega t. \quad (9.19)$$

Рівняння стоячої хвилі деформації

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dx} = -2A_0 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin \omega t. \quad (9.20)$$

З рівнянь (9.12) і (9.19) випливає, що вузли і пучності хвилі швидкостей збігаються з вузлами і пучностями хвилі зміщень. З рівнянь (9.12), (9.20) видно, що вузли стоячої хвилі відносної деформації збігаються з пучностями зміщень і швидкостей, а пучності відносної деформації - з вузлами зміщень і швидкостей.

У стоячій хвилі на відміну від біжучої хвилі не відбувається перенесення енергії. Це пояснюється тим, що падаюча і відбита хвилі мають однакові амплітуди і переношують однакову енергію у протилежних напрямках. Повна енергія стоячої хвилі зосереджена між вузловими точками і з часом не змінюється. Відбувається тільки перехід потенціальної енергії в кінетичну, і навпаки. Оскільки протягом існування стоячої хвилі вузлові точки перебувають у спокої, то через них енергія не переноситься. Через вузли швидкості, де частинки середовища перебувають у спокої, неможливе перенесення кінетичної енергії, а через вузли відносної деформації неможливе перенесення потенціальної енергії. Коли вся енергія переходить у потенціальну, то вона зосереджується в основному біля пучності хвилі відносної деформації, тобто біля вузла хвилі зміщень. Коли вся енергія переходить у кінетичну, то вона зосереджується в основному біля пучності хвилі швидкостей, тобто біля пучності хвилі зміщень. Отже, перетворення потенціальної енергії в кінетичну (і навпаки) відбувається між сусідніми вузлами зміщень і відносних деформацій, тобто на ділянці завдовжки в чверть хвилі. Ці перетворення енергії відбуваються за період коливань стоячої хвилі. Поняття потоку енергії та вектора Умова непридатні для стоячих хвиль.

Як зазначалося, стоячі хвилі найбільш зручно отримати накладанням біжучої і відбитої хвиль. У місцях відбивання хвиль на межі поділу двох середовищ, залежно від граничних умов, може створюватись або вузол, або пучність. Кожне середовище чинить опір проникненню в нього хвиль. Здатність середовища чинити опір проникненню в нього хвиль характеризують *хвильовим опором*. Під ним розуміють добуток густини середовища на швидкість поширення хвиль, тобто ρv . При переході хвилі з середовища, хвильовий опір якого $\rho_1 v_1$, у середовище з хвильовим опором $\rho_2 v_2 > \rho_1 v_1$ хвиля зазнає відбивання. На межі поділу середовища буде вузол. При відбиванні фаза коливань частинок середовища змінюється на π . Зміну фази коливань на π при відбиванні хвиль називають втратою півхвилі. Насправді ніяких втрат не відбувається. Для з'ясування явища зміни фази коливань на π при відбиванні хвилі розглянемо такий приклад. Нехай хвиля поширюється вздовж розтягнутого

гумового шнура (рис. 9.4). У момент відбивання вигин шнура напрямлений вгору і шнур діє на точку O , у якій він закріплений, з силою, також направленою вгору. За третім законом Ньютона, кріплення діє на шнур з силою протилежного напрямку. Внаслідок дії цієї сили виникає відбита хвиля, подібна до падаючої, але з протилежним напрямом коливань.

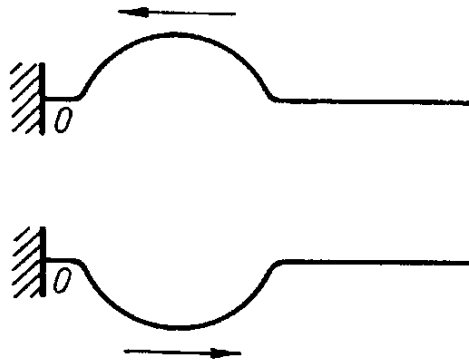


Рисунок 9.4 – Зміна фази коливання при відбитті хвилі

У разі, коли $\rho_2 v_2 < \rho_1 v_1$, також відбуваються відбивання хвилі, але без зміни фази коливань. Утворення стоячих хвиль пов'язано також з явищем резонансу в обмежених ділянках суцільного пружного середовища.

ТЕМА 10

Геометрична оптика

Основні поняття і визначення

Оптика - це розділ фізики, в якому вивчаються властивості світла, його фізична природа і взаємодія з речовиною. Під світлом в оптиці розуміють електромагнітні хвилі з частотою ν від $1,5 \cdot 10^{11}$ до $3,0 \cdot 10^{16}$ Гц, які відповідають інфрачервоному випромінюванню, видимому світлу і ультрафіолетовому випромінюванню. Цю область частот прийнято називати **оптичною областю спектру** електромагнітного випромінювання. Їй відповідають довжини хвиль λ від $2 \cdot 10^{-3}$ до 10^{-8} м. Видимому світлу відповідають довжини хвиль від $3,8 \cdot 10^{-7}$ до $7,6 \cdot 10^{-7}$ м. Виділення цієї частини спектру електромагнітних хвиль в окрему область обумовлене спільністю методів їх експериментального і теоретичного дослідження. У оптичній області спектру частота ν вже порівняна з власними частотами коливань атомів і молекул, тому тут істотні явища, обумовлені атомістичною будовою речовини. Разом з хвильовими властивостями в цій області випромінювання виявляються і квантові властивості світла.

Таким чином, з погляду сучасних уявлень світло має подвійну природу, тобто йому властивий корпускулярно-хвильовий дуалізм.

Геометрична оптика розглядає закони поширення світла в прозорих середовищах на основі уявлення про світловий промінь як лінію, вздовж якої переноситься світлова енергія. Часто користуються також поняттям "світловий пучок", під яким розуміють сукупність світлових променів, обмежених кінцевою, циліндричною чи іншою формою поверхнею.

Геометрична оптика являє собою простий наближений метод побудови зображень в оптичних системах. В основі геометричної оптики лежать такі закони:

1. **Закон прямолінійного поширення світла.** В однорідних середовищах світло поширюється прямолінійно.

2. **Закон відбивання світла.** Промінь падаючий, промінь відбитий і нормаль, поставлена в точку падіння, лежать в одній площині, а кут відбивання

γ дорівнює куту падіння α (рис. 10.1).

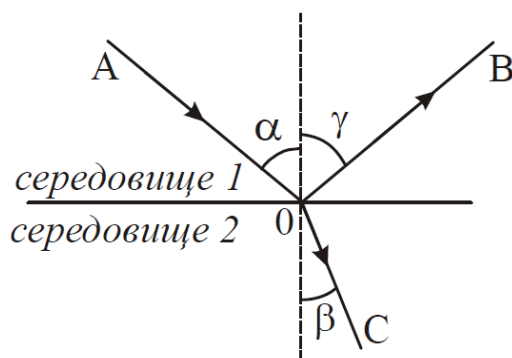


Рисунок 10.1 – Хід світлових променів на межі поділу двох середовищ

3. **Закон заломлення світла.** Промінь падаючий, промінь заломлений і перпендикуляр, поставлений у точку падіння, лежать в одній площині. При будь-якому куті падіння відношення синуса кута падіння α до синуса кута заломлення β є величиною сталою, для двох певних середовищ, і називається відносним показником заломлення другого середовища відносно першого.

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} \quad (10.1)$$

Величина n_{21} називається **відносним показником заломлення середовища 2 відносно середовища 1**. Відносний показник заломлення n_{21} дорівнює відношенню абсолютних показників заломлення n_2 і n_1 цих середовищ:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (10.2)$$

Абсолютним показником заломлення середовища називається показник заломлення середовища відносно вакууму. Він дорівнює відношенню швидкості світла у вакуумі до швидкості світла в даному середовищі:

$$n = \frac{c}{v}, \quad (10.3)$$

де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі, v – швидкість світла у даному середовищі.

Якщо $n_2 > n_1$, то середовище 2 називається оптично щільнішим у

порівнянні з середовищем 1. Якщо $n_2 < n_1$, то середовище 2 називається оптично менш щільним у порівнянні з середовищем 1.

Наслідки з закону заломлення Снелліуса:

- Під час переходу променю світла з середовища оптично менш щільного в оптично більш щільне ($n_2 > n_1$) кут заломлення β менше кута падіння α . Заломлений промінь С, у точці падіння променю, відхиляється у бік перпендикуляра до межі розділу двох середовищ (рис. 10.1).

- Під час переходу променю світла з середовища оптично більш щільного в оптично менш щільне середовище ($n_2 < n_1$) кут заломлення β більше кута падіння α . Заломлений промінь С, в точці падіння променю, відхиляється від перпендикуляра до межі розділу двох середовищ.

Під час збільшення кута падіння α , кут заломлення β зростає, залишаючись весь час більше кута α . Нарешті, при деякому куті падіння, значення кута заломлення наблизиться до 90° і заломлений промінь піде майже по межі розділу середовищ (рис. 10.2 а). Кут падіння $\alpha_{\text{пр}}$, відповідний куту заломлення $\beta = 90^\circ$, називається **граничним кутом повного відбивання**. Він визначається з умови:

$$\sin \alpha_{\text{пр}} = n_{21}. \quad (10.4)$$

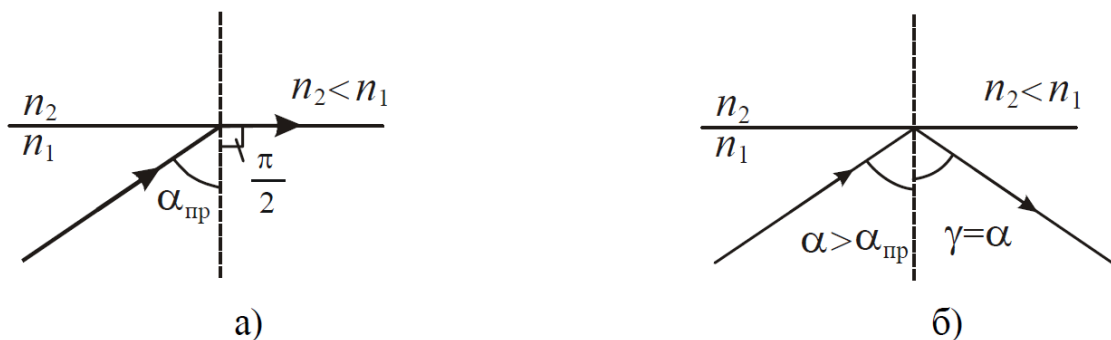


Рисунок 10.2 – Повне внутрішнє відбиття світла

Якщо $\alpha > \alpha_{\text{пр}}$, то відбувається **повне внутрішнє відбивання** (рис. 10.2 б).

4. **Закон незалежності поширення світлових променів.** Світлові промені, поширюючись у просторі, при перетині не впливають один на одного.

5. **Закон оборотності (принцип оборотності) світлових променів.**

Якщо промінь падає з першого середовища на межу другого під кутом α , заломлюється на межі і переходить у друге середовище під кутом β , то промінь, пущений у зворотному напрямі з другого середовища під кутом β , вийде в перше середовище під кутом α . Аналогічно буде і при відбиванні. Принцип оборотності виконується при будь-якій кількості заломлень і відбивань на межах оптичних систем.

Фотометричні величини

Розділ оптики, в якому розглядаються питання вимірювання енергії, що переноситься електромагнітними хвилями оптичного діапазону, називається *фотометрією*.

Наше око сприймає з усього діапазону електромагнітних хвиль лише вузьку ділянку, звану видимим світлом. Цій ділянці відповідають довжини хвиль від 380 нм до 760 нм. Чутливість ока до світла з різними довжинами хвиль не однакова. Вона має максимум при $\lambda = 555$ нм (зелена частина спектру) і швидко спадає до нуля при віддаленні від цього максимуму (рис. 10.3). На цьому графіку по горизонтальній осі відкладена довжина хвилі λ , по вертикальній – відносна спектральна чутливість ока K_λ .

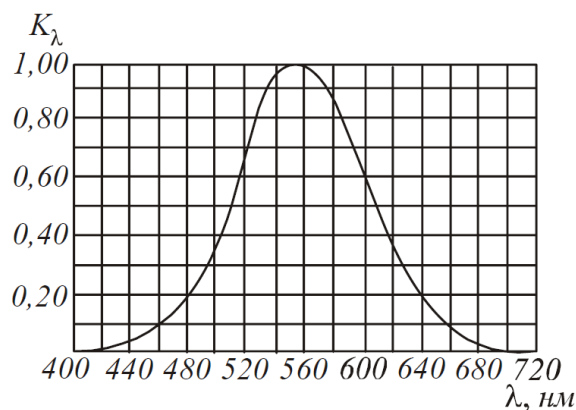


Рисунок 10.3 – Відносна спектральна чутливість ока

Відносна спектральна чутливість K_λ – це відношення чутливості при даній довжині хвилі до чутливості при $\lambda = 555$ нм. Для довжини хвилі $\lambda = 555$ нм K_λ дорівнює одиниці. При тому ж потоці енергії оцінювана зорова інтенсивність

світла для інших хвиль виявляється меншою. Відповідно, K_λ для цих довжин хвиль менше одиниці.

Значення відносної спектральної чутливості обернено пропорційне значенням потоків енергії, які викликають однакове за інтенсивністю зорове відчуття:

$$\frac{K_{\lambda_1}}{K_{\lambda_2}} = \frac{d\Phi_{e_2}}{d\Phi_{e_1}}, \quad (10.5)$$

де $d\Phi_e$ – потік енергії, що випромінюється в інтервалі довжин хвиль від λ до $\lambda+d\lambda$.

Наприклад, якщо $K_\lambda = 0,5$, це означає, що для отримання зорового відчуття такої ж інтенсивності світло даної довжини хвилі повинне мати густину потоку енергії в два рази більшу, ніж світло з $K_\lambda = 1,0$.

У зв'язку з такими особливостями ока кількісні характеристики світлових пучків оцінюються не за енергією, яку вони переношують, а за зоровим відчуттям.

Для характеристики інтенсивності світла з урахуванням його здатності викликати зорове відчуття вводиться величина Φ , яку називають світловим потоком.

Світловий потік (Φ) – це фізична величина, яка дорівнює потужності видимої частини випромінювання, що поширюється усередині даного тілесного кута і оцінюється за дією цього випромінювання на нормальне око.

Для інтервалу $d\lambda$ світловий потік визначається як добуток потоку енергії на відповідне значення функції K_λ :

$$d\Phi = K_\lambda d\Phi_e. \quad (10.6)$$

Повний світловий потік дорівнює

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} K_\lambda d\Phi_e. \quad (10.7)$$

де $d\Phi_e$ – потік енергії, що випромінюється в інтервалі довжин хвиль від λ до $\lambda+d\lambda$.

Джерело світла, розмірами якого можна знехтувати, порівняно з відстанню від місця спостереження до джерела, називається **точковим**. Точкові джерела характеризують силою світла.

Сила світла (I) точкового джерела в даному напрямі – це фізична величина, яка дорівнює світловому потоку, що припадає на одиницю тілесного кута:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}. \quad (10.8)$$

Сила світла вимірюється в канделах. Кандела (кд) є однією з основних одиниць Міжнародної системи (СІ).

Кандела дорівнює силі світла в заданому напрямі від джерела, що випускає монохроматичне випромінювання частотою $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила випромінювання якого в заданому напрямі складає $1/683$ Вт/ср (ср – стерadian).

Якщо точкове джерело випромінює рівномірно по всіх напрямках, то воно називається **ізотропним**. Для ізотропного джерела виконується наступне співвідношення:

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}, \quad (10.9)$$

де Φ – повний світловий потік, що випромінюється джерелом. На підставі цього співвідношення вводиться одиниця вимірювання світлового потоку – люмен.

Люмен (лм) дорівнює світловому потоку, що випромінюється ізотропним джерелом з силою світла в 1 кд в межах тілесного кута в 1 стерadian.

Дослідним шляхом встановлено, що світловому потоку в 1 лм, утвореному випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda = 555$ нм, відповідає потік енергії в 0,0016 Вт. Світловому потоку в 1 лм, утвореному випромінюванням з іншою довжиною хвилі, відповідає потік енергії

$$\Phi_e = 0,0016/K_\lambda \text{ Вт}. \quad (10.10)$$

Освітленість (E) – фізична величина, яка дорівнює відношенню світлового потоку до площі освітлюваної поверхні:

$$E = \frac{\Phi}{S}. \quad (10.11)$$

Освітленість вимірюється в люксах.

Люкс (лк) – це освітленість, що створюється світловим потоком 1 лм, рівномірно розподіленим на площі 1 м².

Якщо поверхня освітлюється точковим джерелом, то освітленість в кожній точці поверхні може бути різною. Її можна виразити через силу світла I , відстань r від поверхні і кут α між нормаллю до поверхні n і напрямом на джерело:

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}. \quad (10.12)$$

Записане співвідношення називають законом зворотних квадратів.

ТЕМА 11

Хвильова оптика

Інтерференція світла

Хвильова оптика – розділ фізики, що вивчає оптичні явища, в яких виявляється хвильова природа світла. До них належать інтерференція, дифракція, поляризація. В основі хвильової оптики лежать рівняння Максвелла і висновки з них для електромагнітних хвиль. У класичній хвильовій оптиці розглядаються середовища, лінійні за своїми оптичними властивостями, тобто такі, для яких діелектрична ε і магнітна μ проникність не залежать від інтенсивності світла. Для таких середовищ виконується принцип суперпозиції.

В електромагнітній хвилі коливаються вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$. Як показує дослід, фізіологічне, фотохімічне, фотоелектричне та інші дії світла викликаються коливаннями вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$. Тому вектор напруженості електричного поля називають *світловим вектором*.

Інтерференція світла – це явище накладання когерентних світлових хвиль, в результаті якого відбувається перерозподіл енергії світлового поля, тобто утворюються світлі ділянки (максимуми) і темні ділянки (мінімуми) інтерференційної картини.

Когерентні хвилі – хвилі, що мають однакову частоту і приходять в дану точку простору з різницею фаз, яка не змінюється з часом.

Світло від звичайних джерел є некогерентним. Причини цього знаходяться в самому механізмі випромінювання світла атомами (молекулами, іонами) джерела світла. Збуджений атом випромінює протягом дуже короткого проміжку часу ($t \sim 10^{-8}$ с), після чого він, витративши свою надмірну енергію на випромінювання, повертається у нормальний (незбуджений) стан. Через деякий час атом може знову збудитися, отримавши енергію ззовні, і почати випромінювати. Таке переривисте випромінювання світла атомами у вигляді окремих короткочасних імпульсів характерне для будь-якого джерела світла незалежно від виду конкретних процесів, що відбуваються в ньому. При

спонтанному (мимовільному) випромінюванні атоми випромінюють незалежно один від одного з випадковими початковими фазами, що хаотично змінюються від одного акту випромінювання до іншого. Тому спонтанно випромінюючі тіла є некогерентними джерелами.

Для отримання когерентних світлових хвиль застосовують метод розділення світла від одного джерела на дві або декілька хвиль. У кожній з них представлено випромінювання одних і тих же атомів джерела, так що ці системи хвиль когерентні між собою. Потім хвилі проходять або різні відстані, або йдуть в різних середовищах, після чого їх знов накладають. Різниця довжин оптичних шляхів хвиль, що інтерферують, не повинна бути дуже великою.

Розділення світла можна здійснити шляхом його відбивання або заломлення. Один із способів отримання когерентних хвиль показаний на рис. 11.1. На шляху джерела світла розміщують діафрагму Д, яка виділяє вузький пучок. Потім цей пучок розділяють на два за допомогою перешкоди П з двома маленькими отворами. Інтерференційну картину спостерігають на екрані Е.

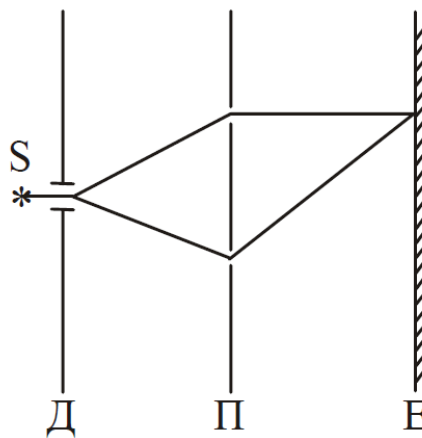


Рисунок 11.1 – Схема отримання когерентних хвиль

Умови максимумів і мінімумів інтерференції

Розглянемо накладення двох світлових хвиль, збуджених когерентними джерелами S_1 і S_2 , в точці М (рис. 11.2). Ці хвилі описуються рівняннями:

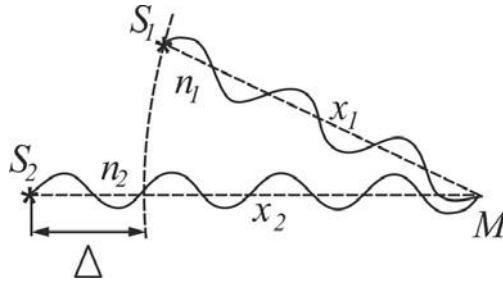


Рисунок 11.2 – Схема накладання когерентних хвиль

$$E_1(t, x_1) = A_1 \cos(\omega t - kx_1) \quad (11.1)$$

$$E_2(t, x_2) = A_2 \cos(\omega t - kx_2) \quad (11.2)$$

Амплітуду результуючого коливання визначимо методом векторних діаграм:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (11.3)$$

Як відомо, інтенсивність хвилі пропорційна квадрату амплітуди $I \sim A^2$. З урахуванням цього у співвідношенні (11.3) замінимо амплітуди через інтенсивності і отримаємо:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cdot \cos \Delta\varphi. \quad (11.4)$$

Проаналізуємо (11.4). Якщо хвилі некогерентні, то $\Delta\varphi$ безперервно змінюється, а $\cos \Delta\varphi$ прийматиме з рівною ймовірністю будь-які значення від -1 до $+1$. Середнє значення $\cos \Delta\varphi$ за часом дорівнює нулю. Звідси можна зробити висновок, що при накладенні некогерентних хвиль результуюча інтенсивність світлової хвилі дорівнює сумі інтенсивностей, що створює кожна з хвиль окремо:

$$I = I_1 + I_2 \quad (11.5)$$

Якщо хвилі когерентні, то $\cos \Delta\varphi$ має сталі в часі (але свої для кожної точки простору) значення. Якщо, $\cos \Delta\varphi > 0$, то $I > I_1 + I_2$; якщо $\cos \Delta\varphi < 0$, то $I < I_1 + I_2$. Таким чином, при накладенні когерентних хвиль відбувається перерозподіл енергії, в результаті якого в одних областях хвильового поля інтенсивність хвилі посилюється (виникають максимуми), а в інших –

інтенсивність зменшується (виникають мінімуми).

Встановимо, які умови спостереження максимумів і мінімумів.

1. Інтенсивність максимальна, якщо у виразі (11.4) $\cos \Delta\varphi = 1$, або

$$\Delta\varphi = 2m\pi, \quad (11.6)$$

де $m=0, 1, 2, 3$, тобто ціле число. Число m називається порядком максимуму.

Умова (11.6) є умовою максимумів інтерференції.

2. Інтенсивність мінімальна, якщо у виразі (11.4) $\cos \Delta\varphi = -1$, або

$$\Delta\varphi = (2m+1)\pi \quad (11.7)$$

де $m=0, 1, 2, 3$. Умова (11.7) є умовою мінімумів інтерференції.

Умовам максимумів і мінімумів можна надати іншого вигляду. Для цього знайдемо різницю фаз хвиль, що описуються рівняннями (11.1) і (11.2):

$$\Delta\varphi = \omega t - kx_1 - \omega t + kx_2 = k(x_2 - x_1). \quad (11.8)$$

Величину $x_2 - x_1 = \Delta x$ називають *геометричною різницею ходу*, $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число.

Якщо інтерферуючі промені проходять через два однорідні середовища з різними показниками заломлення n_1 і n_2 , то замість геометричної різниці ходу Δx вводять поняття *оптичної різниці ходу* Δ (рис. 11.2):

$$\Delta = n_2 x_2 - n_1 x_1, \quad (11.9)$$

де $L = n x$ – оптичний шлях в однорідному середовищі.

Оптичний шлях – це скалярна величина, яка дорівнює добутку показника заломлення середовища на геометричний шлях, пройдений хвилею.

Тоді, використовуючи співвідношення (11.6), (11.7), (11.8) і (11.9) і замінивши хвильове число через довжину хвилі, можна отримати:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (11.10)$$

$$\Delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad (11.11)$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$, тобто ціле число.

Співвідношення (11.10) визначає **умову максимумів інтерференції**: максимум інтерференції спостерігається, якщо оптична різниця ходу двох хвиль дорівнює парному числу півхвиль.

Співвідношення (11.11) визначає **умову мінімумів інтерференції**: мінімум інтерференції спостерігається, якщо оптична різниця ходу двох хвиль дорівнює непарному числу півхвиль.

Отримані співвідношення можна представити у вигляді таблиці.

Таблиця 11.1. Умови максимумів і мінімумів інтерференції

Умова максимумів	$\Delta\varphi = 2m\pi$	$\Delta = 2m\frac{\lambda}{2}$
Умова мінімумів	$\Delta\varphi = (2m+1)\pi$	$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$

При відбиванні хвилі від оптично щільнішого середовища фаза коливань вектора $\vec{E}$ змінюється на протилежну, тобто на π . Оптичний шлях при цьому змінюється на половину довжини хвилі.

$$L = nx - \frac{\lambda}{2}, \quad (11.12)$$

або

$$L = nx + \frac{\lambda}{2}. \quad (11.12a)$$

Інтерференція в тонких плівках

Інтерференцію світла можна спостерігати не тільки в лабораторії за допомогою спеціальних оптичних пристроїв, але і в природних умовах. Прикладом може бути веселкове забарвлення тонких плівок (мильних міхурів, плівок нафти або масла на поверхні води, прозорих плівок оксидів на поверхнях загартованих металевих деталей, тощо). Утворення частково когерентних хвиль при цьому відбувається через відбивання падаючого на плівку світла від верхньої і нижньої поверхонь плівки.

Розглянемо плоскопаралельну прозору плівку завтовшки d , на яку падає плоска монохроматична хвиля з довжиною хвилі λ . Припустимо, що по обидві сторони від плівки знаходиться одне і те ж середовище, наприклад, повітря (рис. 11.3). Хвилю можна розглядати як паралельний пучок променів.

Плівка відбиває вгору два паралельні пучки: один утворюється за рахунок відбивання від верхньої грані, другий – за рахунок відбивання від нижньої грані (пучки на рис. 11.3 представлені променями).

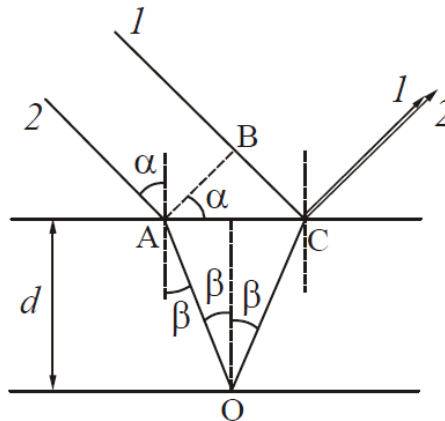


Рисунок 11.3 – Схема ходу променів у тонкій плівці

Різниця ходу, що набувають промені 1 і 2 до того, як вони зійдуться в точці С, дорівнює

$$\Delta = (AO + OC)n - BC \quad (11.13)$$

де n – показник заломлення плівки. З рисунка 11.3 випливає, що

$$AO + OC = 2d / \cos \beta, \quad (11.14)$$

$$BC = AC \sin \alpha = 2d \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha, \quad (11.15)$$

За законом заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n. \quad (11.16)$$

Підстановка співвідношень (11.14), (11.15) і (11.16) у формулу (11.13) і проведення математичних перетворень дасть наступний вираз:

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}. \quad (11.17)$$

У точці С відбивання хвилі відбувається від оптично щільнішого середовища, тому її фаза змінюється на π . У точці О відбивання відбувається від оптично менш щільного середовища, тому зміни фази не відбувається. У результаті між променями 1 і 2 виникає додаткова різниця фаз, яка дорівнює π . Її враховують, віднімаючи з оптичної різниці ходу Δ половину довжини хвилі. У результаті отримаємо

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (11.18)$$

З формули (11.18) випливає, що при сталих d , n , α значення Δ для всієї плівки буде одним і тим же і інтенсивність відбитого від неї світла однакова для будь-якої точки поверхні. Інтерференційних смуг немає і залежно від значень Δ інтенсивність відбитого світла або максимальна, або зменшується до нуля.

Для виникнення інтерференційних смуг у відбитому світлі необхідно, щоб або товщина плівки d , або кут падіння α для різних точок поверхні змінювалися. Відповідно, розглядаючи інтерференцію в тонких плівках, розрізняють смуги рівного нахилу і смуги рівної товщини.

Смуги рівного нахилу спостерігаються в тих випадках, коли на плоскопаралельну тонку плівку падає під різними кутами α_1 , α_2 пучок світла, що сходиться (або що розходиться) (рис. 11.4). Оскільки товщина плівки d і її показник заломлення n скрізь однакові, то оптична різниця ходу інтерферуючих променів змінюється уздовж поверхні плівки через зміни кута падіння α . Умови інтерференції для всіх променів, що падають на поверхню плівки і відбиваються від неї під одним і тим же кутом, однакові. Тому інтерференційна картина в цьому випадку називається смугами рівного нахилу. Смуги рівного нахилу спостерігають на екрані E , який встановлений у фокальній площині лінзи L . Якби лінзи не було, інтерференційну картину можна було б спостерігати тільки на нескінченності – в місці перетину променів $1'1''$, $2'2''$ і так далі. Для їх візуального спостереження потрібно акомодувати око на нескінченність.

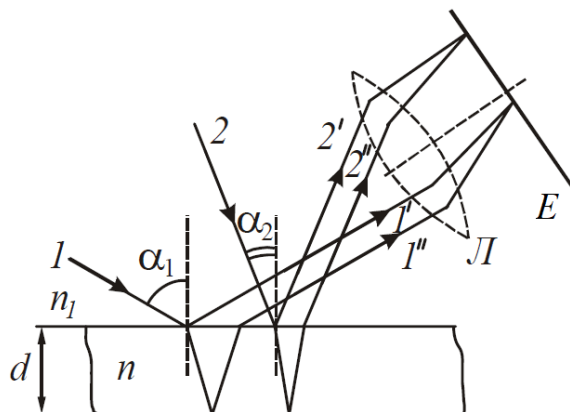


Рисунок 11.4 – Схема утворення смуг рівного нахилу

Сму́ги рівної товщи́ни спостерігаються при відбиванні паралельного пучка променів (кут падіння $\alpha = \text{const}$) від тонкої прозорої плівки, товщина якої d неоднакова в різних місцях. Умови інтерференції будуть однакові в тих точках, яким відповідають однакові значення d . Тому дана інтерференційна картина називається смугами рівної товщини. Сму́ги рівної товщини локалізовані поблизу поверхні плівки, тобто для їх спостереження необхідно акомодувати око практично на поверхню самої плівки.

ТЕМА 12

Дифракція світла

Означення дифракції. Принцип Гюйгенса - Френеля

Дифракція світла - оптичне явище, пов'язане із зміною напрямку поширення світлових хвиль (порівняно з напрямом, передбаченим геометричною оптикою) та з просторовим перерозподілом їх інтенсивності під впливом перешкод і неоднорідностей середовища на їхньому шляху. Під дифракцією розуміють будь-яке відхилення від прямолінійного поширення світла, якщо воно не зумовлене відбиванням, заломленням або викривленням променів у середовищах, в яких показник заломлення безперервно змінюється. Дифракція світла зумовлена його хвильовою природою.

Для пояснення закону прямолінійного поширення світла Х. Гюйгенс запропонував принцип, який було названо його іменем. За допомогою цього принципу він не тільки пояснив прямолінійність поширення світла, але й вивів закони відбивання і заломлення світла.

Згідно з цим принципом кожен точку хвильового фронту можна вважати центром вторинних елементарних сферичних хвиль, хвильовий фронт у будь-який наступний момент часу визначається як поверхня, що огинає ці елементарні фронти хвиль. Принцип Гюйгенса в такому формулюванні можна вважати за геометричний спосіб для побудови хвильових фронтів. Вторинні хвилі Гюйгенса відіграють роль реальних хвиль, допоміжних частин сфер, за допомогою яких шляхом геометричних побудов знаходять розміщення хвильового фронту. Ці допоміжні сфери, центрами яких є точки хвильового фронту, проявляють свою дію тільки на огинальній поверхні, яка вказує на нове розміщення хвильового фронту. При цьому не можна пояснити, чому хвиля не поширюється у зворотному напрямі. Принцип Гюйгенса дає змогу знаходити напрями поширення хвиль, але не вирішує основного питання дифракції про амплітуду коливань. Воно розв'язується з допомогою так званого принципу Гюйгенса - Френеля, який також пояснює в межах хвильової теорії прямолінійне поширення світла в однорідному середовищі.

У 1815 р. О. Френель доповнив принцип Гюйгенса твердженням про те, що вторинні хвилі інтерферують між собою. Він показав, що допоміжні вторинні джерела когерентні між собою, оскільки їх фази коливань визначаються збудженням, яке зумовлене дією первинного джерела. Поєднання принципу Гюйгенса з доповненнями О. Френеля про інтерференцію вторинних хвиль називають *принципом Гюйгенса-Френеля*. Визначаючи на його основі результуючу амплітуду коливань (інтенсивність світла) від первинного джерела в будь-якій точці простору як наслідок інтерференції вторинних хвиль, можна одержати розподіл інтенсивності при поширенні світлових хвиль, на шляху яких присутні перешкоди.

На основі таких уявлень О. Френеля можна з'ясувати причини відсутності поширення хвилі у зворотному напрямі. Вторинні хвилі, що передують хвильовому фронту, поширюються в просторі, де відсутні хвильові збурення. Вони інтерферують одна з одною. Вторинні хвилі, що поширюються у зворотному напрямі, розповсюджуються в просторі, де вже є хвильові збурення, зумовлені прямою хвилею. При інтерференції прямих і вторинних хвиль вони гасять одна одну.

Основні положення принципу Гюйгенса – Френеля полягають у наступному.

1. Кожну точку фронту хвилі можна розглядати, як джерело вторинних сферичних хвиль (рис. 12.1).
2. Вторинні хвилі когерентні, тому вони інтерферують між собою.
3. Амплітуда коливань у будь-якій точці визначається як результат інтерференції вторинних хвиль від нескінченної кількості вторинних джерел, тобто в точці *A* (рис. 12.1) накладається безліч променів.

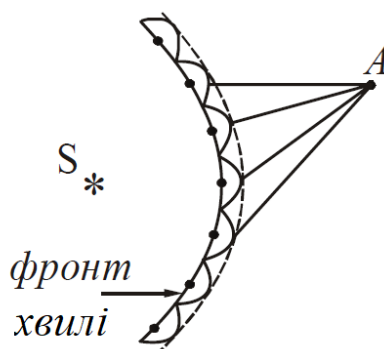


Рисунок 12.1 – Вторинні хвилі за принципом Гюйгенса-Френеля

Дифракційні явища за своїм характером поділяються на два великих класи, а саме: дифракційні явища Френеля і дифракційні явища Фраунгофера.

Ці явища дифракції розрізняють залежно від відстані від перешкоди, встановленої на шляху поширення світла, до джерела і екрана, на якому спостерігається дифракційна картина. Якщо ці відстані чи одна з них не дуже великі, то дифракційні явища називають *дифракцією Френеля*, або дифракцією в непаралельних променях.

Дифракція Фраунгофера - дифракція світла, що спостерігається на таких відстанях, для яких кутові розміри оптичних неоднорідностей набагато менші ніж відношення довжини світлової хвилі до лінійних розмірів цих неоднорідностей. Дифракція Фраунгофера називається дифракцією в паралельних променях. Між дифракціями Фраунгофера і Френеля не існує принципової різниці і різкої межі.

Дифракційні явища Фраунгофера мають в оптиці більше практичне значення, ніж дифракційні явища Френеля. Основне завдання у вивченні дифракції Фраунгофера, як і в інших випадках, полягає в знаходженні розподілу інтенсивності на екрані спостереження дифракційної картини залежно від кута дифракції.

Дифракційні ґрати

Дифракційні ґрати - це пристрій, що має N однакових паралельних щілин, розміщених на рівних відстанях одна від одної в одній або різних площинах. Якщо вони розміщені в одній площині, то такі ґрати називаються плоскими. Здебільшого дифракційні ґрати можуть бути у вигляді плоскої скляної або металевої поверхні, на якій за допомогою спеціальної машини нанесено досить багато (інколи сотні тисяч) прямих рівновіддалених штрихів. На скляних дифракційних ґратах спостереження можна проводити в прохідному та у відбитому, а на металевих - тільки у відбитому світлі.

Дифракційні ґрати в загальному вигляді - це будь-яка структура, що має просторову періодичність. Коли періодичність структури проявляється в одному

напрямі, то ґрати називаються лінійними або одновимірними, якщо ж у двох або в трьох напрямках - відповідно двовимірними, тривимірними або об'ємними.

Розглянемо плоскі дифракційні ґрати, що складаються з однакових рівновіддалених щілин, вирізаних у непрозорому екрані (рис. 12.2).

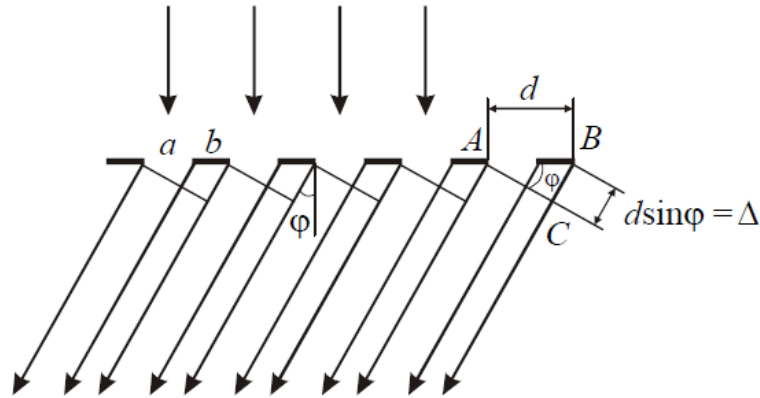


Рисунок 12.2 – Проходження світла крізь плоскі дифракційні ґрати

Основним параметром ґрат є відстань між серединами сусідніх штрихів, яке називають **періодом d (сталю) дифракційних ґрат**:

$$d = a + b, \quad (12.1)$$

де a – ширина щілини, b – розмір перешкоди (див. рис. 12.2).

На 1 мм може бути нанесене $10^3 \div 10^5$ штрихів, а період ґрат може мати значення $(1 \div 10)$ мкм.

Розглянемо дифракцію паралельних променів. Щоб отримати пучок паралельних променів зазвичай використовують невелике джерело світла. Його розміщують у фокусі збиральної лінзи. Промені після лінзи йдуть паралельно один одному. Розподіл інтенсивності вивчають за допомогою другої лінзи, яка знаходиться за ґратами, і екрану, що розташований у фокальній площині цієї лінзи.

Нехай світлова хвиля падає на ґрати нормально (тобто перпендикулярно її поверхні). З кожної щілини виходять промені за всіма напрямками (рис. 12.2). Виберемо з безлічі променів ті, які відхилилися на кут φ від первинного напрямку. Кут φ називається **кутом дифракції**. За допомогою лінзи ці промені можна зібрати в одну точку на екрані (рис. 12.3). Оскільки в цю точку промені

приходять з деякою постійною різницею ходу, то буде спостерігатись їх інтерференція.

Для того, щоб спостерігався максимум, повинна бути виконана умова:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad (12.2)$$

де Δ – різниця ходу променів, λ – довжина хвилі, $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ – порядок (номер) дифракційного максимуму.

З прямокутного трикутника ABC (див. рис. 12.2) можна знайти різницю ходу променів від відповідних точок сусідніх щілин:

$$\Delta = d \sin \varphi. \quad (12.3)$$

Промені, що дифрагують від усіх інших відповідних точок сусідніх щілин, матимуть таку ж різницю ходу в тому ж напрямі. Інші пари щілин можна розглядати аналогічним шляхом.

Прирівнявши вирази (12.2) і (12.3), отримаємо умову головних максимумів для дифракційних ґрат:

$$d \sin \varphi = m\lambda. \quad (12.4)$$

Дифракційну картину отримують на екрані, який розташовують у фокальній площині збиральної лінзи. Дифракційна картина матиме вигляд вузьких світлих смуг, розділених темними проміжками. Центральний максимум ($m = 0$) має найбільшу інтенсивність. Всі інші розташовуються симетрично відносно центрального максимуму справа і зліва (рис. 12.3). При віддаленні від центру, їх інтенсивність зменшується.

Згідно з (12.4) положення максимумів залежать від довжини хвилі λ . При освітленні ґрат білим світлом, на екрані спостерігається білий центральний максимум нульового порядку, а по обидві боки від нього – дифракційні спектри 1-го, 2-го і так далі порядків. Спектри мають вигляд веселкових смужок, у яких спостерігається безперервний перехід забарвлення від фіолетового кольору у внутрішнього краю спектру до червоного у зовнішнього краю.

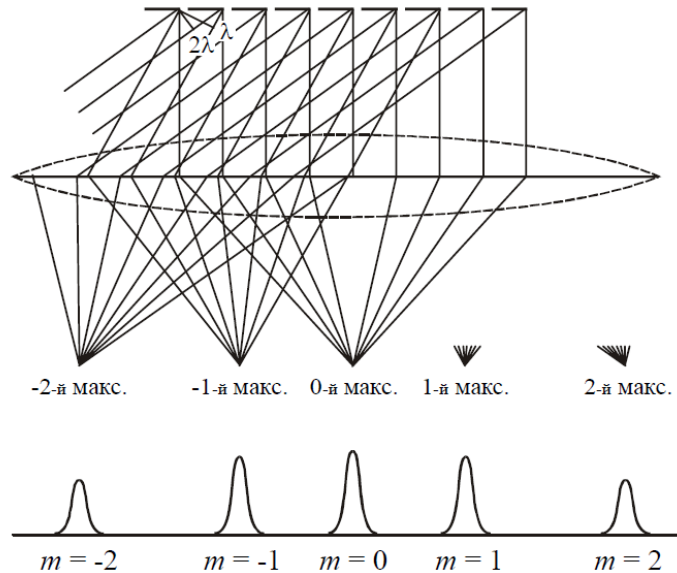


Рисунок 12.3 – Схема утворення дифракційної картини

Основними характеристиками дифракційних ґрат є їх роздільна здатність і дисперсія.

Роздільною здатністю спектрального приладу називають безрозмірну величину

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (12.5)$$

де $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ – мінімальна різниця довжин хвиль двох спектральних ліній, при якій ці лінії сприймаються роздільно.

Роздільну здатність ґрат можна розрахувати, користуючись умовою Релея, за якою дві монохроматичні спектральні лінії ще видні роздільно, коли головний максимум однієї лінії потрапляє на місце найближчого до нього мінімуму другої лінії (рис. 12.4). З цієї умови виходить, що роздільна здатність дифракційних ґрат

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN, \quad (12.6)$$

де N – кількість штрихів ґрат, m – порядок дифракційного максимуму. У ґратах велика роздільна здатність досягається за рахунок великих значень N , оскільки порядок m невеликий.

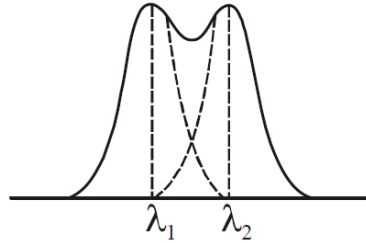


Рисунок 12.4 – Умова Релея для визначення роздільної здатності

Дисперсія визначається кутовою відстанню $\delta\varphi$ між двома спектральними лініями, віднесеними до різниці їх довжин хвиль

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \quad (12.7)$$

де $\delta\lambda$ зазвичай виражають в нанометрах.

Для невеликих кутів відхилення дисперсія ґрат стала: $\delta\varphi$ пропорційне $\delta\lambda$. Тому дифракційні спектри іноді називають нормальними, на відміну від спектрів, що отримуються за допомогою скляних призм, у яких рівні інтервали хвиль в червоній частині спектру вужчі, ніж у фіолетовій.

Дифракція рентгенівських променів

Просторовими, або тривимірними дифракційними ґратами називається таке оптично неоднорідне середовище, неоднорідності якого періодично повторюються. Прикладом просторових дифракційних ґрат можуть бути кристалічні ґрати твердого тіла. Частинки, що знаходяться у вузлах цих ґрат (атоми, молекули, іони), відіграють роль впорядковано розташованих центрів, які когерентно розсіюють світло. Сталі кристалічних ґрат твердих тіл ($d \sim 5 \cdot 10^{-10}$ м) значно менші, ніж довжина хвилі видимого світла ($\lambda_{\text{вид.св.}} \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м). Тому для видимого світла кристали є оптично однорідним середовищем. У той же час для рентгенівських променів ($\lambda_{\text{рентг.}} = 10^{-11} \div 10^{-9}$ м) кристали є природними дифракційними ґратами.

Дифракцію рентгенівських променів на кристалах можна трактувати як результат інтерференції рентгенівського випромінювання, що дзеркально

відбивається від системи паралельних площин. Ці площини проходять через вузли кристалічних ґрат і називаються *атомними площинами кристала* (рис. 12.5). Відстань d між сусідніми атомними площинами називається *міжплощинною відстанню*. Кут θ між падаючим променем і атомною площиною кристала називається *кутом ковзання*.

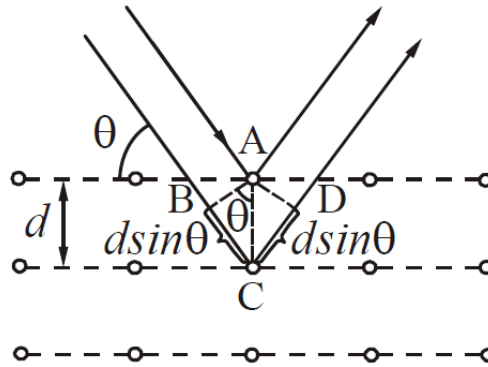


Рисунок 12.5 – Схема дифракції рентгенівських променів

Різниця ходу променів, відбитих від двох сусідніх атомних площин

$$\Delta = BC + CD = 2d \sin \theta. \quad (12.8)$$

Для того, щоб спостерігався максимум, повинна виконуватися умова:

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}. \quad (12.9)$$

Прирівнявши співвідношення (12.8) і (12.9), отримаємо:

$$2d \sin \theta = m\lambda. \quad (12.10)$$

Ця формула називається формулою Вульфа-Брегга.

Дифракція рентгенівських променів від кристалів знаходить два основні застосування:

1. Дослідження спектрального складу рентгенівського випромінювання (рентгенівська спектроскопія).
2. Вивчення структури кристалів (рентгеноструктурний аналіз).

ТЕМА 13

Поляризоване світло

Характеристики поляризованого світла

Електромагнітні хвилі є поперечними. Це означає, що вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ і вектор напруженості магнітного поля $\vec{H}$ ($\vec{E} \perp \vec{H}$) коливаються у площинах, перпендикулярних напрямку поширення хвилі (рис. 13.1). Як наголошувалося раніше, вектор напруженості електричного поля $\vec{E}$ називається світловим вектором. Напрямок коливань світлового вектора з часом може змінюватися.

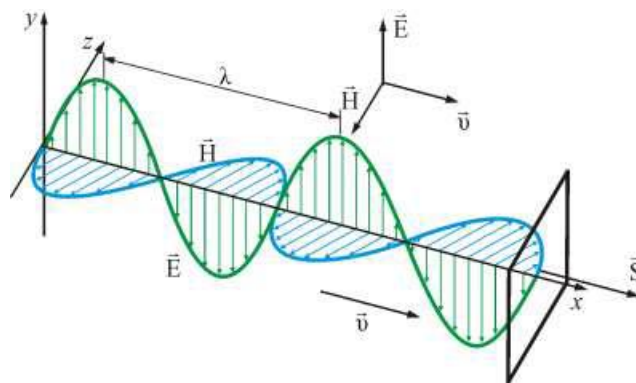


Рисунок 13.1 – Схема електромагнітної хвилі

Якщо всі напрями коливань світлового вектора в площині, перпендикулярній напрямку поширення хвилі, рівноймовірні, то світло називається *неполяризованим* або *природним*. Якщо коливання вектора яким-небудь чином впорядковані, то світло називається *поляризованим*. Поляризуватися можуть тільки поперечні хвилі.

Для того, щоб визначити, поляризовано світло чи ні, використовують прилади, які пропускають світло тільки з певним напрямом вектора $\vec{E}$ (рис. 13.2). Залежно від призначення їх називають поляризаторами або аналізаторами. Якщо світло неполяризоване, то при повороті аналізатора навколо горизонтальної осі інтенсивність світла, що сприймається фотоприймачем, завжди одна і та ж.

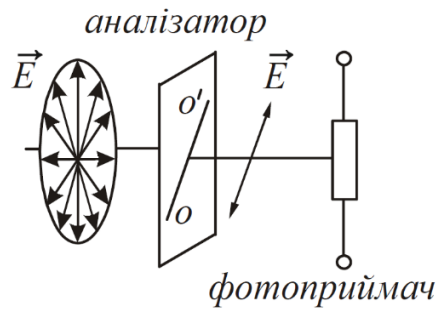


Рисунок 13.2 – Проходження світла крізь аналізатор

Окрім поляризованого світла існує частково поляризоване світло. У цьому випадку напрям світлового вектора також змінюється хаотично, але є деякий напрям, при якому в середньому амплітуда коливань більша. Для цього випадку вводять поняття **степені поляризації**: обертаючи аналізатор, визначають значення максимальної $I_{\max}$ і мінімальної інтенсивності $I_{\min}$, що сприймається фотоприймачем. Степінь поляризації визначається виразом:

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (13.1)$$

Для неполяризованого світла $I_{\max} = I_{\min}$. У цьому випадку степінь поляризації $P = 0$.

Якщо неполяризоване світло проходить крізь поляризатор, то воно стає лінійно або плоско поляризованим світлом. При цьому $I_{\min} = 0$, а степінь поляризації дорівнює 1.

Площина, в якій відбуваються коливання вектора $\vec{E}$ і яка проходить через напрям поширення хвилі, називається **площиною поляризації**.

Для лінійно поляризованого світла слушний закон Малюса. Нехай коливання електричного вектора відбуваються у вертикальній площині і амплітуда коливань дорівнює E_0 (рис. 13.3). Якщо вісь аналізатора $00'$ повернена на кут φ по відношенню до напрямку поляризації, то до фотоприймача пройде світло з амплітудою

$$E_{\parallel} = E_0 \cos \varphi.$$

Інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди, тому

$$I = I_0 \cos^2 \varphi, \quad (13.2)$$

де I_0 – інтенсивність поляризованого світла, падаючого на аналізатор;

I – інтенсивність світла, що вийшло з аналізатора;

φ – кут між площиною поляризації променя, падаючого на аналізатор і площиною пропускання аналізатора.

Вираз (13.2) називається **законом Малюса**.

У реальних умовах необхідно враховувати, що електромагнітні хвилі не тільки відбиваються але і поглинаються, тобто за реальними умовами закон Малюса виглядатиме таким чином:

$$I = I_0 (1 - k) \cos^2 \varphi, \quad (13.3)$$

де k – коефіцієнт, що враховує втрати на відбивання і поглинання.

Способи отримання поляризованого світла

Відбивання від межі розділу двох діелектриків. Закон Брюстера

Світлові промені, проходячи через межу розділу двох середовищ з різними показниками заломлення n_1 і n_2 , зазнають відбивання і заломлення. Відбитий і заломлений промені завжди виявляються частково поляризованими. У відбитому світлі коливання відбуваються переважно перпендикулярно площині падіння променя, в заломленому – в площині падіння (рис. 13.3).

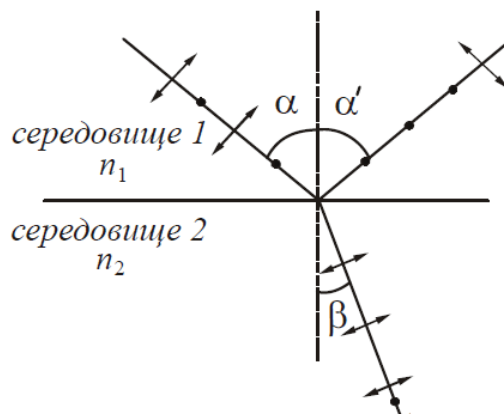


Рисунок 13.3 – Часткова поляризація світла при падінні під довільним кутом

Д. Брюстер експериментально встановив, що відбитий промінь буде повністю поляризований, якщо відбитий і заломлений промені перпендикулярні один одному (рис. 13.4). Відповідний кут падіння називають кутом Брюстера і позначають α_B .

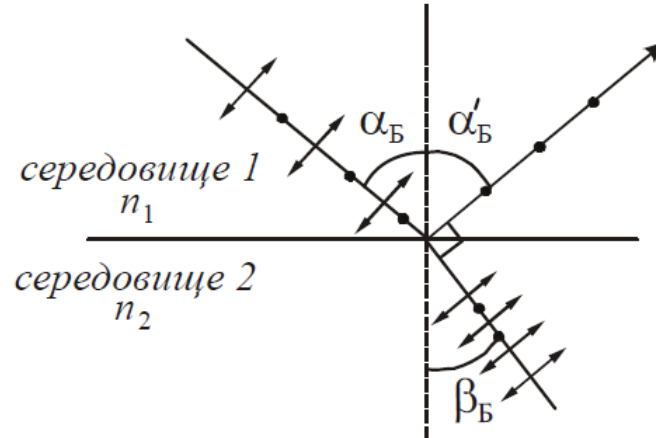


Рисунок 13.4 – Поляризація світла при падінні під кутом Брюстера

Знайдемо кут Брюстера. За законом заломлення:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta_B} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Оскільки $\alpha_B = \alpha'_B$, то $\alpha_B + \beta_B = 90^\circ$, тоді

$$\sin \beta_B = \sin(90^\circ - \alpha_B) = \cos \alpha_B.$$

Зробивши заміну, отримаємо:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = \frac{n_2}{n_1},$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}. \quad (13.4)$$

Вираз (13.4) називається **законом Брюстера**: *відбите світло повністю лінійно поляризоване при куті падіння, тангенс якого дорівнює відносному показнику заломлення середовища, що відбиває світло.*

Заломлення світла в тонкій пластинці

Оскільки світло, відбите від межі розділу двох діелектриків виявляється частково (або повністю) поляризованим, то світло, що проходить, також частково поляризується. Переважний напрям коливань електричного вектора в світлі, що проходить, співпадає з площиною заломлення променя (рис. 13.3, 13.4). Максимальна поляризація світла, що проходить, досягається при падінні під кутом Брюстера.

Степінь поляризації світла, що проходить, можна підвищувати, піддаючи його ряду послідовних відбить і заломлень. Це здійснюється в стосі, що складається з декількох однакових паралельних пластин з прозорого діелектрика (наприклад, скла), встановлених під кутом Брюстера до падаючого світла. Якщо кількість пластин достатньо велика, то світло, що проходить крізь стос, виявляється теж практично лінійно поляризованим.

Подвійне променезаломлення

В оптично анізотропних кристалах спостерігається явище ***подвійного променезаломлення***. Це явище полягає в тому, що промінь світла, що падає на поверхню кристала, роздвоюється в ньому на два заломлених промені з взаємно перпендикулярними площинами коливань. Один з променів підкоряється звичайним законам заломлення і задовольняє закону Снеліуса, тому його називають звичайним променем і позначають літерою z (рис. 13.5). Другий промінь позначають літерою n і називають незвичайним. Він не лежить в площині падіння і не підкоряється закону Снеліуса. Наприклад, якщо навіть світло падає нормально (рис. 13.5), незвичайний промінь заломлюється.

Кристали, що мають подвійне променезаломлення, підрозділяються на одновісні і двовісні. У одновісних кристалів є напрям, уздовж якого звичайний і незвичайний промені поширюються не розділяючись. Цей напрям називається оптичною віссю кристала. Слід мати на увазі, що оптична вісь – це не пряма лінія, що проходить через якусь точку кристала, а певний напрям в кристалі. Будь-яка

пряма, паралельна даному напрямку, є оптичною віссю кристала. У двовісних кристалів таких напрямів два.

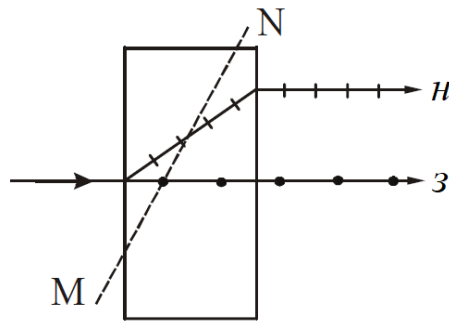


Рисунок 13.5 – Схема подвійного променезаломлення

З кристалів, що володіють подвійним променезаломленням, виготовляють **поляризаційні призми**. Однією з них є *призма Ніколя*. Вона вирізана з кристала ісландського шпату так, що її грані AB і CD паралельні оптичній осі MN кристала (рис. 13.6). Призма розрізана по діагональній площині AC і склеєна по цій поверхні тонким шаром оптично ізотропної речовини, яка називається канадським бальзамом. Для звичайних променів канадський бальзам є середовищем оптично менш щільним, ніж матеріал призми.

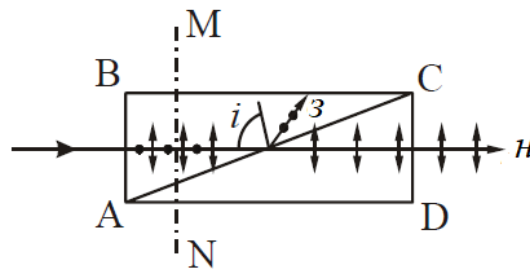


Рисунок 13.6 – Хід променів у призмі Ніколя

Для незвичайного променю він є оптично щільнішим середовищем. Світло падає на призму нормально до її грані AB. Звичайний і незвичайний промені поширюються в призмі, не заломлюючись, до шару канадського бальзаму. Розміри призми підбираються так, щоб кут падіння звичайного променю на поверхню AC був більше граничного кута внутрішнього відбиття. Тому звичайна хвиля повністю відбивається від шару канадського бальзаму

(промінь з на рис. 13.6). Незвичайний промінь n вільно проходить крізь шар бальзаму і другу половину поляризаційної призми. Таким чином, поляризаційна призма може бути використана як поляризатор.

Обертання площини поляризації

При проходженні поляризованого світла крізь деякі речовини відбувається поворот площини поляризації світлової хвилі. Це явище називається **обертанням площини поляризації**. Речовини, які здатні повертати площину поляризації падаючих на них світлових хвиль, називаються **оптично активними речовинами**. Оптично активними можуть бути як рідини, так і кристали. Це, наприклад, розчини цукру, глюкози, скипидар, кіновар, кварц і так далі. Розрізняють праве обертання, або позитивне, і ліве, або негативне. При правому обертанні площина поляризації повертається за годинниковою стрілкою для променя, падаючого в око спостерігача, при лівому – в протилежному напрямі.

Для оптично активних рідин кут повороту φ площини поляризації визначається співвідношенням:

$$\varphi = [a]lc, \quad (13.5)$$

де l - товщина шару рідини; c - концентрація розчину; $[a]$ - питома стала розчину, яка залежить від природи речовини.

Властивості оптичної активності розчинів дають змогу визначити їх концентрації. Прилади, за допомогою яких проводять такі вимірювання, називаються **поляриметрами**. Оскільки для розчину цукру питома обертення $[a]$ значне, то поляриметри набули широкого застосування в цукрометрії.

Кут повороту площини поляризації кристалічними речовинами визначається співвідношенням:

$$\varphi = [a]l, \quad (13.6)$$

де l – шлях, пройдений променем в кристалі;

$[a]$ – стала обертання, яка залежить від довжини хвилі.

Якщо між двома схрещеними поляризаторами помістити оптично активну речовину (кристал кварцу, прозору кювету з розчином цукру і тому подібне), то поле зору проясняється. Щоб знову отримати темноту, потрібно повернути один з поляризаторів на кут φ , який визначається формулами (13.5) і (13.6). У разі розчину можна за відомими значеннями питомої постійної обертання a даної речовини і довжини l після виміру кута повороту φ знайти концентрацію розчину. Такий спосіб визначення концентрації розчинів застосовують у виробництві різних речовин.

ТЕМА 14

Теплове випромінювання

Характеристики теплового випромінювання

Всі тіла в тому або іншому степені випромінюють електромагнітні хвилі. Наприклад, сильно нагріті тіла світяться, а при звичайних температурах є джерелами тільки невидимого інфрачервоного випромінювання.

Електромагнітне випромінювання, що випускається речовиною і що виникає за рахунок його внутрішньої енергії, називається **тепловим**. Воно залежить тільки від температури і оптичних властивостей випромінюючого тіла.

Оточимо випромінююче тіло оболонкою з ідеально відбивною поверхнею (рис. 14.1). Повітря з оболонки видалимо. Відбите оболонкою випромінювання, впавши на тіло, буде поглинатись ним (частково або повністю). Отже, відбуватиметься безперервний обмін енергією між тілом і випромінюванням, що заповнює оболонку.

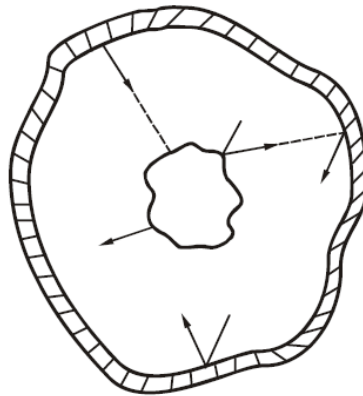


Рисунок 14.1 – Обмін енергією між тілом і оболонкою

Якщо розподіл енергії між тілом і випромінюванням залишається незмінним для кожної довжини хвилі, то стан системи «тіло – випромінювання» називається рівноважним. **Теплове випромінювання – це єдиний вид випромінювання, який може знаходитися в термодинамічній рівновазі з випромінюючими тілами.** Решта всіх видів випромінювання виявляється нерівноважними. При рівновазі витрата енергії тіла на теплове випромінювання

компенсується за рахунок поглинання тілом такої ж кількості енергії падаючого на нього випромінювання. Рівноважне випромінювання встановлюється в адіабатично замкненій системі, тобто такій, яка не обмінюється теплом із зовнішнім середовищем. У такій системі всі тіла знаходяться при одній і тій же температурі.

До рівноважних процесів і станів застосовні закони термодинаміки, тому теплове випромінювання повинне підкорятися деяким закономірностям термодинаміки.

Перед тим, як аналізувати закони теплового випромінювання і його поглинання, введемо ряд необхідних понять.

Енергетичний потік (Φ_e) – скалярна фізична величина, яка дорівнює енергії електромагнітного випромінювання всіх ділянок спектру, що випромінюється за одиницю часу:

$$\Phi_e = \frac{dW}{dt}.$$

Для середніх величин

$$\Phi_e = \frac{W}{t}. \quad (14.1)$$

$$[\Phi_e] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Випромінювальна або енергетична світимість (R_e) – скалярна фізична величина, яка дорівнює енергії, що випромінюється з одиниці поверхні за одиницю часу у всьому діапазоні довжин хвиль (від 0 до ∞):

$$R_e = \frac{d\Phi}{dS}.$$

Для середніх величин

$$R_e = \frac{W}{S \cdot t}. \quad (14.2)$$

$$[R_e] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Випромінювальна здатність або спектральна густина енергетичної світимості ($r_{\lambda,T}$) – скалярна фізична величина, що дорівнює енергії, яка випромінюється з одиниці поверхні за одиницю часу в одиничному інтервалі, вибраному поблизу заданої довжини хвилі:

$$r_{\lambda,T} = \frac{dR_e}{d\lambda}. \quad (14.3)$$

$$[r_{\lambda,T}] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Значення випромінювальної здатності залежить від довжини хвилі, температури, хімічного складу тіла і стану його поверхні. Енергетична світимість і випромінювальна здатність зв'язані співвідношенням

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda. \quad (14.4)$$

Поглинальна здатність або монохроматичний коефіцієнт поглинання ($\alpha_{\lambda,T}$) – безрозмірна фізична величина, що показує, яка частка енергії електромагнітних хвиль, що падають на тіло, поглинається ним:

$$\alpha_{\lambda,T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}}. \quad (14.5)$$

За визначенням, поглинальна здатність не може бути більше одиниці. Поглинальна здатність реальних тіл залежить від властивостей речовини і спектрального складу падаючого випромінювання.

Класифікація тіл

Абсолютно чорним тілом називається тіло, яке повністю поглинає все падаюче на нього випромінювання незалежно від його спектрального складу і напрямку падаючого випромінювання, нічого не відбиваючи і не пропускаючи. Отже, поглинальна здатність абсолютно чорного тіла тотожно дорівнює одиниці:

$$\alpha_{\lambda,T,S} \equiv 1. \quad (14.6)$$

Індекс S – це перша літера німецького слова *Schwarz* – *чорний*.

Абсолютно чорних тіл в природі не існує. Сажа і платинова чернь мають поглинальну здатність, близьку до одиниці, але в обмеженому інтервалі довжин хвиль. У далекій інфрачервоній області їх поглинальна здатність менше одиниці.

Моделлю абсолютно чорного тіла може служити замкнена порожнина з невеликим отвором (рис. 14.2). Випромінювання, що проникло всередину порожнини через отвір O , багато разів відбивається від стінок. При кожному відбитті частина енергії поглинається, внаслідок чого практично все випромінювання будь-якої частоти повністю поглинається стінками порожнини незалежно від матеріалу стінок.

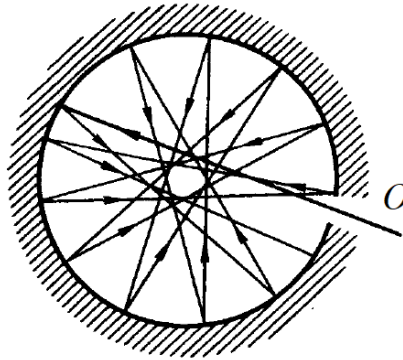


Рисунок 14.2 – Модель абсолютно чорного тіла

У теорії теплового випромінювання разом з поняттям абсолютно чорного тіла часто користуються іншою, ідеалізованою моделлю реальних тіл – сірим тілом.

Сірим тілом називається тіло, поглинальна здатність якого менше одиниці і не залежить від довжини хвилі (частоти) випромінювання і від абсолютної температури.

Енергія $dW_{\text{над}}$, падаюча на непрозоре тіло, дорівнює сумі відбитої $dW_{\text{відб}}$ і поглиненою $dW_{\text{погл}}$ енергій:

$$dW_{\text{над}} = dW_{\text{відб}} + dW_{\text{погл}}.$$

Розділивши це співвідношення на $dW_{\text{над}}$, отримаємо:

$$1 = \alpha_{\lambda, T} + \rho_{\lambda, T}. \quad (14.7)$$

де

$$\rho_{\lambda,T} = \frac{dW_{\text{відб}}}{dW_{\text{над}}}, \quad (14.8)$$

величина, яку називають відбивною здатністю.

Відбивна здатність ($\rho_{\lambda,T}$) – безрозмірна фізична величина, що показує, яка частка енергії електромагнітних хвиль, що падають на тіло, відбивається ним. Відбивна $\rho_{\lambda,T}$ здатність залежить від властивостей речовини і спектрального складу падаючого випромінювання. Для реальних тіл:

$$0 \leq \alpha_{\lambda,T} \leq 1 \quad \text{і} \quad 0 \leq \rho_{\lambda,T} \leq 1. \quad (14.9)$$

Відбивна здатність абсолютно чорного тіла дорівнює нулю, тобто $\rho_{\lambda,T,S} = 0$.

Непрозорі тіла, у яких поглинальна здатність дорівнює нулю, не випромінюють і не поглинають електромагнітних хвиль: вони повністю відбивають випромінювання, яке падає на них. Якщо відбивання при цьому відбувається за законами геометричної оптики, то тіло називається *дзеркальним*. Для дзеркальних тіл:

$$\rho_{\lambda,T} \equiv 1, \quad \alpha_{\lambda,T} \equiv 0. \quad (14.10)$$

Абсолютно дзеркальних тіл в природі також не існує. Близькою до дзеркальної поверхні є поверхня срібла ($\rho_{\lambda,T} \approx 0,95$).

Закон Кірхгофа

Між випромінювальною і поглинальною здібностями непрозорого тіла є зв'язок. Розглянемо наступний експеримент. Нехай усередині замкненої вакуумованої оболонки, температура якої постійна, знаходяться декілька тіл (рис. 14.3). Ці тіла можуть обмінюватися енергією між собою і оболонкою тільки шляхом випромінювання і поглинання електромагнітних хвиль. Дослід показує, що через деякий час всі тіла приймуть однакову температуру, рівну температурі оболонки T . У такому стані тіло, що має більшу випромінювальну здатність $r_{\lambda,T}$

втрачає більше енергії, ніж те тіло, у якого випромінювальна здатність менша. Оскільки температура тіл не змінюється, то тіло, що випромінює більше енергії, повинно більше її поглинати, тобто матиме більшу поглинальну здатність.

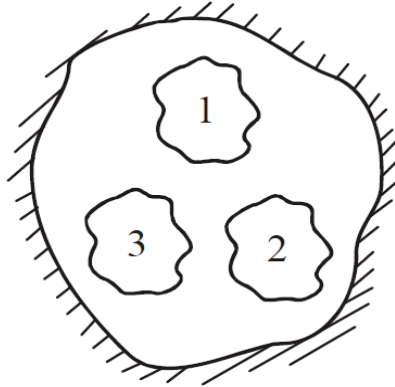


Рисунок 14.3 – Тіла у замкненій оболонці

Таким чином, чим більше випромінювальна здатність $r_{\lambda,T}$, тим більше поглинальна здатність $\alpha_{\lambda,T}$. У 1895 році німецький фізик Кірхгоф встановив, що *у стані теплової рівноваги відношення випромінювальної здатності до поглинальної здатності не залежить від природи тіл, а є для всіх тіл однією і тією ж універсальною функцією довжини хвилі і температури.*

$$\left(\frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_1 = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_2 = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{\alpha_{\lambda,T}} \right)_3 = \dots = f(\lambda, T), \quad (14.11)$$

де індекси 1, 2, 3 ... відносяться до різних тіл. Співвідношення (14.11) називається законом Кірхгофа.

Для абсолютно чорного тіла поглинальна здатність $\alpha_{\lambda,T,S} = 1$. Отже, із співвідношення (14.11) випливає, що випромінювальна здатність $r_{\lambda,T}$ для такого тіла дорівнює $f(\lambda, T)$. Таким чином, універсальна функція Кірхгофа – це випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла. Кірхгоф не зумів встановити вид функції $f(\lambda, T)$. Всі спроби отримати її на основі класичної термодинаміки закінчилися невдало.

Після встановлення закону Кірхгофа стало очевидним, що першочергове завдання теорії теплового випромінювання – знайти вид універсальної функції

$f(\lambda, T)$, тобто треба було знайти, як випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла $r_{\lambda, T}$ залежить від довжини хвилі λ і температури T .

Випромінювальна здатність порожнини з дуже маленьким отвором дуже близька до $f(\lambda, T)$, причому T означає температуру стінок порожнини. Таким чином, якщо стінки порожнини підтримувати при деякій температурі T , то з отвору виходить випромінювання, близьке за спектральним складом до випромінювання абсолютно чорного тіла при тій же температурі. Розкладаючи випромінювання в спектр і вимірюючи інтенсивність різних ділянок спектру, вдалося експериментально знайти вид функції $f(\lambda, T)$. Результати цього експерименту представлені на графіках (рис. 14.4).

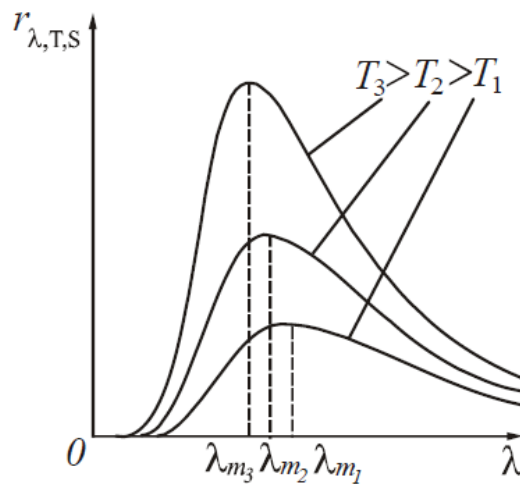


Рисунок 14.4 – Випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла

З аналізу графіків були зроблені наступні висновки.

- Енергетичний спектр теплового випромінювання є безперервним, тобто в ньому присутні всі довжини хвиль від 0 до ∞ .
- В області малих і великих довжин хвиль випромінювання мале.
- Криві мають максимуми, тобто існує довжина хвилі, при якій випромінювальна здатність абсолютно чорного тіла приймає найбільше значення. З підвищенням температури максимум зміщується у бік коротших довжин хвиль.
- Площа, що охоплюється кривою, дає енергетичну світимість абсолютно чорного тіла при відповідній температурі.

- Енергетична світимість абсолютно чорного тіла сильно зростає з температурою.

На основі цих висновків і інших експериментів був встановлений ряд законів теплового випромінювання.

ТЕМА 15

Закони теплового випромінювання

Закони Стефана – Больцмана і Віна

Аналізуючи експериментальні дані, Й. Стефан і Л. Больцман встановили зв'язок між випромінювальною здатністю (енергетичною світністю) абсолютно чорного тіла і його температурою. За законом Стефана – Больцмана *випромінювальна здатність (енергетична світність) абсолютно чорного тіла пропорційна четвертому степеню його абсолютної температури:*

$$R_e = \sigma T^4, \quad (15.1)$$

де $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – стала Стефана – Больцмана.

Для сірих тіл цей закон застосовують в наступному вигляді:

$$R_e = \alpha \sigma T^4, \quad (15.2)$$

де α - коефіцієнт монохроматичного поглинання (поглинальна здатність).

В. Він також не зміг встановити вид функції Кірхгофа, зате йому вдалося знайти положення максимуму функції і залежність максимального значення випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла від температури.

Довжина хвилі, на яку припадає максимальне значення випромінювальної здатності (спектральної густини енергетичної світності) абсолютно чорного тіла обернено пропорційна його абсолютній температурі:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (15.3)$$

де $b = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ – стала Віна.

Вираз (15.3) називають законом зміщення Віна.

Максимальне значення випромінювальної здатності (спектральної густини енергетичної світності) абсолютно чорного тіла пропорційне п'ятому степеню його абсолютної температури:

$$(r_{\lambda,T})_{\max} = c \cdot T^5, \quad (15.4)$$

де $c=1,3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³·К⁵) – стала величина.

Вираз (15.4) називають другим законом Віна.

Всі спроби теоретичного обґрунтування експериментально знайденого виду функції Кірхгофа в рамках класичної фізики виявилися безуспішними.

Гіпотеза Планка. Формула Планка

У зв'язку з тим, що всі спроби пояснити закономірності теплового випромінювання на основі законів класичної фізики закінчилися невдачею, в 1900 році М. Планк висунув нову гіпотезу про природу випромінювання. Суть цієї гіпотези полягає в наступному:

Електромагнітні хвилі випромінюються у вигляді окремих порцій енергії (квантів), величина яких пропорційна частоті випромінювання.

Енергія кванта:

$$\varepsilon = h\nu, \quad (15.5)$$

де ν – частота випромінювання.

Коефіцієнт пропорційності h згодом був названий сталою Планка.

$$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}.$$

Використовуючи співвідношення, що зв'язує швидкість, довжину хвилі і частоту $c = \lambda \nu$, енергію кванта можна виразити формулою

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}. \quad (15.6)$$

На основі своєї гіпотези М. Планк розробив квантову теорію теплового випромінювання. Йому вдалося знайти правильний вираз для функції Кірхгофа, тобто отримати формулу для розрахунку випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла $r_{\lambda,T,S}$. Ця формула має вигляд:

$$r_{\lambda,T,S} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}, \quad (15.7)$$

де c – швидкість світла;

k – стала Больцмана.

Формула (15.7) називається формулою Планка. Криві, розраховані за цією формулою, співпадають з експериментально отриманими кривими (рис. 14.4).

Якщо у вираз $R_e = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T,S} d\lambda$ (див. формулу (14.4)) підставити значення

випромінювальної здатності відповідно до формули Планка і проінтегрувати, то можна отримати закон Стефана – Больцмана. Якщо узяти похідну функції $r_{\lambda,T,S}$

за довжиною хвилі λ і прирівняти її до нуля, то можна розрахувати b – сталу Віна.

Отримане значення співпадає з експериментальним. Це є підтвердженням слушності теорії Планка.

Таким чином, можна стверджувати, що світлу, окрім хвильових властивостей, властиві також і корпускулярні.

Випромінювання всіх твердих тіл, рідин і газів характеризується нерівномірним розподілом енергії у спектрі випромінювання, а їхні інтегральні і спектральні поглинальні здатності завжди менші, ніж в абсолютно чорного тіла.

Якщо спектр випромінювання тіла суцільний, а розподіл енергії за довжинами хвиль подібний до розподілу енергії у спектрі абсолютно чорного тіла, то такі тіла називаються сірими. Для сірих тіл при заданій температурі

$$\frac{r_{\lambda,T}}{r_{\lambda,T,S}} = \text{const} = \alpha_T. \quad (15.8)$$

Тіла, для яких умова (15.8) не виконується, називаються селективними. Випромінювання реальних тіл у деякій мірі має селективний характер. Найбільша селективність випромінювання характерна для газів, оскільки вони випромінюють хвилі у певних, порівняно вузьких ділянках спектра.

Сірих тіл, так само, як і абсолютно чорних, у природі не існує. В інтервалі довжин хвиль від фіолетової до далекої інфрачервоної частини спектра для жодного тіла умова (15.8) не виконується. Однак для різних тіл у деяких частинах спектра умова (15.8) справджується з певною точністю.

Оптична пірометрія

Для вимірювання температур нагрітих тіл за термометричний параметр можна використати теплове випромінювання.

Сукупність оптичних методів визначення температур, які ґрунтуються на законах рівноважного випромінювання, називається *оптичною термометрією*, а методи вимірювання високих температур називаються *оптичною пірометрією*. Оптичні методи вимірювання температур не потребують безпосереднього контакту вимірювальних приладів із досліджуванним тілом. Завдяки цьому можна вимірювати високі температури, а також температури віддалених тіл. Застосування цих методів не змінює досліджувані тіла.

Залежно від того, який із законів теплового випромінювання покладено в основу методу вимірювання температур, розрізняють три умовних температури: *енергетичну*, або *радіаційну*; *яскравісну*; *колірну*. Вони функціонально зв'язані із справжньою температурою тіла і його випромінювальною здатністю.

Під *радіаційною* розуміють температуру абсолютно чорного тіла, при якій його випромінювальна здатність $R_{e,s}(T)$ однакова з випромінювальною здатністю $R_e(T)$ тіла, температуру якого визначають.

Відповідно до означення радіаційної температури та закону Стефана — Больцмана для сірих тіл маємо

$$R_e(T) = \sigma T_p^4 = \alpha(T) \cdot \sigma T^4, \quad (15.9)$$

звідки

$$T = \frac{T_p}{\sqrt[4]{\alpha(T)}}. \quad (15.10)$$

Оскільки $\alpha(T) < 1$, то справжня температура тіла більша від радіаційної.

Радіаційну температуру вимірюють радіаційним пірометром (рис. 15.1), об'єktiv якого дає змогу одержати чітке зображення джерела світла S на приймачі Π так, щоб зображення повністю покривало поверхню приймача. Як приймачі в пірометрах часто використовують термобатарей або болометри. Пірометри попередньо градуують за допомогою абсолютно чорного тіла,

температура якого відома.

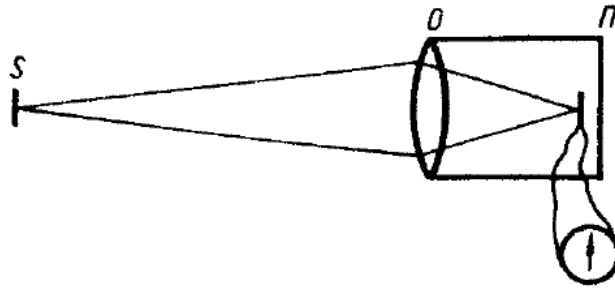


Рисунок 15.1 – Радіаційний пірометр

Під *яскравісною* розуміють температуру абсолютно чорного тіла, при якій його спектральна випромінювальна здатність $r_{\lambda,T,S}$ дорівнює спектральній випромінювальній здатності досліджуваного тіла для тієї самої довжини хвилі, тобто

$$r_{\lambda,T,S} = r_{\lambda,T},$$

де T - справжня температура тіла.

Оскільки для світлових хвиль видимої частини спектра, що випромінюється нагрітими тілами, температура яких $T \sim 3000$ К, величина $hc/\lambda kT \approx 7$, то $e^7 \gg 1$. Нехтуючи одиницею у формулі Планка (15.7), вираз (14.11) можна записати так:

$$\exp\left[\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_s}\right) \frac{hc}{\lambda k}\right] = \alpha(\lambda, T). \quad (15.11)$$

Із співвідношення (15.11) маємо

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_s} = \frac{\lambda k}{hc} \ln \alpha(\lambda, T), \quad (15.12)$$

що виражає взаємозв'язок між яскравісною і справжньою температурами тіла. Для нечорних тіл маємо $\alpha(\lambda, T) < 1$; яскравісна температура менша від справжньої.

Яскравісна температура вимірюється пірометром із зникаючою ниткою (рис. 15.2). Його дія полягає в тому, що за допомогою об'єктива О зображення

поверхні нагрітого тіла, температуру якого визначають, сполучають із площиною нитки лампи розжарення Л, яка вмикається в електричне коло. Поверхня тіла і нитка спостерігаються крізь окуляр О1. Перед окуляром знаходиться світлофільтр Ф, який пропускає досить вузьку частину спектра (для $\lambda = 0,66$ мкм). Під час вимірювань за допомогою реостата змінюють струм доти, доки яскравості нитки і зображення поверхні тіла не стануть однаковими. Міліамперметр попередньо градуують у градусах за допомогою випромінювання абсолютно чорного тіла. Якщо величина випромінювального тіла відома, то за яскравісною температурою можна визначити справжню температуру тіла.

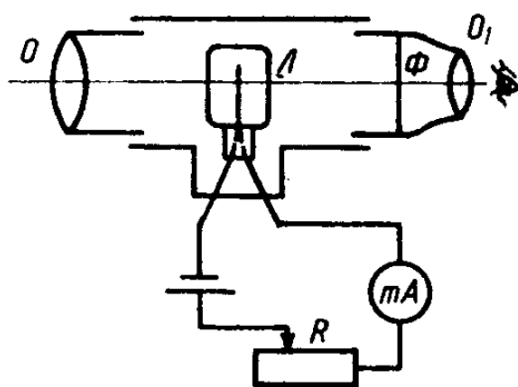


Рисунок 15.2 – Пірометр зі зникаючою ниткою

Під *колірною* розуміють температуру абсолютно чорного тіла, при якій спектральний склад його випромінювання однаковий із спектральним складом досліджуваного тіла, тобто відношення спектральних випромінювальних здатностей для двох заданих довжин хвиль однакові. За означенням, поняття колірної температури застосовуване до сірих тіл. Для тіл, в яких у значній мірі проявляється селективність випромінювання, поняття колірної температури не має змісту. Якщо для сірого тіла $R_e(\lambda_1, T)/R_e(\lambda_2, T) = \varepsilon$, то має місце рівність $R_{e,s}(\lambda_1, T)/R_{e,s}(\lambda_2, T) = \varepsilon$.

На основі формули Планка це співвідношення запишеться так:

$$\varepsilon = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^5 \frac{e^{hc/\lambda_2 kT} - 1}{e^{hc/\lambda_1 kT} - 1}, \quad (15.13)$$

звідки, враховуючи, що $\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) \gg 1$, маємо

$$T = \frac{\frac{hc}{k} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)}{\ln \frac{R_{e,s}(\lambda_1, T)}{R_{e,s}(\lambda_2, T)} - 5 \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (15.14)$$

Ряд реальних випромінювачів, наприклад оксиди металів, кераміка, вогнетривкі вироби, графіт та інші, практично являють собою сірі тіла. Колірна температура T_k вимірюється за червоно-синім відношенням інтенсивностей для $\lambda_1 = 0,665$ мкм і $\lambda_2 = 0,470$ мкм. Для несірих тіл здебільшого колірна температура вища за справжню температуру, тобто $T_k > T$. Колірна температура більшості твердих тіл і рідин значно менше відрізняється від справжньої температури, ніж радіаційна або яскравісна.

Отже, за допомогою оптичних пірометрів вимірюють не справжні, а умовні температури: радіаційну, яскравісну і колірну, від яких можна перейти до справжньої температури тіла, якщо відомі його оптичні характеристики.

ТЕМА 16

Фотоелектричний ефект і ефект Комптона

Закони фотоелектричного ефекту

Одним із явищ, яке підтверджує гіпотезу існування фотонів, є фотоелектричний ефект.

Під час проведення дослідів з метою одержання електромагнітних хвиль Генріх Герц у 1887 р. помітив, що опромінювання ультрафіолетовим світлом негативно зарядженого електрода сприяє виникненню іскри у просторі між електродами.

Суть явища, виявленого Г. Герцом, полягає в тому, що при освітленні ультрафіолетовим промінням негативно заряджені металеві тіла втрачають негативний заряд. При освітленні тим же промінням позитивно зарядженого тіла втрати електричного заряду не спостерігається. Крім того, якщо незаряджене тіло освітлювати, то за певних умов воно заряджається позитивно.

Після відкриття електрона в 1897 р. Ф. Ленард і Дж. Дж. Томсон довели експериментально, що під дією світла відбувається вивільнення електронів з металів.

Явище вивільнення електронів з речовини при освітленні її світлом називається **фотоелектричним ефектом** (фотоелементом). Розрізняють зовнішній і внутрішній фотоелемент. При *зовнішньому фотоелементі* електрони вивільняються світлом з поверхневого шару речовини і переходять в інше середовище або у вакуум.

При *внутрішньому фотоелементі* відбувається перерозподіл електронів за енергетичними станами в конденсованих середовищах при поглинанні ними світла. У цьому випадку електрична нейтральність тіла не порушується.

Електрони, вивільнені під дією світла, називаються фотоелектронами. Фотоелектричні властивості мають не тільки метали, але й діелектрики, напівпровідники та електроліти. Причому необхідною, але недостатньою умовою фотоелементу є помітне поглинання світла поверхневим шаром

освітлюваного тіла. Для обґрунтування гіпотези фотонів основне значення має зовнішній фотоефект.

Явище фотоефекту - один із проявів взаємодії світла з речовиною, який розкриває квантову природу світла. Перші дослідження цього явища належать Хальваку, А. Ригі та О. Г. Столетову.

На рис. 16.1 показана схема експериментальної установки для дослідження фотоефекту. Світло крізь кварцове віконце O падає на катод K , виготовлений з досліджуваного металу. Фотоелектрони, вивільнені з катода, під дією електричного поля між катодом і анодом рухаються до анода A , створюючи фотострум. Катод і анод розміщені у вакуумній трубці T . Напруга між ними змінюється за допомогою потенціометра Π .

Дослідження залежності фотоструму від різниці потенціалів між катодом і анодом, у разі опромінювання катода монохроматичним світлом, показали, що фотострум існує не тільки тоді, коли $\varphi_A - \varphi_K \geq 0$, але й тоді, коли $\varphi_A - \varphi_K < 0$. Він припиняється для даної речовини катода тільки при певній величині від'ємного значення різниці потенціалів $\varphi_A - \varphi_K = U_z$, яка називається *гальмівною напругою*. Вона не залежить від інтенсивності світла.

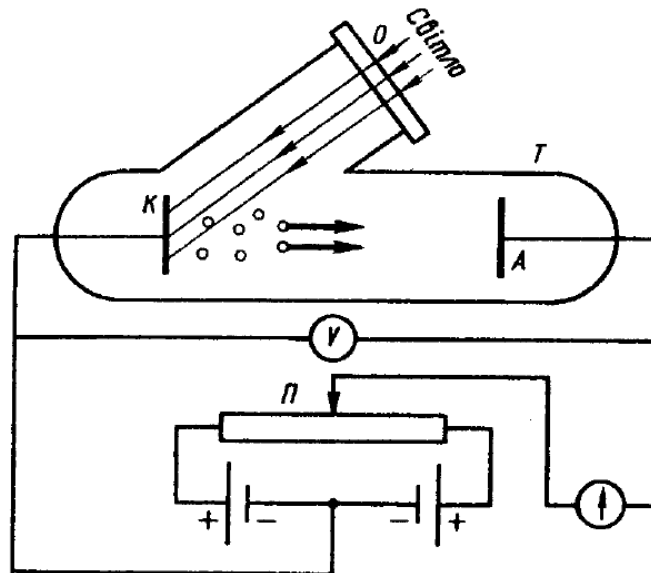


Рисунок 16.1 – Схема установки для дослідження фотоефекту

Зі збільшенням напруги фотострум зростає і при деякому значенні досягає насичення (рис. 16.2). Узагальнюючи результати експериментальних даних, було

встановлено такі закономірності:

- величина фотоструму насичення I прямо пропорційна світловому потоку Φ , що падає на катод (рис. 16.2, криві 1 і 2);
- гальмівна напруга лінійно залежить від частоти світла і не залежить від його інтенсивності;
- початкова кінетична енергія вивільнених світлом електронів лінійно залежить від частоти світла і не залежить від його інтенсивності (рис. 16.3);
- фотоефект не виникає, якщо частота світла менша від деякої характерної для даного металу величини $\nu_{\min}$;
- фотоефект - явище безінерційне, тобто з припиненням освітлення він припиняється.

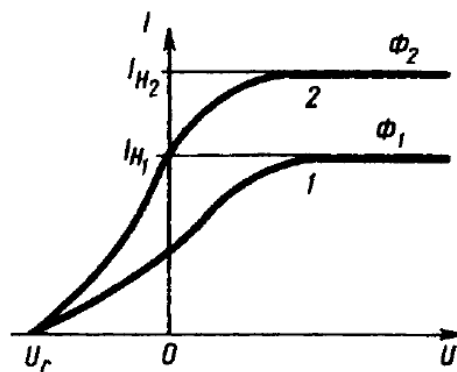


Рисунок 16.2 – Вольт-амперні характеристики фотоефекту

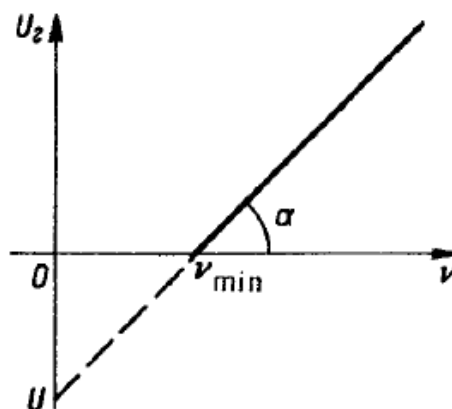


Рисунок 16.3 – Залежність гальмівної напруги від частоти світла

З погляду хвильової теорії можна пояснити тільки першу закономірність (закон Столетова).

Квантова теорія фотоефекту

Явище фотоефекту і його закономірності повністю пояснюються квантовою теорією світла. У ній стверджується, що світло - це потік матеріальних частинок - фотонів, енергія яких $\varepsilon = h\nu$ (де $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - стала Планка; ν - частота коливань); що світло не тільки випромінюється, але й поглинається порціями - квантами. При цьому фотон як неподільна частинка поглинається окремим електроном. Часто користуються сталою $\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, яка введена П. Діраком. Через цю сталу енергія кванта випромінювання виражається формулою $\varepsilon = \hbar\omega$ ($\omega = 2\pi\nu$ - циклічна частота випромінювання).

Взаємодіючи з електроном металу, фотон може обмінятися з ним енергією й імпульсом. Фотоефект виникає у випадку непружного зіткнення фотона з електроном. При такому зіткненні фотон поглинається, а його енергія передається електрону. Таким чином, електрон отримує кінетичну енергію не поступово, а зразу. Цим і пояснюється безінерційність фотоефекту.

Енергія поглинутого фотона може витрачатись на відрив електрона від атома всередині металу. Відірваний електрон взаємодіятиме з іншими атомами металу, втрачаючи свою енергію, яка буде йти на зміну внутрішньої енергії тіла, тобто на його нагрівання. Електрон, який вилітає з металу, матиме максимальну кінетичну енергію тоді, коли всередині металу він був вільним, тобто не зв'язаним з атомом, і при вилітанні за межі металу не витрачав енергію на тепло. У цьому випадку кінетична енергія електрона витрачається тільки на подолання затримуючих сил, які діють у поверхневому шарі металу, тобто на роботу виходу. Припустимо, що електрон одержав кінетичну енергію при зіткненні тільки з одним фотоном. Тоді максимальна кінетична енергія, яку буде мати звільнений електрон, визначається формулою

$$\frac{m_e v_{\max}^2}{2} = h\nu - A, \quad (16.1)$$

де A - робота виходу електрона з металу; m_e - маса спокою електрона.

Ця формула вперше була одержана А. Ейнштейном і носить його ім'я.

Перш ніж аналізувати формулу Ейнштейна, необхідно з'ясувати, як може "вільний електрон у металі" поглинути фотон. Чи не суперечить це висновку, згідно з яким поглинання фотона вільним електроном не відповідає законам збереження енергії і імпульсу. У дійсності суперечностей немає, оскільки "вільний електрон у металі" не є вільним. Він наче зачинений у ящику, біля стінок якого є затримуюче поле. Фотон взаємодіє не тільки з електроном, тут відбувається взаємодія обох цих частинок з металом у цілому. У випадку взаємодії трьох тіл закони збереження енергії і імпульсу виконуються одночасно. Імпульс фотона сприймається як електроном, так і металом, а енергія передається тільки електрону, оскільки масу металу можна вважати нескінченно великою.

З рівняння (16.1) випливає, що максимальна кінетична енергія вивільнених електронів лінійно залежить від частоти ν і не залежить від інтенсивності світла, яке викликає фотоефект. Інтенсивність світла, за якої відбувається фотоефект, впливає тільки на кількість вивільнених електронів.

Оскільки значення гальмівної напруги визначається з умови

$$\frac{m_e v_{\max}^2}{2} = eU_z, \text{ то}$$

$$U_z = \frac{h\nu}{e} - \frac{A}{e}, \quad (16.2)$$

де e - заряд електрона. Отже, величина гальмівної напруги не залежить від інтенсивності світла, а лінійно залежить від частоти ν .

З графічної залежності $U_z = f(\nu)$ на рис. 16.3 видно, що $\operatorname{tg} \alpha = h/e$, а відрізок $OU = A/e$. Оскільки інтенсивність світла прямо пропорційна кількості фотонів, то збільшення його інтенсивності зумовлює збільшення кількості вивільнених електронів, тобто збільшення фотоструму.

З рівняння (16.1) також випливає, що фотоефект можливий тільки тоді, коли $h\nu > A$. В іншому випадку енергія фотона недостатня для звільнення електрона з металу. Найменша частота $\nu_{\min}$ світла, під дією якого відбувається фотоефект, визначається з умови $h\nu_{\min} = A$, звідки

$$\nu_{\min} = A/h \quad (\lambda_{\max} = hc/A). \quad (16.3)$$

Частота $\nu_{\min}$ ($\lambda_{\max}$), при якій можливий фотоэффект, називається "червоною межею" фотоэффекту. Ця назва не прив'язана до кольору світла. Вона вказує на ту найменшу частоту (найбільшу довжину хвилі) світла, при якій ще може відбуватись фотоэффект. Так, із цезію вивільняються електрони при освітленні випромінюванням усієї видимої частини спектра; для калію відбувається фотоэффект при освітленні променями, довжина хвиль яких $\lambda < 0,62$ мкм; для вольфраму - $\lambda < 0,275$ мкм.

Слушність формули Ейнштейна була доведена експериментально О. Річардсоном і К. Комптоном у 1912 р., а більш точно - Р. Міллікеном у 1916 р., який безпосередньо з дослідів явищ фотоэффекту визначив числове значення сталої Планка.

Фотоелементи та їх застосування

Фотоэффект знайшов широке застосування в науці, техніці, телемеханіці, автоматизації. Без нього неможливо було б досягти сучасного розвитку космічної техніки, телебачення, звукового кіно та ін. Прилади, дія яких основана на фотоэффекті, називають фотоелементами. Залежно від видів фотоэффекту створено фотоелементи із зовнішнім (вакуумні і газонаповнені) та внутрішнім (фоторезистори) фотоэффектом і вентильні фотоелементи.

Фотоелементи із зовнішнім фотоэффектом являють собою скляні балони, всередині яких розміщено фотокатод і анод (рис. 16.4). Фотокатодом K є шар лужного або лужноземельного металу, нанесеного на основу зі срібла. Анод A має форму стрижня, кульки або кільця. Газонаповнені фотоелементи із зовнішнім фотоэффектом заповнені інертним газом, завдяки чому струм у фотоелементі створюється не тільки електронами, що вивільняються із фотокатода під дією світла, а й електронами та іонами, що виникають внаслідок іонізації газу. Наявність газу дає змогу збільшити чутливість фотоелементів у 5 - 10 разів порівняно з вакуумними. Під чутливістю фотоелемента розуміють

відношення величини фотоструму I до величини світлового потоку Φ , що падає на фотокатод.

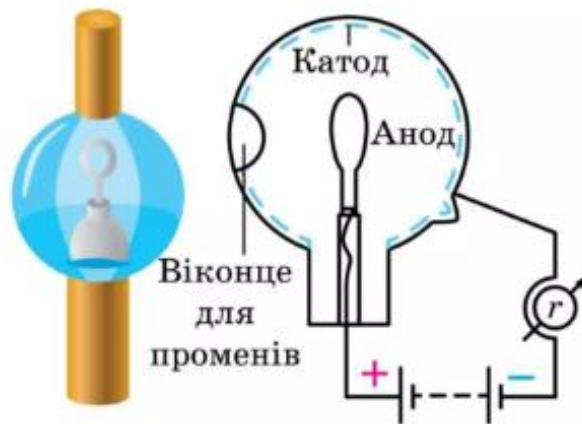
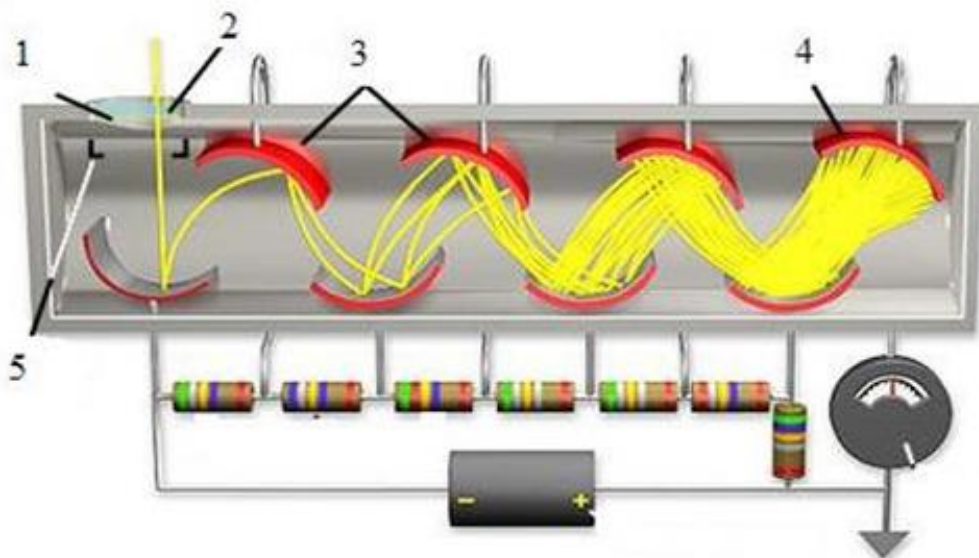


Рисунок 16.4 – Вакуумний фотоелемент

Для реєстрації слабких світлових потоків застосовують фотопомножувачі, дія яких базується на зовнішньому фотоефекті та вторинній електронній емісії. Фотопомножувач складається з фотокатода K і електродів (динодів до 20 штук) з високим коефіцієнтом вторинної електронної емісії $\sigma = n_2/n_1$ (відношення кількості вивільнених електронів n_2 до кількості падаючих n_1) і колектора A (рис. 16.5).



1 – фотокатод; 2 – кварцове вікно; 3 – диноди; 4 – анод; 5 – фокусуючий електрод

Рисунок 16.5 - Фотоелектронний помножувач

Анодний струм у цьому випадку

$$I = I_0 \sigma^m,$$

де I_0 - струм фотокатода; m - кількість діодів. У сучасних фотопомножувачах коефіцієнт підсилення електронного струму $k = \sigma^m$ досягає $10^9 - 10^{11}$, так що навіть окремі фотоелектрони створюють на виході фотопомножувача імпульси струму великої амплітуди.

Особливість фотоелементів, дія яких основана на вентильному фотоефекті, полягає в тому, що не потрібно джерела струму, без якого не можуть працювати вищезгадані фотоелементи. Фотоелементи з вентильним фотоефектом застосовують у фотометрах, експонетрах, для створення сонячних батарей, які живлять бортову апаратуру космічних станцій тощо.

Серед вентильних фотоелементів широко застосовуються мідно-оксидні, селенові, сульфідно-срібні, сульфідно-талієві, силіцієві, сульфідно-кадмієві та ін.

Ефект Комптона

Корпускулярні властивості світла найбільш переконливо проявляються в явищі, яке називається ефектом Комптона. Досліджуючи розсіювання рентгенівського випромінювання різними речовинами, А. Комптон у 1923 р. виявив, що в розсіяному випромінюванні, крім спектральних ліній, яким відповідає довжина падаючої хвилі λ з'являються лінії, довжина хвиль яких $\lambda' > \lambda$. При цьому було встановлено, що збільшення довжини хвилі $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не залежить від довжини падаючої хвилі λ і від природи розсіювальної речовини, а залежить від кута θ між напрямом розсіювання і напрямом падаючого випромінювання. Експериментально встановлено, що

$$\Delta\lambda = \lambda_k (1 - \cos \theta), \quad (16.4)$$

де $\lambda_k = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м – комптонівська довжина хвилі, стала величина.

Оскільки зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ не залежить від природи розсіювальної речовини, то розсіювання рентгенівського випромінювання відбувається на

слабкозв'язаних електронах різних речовин. Ефект Комптона можна пояснити тільки на основі уявлень про корпускулярну природу випромінювання, розглядаючи розсіяння як процес пружного зіткнення рентгенівських фотонів з електронами. Оскільки енергія фотона характеристичного рентгенівського випромінювання значно перевищує енергію зв'язку зовнішнього електрона в атомі, то такий електрон можна вважати практично вільним.

Розглянемо пружне зіткнення рентгенівського фотона, енергія якого $h\nu$ і імпульс $\vec{P}_\phi$. Виберемо систему координат, в якій електрон до зіткнення з фотоном знаходиться у спокої і має масу m_0 . Після зіткнення з електроном розсіяний під кутом θ фотон має енергію $h\nu'$ і імпульс $\vec{P}'_\phi$, а електрон має енергію mc^2 і імпульс $\vec{P}_e$ (рис. 16.6). На основі законів збереження імпульсу та енергії маємо

$$\vec{P}_\phi = \vec{P}'_\phi + \vec{P}_e, \quad (16.5)$$

$$m_0c^2 + h\nu = mc^2 + h\nu', \quad (16.6)$$

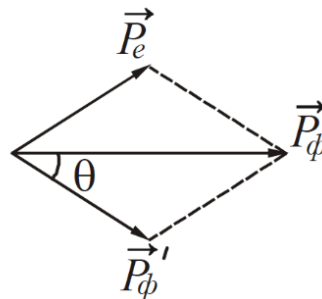


Рисунок 16.6 – Закон збереження імпульсу при ефекті Комптона

Вирішення даної системи рівнянь дозволяє отримати рівняння (16.4). Таким чином, з теорії Комптона виходить, що фотон передає електрону частину своєї енергії і частину свого імпульсу. В результаті зменшення енергії фотона, довжина хвилі розсіяного фотона збільшується.

Наявність у розсіяному випромінюванні спектральних ліній, довжина хвиль яких не зазнала змін, вказує на те, що деякі рентгенівські фотони розсіюються без зміни енергії. Таке розсіяння відбувається на електронах, які

сильно зв'язані з ядром. При цьому розсіяння відбувається не на вільному електроні, а на системі «електрон – ядро», маса якої значно перевищує масу електрона m_0 . З рівняння (16.4) випливає, що зміною $\Delta\lambda$ у цьому разі можна знехтувати. З цієї ж причини інтенсивність комптонівського розсіяння буде більшою для атомів, порядковий номер яких у періодичній системі хімічних елементів менший.

ТЕМА 17

Елементи квантової механіки

Гіпотеза де Бройля

Квантова механіка – це фізична теорія явищ і процесів мікросвіту. Під мікросвітом розуміють сукупність об'єктів, лінійні розміри яких порядку 10^{-8} – 10^{-15} м. Виникла квантова механіка у зв'язку з розвитком експериментальних досліджень з вивчення властивостей теплового випромінювання, фотоефекту, закономірностей атомних спектрів.

Квантова механіка встановлює спосіб опису і закони руху мікрочастинок (атомів, молекул, атомних ядер, елементарних частинок) і їх систем (наприклад, кристалів), а також зв'язок величин, що характеризують частинки і системи, з фізичними величинами, безпосередньо вимірюваними на досліді.

Закони квантової механіки дозволили з'ясувати будову атомів, пояснити періодичну систему елементів, зрозуміти будову атомних ядер, вивчити властивості елементарних частинок, зрозуміти властивості металів і напівпровідників. Ряд найбільших технічних досягнень двадцятого століття заснований на законах квантової механіки. Вони лежать в основі роботи ядерних реакторів, обумовлюють можливість здійснення в земних умовах термоядерних реакцій, проявляються у ряді явищ в металах і напівпровідниках.

Закони квантової механіки використовуються при пошуку і створенні нових матеріалів: магнітних, напівпровідникових, надпровідникових.

Таким чином, **квантова механіка стала «інженерною» наукою**, знання якої необхідне не тільки фізикам-дослідникам, але й інженерам.

Властивості частинок, з яких побудовані атомні системи, корінним чином відрізняються від властивостей макроскопічних тіл. Закони класичної механіки і класичної електродинаміки виявилися непридатними для опису поведінки мікрочастинок. Необхідно було переглянути уявлення про електрон у вигляді механічної частинки, що характеризується певними координатами і певною швидкістю.

У процесі вивчення природи світла з'ясувалося, що в оптичних явищах спостерігається корпускулярно-хвильовий дуалізм. Інтерференція, дифракція і поляризація говорять про хвильову природу світла, а фотоефект і ефект Комптона – про корпускулярну.

У 1924 році Луї де Бройль висунув гіпотезу про те, що **корпускулярно-хвильова подвійність властивостей має універсальний характер**, тобто частинки речовини разом з корпускулярними властивостями мають також і хвильові. Згідно з гіпотезою де Бройля, рух електрона або будь-якої іншої частинки пов'язаний з хвильовим процесом, довжина хвилі якого дорівнює

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (17.1)$$

де h – стала Планка; $p = mv$ – імпульс частинки.

Якщо гіпотеза слухна, то повинна спостерігатися дифракція мікрочастинок.

У 1927 році Девіссон і Джермер вивчали розсіяння електронів на монокристалі нікелю. Схема установки наведена на рис. 17.1. У електронній гарматі A створювався потік електронів, який спрямовувався на кристал нікелю B . Швидкість електронів визначалася прискорюючою напругою, що створювалась усередині гармати. Нікелеву мішень можна було обертати навколо осі, перпендикулярної площині рисунка. Приймач електронів C обертався навколо тієї ж осі і реєстрував електрони, розсіяні мішенню за всіма напрямками. Якби електрони поводитися як класичні частинки, то вони повинні були б відбиватися від мішені відповідно до законів геометричної оптики. Але виявилось, що інтенсивність розсіяних електронів була різною за різними напрямками – є максимуми і мінімуми числа електронів, розсіяних під різними кутами, тобто спостерігалася дифракція.

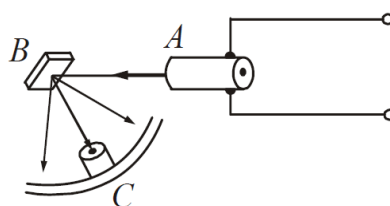


Рисунок 17.1 – Схема установки Девіссона і Джермера

На рис. 17.2 наведена діаграма розсіяння електронів за напрямками, розсіяних мішенню B відносно падаючого пучка електронів N . Довжина радіус-вектора $\vec{r}$, що проведений з центру мішені, пропорційна кількості електронів, розсіяних у даному напрямі. Видно, що існують максимуми і мінімуми кількості електронів, розсіяних під різними кутами. Результати дослідів Девіссона і Джермера можна пояснити, використовуючи ідею де Бройля про хвильові властивості частинок. Знаючи прискорюючу різницю потенціалів U_{np} , можна розрахувати швидкість електронів:

$$v = \sqrt{\frac{2eU_{np}}{m}}, \quad (17.2)$$

де e – заряд електрона, m – маса електрона.

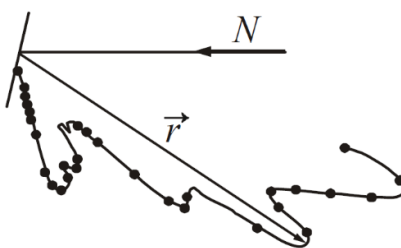


Рисунок 17.2 – Діаграма розсіяння електронів

Потім за формулою (17.1) можна знайти відповідну довжину хвилі де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meU_{np}}}. \quad (17.3)$$

Якщо пучок електронів має хвильові властивості, то він повинен відбиватися від кристала нікелю так само, як і рентгенівське випромінювання, тобто повинна виконуватися умова Вульфа – Брегга:

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad (17.4)$$

де d – міжплощинна відстань, відома з рентгенографічних досліджень. Підстановка реальних даних (значень d , θ) дала значення довжини хвилі, яке співпадає з довжиною хвилі де Бройля.

Хвильові властивості електронів також були виявлені в дослідах Дж. П. Томсона. Була отримана дифракційна картина електронного пучка, що проходить крізь тонку (завтовшки порядку 10^{-7} м) металеву фольгу. Дослід здійснювався таким чином, як показано на рис. 17.3. Пучок електронів, прискорених різницею потенціалів порядку декілька десятків кіловольт, проходив крізь фольгу і потрапляв на фотопластину. Електрон під час удару діє на фотопластину так саме, як і фотон. Отримана таким чином електронограма золота представлена на рис. 17.4.

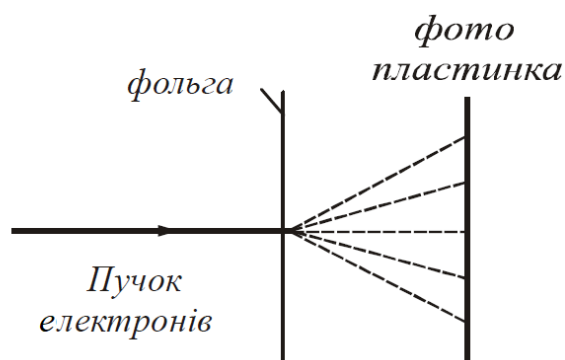


Рисунок 17.3 – Схема дослідів Дж. П. Томсона

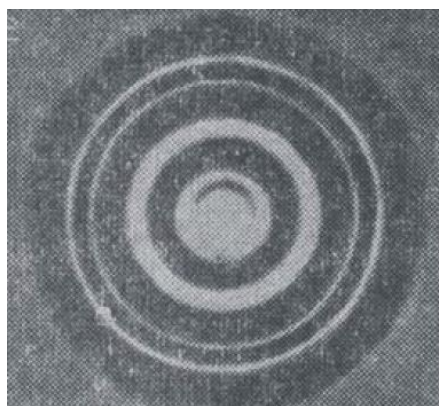


Рисунок 17.4 – Електронограма дифракції електронів

Користуючись подібними електронограмами, Томсон перевіряв формулу де Бройля і визначив за формулою Вульфа – Брегга період кристалічних ґрат металу, крізь який проходили електрони. Результати збіглися з відомими раніше даними рентгеноструктурного аналізу.

Таким чином, ідея де Бройля про хвильові властивості частинок отримала експериментальне підтвердження.

Ймовірнісне трактування хвиль де Бройля. Хвильова функція

Хвилі де Бройля, пов'язані з рухомими частинками речовини, не є електромагнітними, тобто їх розповсюдження не пов'язане з розповсюдженням деякого електромагнітного поля. Вони мають специфічну квантову природу, що не має аналогії серед хвиль, які вивчаються в класичній фізиці.

Питання щодо природи хвиль можна сформулювати як питання про фізичне значення амплітуди цих хвиль. Замість амплітуди A виберемо інтенсивність хвилі, яка пропорційна квадрату модуля амплітуди $|A|^2$.

З дослідів з дифракції електронів випливає, що пучки електронів, відбитих або розсіяних за різними напрямками, розподіляються неоднаково: у деяких напрямках спостерігається більша кількість електронів, ніж у всіх інших. З хвильової точки зору наявність максимумів числа електронів в деяких напрямках означає, що ці напрями відповідають найбільшій інтенсивності хвиль де Бройля. Іншими словами, інтенсивність в даній точці простору визначає густину ймовірності потрапляння електронів у цю точку за 1 с. Це дає підставу говорити про статистичне, ймовірнісне значення хвиль де Бройля.

Квадрат модуля амплітуди хвиль де Бройля в даній точці є мірою ймовірності того, що частинка виявляється в цій точці.

Щоб описати розподіл ймовірності знаходження частинки в даний момент часу в деякій точці простору, введемо функцію $\psi(x, y, z, t)$. Цю функцію називають *хвильовою* або *псі-функцією*. Інтерпретація псі-функції була дана М. Борном у 1926 році. Визначається вона так.

Ймовірність $d\omega$ того, що частинка знаходиться в елементі об'єму dV , пропорційна квадрату модуля хвильової функції $|\psi|^2$:

$$d\omega = |\psi|^2 dV = |\psi|^2 dx dy dz. \quad (17.5)$$

Фізичний зміст має не сама функція ψ , а квадрат її модуля $|\psi|^2$. Величина $|\psi|^2$ має зміст *густини ймовірності*:

$$\rho_{\omega} = \frac{d\omega}{dV} = |\psi|^2, \quad (17.6)$$

тобто визначає ймовірність перебування частинки в даній точці простору. Іншими словами, величиною $|\psi|^2$ визначається інтенсивність хвиль де Бройля. Це пояснює, чому хвилі де Бройля також називають «хвилями ймовірності». З визначення хвильової функції випливає, що вона повинна задовольняти **умові нормування ймовірності**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dV = 1 \quad (17.7)$$

Ця умова означає, що перебування частинки де-небудь в просторі є достовірною подією і її ймовірність повинна дорівнювати одиниці. Хвильова функція ψ є основною характеристикою стану мікрочасток. За її допомогою можуть бути обчислені середні значення фізичних величин, що характеризують мікрочастинку, яка знаходиться у стані, що описується хвильовою функцією.

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

Хвильові властивості мікрочастинок вносять обмеження в можливість застосовувати до таких частинок поняття координати й імпульсу в їх класичному значенні. У класичній механіці в кожній точці траєкторії частинка має певні координати x, y, z і певний імпульс $\vec{p}$ з проекціями на осі p_x, p_y, p_z .

Відмітною особливістю мікрочастинок є наявність у них дуалізму хвильових і корпускулярних властивостей. З дифракційних дослідів випливає, що частинки не мають траєкторії. Тому описувати їхній рух, задаючи точне значення координати й імпульсу в кожен момент часу, як це робиться в класичній механіці, неможливо. Проте можна вказати з деякою мірою точності величину тієї області простору, в якій частинка з великою ймовірністю може бути виявлена, та інтервал тих значень імпульсу, які вона при цьому має.

Нехай $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ означають інтервали координат (невизначеність значень координати), в яких може знаходитися частинка, що описується хвилею де

Бройля, а $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ – інтервали (невизначеність значень проекції імпульсу), в яких поміщені проекції її імпульсу за осями координат. Чим точніше визначено положення частинки, тобто чим менше $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, тим менш точно визначені значення проекцій її імпульсу (тобто тим більше $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$). Невизначеності значень координати і проекції імпульсу зв'язані співвідношенням:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (17.8)$$

де $\hbar$ стала Планка.

Аналогічні співвідношення мають місце для y і p_y , z і p_z :

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (17.9)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (17.10)$$

Співвідношення (17.8), (17.9), (17.10) встановлені В. Гейзенбергом у 1927 році і називаються співвідношеннями невизначеностей Гейзенберга.

Пари величин, що входять у співвідношення невизначеностей Гейзенберга, називаються канонічно зв'язаними. Твердження про те, що *добуток невизначеностей двох канонічно зв'язаних величин не може бути за порядком величини менше сталої Планка $\hbar$* , називається принципом невизначеностей Гейзенберга.

Із співвідношень невизначеностей випливає наступне: **мікрочастинка не може мати одночасно цілком певних значень координати x та імпульсу p_x** , тобто, чим точніше для мікрочастинки визначена одна з величин – координата x або імпульс p_x – тим більше стає неточність у визначенні іншої.

Енергія і час також є канонічно зв'язаними величинами. Для них слушне співвідношення невизначеностей у вигляді:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (17.11)$$

Це співвідношення означає, що якщо частинка якийсь час Δt знаходиться

в нестаціонарному стані, то енергія цього стану може бути визначена лише з деякою точністю до величини ΔE .

Співвідношення невизначеностей є одним з фундаментальних положень квантової механіки. Воно дозволяє пояснити той факт, що електрон не падає на ядро атома, а також оцінити розміри атома і мінімальну можливу енергію електрона в такому атомі.

ТЕМА 18

Хвильові властивості речовини

Хвильове рівняння Шредінгера

У класичній механіці основними рівняннями, що описують рух, є закони Ньютона. Вони дозволяють для макроскопічних тіл розв'язати основну задачу механіки – за заданими силами, що діють на тіло (або систему тіл), і початковими умовами (початковими значеннями координат і швидкості) знайти для будь-якого моменту часу координати тіла і його швидкість.

Рівняння руху в квантовій механіці повинне бути таким, щоб воно дозволяло пояснити спостережувані на досліді хвильові властивості частинок. Стан частинки у просторі в даний момент часу задається хвильовою функцією $\psi(x, y, z, t)$, точніше величиною $|\psi|^2$ – густиною ймовірності знаходження частинки в точці з координатами x, y, z у момент часу t . Тому основне рівняння квантової механіки повинне бути рівнянням відносно функції $\psi(x, y, z, t)$. Це рівняння повинне бути хвильовим, оскільки з нього отримують своє пояснення експерименти з дифракції частинок.

Основне рівняння квантової механіки було отримане в 1926 р. Е. Шредінгером. Шредінгер встановив своє рівняння, виходячи з оптико-механічної аналогії. Ця аналогія полягає в схожості рівнянь, що описують хід світлових променів, з рівняннями, що визначають траєкторії частинок в аналітичній механіці. Хвильове рівняння Шредінгера в квантовій механіці грає ту ж роль, що рівняння Ньютона в класичній механіці. Його можна було б назвати рівнянням руху квантової частинки. Задати закон руху частинки в квантовій механіці – це означає визначити значення ψ - функції в кожний момент часу і в кожній точці простору. Подібно до рівнянь Ньютона і Максвелла рівняння Шредінгера з'явилося, з одного боку, узагальненням відомих дослідних даних, з іншого боку, було великим науковим передбаченням. Його слід розглядати як початкове основне припущення, справедливості якого доводиться

тим, що всі наслідки, які випливають із нього, найточнішим чином узгоджуються з дослідними фактами.

Ми розглядатимемо рівняння Шредінгера тільки для випадку, коли хвильова функція не залежить від часу, тобто $\psi = \psi(x, y, z)$. Рівняння Шредінгера при цьому називають рівнянням для стаціонарних станів. Воно записується в наступному вигляді:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \quad (18.1)$$

де Δ – оператор Лапласа; $\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$; m – маса частинки; $\hbar$ – стала

Планка; E – повна енергія частинки; U – потенціальна енергія частинки.

Рівняння Шредінгера дозволяє знайти хвильову функцію даного стану і, отже, визначити ймовірність знаходження частинки в різних точках простору.

Відповідно до свого змісту хвильова функція повинна бути однозначною, безперервною і кінцевою. Крім того, вона повинна мати безперервну і кінцеву похідну. Перераховані вимоги називаються стандартними умовами. У теорії диференціальних рівнянь доводиться, що рівняння вигляду (18.1) має розв'язання, що задовольняє стандартним умовам, лише при деяких значеннях параметра. У нашому випадку цим параметром є повна енергія частинки E . Ці значення повної енергії називаються **власними значеннями**. Рішення, відповідні власним значенням E , називаються **власними функціями**.

Сукупність власних значень називається **спектром величини**. Якщо ця сукупність утворює дискретну послідовність, то спектр називається **дискретним**. Якщо власні значення утворюють безперервну послідовність, то спектр називають **безперервним** або **суцільним**.

У разі дискретного спектру власні значення енергії і власні функції можна пронумерувати:

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_n \quad (18.2)$$

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n \quad (18.3)$$

Про величини, які можуть приймати тільки дискретні значення, говорять,

що вони *квантуються*. Таким чином, з основних положень квантової механіки випливає квантування енергії.

Знаходження власних значень і власних функцій є складним математичним завданням, тому далі розглянемо тільки деякі окремі випадки.

Частинка в нескінченно глибокій потенціальній ямі

Потенціальною ямою називається область простору, в якій потенціальна енергія U частинки менше деякого значення $U_{\max}$. Якщо $U_{\max} = \infty$ і максимальна енергія залежить тільки від координати x , тобто $U = U(x)$, то отримаємо нескінченно глибоку одновимірну потенціальну яму.

Нехай рух частинки обмежений непроникними стінками: $x = 0$, $x = l$ (l – ширина ями). У цьому випадку потенціальна енергія частинки (рис. 18.1):

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & \text{якщо } x < 0 \\ 0, & \text{якщо } 0 \leq x \leq l \\ \infty, & \text{якщо } x > l \end{cases}$$

Псі-функція буде залежати тільки від координати x , тому рівняння Шредінгера прийме вигляд:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0, \quad (18.4)$$

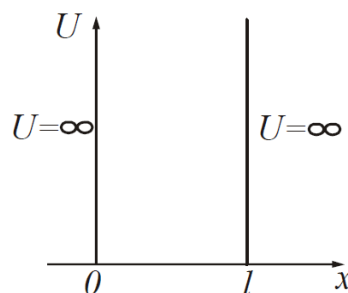


Рисунок 18.1 – Потенціальна енергія частинки

оскільки потенціальна енергія усередині ями $U = 0$. Введемо позначення:

$$\frac{2m}{\hbar^2} E = \omega^2 \quad (18.5)$$

Рівняння (18.4) при цьому переписеться таким чином:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2\psi = 0. \quad (19.6)$$

З теорії коливань відомо, що розв'язання рівняння (19.6) має вигляд:

$$\psi(x) = A \sin(\omega x + \alpha). \quad (19.7)$$

Знайдемо параметри ω і α . Для цього використовуємо граничні умови. За межі потенціальної ями частинка потрапити не може, тому ймовірність виявити частинку, а, отже, і функція ψ за межами ями дорівнюватимуть нулю. З умови безперервності випливає, що ψ повинна дорівнювати нулю і на межах ями, тобто

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (18.8)$$

Тоді можна записати: $\psi(0) = A \sin \alpha = 0$. Оскільки $A \neq 0$, то звідси випливає, що $\alpha = 0$ ($\sin 0 = 0$). Далі приймемо, що $\psi(l) = A \sin \omega l = 0$. При цьому

$$\omega l = \pm n\pi, \quad (18.9)$$

де $n = 1, 2, 3, \dots$ (значення $n = 0$ відпадає, оскільки при цьому випливає, що $\psi \equiv 0$). Це означає, що частинка ніде не знаходиться).

Підставимо (18.9) в рівняння (19.5) і знайдемо власні значення енергії частинки:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (18.10)$$

Спектр енергії виявився дискретним (рис. 18.2)

Замінивши ω в рівнянні (18.7) за формулою (18.9), отримаємо власні значення хвильової функції:

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (18.11)$$

Для знаходження коефіцієнта A використовують умову нормування (див. формулу (17.7)):

$$\int_0^l A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1. \quad (18.12)$$

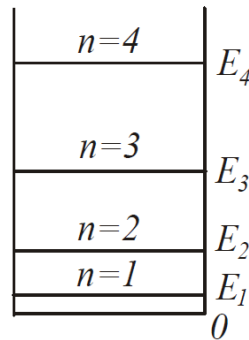


Рисунок 18.2 – Енергетичний спектр частинки в ямі

Узявши інтеграл, отримаємо

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (18.13)$$

Тоді

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (18.14)$$

Графіки власних функцій зображені на рис. 18.3. На рис. 18.4 показана густина ймовірності виявлення частинки в різних точках ями, яка дорівнює $|\psi|^2$. З графіків випливає, що в стані, наприклад, з $n = 2$ частинка не може бути виявлена в середині ями і разом з тим однаково часто буває як в лівій, так і правій половині ями. Така поведінка частинки несумісна з уявленням про траєкторії, тому що згідно класичним уявленням всі положення частинки в ямі рівноймовірні.

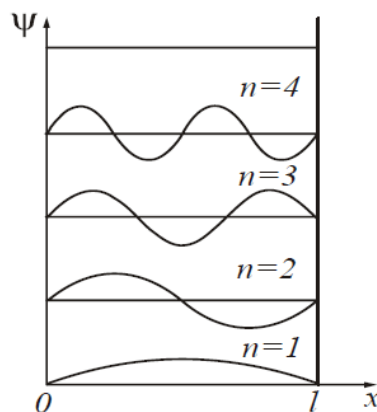


Рисунок 18.3 – Графіки власних функцій частинки в ямі

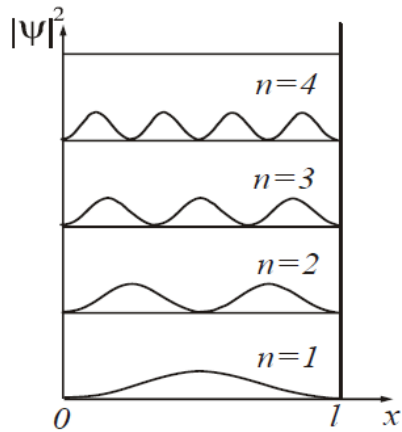


Рисунок 18.4 – Густина ймовірності знаходження частинки в ямі

Модель частинки, що знаходиться в нескінченно глибокій потенціальній ямі, застосовують для пояснення електропровідності металів і напівпровідників.

Проходження частинки крізь потенціальний бар'єр

Розглянемо задачу, коли частинка рухається вздовж осі Ox і зустрічає потенціальний бар'єр висотою U_0 і шириною l (рис. 18.5). Умова цієї задачі така: частинка рухається зліва направо паралельно осі Ox у полі, яке розділимо на три області. В області 1 при $x < 0$ потенціальна енергія $U = 0$, в області 2 при $0 \leq x \leq l$ потенціальна енергія стала і відмінна від нуля, тобто $U = \text{const} \neq 0$, в області 3 при $x > l$ $U = 0$.

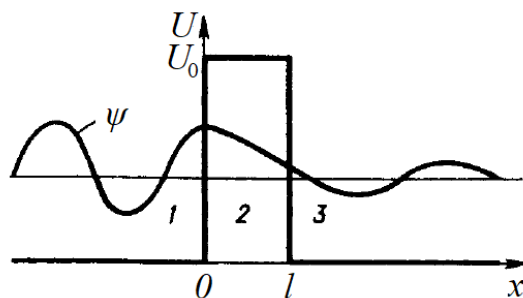


Рисунок 18.5 – Рух частинки крізь потенціальний бар'єр

Відповідно до уявлень класичної механіки, частинка може знаходитись тільки в тих точках простору, в яких потенціальна енергія U менша від її повної

енергії E . Це впливає з того, що кінетична енергія частинки

$$p^2/2m = E - U$$

завжди має бути додатною величиною. Якщо $U > E$, то імпульс частинки має уявне значення і її присутність там, згідно з уявленнями класичної фізики, зовсім неприпустима. Тому якщо дві області простору відокремлені одна від однієї потенціальним бар'єром, усередині якого $U > E$, то за законами класичної фізики проникнення частинки крізь потенціальний бар'єр неможливе. У хвильовій теорії уявному значенню імпульсу відповідає тільки експоненціальна залежність хвильової функції від координати. Зовсім інша картина має місце для квантових частинок.

Характерним є те, що енергія частинки, яка проходить крізь потенціальний бар'єр, не змінюється. Частинка виходить за межі бар'єра з тією ж енергією, з якою в нього входила. Проходження частинки через потенціальний бар'єр називають *тунельним ефектом*, оскільки частинка не піднімається на вершину бар'єра, а проходить його нижче, ніби через тунель.

Тунельний ефект лежить в основі ряду фізичних явищ, які неможливо пояснити в межах уявлень класичної фізики. До них належать виникнення контактної різниці потенціалів і холодна емісія електронів з металів. Сюди ж відносяться такі явища, як α - розпад, спонтанний поділ атомних ядер, ядерні реакції, коли за класичними уявленнями кінетичної енергії ядер, які зазнають зіткнення, недостатньо для подолання кулонівського потенціального бар'єра між ними, та ін. Явище тунельного ефекту лежить в основі дії тунельних діодів, а також роботи тунельних електронних мікроскопів, роздільна здатність яких близько 10^{-9} м, та ін.

ТЕМА 19

Фізика атомів і молекул

Атом водню і воднеподібні іони

Атомом називається найменша частинка речовини, що має всі властивості даного хімічного елементу. До складу атома входять позитивно заряджене ядро і електрони, які рухаються в електричному полі ядра. Заряд ядра за абсолютною величиною дорівнює сумарному заряду всіх електронів атома. **Іоном** називається електрично заряджена частинка, яка утворюється при отриманні або втраті електронів атомом або молекулою.

Найпростішим атомом є атом водню, що складається з одного протона в ядрі і одного електрона, який рухається в кулонівському електричному полі ядра. **Воднеподібними** іонами є іони, що мають ядро із зарядом $+Ze$ і один електрон. Наприклад, іони одноразово іонізованого гелію – He^+ , дворазово іонізованого літію – Li^{++} , триразово іонізованого берилію – Be^{+++} і т. д.

Єдиний електрон водню і воднеподібних іонів рухається у кулонівському полі ядра і має потенціальну енергію

$$U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r}, \quad (19.1)$$

де Z – порядковий номер елементу; r – відстань між ядром і електроном.

Рівняння Шредінгера в цьому випадку прийме вигляд:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r} \right) \psi = 0, \quad (19.2)$$

де E – повна енергія електрона в атомі.

Оператора Лапласа Δ при розв'язанні беруть у сферичних координатах. Розглянемо кінцеві результати розв'язання рівняння (19.2).

Квантові числа

З розв'язання рівняння Шредінгера для електрона в атомі випливає, що

хвильова функція ψ залежить не тільки від просторових координат, але і від цілочислових параметрів n, l, m . Ці параметри називаються квантовими числами. Охарактеризуємо кожне з них:

- n – головне квантове число. Приймає значення $1, 2, 3 \dots, n$. Відповідає номеру енергетичного рівня.
- l – орбітальне квантове число. Приймає значення $0, 1, 2, 3 \dots, (n - 1)$, тобто має n значень.
- m – магнітне квантове число. Приймає значення $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$, тобто має $(2l + 1)$ значень.

Конкретний набір квантових чисел визначає конкретний вид хвильової функції і, отже, форму і розміри електронної хмари. Значеннями квантових чисел визначаються також основні динамічні характеристики: енергія електрона в атомі, момент імпульсу, магнітний момент, проекції моменту імпульсу і магнітного моменту на напрям зовнішнього магнітного поля.

Квантування енергії

Можна показати, що рівняння (19.2) має однозначні і безперервні розв'язання для електрона, зв'язаного з ядром, при дискретних від'ємних значеннях енергії. Ці значення енергії визначаються співвідношенням:

$$E_n = -\frac{Rch}{n^2} Z^2, \quad (19.3)$$

де n – головне квантове число, $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$; $R = 1,09107 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – швидкість світла у вакуумі; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$ – стала Планка.

Після підстановки значення сталих і вираження енергії в електрон вольтах рівняння (19.3) можна записати у наступному вигляді:

$$E_n = -\frac{13,6}{n^2} Z^2, \quad (19.4)$$

Набір дискретних значень енергії E_n утворює енергетичний спектр атома.

Стан з $n = 1$ називається **основним**, стани з $n > 1$ називаються **збудженими**. У основному стані електрон може знаходитися скільки завгодно довго.

Найважливішою відмінністю збуджених станів є кінцевий час τ життя електрона в цих станах: $\tau \approx 10^{-8}$ с. В основному стані атом має мінімальну енергію. Щоб перевести атом з основного стану в збуджений (тобто в стан з більшою енергією), йому необхідно передати енергію. Енергію можна передати одним з наступних способів:

1. за рахунок теплового зіткнення (тому нагріті тіла світяться - атоми випромінюють, повертаючись із збудженого стану в основний стан);
2. за рахунок зіткнення атома з достатньо швидким електроном;
3. за рахунок поглинання атомом фотона.

Фотон при поглинанні його атомом зникає, передаючи атому всю свою енергію. Атом не може поглинути частину фотона, оскільки фотон є неподільним. Поглинаються тільки ті фотони, енергія яких відповідає різниці енергій двох рівнів.

Енергія збудження

$$E_{z\delta} = E_n - E_1, \quad (19.5)$$

де E_1 – енергія електрона в основному стані; E_n – енергія електрона у збудженому стані.

Величина

$$\varphi_{z\delta} = \frac{E_{z\delta}}{e} \quad (19.6)$$

називається **потенціалом збудження** (e – заряд електрона).

Енергія електрона в атомі – величина від’ємна, тому найбільше значення енергії, яке може мати електрон $E_{\max} = 0$. При цьому n прямує до нескінченності ($n \rightarrow \infty$). Це відповідає іонізації атома, тобто відриву від нього електрона.

Потенціал іонізації

$$\varphi_i = \frac{E_i}{e} \quad (19.7)$$

де $E_i = -E_1$ – енергія іонізації атома.

Серед оптичних властивостей атома найважливішим є його спектр випромінювання. Оскільки будь-яка спектральна лінія виникає при переході електрона з одного енергетичного рівня на іншій, то оптичний спектр атома

водню і воднеподібних іонів є лінійчатим. Довжини хвиль спектральних ліній описуються узагальненою формулою Бальмера:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_k^2} \right) Z^2, \quad (19.8)$$

де n_i – номер енергетичного рівня, на який переходить електрон; n_k – номер енергетичного рівня, з якого переходить електрон.

Спектральні лінії прийнято групувати в спектральні серії. У кожену серію входять всі лінії з фіксованим n_i , тобто ті, що відносяться до переходу електрона (при випромінюванні) на один і той же нижній рівень з різних верхніх.

На рис. 19.1 наведена схема рівнів енергії атома водню і його спектральні серії.

Серію з $n_i = 1$ ($n_k = 2, 3, 4, \dots$) називають *серією Лаймана*. Лінії цієї серії знаходяться в області ультрафіолетового випромінювання.

Серія з $n_i = 2$ ($n_k = 3, 4, 5, \dots$) носить назву *серії Бальмера*. Чотири перші лінії цієї серії лежать у видимій частині спектру і позначаються через H_α , H_β , H_γ , H_δ . Решта ліній серії Бальмера знаходиться в області ультрафіолетового випромінювання.

Серії з $n_i = 3$ ($n_k = 4, 5, 6, \dots$) - *серія Пашена*,

$n_i = 4$ ($n_k = 5, 6, 7, \dots$) - *серія Бреккета*,

$n_i = 5$ ($n_k = 6, 7, 8, \dots$) - *серія Пфунда*

знаходяться в інфрачервоній частині спектру.

Квантування орбітального моменту імпульсу і магнітного моменту

Розв'язання рівняння Шредінгера дає ще один важливий результат. Момент імпульсу електрона в атомі квантується за формулою:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (19.9)$$

де l – орбітальне квантове число. При заданому головному квантовому числі n , орбітальне квантове число приймає значення $0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. Стани електрона,

що мають різні значення орбітального квантового числа, в атомній фізиці прийнято позначати і називати таким чином: якщо $l = 0$, то стан електрона називається s – станом; якщо $l = 1$, то стан електрона називається p – станом. Стани з $l = 2, 3$, і т. д. називаються відповідно d –, f – і т. д. станами. Значення головного квантового числа указується перед умовним позначенням квантового числа l . Наприклад, електрон з $n = 2$ і $l = 0$ позначається символом $2s$.

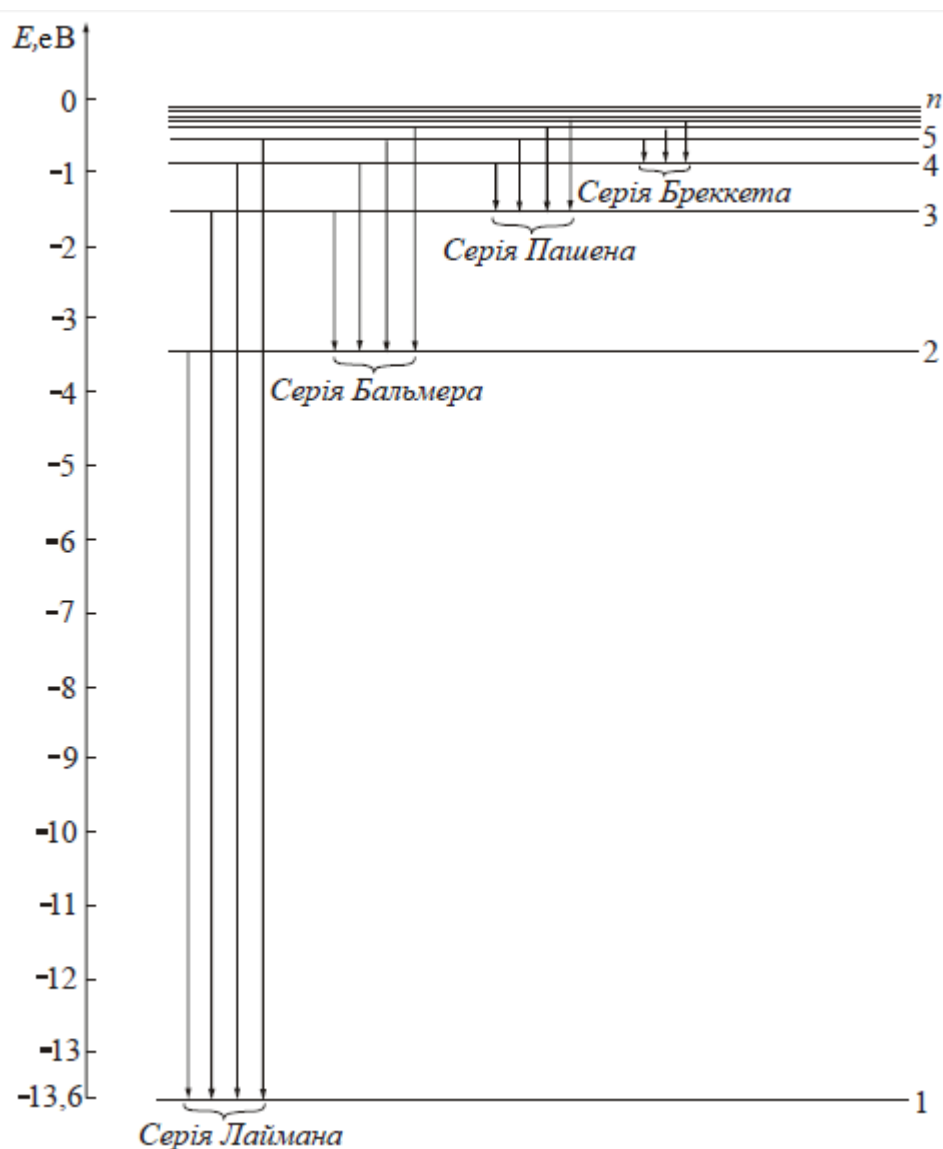


Рисунок 19.1 - Схема рівнів енергії атома водню і його спектральні серії

Хоча в квантовій механіці уявлення про орбіти, як і уявлення про траєкторії є неправомірним, момент, обумовлений рухом електрона в атомі, називають орбітальним моментом імпульсу. Рух електрона в атомі еквівалентний деякому замкненому контуру зі струмом (орбітальному струму).

Отже, окрім орбітального моменту імпульсу електрон має орбітальний магнітний момент.

Відношення орбітального магнітного моменту елементарної частинки до її орбітального моменту імпульсу називається магнітомеханічним (або гіромагнітним) відношенням. Для електрона воно дорівнює

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}, \quad (19.10)$$

де e – заряд електрона, m – його маса. Знак « $-$ » указує на те, що напрями моментів протилежні. Із співвідношень (19.9) і (19.10) випливає, що орбітальний магнітний момент $\vec{p}_m$ також квантується:

$$p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}, \quad (19.11)$$

де $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ – величина, яку називають магнетоном Бора. Для електрона $\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Тема 20

Квантові числа

Просторове квантування

У класичній механіці вважалося, що вектори орбітального моменту імпульсу $\vec{L}$ і магнітного моменту $\vec{p}_m$ можуть бути орієнтовані в зовнішньому магнітному полі абсолютно довільно. У квантовій механіці доводиться, що існує просторове квантування: *Вектор моменту імпульсу електрона має лише такі орієнтації в просторі, при яких проекція L_z вектора $\vec{L}$ на напрям Z зовнішнього магнітного поля приймає квантовані, цілочислові значення, кратні $\hbar$:*

$$L_z = m\hbar, \quad (20.1)$$

де $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots, \pm l$ – магнітне квантове число. Магнітне квантове число може мати $(2l + 1)$ значень. Отже, момент імпульсу $\vec{L}$ може мати в просторі $(2l + 1)$ орієнтацій.

Аналогічно слушне наступне твердження: *Вектор магнітного моменту електрона має лише такі орієнтації в просторі, при яких проекція p_{mz} вектора $\vec{p}_m$ на напрям Z зовнішнього магнітного поля приймає квантовані, цілочислові значення, кратні μ_B .*

$$p_{mz} = m\mu_B. \quad (20.2)$$

Приклад: електрон знаходиться в p – стані, при цьому $l = 1, m = 0, \pm 1$. Проекція орбітального моменту імпульсу може мати наступні значення: $L_z = +\hbar, L_z = 0, L_z = -\hbar$.

Зобразимо вектор моменту імпульсу $\vec{L}$ у вигляді спрямованих відрізків (рис. 20.1). Така схема називається **векторною моделлю атома**.

Аналогічно зображають магнітний момент $\vec{p}_m$. Векторну модель не можна розуміти буквально. Її слід розглядати як сукупність правил, що дозволяють отримати результати, справедливості яких підтверджується строгими квантово-механічними розрахунками.

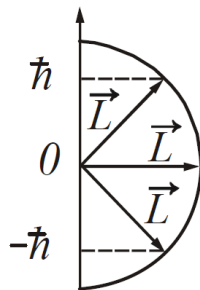


Рисунок 20.1 – Просторове квантування моменту імпульсу

Експериментальне визначення магнітних моментів атомів було здійснене О. Штерном і В. Герлахом. У їх досліді пучок атомів пропускали через сильне неоднорідне магнітне поле, перпендикулярне пучку. Неоднорідність поля досягалася за рахунок спеціальної форми полюсних наконечників електромагніту (рис. 20.2).

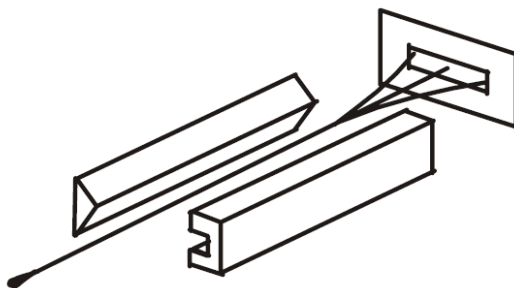


Рисунок 21.2 – Схема дослідів О. Штерна і В. Герлаха

На атоми пучка повинна діяти сила

$$F_z = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos \alpha. \quad (20.3)$$

Величина і знак сили залежать від кута α , що утворюється вектором $\vec{p}_m$ з напрямом поля. При хаотичному розподілі магнітних моментів за напрямками, в пучку є частинки, для яких значення кута α змінюються в межах від 0 до π . При цьому можна було очікувати, що вузький пучок атомів після проходження між полюсами утворить на екрані суцільний розтягнутий слід. Край сліду повинен відповідати атомам, магнітні моменти яких орієнтовані під кутами $\alpha = 0$ і $\alpha = \pi$. (див. рис. 20.3).

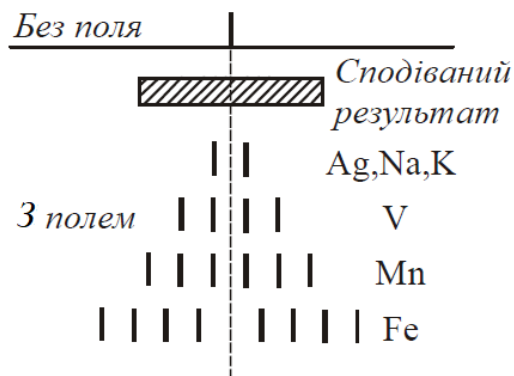


Рисунок 20.3 – Схеми розщеплення пучків атомів у магнітному полі

Досліди, проведені зі сріблом й іншими елементами, привели до абсолютно іншого результату. Замість суцільного розтягнутого сліду, на екрані спостерігалися окремі лінії, розташовані симетрично відносно пучка, отриманого у відсутності поля. Кількість можливих проекцій залежала від природи атома. Для срібла, алюмінію, міді й лужних металів воно дорівнює двом, для ванадію, азоту – чотирьом, кисню – п'яти, марганцю – шести і так далі. Досліди О. Штерна і В. Герлаха не тільки підтвердили просторове квантування моментів імпульсів в магнітному полі, але й дали експериментальне підтвердження висновку про те, що магнітні моменти електронів і атомів мають дискретну природу.

Момент імпульсу атома (і його магнітний момент) дорівнює сумарному моменту електронів, оскільки магнітні моменти ядер значно менші за величиною. У свою чергу, магнітні моменти електронів співпадають з сумарними моментами валентних електронів, оскільки моменти електронів замкнених оболонок компенсуються.

У елементів першої групи періодичної системи є один валентний електрон. Таким чином, моменти імпульсу і магнітні моменти таких атомів співпадають з моментами електрона. Важливою особливістю атомів першої групи є те, що валентний електрон в основному стані атома має орбітальне квантове число, що дорівнює нулю, тобто електрон знаходиться в *s-стані*. З формули (19.9) виходить, що при $l = 0$ момент імпульсу електрона L дорівнює нулю. Тому виникає питання про те, просторове квантування якого моменту

імпульсу було виявлено в дослідях О. Штерна і В. Герлаха?

Для пояснення отриманого результату потрібно було припустити, що електрон, окрім орбітального моменту імпульсу і відповідного йому магнітного моменту, має ще *власний механічний момент імпульсу і власний магнітний момент*.

Спін електрона

У 1925 році С. Гаудсміт і Дж. Уленбек на основі аналізу спектроскопічних даних висунули гіпотезу про те, що електрон має власний момент імпульсу $\vec{L}_s$ і відповідний йому власний магнітний момент $\vec{\mu}_{ms}$. Цей власний момент імпульсу був названий *спіном*. Слово «спін» (англ. spin) означає обертання.

Спочатку С. Гаудсміт і Дж. Уленбек припустили, що спін обумовлений обертанням електрона навколо власної осі. Згідно цим уявленням електрон уподібнювався дзизі або веретену. Проте таке уявлення привело до суперечності з теорією відносності. Розрахунки показали, що для того, щоб кулька-електрон, яка обертається навколо своєї осі, придбав магнітний момент, рівний одному магнетону Бора, кутова швидкість обертання повинна бути такою, що відповідна їй лінійна швидкість на поверхні сфери в 200 разів перевищувала б швидкість світла у вакуумі. Ці факти змусили відмовитися від подібних модельних уявлень. Спін слід вважати характеристикою, властивою електрону так само, як заряд і маса. Припущення про спін електрона підтверджене великою кількістю дослідних фактів і визнається абсолютно доведеним.

Із загальних висновків квантової механіки випливає, що спін (тобто власний момент імпульсу або спіновий момент) квантується згідно із законом:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad (20.4)$$

де s – спінове квантове число, яке для електрона може приймати тільки одне значення, рівне $1/2$.

Проекція спіну на заданий напрям також квантується:

$$L_{sz} = m_s \hbar, \quad (20.5)$$

де для електрона $m_s = \pm s = \pm 1/2$.

Число m_s за аналогією з m можна було б назвати магнітним спіновим числом. Але така назва рідко застосовується. Набагато частіше, кажучи про квантове спінове число розуміють під ним число m_s , тобто приписують квантовому спіновому числу значення $\pm 1/2$. Слід, проте, пам'ятати, що число s має тільки одне значення: $s = 1/2$.

Для власного магнітного моменту електрона виконуються такі співвідношення:

$$p_{ms} = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)}. \quad (20.6)$$

Знак « $-$ » указує на те, що механічний і магнітний моменти електрона спрямовані в різні боки.

Проекція власного магнітного моменту електрона на заданий напрям може приймати наступні значення:

$$p_{msz} = \mp 2\mu_B m_s = \mp \mu_B. \quad (20.7)$$

Мінус впливає, якщо $m_s = +1/2$, плюс – якщо $m_s = -1/2$.

Таким чином, проекція власного моменту імпульсу електрона може приймати значення $+\hbar/2$ і $-\hbar/2$, а власного магнітного моменту – значення $+\mu_B$ і $-\mu_B$. У ряд формул, зокрема у вираз для енергії, входять не самі моменти, а їх проекції. Тому прийнято говорити, що власний механічний момент (спін) дорівнює $1/2$ (у одиницях $\hbar$), а власний магнітний момент дорівнює магнетону Бора μ_B .

Принцип Паулі. Періодична система хімічних елементів

У 1925 році В. Паулі встановив квантово-механічний закон, який називають принципом Паулі або принципом заборони Паулі. У своєму простому формулюванні він звучить так: *У одному й тому ж атомі (або у будь-якій іншій квантовій системі) не може бути двох електронів, що мають однаковий набір чотирьох квантових чисел: n, l, m, m_s .*

Іншими словами, *в одному й тому ж стані не можуть знаходитися одночасно два електрони*. Максимальна кількість електронів, що знаходяться в станах, які описуються набором трьох квантових чисел n , l , m і що відрізняються тільки орієнтацією спінів електронів

$$N(n, l, m) = 2$$

оскільки магнітне спінове квантове число може приймати тільки два значення $+1/2$ і $-1/2$.

Максимальна кількість електронів, що знаходяться в станах, які визначаються двома квантовими числами n і l :

$$N(n, l) = 2(2l + 1).$$

При цьому враховано, що вектор $\vec{L}$ при заданому l може приймати $(2l + 1)$ орієнтацій.

Максимальна кількість електронів, що знаходяться в станах, які визначаються головним квантовим числом n :

$$N(n) = 2n^2.$$

У 1869 році був відкритий періодичний закон зміни хімічних і фізичних властивостей елементів залежно від їх атомних мас. Якщо розташувати хімічні елементи в порядку зростання їх атомних мас, то періодично, через проміжки, які називають періодами, елементи, що опинилися в одному вертикальному ряду (групі), виявляють схожі фізико-хімічні властивості. Було введено поняття *порядкового номера* елементу. Розташувавши хімічні елементи в порядку зростання їх номера, була отримана повна періодичність у зміні хімічних властивостей елементів. При цьому частина клітинок періодичної системи виявилася вільною, оскільки відповідні елементи ще не були відомі. Таким чином, вдалося передбачити ряд нових елементів (галій, скандій, германій і так далі). Надалі всі ці елементи були відкриті. Фізичний зміст порядкового номера був встановлений Резерфордом.

Найважливішим завданням фізики з'явилося теоретичне тлумачення періодичного закону і пояснення будови періодичної системи.

Сучасна теорія періодичної системи ґрунтується на наступних положеннях:

а) порядковий номер Z хімічного елементу дорівнює загальній кількості електронів в атомі даного елементу;

б) стан електронів в атомі визначається набором чотирьох квантових чисел: n , l , m , m_s . Розподіл електронів в атомах за енергетичними станами повинен задовольняти принципу мінімуму потенціальної енергії: зі зростанням числа електронів кожен наступний повинен займати можливий енергетичний стан з найменшою енергією;

в) заповнення електронами енергетичних станів відбувається відповідно до принципу Паулі.

Сукупність електронів в атомі з однаковим значенням головного квантового числа n називається електронним шаром (електронною оболонкою).

Розрізняють наступні електронні оболонки:

K - оболонка, головне квантове число $n = 1$;

L - оболонка, головне квантове число $n = 2$;

M - оболонка, головне квантове число $n = 3$;

N - оболонка, головне квантове число $n = 4$ і так далі.

Усередині оболонки електрони розподіляються за підоболонками (підрівнями), кожна з яких відповідає певному значенню орбітального квантового числа l .

У легких атомів спочатку заповнюється оболонка з меншим n , і лише потім повинна заповнюватися електронами наступна оболонка. Усередині даної оболонки спочатку заповнюються стани з $l = 0$, а потім стани з більшими l , аж до $l = (n-1)$.

Починаючи з калію ($Z = 19$), спостерігаються порушення цього порядку. Пояснюється це так. При великих квантових числах n взаємодія між електронами в атомі приводить до того, що стани з більшим n і меншим l можуть мати меншу енергію, ніж стани з меншим n , але з більшим l , тобто бути енергетично вигіднішими. Тому є хімічні елементи з недобудованими попередніми оболонками, у яких забудовуються подальші.

У таблиці 20.1 приведені основні відомості про квантові числа, що характеризують стан електрона в атомі.

Таблиця 20.1 – Значення квантових чисел

Квантове число і його значення	Величина, яка квантується	Формула	Примітка
1. Головне квантове число $n=1, 2, 3, \dots$ Відповідає номеру енергетичного рівня	Енергія	$E_n = -\frac{Rch}{n^2} Z^2$ (Дж) або $E_n = -\frac{13,6}{n^2} Z^2$ (еВ)	$R = 1,09 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ – швидкість світла; $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка.
2. Орбітальне квантове число $l=0, 1, 2, \dots, (n-1)$	Орбітальний момент імпульсу Орбітальний магнітний момент	$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$ $p_m = \mu_B \sqrt{l(l+1)}$	$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23}$ А·м ² – магнетон Бора
3. Магнітне квантове число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$	Проекція орбітального моменту імпульсу на напрям зовнішнього магнітного поля Проекція магнітного моменту на напрям зовнішнього магнітного поля	$L_z = m\hbar$ $p_{mz} = m\mu_B$	$\hbar = h/2\pi$ – стала Планка
4. Спінове квантове число $s = 1/2$	Власний момент імпульсу (спін) Власний магнітний момент	$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}$ $p_{ms} = -2\mu_B \sqrt{s(s+1)}$	Число s має тільки одне значення: $s=1/2$, тому стан електрона в атомі
5. Магнітне спінове число $m_s = 1/2$	Проекція власного моменту імпульсу Проекція власного магнітного моменту	$L_{sz} = m_s \hbar$ $p_{msz} = \mp 2\mu_B m_s = \mp \mu_B$	визначається набором чотирьох квантових чисел: n, l, m, m_s . Число m_s частіше називають числом просто спіну

ТЕМА 21

Фізика атомного ядра

Склад ядра. Заряд і масове число ядра

До 1932 р. фізикам були відомі тільки три елементарні частинки: електрон, протон і фотон. Тому було зроблено припущення, що ядро атома складається із протонів і електронів (протонно-електронна гіпотеза). Вважалось, що до складу ядра з порядковим номером Z , у періодичній системі елементів, і масовим числом A входить A протонів і $A - Z$ електронів. Відповідно до цієї гіпотези електрони, що входили до ядра, виконували роль "цементуючого" засобу, за допомогою якого позитивно заряджені протони утримувались у ядрі. Прибічники протонно-електронної гіпотези складу атомного ядра вважали, що β^- - радіоактивність є підтвердженням слушності гіпотези.

Проте ця гіпотеза виявилась нездатною пояснювати ряд експериментальних даних і була відкинута. Одне з таких утруднень - це неспроможність пояснити те, чому спіни ядер азоту $^{14}_7\text{N}$ дорівнює одиниці ($\hbar$).

Відповідно до протонно-електронної гіпотези, ядро азоту $^{14}_7\text{N}$ повинно складатись з 14 протонів і 7 електронів. Спин протонів і електронів дорівнює $1/2$. Тому ядро азоту, яке складається відповідно до цієї гіпотези з 21 частинки, повинно мати спин $1/2, 3/2, \dots, 21/2$. Ця невідповідність протонно-електронної гіпотези була названа "азотною катастрофою". Зовсім незрозумілим було також і те, що при наявності електронів у ядрі його магнітний момент має мале числове значення порівняно з магнітним моментом електрона.

У 1932 р. Дж. Чедвік відкрив нейтрон. Після відкриття нейтрона було висунуто гіпотезу про протонно-нейтронну будову атомного ядра, яку детально розробив В. Гейзенберг. Протонно-нейтронний склад ядер підтверджується не тільки теоретичними обґрунтуваннями, але й безпосередніми дослідями по розщепленню ядер на протони і нейтрони. Тепер загально прийнято, що атомні ядра складаються із протонів і нейтронів, які називають також нуклонами (від латинського слова *nucleus* - ядро, зерно).

Основними характеристиками атомних ядер, які виражають їх індивідуальність, є електричний заряд, маса, спин, електричний та магнітний моменти, енергія зв'язку та ін.

Електричний заряд ядра позитивний. Носієм позитивного заряду ядра є протони. Оскільки заряд протона кількісно дорівнює заряду електрона e , то можна записати, що заряд ядра дорівнює Ze (Z - ціле число, яке вказує порядковий номер хімічного елемента у періодичній системі елементів). Число Z також виражає кількість протонів у ядрі та кількість електронів у атомі. Електричний заряд є однією з основних характеристик атомного ядра, від якої залежать оптичні, хімічні та інші фізичні властивості атомів.

Другою важливою характеристикою є маса атомного ядра. Масу атомів і ядра у фізиці виражають в атомних одиницях маси (а. о. м.). За атомну одиницю маси приймається $1/12$ частина маси нукліда вуглецю $^{12}_6\text{C}$:

$$1 \text{ а. о. м.} = \frac{1}{12} \cdot \frac{12 \text{ г} \cdot \text{моль}^{-1}}{N_A} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ г} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$$

де $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ - число Авогадро.

Згідно зі співвідношенням Ейнштейна $E = mc^2$, масу атомів виражають також в одиницях енергії. Так, маса протона $m_p = 1,0072764 \text{ а.о.м.} = 938,2796 \text{ МеВ}$, маса нейтрона $m_n = 1,008665 \text{ а.о.м.} = 939,5731 \text{ МеВ}$, а маса електрона $m_e = 5,49 \cdot 10^{-4} \text{ а.о.м.} = 0,511 \text{ МеВ}$. Оскільки маса електронів дуже мала порівняно з масою ядра, то маса ядра майже збігається з масою атома.

Маса атомів дещо відрізняється від цілих чисел. Маса ядра, виражена в а.о.м. і заокруглена до цілого числа, називається *масовим числом* A . Масове число виражає кількість нуклонів у ядрі атома. Ядро атома даного елемента позначають хімічним символом елемента, зверху біля символу вказують масове число A , а внизу - порядковий номер Z (кількість протонів) ядра Z . Тоді нейтронів у ядрі буде $A - Z$. Атомні ядра з однаковою кількістю протонів, але з різними масовими числами називають *ізотопами*. В середньому кожному значенню Z відповідає біля трьох стабільних ізотопів. У деяких елементів кількість стабільних і нестабільних ізотопів досягає десятків. Так, уран має чотирнадцять

ізотопів: від ${}_{92}^{227}\text{U}$ до ${}_{92}^{240}\text{U}$.

Більшість хімічних елементів, що існують у природі, являють собою суміш кількох ізотопів. Саме наявністю ізотопів пояснюється той факт, що деякі природні елементи мають атомні маси, які відрізняються від цілих чисел. Так, природний хлор складається з 76 % ${}_{17}^{35}\text{Cl}$ та 24 % ${}_{17}^{37}\text{Cl}$ і його атомна маса 35,5 а.о.м. У переважній більшості атоми ізотопів (крім водню) мають майже однакові фізичні та хімічні властивості. За своїми чисто ядерними властивостями ізотопи істотно відрізняються. Одні з них можуть бути стабільними, інші - радіоактивними.

Ядра з однаковими масовими числами, але різними значеннями Z називають *ізобарами*, наприклад, ${}_{18}^{40}\text{Ar}$, ${}_{20}^{40}\text{Ca}$. Ядра з однаковою кількістю нейтронів називають *ізотонами*. Серед легких ядер трапляються так звані "дзеркальні" пари ядер. Це такі пари, у яких числа Z і $A - Z$ міняються місцями. Прикладами таких пар є ${}_{6}^{13}\text{C}$ і ${}_{7}^{13}\text{N}$; ${}_{1}^{3}\text{H}$ і ${}_{2}^{3}\text{He}$ та ін.

Вважаючи атомне ядро приблизно сферичним, можна ввести поняття його радіуса R . Зазначимо, що в деяких ядрах є незначне відхилення від сферичної симетрії у розподілі електричного заряду. Крім того, атомні ядра не статичні, а динамічні системи, і поняття радіус ядра не можна уявляти як радіус кульки. Тому під розмірами ядра необхідно розуміти розміри тієї області, в якій проявляється дія ядерних сил.

При створенні кількісної теорії розсіяння α -частинок Е. Резерфорд виходив із припущень, що атомне ядро і α -частинка взаємодіють за законом Кулона, тобто що електричне поле навколо ядра має сферичну симетрію. Розсіяння α -частинки відбувалось у повній відповідності з формулою Резерфорда. Це має місце для α -частинок, енергія яких E мала. При цьому частинка не спроможна подолати кулонівський потенціальний бар'єр і тому не досягає області дії ядерних сил. Зі збільшенням енергії частинки до деякого граничного значення E_{cp} α -частинка досягає цієї межі. Тоді в розсіянні α -частинок спостерігається відхилення від формули Резерфорда. Із співвідношення

$$E_{ep} \geq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Ze^2}{R} \quad \text{маємо} \quad R \leq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Ze^2}{E_{ep}}.$$

Досліди показують, що радіуси R ядер залежать від кількості нуклонів, які входять до складу ядра. Ця залежність може бути виражена емпіричною формулою

$$R = R_0 \sqrt[3]{A}, \quad (21.1)$$

де R_0 - стала; A - масове число.

Розміри атомних ядер визначають експериментально за розсіянням протонів, швидких нейтронів, електронів високих енергій. Існує і ряд інших непрямих методів визначення розмірів ядер. Вони ґрунтуються на зв'язку довговічності α -радіоактивних ядер з енергією випущених ними α -частинок; на оптичних властивостях так званих мезоатомів, в яких один із електронів тимчасово замінено захопленим мюоном; на порівнянні енергії зв'язку пари дзеркальних атомів та ін. Ці методи підтверджують емпіричну залежність (21.1). За допомогою цих вимірювань встановлено, що стала $R_0 = (1,2-1,5) \cdot 10^{-15}$ м.

Радіуси атомних ядер, залежно від їх масового числа, лежать у межах від $2 \cdot 10^{-15}$ до 10^{-14} м. Якщо формулу (21.1) переписати у вигляді $4\pi R^3/3A = \text{const}$, то видно, що на частину кожного нуклона припадає майже однаковий об'єм. Це означає, що густина ядерної речовини для всіх ядер також майже однакова. Виходячи з наявних відомостей про розміри атомних ядер, знайдемо середнє значення густини речовини ядра:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{Am_{\text{нукл}}}{(4/3)\pi R_0^3 A} \approx 1,8 \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3.$$

Як бачимо, густина ядерної речовини величезна. Це зумовлено дією ядерних сил.

Енергія зв'язку ядер. Дефект маси ядра

При порівнянні суми мас спокою нуклонів, які утворюють ядро, з масою ядра виявилось, що для всіх хімічних елементів справджується нерівність

$$Zm_p + (A - Z)m_n > m_{\text{я}},$$

де m_p - маса протона; m_n - маса нейтрона; $m_{\text{я}}$ - маса ядра. Величину Δm , що виражає різницю між масою нуклонів, які утворюють ядро, і масою ядра, називають дефектом маси ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}.$$

Важливі відомості про властивості ядра можна одержати, не вдаючись до деталей взаємодії між нуклонами ядра, на основі закону збереження енергії та закону пропорційності маси й енергії. Оскільки у разі будь-якої зміни маси Δm відбувається відповідна зміна енергії ΔE ($\Delta E = \Delta mc^2$), то при утворенні ядра виділяється певна кількість енергії. За законом збереження енергії така сама кількість енергії необхідна, щоб розділити ядро на складові частинки, тобто віддалити нуклони один від одного на такі відстані, за яких відсутня взаємодія між ними. Цю енергію називають енергією зв'язку ядра.

Якщо ядро містить Z протонів і має масове число A , то енергія зв'язку дорівнює:

$$E_{\text{зв}} = \Delta mc^2 = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2. \quad (21.2)$$

Зазначимо, що формулою (21.2) не зовсім зручно користуватись, оскільки в таблицях наводяться не маси ядер, а величини, які виражають маси нейтральних атомів. Тому для зручності обчислень формулу (21.2) доцільно перетворити так, щоб до неї входили маси атомів, а не ядер. З цією метою у праву частину формули (21.2) додамо і віднімемо масу Z електронів (m_e). Тоді

$$\begin{aligned} E_{\text{зв}} &= [Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - (m_{\text{я}} + Zm_e)]c^2 = \\ &= [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m_{\text{а}}]c^2, \end{aligned}$$

де m_{H} - маса атома водню; $m_{\text{а}}$ - маса атома з порядковим номером Z і масовим числом A .

В ядерній фізиці енергію часто виражають у МеВ. Якщо мова йде про практичне застосування ядерної енергії, то її вимірюють у джоулях. У тих випадках, коли треба порівняти енергії зв'язку різних ядер, користуються так

званою масовою одиницею енергії - співвідношенням між масою і енергією ($E = mc^2$). Масова одиниця енергії (1e) дорівнює енергії, що відповідає масі в одну атомну одиницю маси за вуглецевою шкалою. Вона дорівнює 931,502 MeV.

Крім енергії зв'язку важливе значення має питома енергія зв'язку - це енергія зв'язку, що припадає на один нуклон: $\varepsilon = E_{\text{зв}} / A$. Ця величина змінюється порівняно повільно зі зміною масового числа, маючи майже сталу величину $\varepsilon \approx 8,6$ MeV у середній частині періодичної системи ($40 < A < 120$), і зменшується до її країв (див. рис. 21.1).

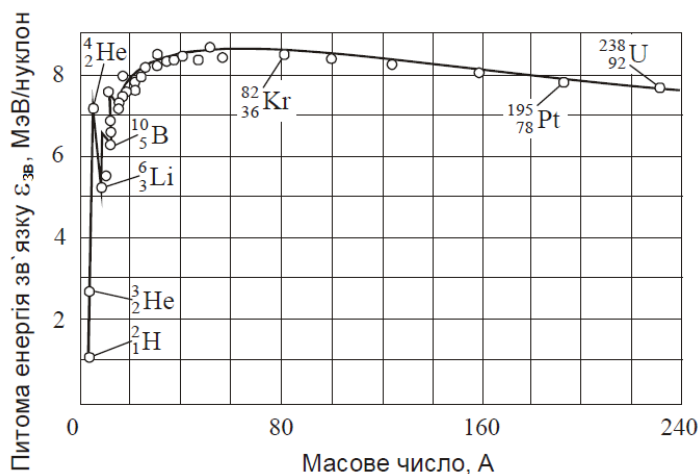


Рисунок 21.1 – Питома енергія зв'язку атомних ядер

З рис. 21.1 видно, що для легких ядер питома енергія зв'язку із збільшенням масового числа зазнає стрибків. Так, для дейтерію ${}^2_1\text{H}$ вона дорівнює 1,11, ізотопу гелію ${}^3_2\text{He}$ - 2,58, ізотопу гелію ${}^4_2\text{He}$ - 7,08, а ізотопу літію ${}^6_3\text{Li}$ - 5,33 MeV. Для атомів, у яких $A > 20$, питома енергія зв'язку майже однакова. Починаючи з $A \approx 60$ питома енергія зв'язку поступово зменшується. Це пояснюється тим, що із збільшенням кількості протонів у ядрі збільшується і сила електростатичного відштовхування між ними. Тому зв'язок між нуклонами стає слабшим. Питома енергія зв'язку для урану ${}^{238}_{92}\text{U}$ дорівнює 7,5, а для фермію ${}^{254}_{100}\text{Fm}$ - 7,4 MeV. Аналіз показує, що питома енергія зв'язку залежить від того, парне чи непарне число нуклонів у ядрі. Виявлено, що ядра, в яких Z або $A - Z$, або обидва цих числа дорівнюють 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (ці числа називають *магічними*), особливо стійкі і мають більшу енергію зв'язку, ніж сусідні ядра.

Існування особливо стійких ядер, які характеризуються певним числом протонів і нейтронів, нагадує аналогічну картину для атомів (інертних газів), які також проявляють значну стабільність. В атомах стабільність пояснюється заповненням електронних шарів. Це наводить на думку, що магічні числа можуть вказувати на якусь шарувату будову ядер.

Більш стабільними є ядра з парним числом протонів Z і парним числом нейтронів $A - Z$ (парно-парні ядра). Атомні ядра з парним числом протонів Z і непарним числом $A - Z$ (парно-непарні), а також з непарним Z і парним $A - Z$ (непарно-парні) менш стабільні, ніж ядра парно-парні. Найменшу стабільність мають ядра з непарним Z і непарним $A - Z$ (непарно-непарні).

Характеристики ядерних сил

Ядерна взаємодія між нуклонами називається **сильною взаємодією**. Її можна описати за допомогою поля **ядерних сил**, які не зводяться ні до одного з раніше розглянутих типів сил. Перелічимо відмітні особливості цих сил.

- Ядерні сили – це сили притягання. Вони не мають електричного походження і діють на відстанях $\sim 4,2$ фермі, тому їх називають короткодійними.
- Ядерні сили є зарядово незалежними, тобто ядерна взаємодія двох нуклонів не залежить від того, мають електричний заряд чи ні обидва нуклони.
- Ядерні сили не є центральними. Вони залежать не тільки від відстані між нуклонами, але від орієнтації їх спінів.
- Для ядерних сил характерне насичення. Насичення проявляється в тому, що кожен нуклон взаємодіє не з усіма нуклонами ядра, а лише з деякими найближчими сусідами, причому не зі всіма, навіть якщо вони знаходяться в радіусі дії сил.
- Ядерні сили мають обмінний характер. Вважається, що взаємодія між двома частинками здійснюється завдяки обміну третьою частинкою. У 1935 році Юкава і Тамм виявили, що ці частинки мають масу спокою $m_0 = 200 m_{0e}$, m_{0e} – маса спокою електрона. Назвали ці частинки π - мезонами або піонами.

ТЕМА 22

Ядерні перетворення

Існують два типи ядерних перетворень:

- ядерні реакції;
- радіоактивність.

Ядерні реакції

Ядерні реакції – це перетворення атомних ядер при їх взаємодії з елементарними частинками (у тому числі і з γ -квантами) або одного з одним.

Символічно ядерні реакції записуються в наступному вигляді:

$$X + \alpha \rightarrow Y + \beta \quad \text{або} \quad X(\alpha, \beta)Y, \quad (22.1)$$

де X і Y – вихідне і кінцеве ядра; α і β – частинка, яка бомбардує і частинка що виникає внаслідок ядерної реакції.

У будь-якій ядерній реакції виконуються закони збереження електричних зарядів і масових чисел:

Сума зарядів ядер і частинок, які вступають в ядерну реакцію, дорівнює сумі зарядів продуктів реакції (ядер і частинок).

Сума масових чисел ядер і частинок, які вступають в ядерну реакцію, дорівнює сумі масових чисел продуктів реакції (ядер і частинок).

Ядерна реакція характеризується енергією ядерної реакції Q , що дорівнює різниці енергій кінцевої і вихідної пар в реакції:

$$Q = \left(\sum m_i - \sum m_k \right) \cdot c^2, \quad (22.2)$$

де $\sum m_i$ – сума мас частинок до реакції; $\sum m_k$ – сума мас частинок після реакції.

Ядерні реакції можуть бути:

- екзотермічними (з виділенням тепла), при цьому $\sum m_i > \sum m_k$ ($Q > 0$);
- ендотермічними (з поглинанням тепла), при цьому $\sum m_i < \sum m_k$ ($Q < 0$).

Якщо маси виразити в а.о.м., то енергія ядерної реакції обчислюється в МеВ за формулою:

$$Q = 931,5 \left(\sum m_i - \sum m_k \right). \quad (22.3)$$

Радіоактивність

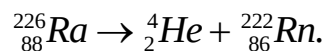
Радіоактивність – явище спонтанного (мимовільного) розпаду ядер, при якому утворюється нове ядро, і випускаються частинки.

Ядро, яке розпадається, називається *материнським*, виникаюче ядро називається *дочірнім*.

Природна радіоактивність спостерігається в основному у важких ядер, які розташовуються в періодичній системі хімічних елементів за свинцем. Явище було відкрито Анрі Беккерелем у 1896 році.

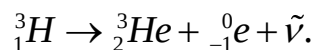
Залежно від того, яка частинка випускається, розрізняють наступні види розпаду:

1. α - розпад – випускання α - частинки, тобто ядра гелію – ${}^4_2\text{He}$:

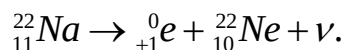


2. β - розпад – випускання:

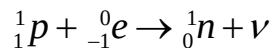
- а) електронів – e^- (β^- - розпад)



- б) позитронів – e^+ (β^+ - розпад)



- в) K - захоплення (електронне захоплення). Перетворення протона на нейтрон йде за схемою



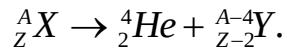
Електронне захоплення полягає в тому, що один з електронів на найближчому до ядра K - шарі атома захоплюється ядром. Тут ν і $\tilde{\nu}$ електронні нейтрино і антинейтрино.

3. *Гамма-випромінювання* (γ -випромінювання) – це жорстке електромагнітне випромінювання з довжиною хвилі $\lambda < 10^{-10}$ м. Має велику

проникну здатність, оскільки енергія квантів $\varepsilon \geq 10^4$ еВ.

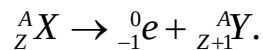
При аналізі результатів радіоактивних розпадів дослідним шляхом були відкриті правила зсуву (правила Фаянса і Содді).

1) при α - розпаді:



α -розпад зменшує масове число на 4, а зарядове на 2, тобто дочірній елемент зміщується на дві клітки вліво в таблиці хімічних елементів.

2) при β - розпаді:



β - розпад не змінює масового числа, зарядове число збільшує на одиницю, тобто дочірній елемент зміщується на 1 клітку вправо.

Закон радіоактивного розпаду

Радіоактивний розпад зменшує з часом число ядер, що не розпалися. Мимовільний розпад ядер відбувається за законом радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (22.4)$$

де N_0 – число ядер у даному об'ємі речовини у момент часу $t = 0$; N – число ядер у тому ж об'ємі до моменту часу t ; λ - стала розпаду.

Стала розпаду λ – це фізична величина, яка кількісно дорівнює частині ядер, які розпадаються за одиницю часу:

$$\lambda = \frac{dN/N}{dt}. \quad (22.5)$$

Таким чином, стала розпаду визначає швидкість радіоактивного розпаду.

Величина $\tau = 1/\lambda$ називається **середньою тривалістю життя** (середній час життя) радіоактивного ізотопу.

Для оцінки стійкості ядер зазвичай використовують не сталу розпаду, а величину, яка називається періодом напіврозпаду.

Період напіврозпаду ($T_{1/2}$) – час, протягом якого первинна кількість ядер даної радіоактивної речовини розпадається наполовину (рис. 22.1). Період напіврозпаду може мінятися в дуже широких межах (від частки секунди до тисячі років). Період напіврозпаду і стала розпаду зв'язані наступним співвідношенням:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \quad (22.6)$$

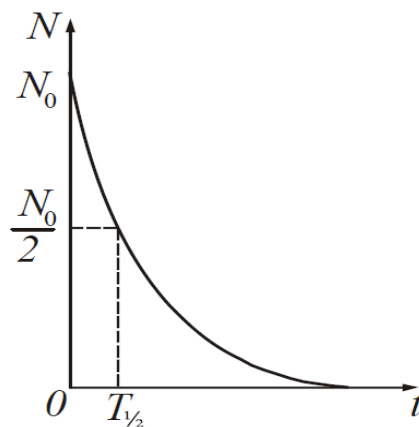


Рисунок 22.1 – Зміна кількості радіоактивних ядер у часі

Закон спонтанного радіоактивного розпаду ґрунтується на двох припущеннях:

- 1) стала розпаду не залежить від зовнішніх умов;
- 2) кількість ядер, що розпадаються за час dt , пропорційна вихідній кількості ядер N_0 .

Це означає, що закон радіоактивного розпаду є статистичним законом. Статистичні закони можна застосовувати тільки до великої кількості ядер. Закон радіоактивного розпаду не відповідає на питання, яке саме ядро розпадеться, оскільки всі ядра нерозрізні і розпад даного ядра є випадковою подією, що має ту або іншу вірогідність.

Часто буває, що ядра, які виникають в результаті радіоактивних перетворень, у свою чергу виявляються радіоактивними. Нові продукти розпаду також можуть виявитися радіоактивними, тобто виникає цілий ряд радіоактивних перетворень. У природі існують три радіоактивні ряди,

родоначальниками яких служать уран ($^{238}_{92}\text{U}$), торій ($^{232}_{90}\text{Th}$) і актиній ($^{235}_{89}\text{Ac}$).

Кінцевим продуктом у всіх випадках служать ізомери свинцю.

Для дослідження радіоактивних ізомерів зазвичай використовують препарати. **Препарат** – це певна кількість радіоактивної речовини, спеціально приготованої для експерименту, наприклад, нанесеного на підкладку або замкненого в оболонку.

Активність a препарату (радіоактивного джерела) – дорівнює числу розпадів, що відбуваються за одиницю часу:

$$a = \frac{dN}{dt}. \quad (22.7)$$

$$[a] = 1 \frac{\text{розп}}{\text{с}} = 1 \text{ Бк (беккерель)}.$$

Для вимірювання активності допускається застосування позасистемної одиниці – кюрі (Ки).

1 кюрі – активність препарату, в якому відбувається $3,7 \cdot 10^{10}$ розпадів за секунду.

$$1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}.$$

Таку активність має 1 грам радію.

Активність препарату дорівнює добутку сталої розпаду λ на кількість N атомів у цьому препараті, що не розпалися:

$$a = -\lambda N. \quad (22.8)$$

Знак «-» означає, що активність з часом зменшується.

Замінивши N за формулою (22.4), отримаємо закон зміни активності:

$$a = a_0 e^{-\lambda t}, \quad (22.9)$$

де a_0 – активність у момент часу $t = 0$.

Питома активність a_{num} – активність одиниці маси речовини.

$$a_{\text{num}} = \frac{a}{m}. \quad (22.10)$$

$$[a_{\text{num}}] = 1 \frac{\text{Бк}}{\text{кг}}.$$

Використання явища радіоактивності для вимірювання часу в геології і археології

Явище радіоактивності може грати роль годинника. Використовуючи закон радіоактивного розпаду (22.4)

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

можна отримати формулу для визначення часу існування ядер

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N}. \quad (22.11)$$

У якості N зазвичай береться кількість ядер, що не розпалися на даний час, тому приведена формула визначає вік даної сукупності радіоактивних ядер. Для визначення віку мінералів, що містяться в земній корі, потрібно брати «геологічний» годинник, тобто використовувати процеси з періодом напіврозпаду того ж порядку, що і геологічні епохи – сотні мільйонів і мільярди років.

Цій умові відповідають ізотопи урану $^{238}_{92}\text{U}$ ($T_{1/2} = 4,46 \cdot 10^9$ років) і $^{235}_{92}\text{U}$ ($T_{1/2} = 7,04 \cdot 10^8$ років). Продуктом розпаду ізоотопів урану є ізотопи свинцю. За співвідношенням свинцю і урану можна розрахувати проміжок часу, протягом якого накопичилася дана кількість свинцю унаслідок розпаду урану.

У археології для визначення віку предметів, знайдених при розкопках, використовують радіоактивний розпад з періодом напіврозпаду порядку декількох століть або тисячоліть (вуглець $^{14}_6\text{C}$, $T_{1/2} = 5730$ років). У живій рослині або тварині процентний вміст радіоактивного вуглецю в порівнянні із звичайним вуглецем залишається постійним, оскільки втрати вуглецю відновлюються живленням. З моменту загибелі організму починає йти радіоактивний годинник: вміст радіоактивного вуглецю в організмі або виробі з органічних матеріалів починає убувати відповідно до закону радіоактивного розпаду. Таким чином, можна визначити час, що пройшов з моменту загибелі організму або час життя предмету, зробленого з органічного матеріалу.

ТЕМА 23

Основи фізики твердого тіла

Енергетичні зони в кристалах

Розглянемо уявний процес об'єднання атомів в кристал. Нехай спочатку є N ізолюваних атомів якоїсь речовини. Поки атоми ізолювані один від одного, вони мають повністю співпадаючі схеми енергетичних рівнів (рис. 23.1, права частина). Заповнення рівнів електронами здійснюється в кожному атомі незалежно від заповнення аналогічних рівнів в інших атомах. У міру зближення атомів між ними виникає все зростаюча взаємодія, яка приводить до зміни положення рівнів. Замість одного однакового для всіх N атомів рівня виникає N дуже близько розташованих енергетичних рівнів, що створюють зону.

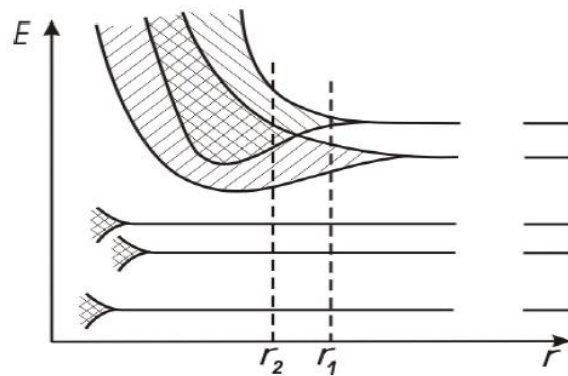


Рисунок 23.1 – Зміна енергетичних рівнів атомів при їх об'єднанні

Енергетична зона – це область дозволених значень енергії електронів у кристалі, що складається з великої, але кінцевої кількості дуже близько розташованих рівнів енергії. Сусідні енергетичні рівні в зоні відокремлені один від одного приблизно на 10^{-22} еВ. Величина розщеплювання для різних рівнів не однакова. Сильніше збурюються рівні, заповнені в атомі зовнішніми електронами. Рівні, заповнені внутрішніми електронами, збурюються менше. На рис. 23.1 (ліва частина) показано розщеплювання рівнів залежно від відстані r між атомами. Видно, що розщеплювання рівнів, зайнятих внутрішніми електронами, яке виникає в кристалі, дуже мале. Помітно розщеплюються лише

рівні, займані валентними електронами. Такому ж розщеплюванню піддаються і вищі рівні, не зайняті електронами в основному стані атома.

Розщеплювання рівнів залежить від конкретних властивостей атомів. Якщо рівновага між сусідніми атомами настає при відстані r_1 (див. рис. 23.1), то між дозволеними зонами утворюються заборонені зони (рис. 23.2).

Заборонена зона – це інтервал значень енергії, які електрони мати не можуть.

Якщо рівновага між сусідніми атомами настає при відстані r_2 (див. рис. 23.1), то сусідні рівні перекриваються. Число рівнів в такій зоні, що злилася, дорівнює сумі рівнів, на які розщеплюються рівні окремих атомів.

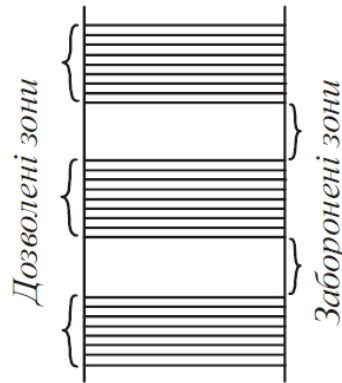


Рисунок 23.2 – Схематична структура енергетичних зон

Дозволені енергетичні зони в кристалах можуть бути по-різному заповнені електронами. Як правило, енергетичні зони внутрішніх оболонок заповнені повністю, тому електричні властивості твердих тіл пояснюються різним заповненням двох верхніх дозволених зон і шириною забороненої зони. Енергетична зона, заповнена валентними електронами, називається **валентною** (рис. 23.3). Найближча до неї енергетична зона, не заповнена електронами, називається **зоною провідності**. Між валентною зоною і зоною провідності знаходиться **заборонена зона**. ΔE – ширина забороненої зони:

$$\Delta E = E_C - E_V;$$

E_C – дно зони провідності, E_V – стеля валентної зони.

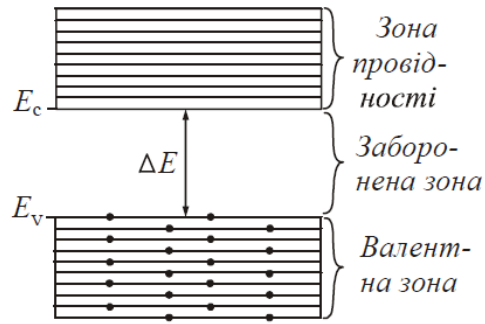


Рисунок 23.3 – Заповнення енергетичних зон електронами

Електрони у твердих тілах можуть переходити з однієї дозволеної зони в іншу. Для переходу електрона з валентної зони в зону провідності необхідно витратити енергію, яка дорівнює ширині забороненої зони, розташованої між ними (енергію порядку декількох еВ). Для переходів всередині зони досить передати енергію порядку 10^{-22} еВ. Наприклад, електрони в металі набувають цієї енергії під дією електричного поля при звичайних різницях потенціалів. Тепловим електронам можна передати різну енергію, достатню як для переходів всередині зони, так і між зонами.

Існування енергетичних зон дозволяє пояснити з єдиної точки зору розділення твердих тіл на провідники, напівпровідники і діелектрики (ізолятори). Залежно від ступеня заповнення валентної зони електронами і ширини забороненої зони можливі три випадки, зображені на рис. 23.4.

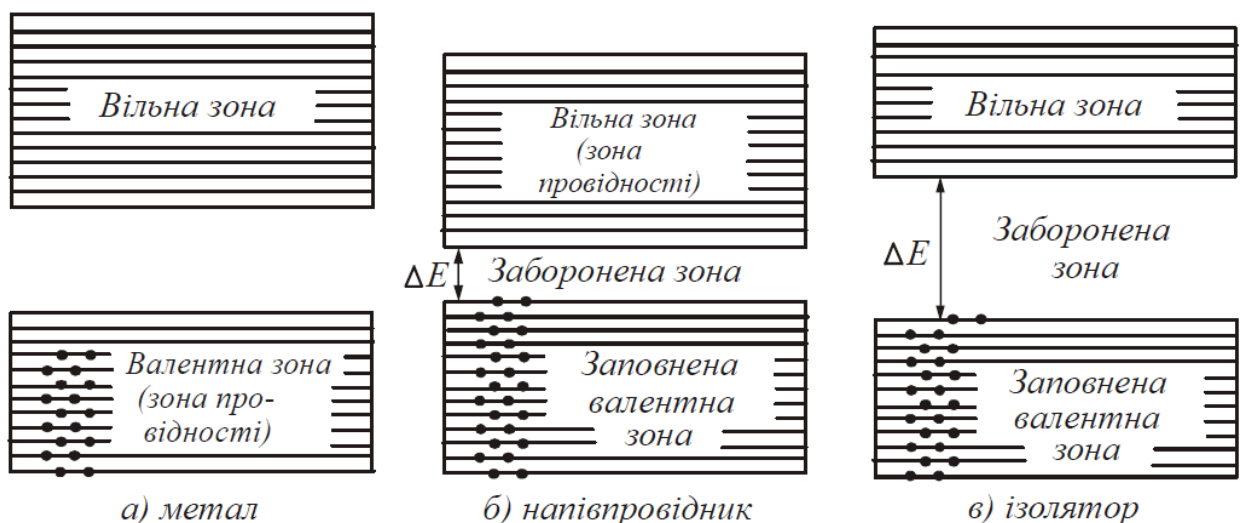


Рисунок 23.4 – Енергетичні зони металів, напівпровідників і ізоляторів

На рис. 23.4 а електрони заповнюють валентну зону не повністю. Тому достатньо передати електронам, що знаходяться на верхніх рівнях, зовсім невелику енергію ($\sim 10^{-22}$ еВ) для того, щоб перевести їх на вищі рівні. Енергія теплового руху складає при 1К величину порядку 10^{-4} еВ, а при кімнатних температурах – 0,026 еВ. Отже, при температурах, відмінних від 0К, частина електронів перейде на вищі рівні. Додаткова енергія, викликана дією на електрон електричного поля, також виявляється достатньою для переведу електрона на вищі рівні. Таким чином, кристал з подібною схемою енергетичних рівнів буде *провідником* (металом).

На рис. 23.4 б і 23.4 в рівні валентної зони при $T = 0\text{К}$ повністю зайняті електронами – зона заповнена. Для того, щоб збільшити енергію електрона, необхідно передати йому кількість енергії не менше, ніж ширина ΔE забороненої зони. Електричне поле передати електрону таку енергію не може. За цих умов, електричні властивості кристала визначаються шириною ΔE забороненої зони. Якщо вона невелика ($\Delta E < 3$ еВ), то енергія теплового руху атомів речовини виявляється достатньою для того, щоб перевести частину електронів у вільну верхню зону. Ці електрони знаходитимуться в умовах, аналогічних тим, в яких знаходяться валентні електрони в металі. Вільна зона виявиться для них зоною провідності. У залишеному електроном місці виникає надлишок позитивного заряду – «дірка». *Дірка* – це квазічастинка, якій приписують одиничний позитивний заряд. Вона виникає при порушенні ковалентних зв'язків в кристалі напівпровідника. Речовина з таким типом провідності є *напівпровідником*.

Якщо ширина забороненої зони велика ($\Delta E > 3$ еВ), тепловий рух не зможе закинути у вільну зону помітне число електронів. У цьому випадку кристал виявляється *діелектриком* (ізолятором).

Електричні властивості твердих тіл

Всі тверді тіла за їх здатністю проводити електричний струм поділяють на провідники, напівпровідники і діелектрики. Типовими провідниками є метали,

типовими діелектриками – іонні кристали. Напівпровідники – це широкий клас речовин з ковалентним типом зв’язку.

Здатність речовини проводити електричний струм характеризується питомою провідністю σ або питомим опором ρ . Їх величина визначається хімічною природою речовини і температурою, при якій знаходиться речовина. Питомий опір пов’язаний з питомою провідністю співвідношенням:

$$\rho = \frac{1}{\sigma}. \quad (23.1)$$

Приблизні інтервали значень ρ , які мають метали, напівпровідники і діелектрики, наведені на рис. 23.5.

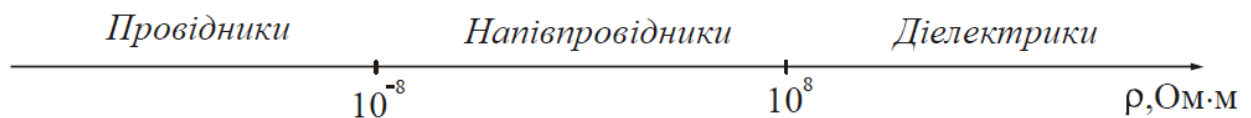


Рисунок 24.5 – Інтервали значень ρ матеріалів

Електропровідність металів. Відповідний квантово-механічний розрахунок дає, що у разі ідеальних кристалічних ґрат електропровідність металів була б нескінченно великою. Проте кристалічні ґрати ніколи не бувають досконалими. Порухи строгої періодичності ґрат бувають обумовлені наявністю домішок або вакансій, дислокацій, а також тепловими коливаннями атомів. Розсіяння електронів провідності на теплових коливаннях основних атомів металу і атомах домішок приводить до виникнення електричного опору металів. Чим чистіше метал і чим нижче температура, тим менший цей опір.

Для більшості металів при температурах, близьких до кімнатної, питомий опір лінійно змінюється з температурою:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (23.2)$$

де ρ_0 – питомий опір при 0°C ; t – температура в $^\circ\text{C}$; α – температурний коефіцієнт опору. Для чистих металів у твердому стані $\alpha \approx 0,004 \text{ K}^{-1}$.

У великої групи металів і сплавів при температурі порядку декількох кельвін опір стрибком обертається в нуль. Це явище було відкрите в 1911 році на

ртуті і отримало назву **надпровідність**. Температура T_K , при охолодженні до якої відбувається перехід в надпровідний стан, називається критичною температурою. Надалі були виявлені й інші матеріали, здатні переходити в надпровідний стан (Ta, Pb, Nb, а також сплави: галід ніобію Nb_3Ga , галід ванадію V_3Ga та ін.). Ці матеріали отримали назву **надпровідників**. Температури надпровідних переходів лежать в інтервалі від 1,2 до 18 К.

Надпровідністю є явище, в якому квантово-механічні ефекти виявляються не в мікроскопічних, а у великих, макроскопічних масштабах. Теорія надпровідності була створена Дж. Бардіним, Л. Купером і Дж. Шріффером у 1957 році і отримала назву БКШ – теорія.

Залежність електричного опору від температури покладена в основу роботи термометрів опору. Такий термометр є металевим дротом (зазвичай платиновим), намотаним на фарфоровий або слюдяний каркас. Проградуваний за постійними температурними точками термометр опору дозволяє вимірювати з точністю порядку декількох сотих ($\sim 0,05^\circ C$) градуса як низькі, так і високі (до $2000^\circ C$) температури. Останнім часом все більше застосування знаходять термометри опору з напівпровідників.

Електропровідність напівпровідників. Напівпровідниками є кристалічні речовини, у яких валентна зона повністю заповнена електронами, а ширина забороненої зони невелика ($\Delta E < 3 \text{ eV}$). Свою назву вони отримали тому, що за величиною електропровідності займають проміжне положення між металами і діелектриками (див. рис. 23.5). Характерною особливістю напівпровідників, що відрізняють їх від металів, є зменшення їх опору із зростанням температури.

Розрізняють напівпровідники з власною і домішковою провідністю. Власну провідність мають хімічно чисті напівпровідники. Електричні властивості домішкових напівпровідників визначаються домішками, що штучно вводяться в них.

Власна провідність напівпровідників. Типовими напівпровідниками є елементи четвертої групи періодичної системи хімічних елементів - Ge і Si. Вони утворюють ґрати типу алмазу, в яких кожен атом зв'язаний ковалентними зв'язками з чотирма рівновіддаленими від нього сусідами. Умовно таке взаємне

розташування атомів можна представити у вигляді плоскої структури, зображеної на рис. 23.6.

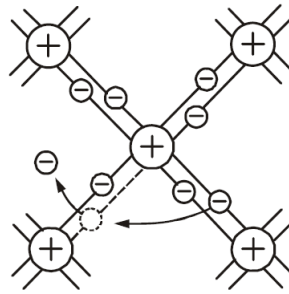


Рисунок 23.6 – Схема ковалентного зв'язку

При температурі порядку $T \approx 250 \div 300$ К тепловий рух може розірвати окремі пари, звільнивши один електрон. Покинute електроном місце перестає бути нейтральним, поблизу нього виникає надлишковий позитивний заряд $+e$ – утворюється дірка (на рис. 23.6 – пунктирний кружечок). На це місце може перескочити сусідній електрон. У результаті дірка починає також мандрувати кристалом, як і звільнений електрон.

Якщо зовнішнє електричне поле відсутнє, то електрони провідності і дірки рухаються хаотично. При ввімкненні поля на хаотичний рух накладається впорядкований рух: електронів проти поля і дірок у напрямі поля. Обидва рухи і дірок, і електронів приводять до перенесення заряду уздовж кристала. Отже, власна електропровідність обумовлюється носіями заряду двох знаків: негативними електронами і позитивними дірками.

З погляду зонної теорії твердих тіл власна провідність виникає в результаті переходу електронів з верхніх рівнів валентної зони в зону провідності. При цьому в зоні провідності з'являється деяка кількість носіїв струму - електронів, а у валентній зоні звільняється така ж кількість місць на верхніх рівнях, внаслідок чого з'являються дірки.

У власних напівпровідників кількість електронів, що перейшли в зону провідності, буде дорівнювати кількості дірок, що утворилися у валентній зоні. Питома провідність σ пропорційна концентрації носіїв струму і їх рухливості:

$$\sigma = e(n\mu_n + p\mu_p). \quad (23.3)$$

де n і p - концентрації електронів і дірок відповідно; μ_n - рухливість електронів провідності; μ_p - рухливість дірок.

Рухливість – відношення середньої швидкості v направленого руху носіїв струму до напруженості E електричного поля, що викликало цей рух.

Для власних напівпровідників концентрація електронів дорівнює концентрації дірок ($n = p$), тому

$$\sigma = en(\mu_n + \mu_p). \quad (23.4)$$

Електропровідність власних напівпровідників швидко зростає з температурою T , змінюючись згідно із законом

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right), \quad (23.5)$$

де ΔE – ширина забороненої зони;

$k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана;

σ_0 – величина, яка визначається властивостями конкретного матеріалу, слабо змінюється з температурою. Її можна вважати константою для даного напівпровідника. Прологарифмувавши співвідношення (23.5), отримаємо

$$\ln \sigma = \ln \sigma_0 - \frac{\Delta E}{2kT}, \quad (23.6)$$

тобто залежність $\ln \sigma$ від $1/T$ є лінійною. Графік залежності $\ln \sigma$ від $1/T$ для власних напівпровідників зображений на рис. 23.7.

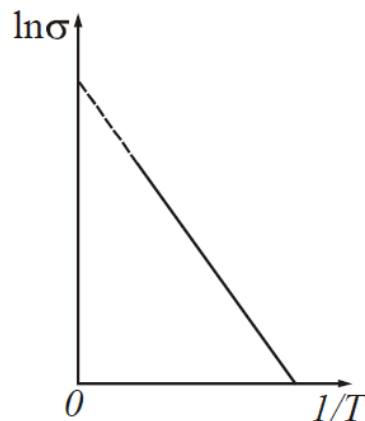


Рисунок 23.7 – Залежність $\ln \sigma$ від $1/T$ для власних напівпровідників

Опір напівпровідників в широкому інтервалі температур змінюється згідно із законом:

$$R = R_0 e^{\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad (23.7)$$

де R_0 – величина, яка визначається властивостями конкретного матеріалу і слабо змінюється з температурою. Графік залежності опору від температури $R = f(T)$ наведений на рис. 23.8.

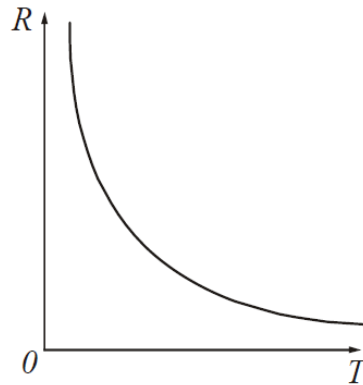


Рисунок 23.8 - Графік залежності опору напівпровідника від температури

Зміну опору напівпровідника зі зміною температури характеризують температурним коефіцієнтом опору. Температурний коефіцієнт опору – це величина, що кількісно дорівнює відносній зміні опору провідника при зміні його температури на 1К:

$$\alpha_T = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt}. \quad (23.8)$$

Для власних напівпровідників з (23.7) і (23.8) можна отримати:

$$\alpha_T = -\frac{\Delta E}{2kT^2}. \quad (23.9)$$

З (23.9) випливає, що для власних напівпровідників $\alpha_T < 0$ і убиває за модулем зі зростанням температури.

ТЕМА 24

Контактні і термоелектричні явища

Електронно-дірковий перехід. Напівпровідниковий діод

Область монокристалічного напівпровідника, в якій відбувається зміна провідності з електронної на діркову (або навпаки), називається **електронно-дірковим переходом** або ***p-n-переходом***. Такий *p-n*-перехід утворюється в кристалі напівпровідника, якщо в ньому за допомогою відповідних домішок будуть створені ділянки з різною (*n* і *p*) провідністю.

На межі двох напівпровідників з різним типом провідності утворюється подвійний контактний шар. Електрони з *n*-напівпровідника дифундують у дірковий *p*-напівпровідник. Це приводить до збіднення електронами *n*-напівпровідника поблизу межі і до утворення надмірного позитивного заряду в *n*-кристалі, пов'язаного з атомами донорної домішки. Дифузія дірок з *p*-напівпровідника відбуватиметься в протилежному напрямі і підсилить утворення надлишкових негативних електричних зарядів на межі електронно-діркового переходу, пов'язаних з атомами акцепторної домішки. Таким чином, створюється подвійний електричний шар товщини l_0 , який перешкоджає переходу електронів і дірок через межу розділу двох напівпровідників (рис. 24.1) і тому називається запірним. Запірний шар має підвищений опір, і подолати його основні носії можуть лише при температурі порядку тисячі градусів.

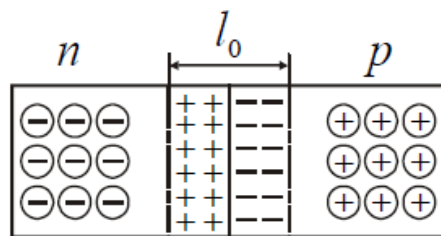


Рисунок 24.1 – Контакт напівпровідників різних типів

Дія зовнішнього електричного поля істотним чином впливає на опір запірного шару. Якщо подати на *p-n*-перехід зовнішню напругу так, щоб плюс був підключений до *p*-області, а мінус – до *n*-області (рис. 24.2), то таке

включення називається **прямим**. Тоді під дією електричного поля електрони в n -напівпровіднику переміщатимуться до межі розділу напівпровідників. Дірки в p -напівпровіднику під дією того ж поля рухатимуться назустріч електронам також до цієї межі. При такому пропусковому (прямому) напрямі струму в напівпровіднику товщина запірного шару безперервно зменшуватиметься. Електрони, переходячи межу, «заповнюють» дірки, тобто у приграничному шарі відбувається рекомбінація електронів з дірками. Межа p - n -переходу не представлятиме опору для струму, що викликається зовнішньою напругою. Ця напруга необхідна тільки для того, щоб підтримувати зустрічний рух електронів і дірок.

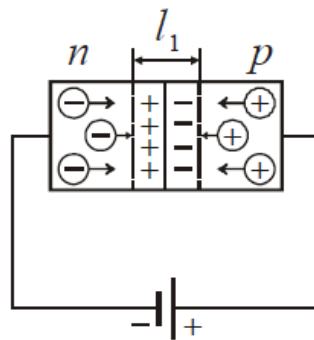


Рисунок 24.2 – Пряме включення p - n -переходу

Змінімо полярність підключення, тобто прикладемо до p - n -переходу напругу такого напрямку, щоб плюс був підключений до n -області, а мінус – до p -області (рис. 24.3). Таке включення називається **зворотним**.

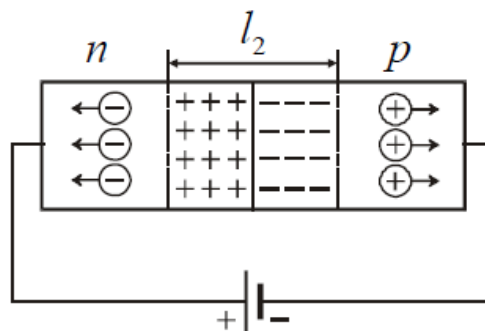


Рисунок 24.3 - Зворотнє включення p - n -переходу

Дірки в p -напівпровіднику і електрони в n -напівпровіднику переміщатимуться від межі розділу в протилежні сторони. У цьому випадку збільшуватиметься розмір запірного шару, в якому концентрація рухомих носіїв

струму, електронів і дірок, буде значно меншою, ніж в решті об'єму напівпровідника. В області, збідненій рухомими зарядами, зростає подвійний електричний шар нерухомих зарядів протилежного знаку.

Чим більшою буде прикладена запірна напруга, тим товще подвійний шар, збіднений рухомими носіями струму, і, внаслідок цього, тим більше опір такого шару. При достатній зворотній напрузі запірний шар є практично ізолятором, в якому відсутні рухомі носії струму.

На рис. 24.4 представлена вольт-амперна характеристика p - n -переходу.

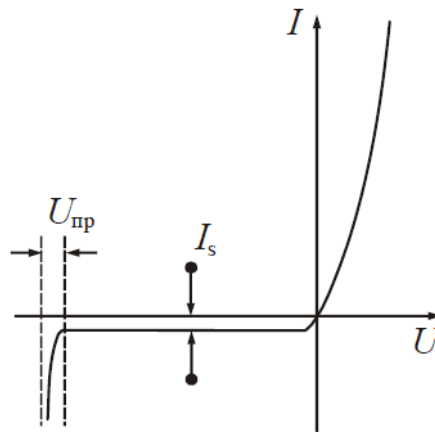


Рисунок 24.4 – Вольт-амперна характеристика p - n -переходу

Невеликий зворотний струм I_s обумовлений неосновними носіями (див. ліву гілку рис. 24.4). Зазначимо, що p - n -перехід може витримувати зворотну напругу до певної межі $U_{пр}$, після чого настає пробій, аналогічний пробою діелектрика.

Зі сказаного вище випливає, що p - n -перехід має односторонню провідність. Здатність p - n -переходу пропускати струм в одному напрямі і не пропускати або майже не пропускати його в протилежному використовується в приладах, званих напівпровідниковими діодами. Ця властивість діода характеризується коефіцієнтом випрямлення

$$\alpha = \frac{I_{пр}}{I_{звор}}, \quad (24.1)$$

тобто відношенням прямого $I_{пр}$ і зворотного $I_{звор}$ струмів, виміряних при однакових за величиною прямої і зворотної напруг. Зазвичай коефіцієнт

випрямлення складає величину в декілька сотень одиниць, але може досягати і великих значень (10^5 - 10^6).

Перевагами напівпровідникового діода є малі розміри і маса, тривалий термін служби, висока механічна міцність, високий коефіцієнт корисної дії, а недоліком - залежність їх параметрів від температури.

Термоелектричні явища

Між тепловими і електричними процесами в металах і напівпровідниках є взаємозв'язок, який обумовлює явища, звані термоелектричними. До їх числа належать явище Зеєбека, явище Пельтьє і явище Томсона. Ці ефекти пов'язані з взаємним перетворенням теплової енергії на енергію електричного струму.

Явище Зеєбека. Якщо спаї двох різнорідних металів A і B , що утворюють замкнуте коло (рис. 24.5), мають неоднакову температуру ($T_1 \neq T_2$), то в колі протікає електричний струм. Зміна знаку у різниці температур приводить до зміни напрямку струму. Це явище було відкрите в 1821 році Т. Зеєбеком.

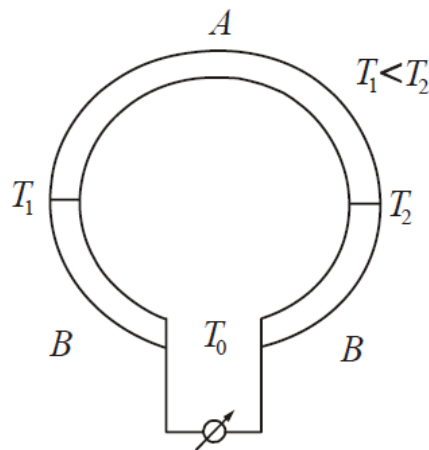


Рисунок 24.5 – Схема виникнення термо-ЕРС

Електрорушійна сила, що виникає при цьому, називається термоелектрорушійною силою (термо-ЕРС). Коло, що містить два спаї, називається **термопарою**. У загальному випадку величина термо-ЕРС визначається таким чином:

$$\varepsilon_{\text{термо}} = \int_{T_1}^{T_2} \alpha_{AB}(T) dT \quad (24.2)$$

де $\alpha_{AB}(T)$ - питома термо-ЕРС даної пари металів або напівпровідників.

Для більшості пар металів $\alpha_{AB}(T)$ залежить від температур спаїв і має значення ($10^{-5} \div 10^{-4}$) В/К; для напівпровідників вона може бути значно більше (до $1,5 \cdot 10^{-3}$ В/К).

В окремих випадках питома термо-ЕРС слабо залежить від температури. Тоді формулу (24.2) можна приблизно представити у вигляді

$$\alpha_{AB}(T_2 - T_1), \quad (24.3)$$

тобто термо-ЕРС пропорційна різниці температур спаїв. Таким чином, в ефекті Зеєбека відбувається пряме перетворення теплової енергії в електричну.

Термопари використовують для вимірювання температур. Один спай термопари підтримують при постійній температурі (наприклад, кімнатній, або при 0°C), інший поміщають в середовище, температуру якого хочуть виміряти. При використанні термопар для точних вимірювань температури краще вимірювати ЕРС, що виникає в колі термопари, а не струм, що протікає в ньому. Це пов'язано з тим, що ЕРС залежить тільки від роду утворюючих термопару металів і температури спаїв, а сила струму в колі визначається, крім того, опорами вимірювального приладу і з'єднувальних проводів і внутрішнім опором спаїв. Внутрішній опір спаїв сильно залежить від стану спаю і тому змінюється з часом.

Явище Пельтьє. Ефект Пельтьє (відкритий у 1834 році) полягає у виділенні додаткового до ефекту Джоуля - Ленца тепла на контакті двох різнорідних металів або напівпровідників при проходженні через нього електричного струму. Таким чином, явище Пельтьє виявляється зворотним явищу Зеєбека.

Дослідним шляхом встановлено, що кількість тепла, що виділяється або поглинається в спаї, пропорційна заряду $q = I \cdot t$, що пройшов через спай:

$$Q_{AB} = \Pi_{AB} \cdot q = \Pi_{AB} \cdot I \cdot t \quad (24.4)$$

Коефіцієнт пропорційності Π_{AB} називається коефіцієнтом Пельтьє, індекси указують, що струм тече від провідника A до провідника B (рис. 24.6). З

(24.4) витікає, що на відміну від тепла Джоуля-Ленца ($Q = I^2 R t$), тепло Пельтьє пропорційне не квадрату, а першому степеню сили струму. Це означає, що при зміні напрямку струму Q_{AB} змінює знак, тобто замість виділення тепла спостерігається поглинання такої ж кількості тепла, тобто $Q_{AB} = -Q_{BA}$.

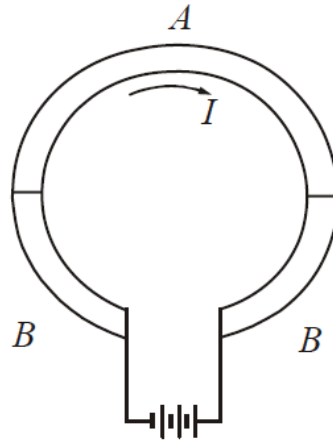


Рисунок 24.6 – Схема дослідів Пельтьє

Із законів термодинаміки випливає, що коефіцієнт Пельтьє і питома термоЕРС зв'язані співвідношенням

$$\Pi_{AB} = \alpha_{AB} T. \quad (24.5)$$

У разі контакту двох речовин з однаковим видом носіїв струму (метал-метал, метал-напівпровідник n -типу, два напівпровідники n -типу, два напівпровідники p -типу) ефект Пельтьє пояснюється таким чином. Носії струму по різні сторони від спаю мають різну повну енергію. Якщо носії, пройшовши через спай, потрапляють в область з меншою енергією, то вони віддають надлишок енергії кристалічним ґратам: спай нагрівається. На іншому спаї носії переходять в область з більшою енергією; енергії, якої бракує, вони запозичують у ґрат. Це приводить до охолодження спаю.

А.Ф. Іоффе висунув ідею використання ефекту Пельтьє для створення холодильних установок. Робочим елементом таких приладів є батарея з напівпровідників n -типу і p -типу, що йдуть по черзі. Спаї одного виду (стосовно переходу від n до p) введені в охолоджувану область, а спаї іншого виду (стосовно переходу від p до n) виведені назовні. При належному напрямі струму внутрішні спаї поглинають тепло, знижуючи температуру простору, що оточує

їх, зовнішні спаї віддають тепло зовнішньому середовищу. Такі холодильники мають невисокий ККД, але знаходять застосування в мікроелектроніці.

Явище Томсона. Явище полягає в тому, що при проходженні струму по однорідному провіднику, уздовж якого є градієнт (неоднорідність) температури, в провіднику виділяється тепло. Цей ефект спочатку був теоретично передбачений Томсоном, а потім вже експериментально ним виявлений у 1856 році.

Кількість тепла, що виділяється в одиницю часу в елементі провідника довжиною dl , дорівнює

$$dQ = \tau I \frac{dT}{dl} dl, \quad (24.6)$$

де I - сила струму; $\frac{dT}{dl}$ - градієнт температури уздовж провідника; τ - коефіцієнт пропорційності, якій називають коефіцієнтом Томсона, який залежить від природи провідника.

Явище Томсона пояснюється за аналогією з явищем Пельтьє. Нехай струм тече у бік зростання температури. Якщо носії струму - електрони, то вони при своєму русі переходитимуть з місць з вищою температурою (і, отже, більшою середньою енергією), у місця з нижчою температурою (і меншою середньою енергією). Надлишок своєї енергії електрони віддаватимуть ґратам, що приведе до виділення тепла. Якщо носіями струму будуть дірки, то ефект матиме зворотний знак.

ЛІТЕРАТУРА

1. Фелінський Г.С. Загальна фізика : Підручник / Г. С. Фелінський. - Реком. ВР КНУ ім. Т. Шевченка, 2021. – 656 с.
2. Курс загальної фізики. Навчальний посібник для вищих навчальних закладів. / Кармазін В.В., Семенець В.В.-К.: Кондор, 2016. - 786 с.
3. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики. Т.ІІІ: Оптика. Фізика атома та атомного ядра. – К.: Вища школа. 2003 р. – 311 с.
4. Кучерук І. М., Горбачук І, Т. Загальний курс фізики: У 3 т.: Навч. посіб. для студ. вищ. техн. і пед. закл. освіти / За ред. І. М. Кучерука. - К.: Техніка, 1999. Т. 3. Оптика. Квантова фізика. - 520 с.