

Кириченко В.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
НТУ «Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», м. Київ, Україна,

Лесіна Є.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент,
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет», м. Покровськ,
Україна

АНАЛІЗ СКАЛЯРНОЇ СИСТЕМИ ВИМІРЮВАНЬ ПРИ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ВПЛИВАХ

Анотація. Поняття якості (точності, близькості до деякого нормативу) складних динамічних систем різного призначення – одне з визначальних в інженерній практиці. Питання поліпшення якості мають постійно перебувати у центрі уваги наукової та інженерної діяльності фахівців, котрі створюють чи експлуатують ці системи. Визначивши поняття якості конкретної складної системи, можна ставити і вирішувати задачі кількісних змін її динамічних характеристик, а також результатів перетворення динамічною системою усіх діючих на неї вхідних впливів та збурень.

Ключові слова: динамічна система, Фур'є-образ, вектор управління, вектор збурень, показник якості, помилка системи, ермітова спряженість, слід матриці.

Динамічна система – це математична модель для дослідження закономірностей систем різної природи, пов'язаних з рухом матеріальних тіл, передачею інформації, розвитком процесів, що корегуються (соціальних, біологічних, економічних, технологічних і т. ін.). Такі моделі безпосередньо використовуються в сучасній теорії управління [1]. Засоби управління динамічними системами створюються з метою забезпечення постійної ефективної протидії багатьом стохастичним впливам, що безперервно змінюють нормативний (передбачуваний) характер процесів функціонування системи, заважають ефективному досягненню цілей її функціонування.

В задачі аналізу типової розімкненої вимірювальної системи (рис. 1) при стохастичних збуреннях відомою є інформація щодо наступних динамічних характеристик блоків і сигналів системи: $\mathbf{P}$ і $\mathbf{M}$ – поліноміальні матриці, що характеризують динаміку об'єкту досліджень, аргументом яких є комплексна змінна $s = j\omega$ в перетворенні Фур'є; Φ – матриця бажаного перетворення сигналу $\mathbf{u}$ системою; $\mathbf{x}$ – Фур'є-образ вектора вихідних реакцій системи $\mathbf{x}(t)$; $\mathbf{u}$, Ψ – Фур'є-образи векторів управління $\mathbf{u}(t)$ і збурень $\Psi(t)$ відповідно; $\mathbf{i}$ – Фур'є-образ вектора бажаних сигналів $\mathbf{i}(t)$ (якщо вимоги до бажаного вихідного сигналу системи не відомі, то аналіз стає неможливим); ϵ – Фур'є-образ вектора помилок системи.

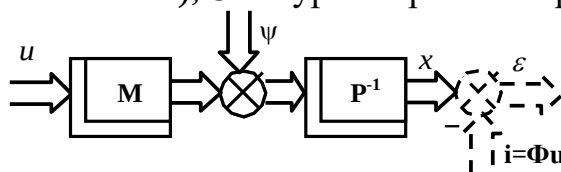


Рисунок 1 – Структурна схема розімкненої системи

За результатами розв'язання задачі аналізу треба визначити: вихідний сигнал системи $\mathbf{x}$; помилку системи ϵ ; показник якості – значення інтегральної квадратичної помилки системи $\mathbf{I}$.

Розглянемо приклад аналізу скалярної системи вимірювань при детермінованих впливах. Нехай вектор вихідних реакцій системи (рис.1) з урахуванням рівняння $\mathbf{P}\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{u} + \boldsymbol{\psi}$ має вигляд:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\psi}, \quad (1)$$

а вектор бажаних сигналів системи, що за призначенням є вимірювальною, подається наступним чином:

$$\mathbf{i} = \Phi\mathbf{u}. \quad (2)$$

Вектор сигналів детермінованої помилки системи з урахуванням виразів (1), (2) запишеться у формі:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{x} - \mathbf{i} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M} - \Phi)\mathbf{u} + \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\psi}, \quad (3)$$

а ермітово спряжений вектор детермінованих помилок системи буде мати вигляд:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_* = \mathbf{u}_*(\mathbf{M}_*\mathbf{P}_*^{-1} - \Phi_*) + \boldsymbol{\psi}_*\mathbf{P}_*^{-1}. \quad (4)$$

З урахуванням виразів (3) та (4), критерій [2]

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'(t)R(t)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} \text{tr}[\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(s)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_*(s)R(s)ds] \text{ має вигляд:} \\ I &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} \text{tr}\{[(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M} - \Phi)\mathbf{u} + \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\psi}][\mathbf{u}_*(\mathbf{M}_*\mathbf{P}_*^{-1} - \Phi_*) + \boldsymbol{\psi}_*\mathbf{P}_*^{-1}]R\}ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\omega}^{+j\omega} \text{tr}\{[(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M} - \Phi)\mathbf{u}\mathbf{u}_*(\mathbf{M}_*\mathbf{P}_*^{-1} - \Phi_*) + (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M} - \Phi)\mathbf{u}\boldsymbol{\psi}_*\mathbf{P}_*^{-1} + \\ &\quad + \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\psi}\mathbf{u}_*(\mathbf{M}_*\mathbf{P}_*^{-1} - \Phi_*) + \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}_*\mathbf{P}_*^{-1}]R\}ds, \end{aligned} \quad (5)$$

де “tr” – слід матриці.

Підставивши відомі матриці $\mathbf{P}^{-1}, \mathbf{M}, \mathbf{R}$ та Фур’є-вирази векторів $\mathbf{u}, \mathbf{u}_*, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}_*$ у інтеграл (5) та обчисливши його, одержимо значення інтегральної квадратичної помилки системи у конкретному режимі її дії.

Нехай надана структурна схема деякої динамічної системи (рис. 2) та відомі динамічні характеристики її блоків і сигналів.

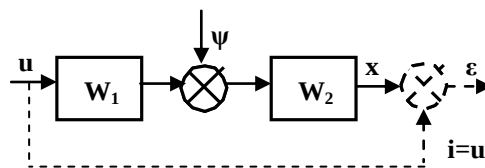


Рис. 2 – Структурна схема одновимірної системи

Тут w_1, w_2 – передавальні функції блоків системи; бажане перетворення дорівнює $\Phi=1$, тобто бажаний сигнал $\mathbf{i}$ дорівнює вхідному сигналу (задача вимірювань); x, u, ψ і ε – Фур’є образи сигналів виходу, входу, збурення та помилки системи відповідно.

Виконаємо аналіз одновимірної системи (рис. 2) для таких даних: вхідний сигнал системи $u(t) = a \cdot 1(t)$ (одиничний стрибок); збурення системи $\psi(t) = b \cdot \delta(t)$ ($\delta(t)$ – імпульсна функція); передавальні функції блоків системи $w_1 = k_1$ та $w_2 = \frac{k_2}{\tau s + 1}$. Подіємо на сигнали $u(t)$ і $\psi(t)$ перетворенням Фур’є:

$$u(s) = a/s; \quad \psi(s) = b.$$

У відповідності з алгоритмом аналізу треба визначити вихідний сигнал системи

$$x = W_2 W_1 u + W_2 \psi. \quad (6)$$

Знайдемо сигнал помилки системи $\varepsilon = x - i = x - u$. Після підстановки виразу (6) в рівняння (3) і (4) одержимо:

$$\varepsilon = W_2 W_1 u + W_2 \psi - u = (W_2 W_1 - 1)u + W_2 \psi. \quad (7)$$

Після підстановки початкових даних задачі, рівняння (6) вихідного сигналу системи набуває вигляду:

$$x = \frac{k_1 k_2 a}{(\tau s + 1)s} + \frac{k_2}{\tau s + 1} b,$$

а сигнал помилки системи, з урахуванням виразу (7),

$$\varepsilon = \left[\frac{k_1 k_2}{(\tau s + 1)} - 1 \right] \frac{a}{s} + \frac{k_2 b}{\tau s + 1} = \frac{(k_2 b - \tau a)s + a(k_1 k_2 - 1)}{\tau s^2 + s}. \quad (8)$$

Підставивши вираз (8) у інтеграл $I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{c(s)c(-s)}{d(s)d(-s)} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{c(s)}{d(s)} \right|^2 ds$, де $c(s)$, $d(s)$

– поліноми аргументу s :

$$c(s) = c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \dots + c_0 = \sum_{k=0}^{n-1} c^k s^k;$$

$$d(s) = d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0 = \sum_{k=0}^n d^k s^k;$$

можна оцінити інтегральну квадратичну помилку системи:

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} |\varepsilon(s)|^2 ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left| \frac{(k_2 b - \tau a)s + a(k_2 k_1 - 1)}{\tau s^2 + s} \right|^2 ds. \quad (9)$$

Інтеграл вигляду (9) можна обчислити шляхом розкладання підінтегральної функції в суму елементарних дробів, в результаті отримаємо:

$$I = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2}, \quad (10)$$

де $c_1 = k_2 b - \tau a$; $c_0 = a(k_2 k_1 - 1)$; $d_2 = \tau$; $d_1 = 1$; $d_0 = 0$.

Оскільки коефіцієнт $d_0 = 0$, то інтеграл (10) прямуватиме до нескінченності. Таким чином, інтегральна квадратична помилка досліджуваної системи при заданих сигналах зростає до нескінченності. Цього не станеться, якщо змінити динамічні характеристики системи так, щоб ввести в систему астатизм, або уточнити вхідні моделі приладу.

Список використаної літератури

1. Власов К.П. Теория автоматического управления. Основные положения. Примеры расчета: Учебное пособие / К.П. Власов. – Харьков: Гуман. Центр, 2013. – 544 с.
2. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход) / А.Р. Гайдук. – М.: Физматлит, 2012. – 360 с