

Кириченко В.В., к.ф.-м. н., доц. (vkir28@gmail.com)

Національний авіаційний університет, м. Київ, Україна

Лесіна Є.В., к.ф.-м. н., доц. (eugenia.lesina@donntu.edu.ua)

Донецький національний технічний університет, м. Покровськ, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ РУХІВ ГІРОСКОПА З БАЗОВОЮ ВЕРТИКАЛЬНОЮ ОРІЄНТАЦІЄЮ

Гіроскопи представляють собою поворотні тверді тіла з високою частотою. Вісь поворотів гіроскопа може змінити свій напрям у просторі. Властивостями гіроскопа володіють артилерійські снаряди, що обертаються, гвинти літаків, ротори турбіни. Більш простий приклад гіроскопа – дзиґа: тіло, яке обертається навколо певної осі, що зберігає положення в просторі, якщо на гіроскоп не впливають зовнішні сили та моменти цих сил. При цьому гіроскоп має стійкість і здатний протистояти впливу зовнішніх сил, що багато в чому визначається його швидкістю обертання.

Для моделювання рухів гіроскопа скористаємося рівняннями Лагранжа 2-го роду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i,$$

де E – кінетична енергія системи; Q_i – узагальнені сили; $q_i, \dot{q}_i$ – узагальнені координати і швидкості.

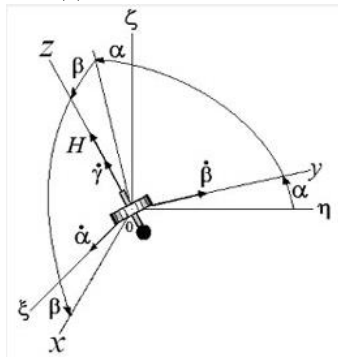


Рисунок 1 – Системи координат

Система координат $Oxyz$, пов'язана з гіроскопом, – супутня. Вона бере участь у рухах по кутам α, β , але не приймає участь у власному обертанні γ . Система координат $O\xi\eta\zeta$ пов'язана з інерціальним простором (нерухома система). Узагальнені координати – кути α, β, γ (рис. 1).

Система має три ступеня свободи. Координата γ – циклічна. Рівняння руху по цій координаті приводить до виразу сталості кінетичного моменту H гіроскопа [1, 2]. Складемо рівняння Лагранжа другого роду по узагальненим координатам і швидкостям $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$. Кінетична енергія гіроскопа

$$E = A \cos^2 \beta \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + A \frac{\dot{\beta}^2}{2} + \frac{1}{2} C (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta)^2,$$

де $A=B, C$ – моменти інерції гіроскопа з базовою вертикальною орієнтацією осі обертання відносно осей x, y, z . Узагальнені сили, які діють на гіроскоп:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -\mu_\alpha \dot{\alpha} + mgz_C \sin \alpha \cos \beta + Mom_2 \cos \omega_2 t, \\ Q_\beta &= -\mu_\beta \dot{\beta} + mgz_C \sin \beta \cos \alpha + Mom_1 \cos \omega_1 t. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут μ_α, μ_β – коефіцієнти в'язкого демпфірування; m, z_C – маса гіроскопа і зсув центра мас, що забезпечують маятниковий момент гіроскопа; Mom_i, ω_i – амплітуда і частота гармонічних збурюючих моментів або сталі (при $\omega_i = 0$) збурюючі моменти, g – прискорення вільного падіння [3].

Використовуючи формалізм Лагранжа, отримаємо:

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} = A \dot{\alpha} \cos^2 \beta + C (\dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta) \sin \beta, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\alpha}} \right) = A \ddot{\alpha} \cos^2 \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} A \sin 2\beta + H \dot{\beta} \cos \beta,$$

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} = A \dot{\beta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\beta}} \right) = A \ddot{\beta}, \quad \frac{\partial E}{\partial \beta} = A \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta + H \dot{\alpha} \cos \beta.$$

Нелінійні рівняння руху гіроскопа без карданова підвіса з базовою вертикальною орієнтацією осі власного обертання мають вигляд:

$$A\ddot{\alpha}\cos^2\beta + \mu_\alpha\dot{\alpha} - A\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin 2\beta + H\dot{\beta}\cos\beta = mgz_C\sin\alpha\cos\beta + Mom_2\cos\omega_2t,$$

$$A\ddot{\beta} + \mu_\beta\dot{\beta} - A\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta - H\dot{\alpha}\cos\beta = mgz_C\sin\beta\cos\alpha + Mom_1\cos\omega_1t,$$

де $H = C(\dot{\gamma} + \dot{\alpha}\sin\beta) = \text{const}$ – кінетичний момент гіроскопа.

Вважаючи кути α, β та їх похідні малими і нехтуючи малими величинами порядку вище першого, отримаємо лінеаризовані рівняння руху гіроскопа:

$$A\ddot{\alpha} + \mu_\alpha\dot{\alpha} + H\dot{\beta} = mgz_C\alpha + Mom_2\cos\omega_2t,$$

$$A\ddot{\beta} + \mu_\beta\dot{\beta} - H\dot{\alpha} = mgz_C\beta + Mom_1\cos\omega_1t.$$

Лінеаризовані рівняння руху при відсутності демпфірування і моментів гармонічних зовнішніх сил:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} &= mgz_C\alpha, \\ A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} &= mgz_C\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

Враховуючи, що гіроскопічні моменти значно більше інерційних за рахунок більшого кінетичного моменту, отримаємо наближені прецесійні рівняння руху гіроскопа:

$$\begin{aligned} H\dot{\beta} &= mgz_C\alpha, \\ -H\dot{\alpha} &= mgz_C\beta. \end{aligned} \quad (3)$$

Так як в лінеаризованих рівняннях рухів (2) гіроскопа кінетичний момент $H \neq 0$ та $z_C < 0$, то можливо отримати рівняння малих недемпфированих коливань статично стійкого фізичного маятника, який відповідає гіроскопу:

$$\begin{aligned} A\ddot{\alpha} + mgz_C\alpha &= 0, \\ A\ddot{\beta} + mgz_C\beta &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Із прецесійних рівнянь (3) визначимо власну частоту його прецесійних коливань. Після простих перетворень (3) будемо мати:

$$\ddot{\alpha} + k_G^2\alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + k_G^2\beta = 0,$$

де частота малих власних прецесійних коливань гіроскопа

$$k_G = mgz_C / H. \quad (5)$$

Перетворимо рівняння (4) малих коливань відповідного фізичного маятника і визначимо його власну частоту коливань:

$$\ddot{\alpha} + k_{\Phi M}^2\alpha = 0, \quad \ddot{\beta} + k_{\Phi M}^2\beta = 0,$$

де частота власних коливань фізичного маятника $k_{\Phi M} = \sqrt{mgz_C / A}$.

У випадку гіроскопа з вертикальною базовою орієнтацією осі власного обертання і відсутністю в'язкого демпфірування має місце прецесія по кутам α і β з частотою k_G , яка визначається формулою (5), отриманою із прецесійних рівнянь руху (3). Ця прецесія являє собою більш повільний рух по кутам α і β в порівнянні з відповідними коливаннями фізичного маятника під впливом того ж самого моменту сил тяжіння.

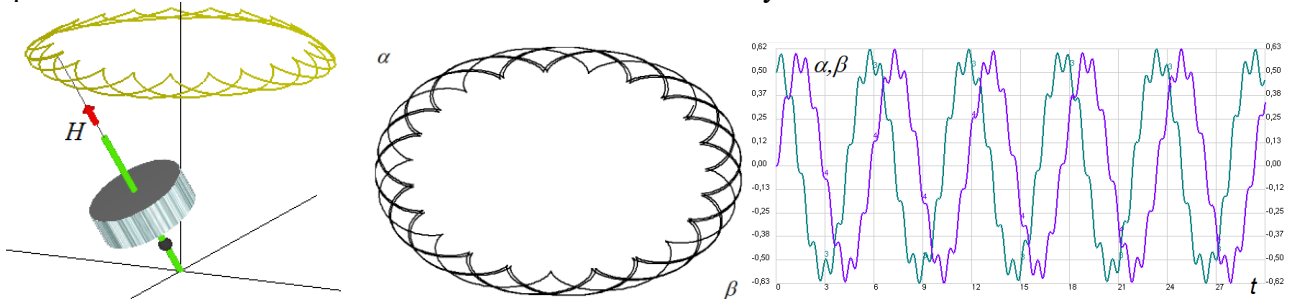


Рисунок 2 – Поведінка гіроскопа

При наявному початковому відхиленні від вертикалі вісь гіроскопа піддається прецесії з деякою кутовою швидкістю біля вертикалі та описує в просторі кутовий конус і здійснює більш швидкі нутаційні коливання.

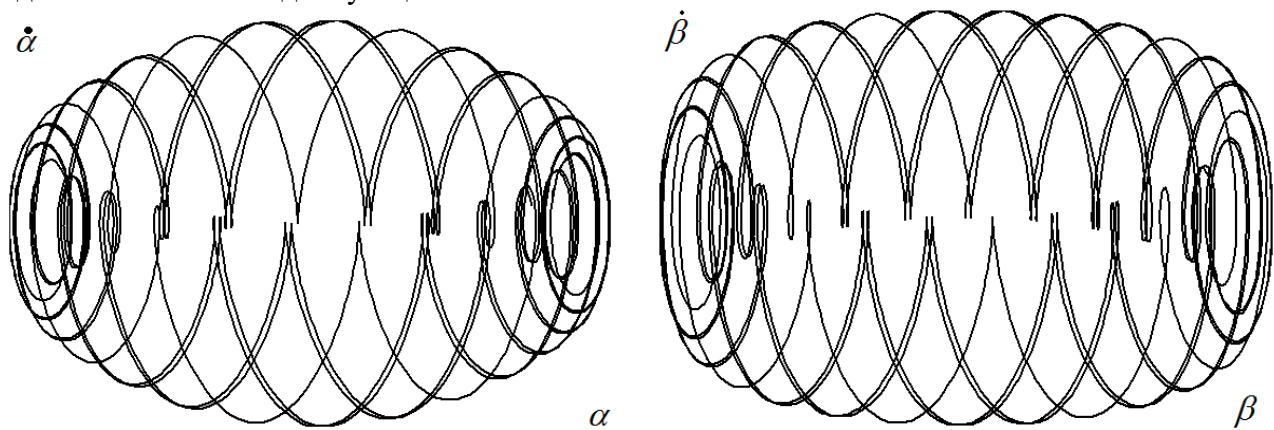


Рисунок 3 – Фазовий портрет

На рисунках 2, 3 представлені графіки перехідних процесів та фазові портрети руху гіроскопа при інтегруванні його рівнянь (1) з заданими вихідними параметрами ($A = 0,01 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^2$; $H=0,1 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}$; $m=1\text{кг}$; $z_c=0,01\text{м}$) та при відсутності демпфірування.

Перелік посилань:

1. Общая и прикладная теория гироскопов с применением компьютерных технологий / [Джашитов В.Э., Панкратов В.М., Голиков А.В.]; за ред. академика РАН В.Г. Пешехонова. – СПб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2010. – 154с.
2. Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов. – М.: Наука, 1972. – 296 с.
3. Мангус К. Гироскоп. Теория и применения. – М.: Мир, 1974. – 516 с.