МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Факультет машинобудування, електроінженерії та хімічних технологій

Кафедра вищої математики і фізики

Конспект лекцій з курсу
«**Вища математика. Частина 1**»

для студентів інженерно-технічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Покровськ - 2021

УДК 51(042)
К 65

Конспект лекцій з курсу «**Вища математика. Частина 1**» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання [Електронний ресурс] / уклад. Є.В. Лесіна, Ю.В. Новікова. – Покровськ : ДонНТУ, 2021. – 140 с.

Конспект лекцій з курсу «**Вища математика. Частина 1**» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання містить основні поняття та теореми за темами "Елементи лінійної алгебри", "Векторна алгебра", "Аналітична геометрія на площині і в просторі", "Вступ до математичного аналізу", "Диференціальне числення функцій однієї змінної". Конспект лекцій повністю відповідає робочій програмі курсу «Вища математика. Частина 1» для студентів галузей знань 14 Електрична інженерія, 15 Автоматизація та приладобудування, 17 Електроніка та телекомунікації, а також може бути використаний студентами інших інженерно-технічних спеціальностей.

Укладачі: ___________ Є.В. Лесіна, доц. каф. ВМФ, к. ф.-м. наук, доцент
(підпис)
___________ Ю.В. Новікова, доц. каф. ВМФ, к. ф.-м. наук
(підпис)

Рецензент: _________ Л.Г. Сергієнко, доц. каф. ВМФ, к. пед. наук, доцент
(підпис)

Відповідальний
за випуск: ___________ Ю.В. Новікова, в.о. зав. каф. ВМФ, к. ф.-м. наук

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ,
протокол № 3 від 26.10.2021 р.

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики і фізики
протокол № 8 від 01.10.2021 р.

Зміст

ВСТУП

Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика. Частина 1» для студентів інженерно-технічних спеціальностей створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки таких фахівців.

Мета даної методичної розробки полягає в допомозі студенту самостійно оволодіти теоретичним матеріалом та навчитись розв’язувати задачі з курсу вищої математики. Серед розв’язаних прикладів, що наводяться в кожній лекції, більшість можна назвати типовими; ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі зі сторони викладача оволодіти основними методами та алгоритмами. Ця обставина особливо важлива для студентів, які навчаються заочно.

Конспект лекцій містить матеріали із п’яти розділів курсу вищої математики: елементи лінійної алгебри, векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функцій однієї змінної. Теоретичний матеріал викладено в доступній формі, з достатньою кількістю прикладів та ілюстрацій.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Тема 1. Визначники. Означення, властивості та правила обчислення

1.1. Визначники другого і третього порядків

Розглянемо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1\,; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2\,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Якщо перше рівняння системи (1.1) помножити на a_{22}, друге – на $(-a_{12})$ і додати отримані результати, матимемо

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Припустимо, що вираз у дужках не дорівнює нулю, тоді

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{1.2}$$

Аналогічно одержимо

$$y = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{1.3}$$

Означення. Визначником (детермінантом) другого порядку називається вираз, що задається у вигляді квадратної таблиці з чотирьох елементів и визначається за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,. \tag{1.4}$$

Тут a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – елементи визначника.

Із формули (1.4) випливає, що рівності (1.2) і (1.3) можна записати наступним чином:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,,\; y = \frac{\Delta_2}{\Delta}\,, \quad \text{где} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад. Обчислити визначник другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 5 - 4\cdot(-3) = -10 + 12 = 2.$$

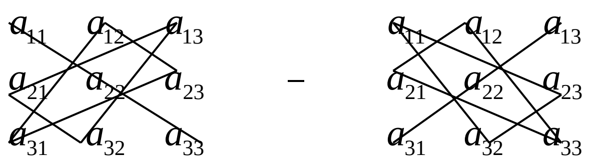
При розгляді системи трьох рівнянь з трьома невідомими приходимо до поняття визначника третього порядку.

Означення. Визначником третього порядку називається вираз, який задається у вигляді квадратної таблиці з дев'яти елементів та обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\,. \qquad (1.5)$$

Зауваження. Вираз (1.5) запам'ятати доволі легко, якщо скористатися наступною схемою (правило трикутника):



Приклад. Обчислити визначник третього порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-1) + (-2)\cdot(-3)\cdot 4 + 0 - 1\cdot 1\cdot 4 - 0 - 3\cdot(-3)\cdot 2 = -3 + 24 - 4 + 18 = 35.$$

1.2. Основні властивості визначників

Наведені нижче властивості розповсюджуються на визначники довільного порядку, проте їх можна перевірити безпосередньо на прикладі визначника третього порядку.

1. Значення визначника не змінюється при заміні рядків стовпцями з відповідним номером; тобто рядки і стовпці визначника є рівноправними:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Визначник, що містить нульовий рядок (стовпець), дорівнює нулю.

3. Визначник змінює знак на протилежний при перестановці двох рядків (стовпців).

4. Визначник дорівнює нулю, якщо містить два однакові рядки (стовпці).

5. Загальний множник елементів рядка (стовпця) можна винести за знак визначника.

6. Визначник дорівнює нулю, якщо містить пропорціональні рядки (стовпці).

7. Якщо всі елементи рядка (стовпця) представлено у вигляді суми двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, кожен з яких має рядок (стовпець) із відповідних елементів, які додаються:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12}+c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22}+c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32}+c_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} & a_{13} \\ a_{21} & c_{22} & a_{23} \\ a_{31} & c_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж число, значення визначника залишиться незмінним.

1.3. Обчислення визначників

Означення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} даного визначника називається визначник, одержаний шляхом закреслення рядка і стовпця даного визначника, на перетині яких міститься цей елемент, і взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$.

Приклад. Знайти A_{13} і A_{21} визначника $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\,;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-5) = 5.$$

<u>Теорема.</u> Нехай у визначнику довільним чином обрано рядок (стовпець). Тоді сума добутків елементів цього рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення дорівнює величині визначника**.**

Для рядка $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}\ (i = 1,2,3)$.

Для стовпця $\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}\ (j = 1,2,3)$.

Наведені формули справедливі для будь-яких i, j і називаються формулами розкладу визначника за елементами рядка (стовпця)**.**

Зауваження. Із теореми випливає, що обчислення визначника третього порядку зводиться до обчислення визначників другого порядку. Отже, за допомогою теореми можна одержати означення визначника n-го порядку через визначник $(n-1)$-го порядку.

Зауваження. Використавши властивість 8 визначників, можна спростити обчислення, якщо отримати в рядку (стовпці) всі елементи рівними нулю, крім одного.

Приклад. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

1 крок: додаємо до 2-го стовпця 3-й стовпець;

2 крок: додаємо до 4-го стовпця 3-й, помножений на (–2).

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&3&4\\0&-2&2&4\\-1&2&1&1\\2&1&-1&3\end{vmatrix}=(1\text{ крок})=\begin{vmatrix}2&4&3&4\\0&0&2&4\\-1&3&1&1\\2&0&-1&3\end{vmatrix}=(2\text{ крок})=\begin{vmatrix}2&4&3&-2\\0&0&2&0\\-1&3&1&-1\\2&0&-1&5\end{vmatrix}.$$

Тепер лише елемент a_{23} другого рядка не дорівнює нулю. Застосуємо формулу (6):

$$\Delta=(-1)^{2+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2&4&-2\\-1&3&-1\\2&0&5\end{vmatrix}=-2\cdot\left(2\cdot 3\cdot 5+4\cdot(-1)\cdot 2+0-(-2)\cdot 3\cdot 2-4\cdot(-1)\cdot 5-0\right)=108.$$

Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

2.1. Правило Крамера

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь, де кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, тобто систему

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1\ ; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2\ ; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3\ , \end{cases} \tag{2.1}$$

де a_{ij} – коефіцієнти системи, b_j – вільні члени $(i, j = 1,2,3)$, x, y, z – невідомі.

Будемо вважати, що визначник системи, який складається із коефіцієнтів при невідомих в лівих частинах рівнянь (<u>головний визначник</u>), відмінний від нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Припустимо, що система (2.1) <u>сумісна</u>, тобто має розв’язок. Помножимо перше рівняння системи на A_{11}, друге – на A_{21}, третє – на A_{31} і просумуємо ці вирази:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z =$$

$$= b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}\,. \tag{2.2}$$

Перший вираз в дужках в лівій частині співвідношення (2.2) представляє розклад головного визначника Δ системи за елементами першого стовпця. Інші вирази в дужках дорівнюють нулю, оскільки представляють розклад визначника, який має два однакових стовпця (властивість 4). Наприклад,

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Тоді із (2.2) маємо $\Delta \cdot x = \Delta_1$, де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow x = \frac{\Delta_1}{\Delta} .$$

Аналогічно

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{2.3}$$

де

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Визначники $\Delta_j \ (j = 1,2,3)$ називаються <u>допоміжними визначниками</u> системи (2.1).

Покажемо, що значення невідомих (3) дійсно задовольняють систему рівнянь (2.1). На прикладі першого рівняння маємо (для двох інших подібні міркування):

$$\frac{1}{\Delta}(a_{11}\Delta_1 + a_{12}\Delta_2 + a_{13}\Delta_3) = \frac{1}{\Delta}(a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) + a_{12}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}) +$$

$$+a_{13}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33})) = \frac{1}{\Delta}(b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + b_2(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}) +$$

$$+b_3(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33})) = \frac{1}{\Delta}(b_1 \cdot \Delta + b_2 \cdot 0 + b_3 \cdot 0) = b_1 .$$

Теорема (правило Крамера). Система рівнянь (1) з головним визначником $\Delta \neq 0$ має єдиний розв'язок, який визначається формулами:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де визначники $\Delta_j \ (j = 1,2,3)$ одержано із головного визначника Δ системи заміною відповідного стовпця стовпцем вільних членів.

Зауваження. Для системи лінійних <u>однорідних</u> рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0; \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0; \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

усі $\Delta_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ і тоді, якщо $\Delta \neq 0$, то система (2.4) має єдиний нульовий розв'язок $x = y = z = 0$. Наслідок: якщо система (2.4) має ненульовий розв'язок, її визначник дорівнює нулю.

Зауваження. Якщо головний визначник системи (2.1) $\Delta = 0$, можливі два наступних випадки**:**

1. Система несумісна, якщо хоча б один із допоміжних визначників не дорівнює нулю.

2. Якщо всі визначники системи дорівнюють нулю, система або має нескінченну кількість розв'язків, або несумісна.

Зауваження. Правило Крамера виконується для довільної кількості рівнянь системи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n3}x_n = b_n. \end{cases}$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь, скориставшись правилом Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ 2x + 3y + z = 0; \\ -x + y + 2z = -5, \end{cases}$$

Тут $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, $\Delta_1 = -10$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 20$,

звідки $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 1$; $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 0$; $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -2$.

2.2. Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих)

Повернемось до системи рівнянь (2.1). Нехай коефіцієнт $a_{11} \neq 0$, чого завжди можна досягти, переставивши рівняння місцями або змінивши нумерацію змінних. Перше рівняння системи (2.1) помножимо на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ і додаймо до другого. Потім перше рівняння помножимо на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ і додаймо до третього, тоді одержимо

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2; \\ \quad a'_{32}y + a'_{33}z = b'_3. \end{cases} \tag{2.5}$$

Тут $a'_{22}, a'_{23}, a'_{32}, a'_{33}, b'_2, b'_3$ – нові значення коефіцієнтів після вказаних перетворень. Пусть $a'_{22} \neq 0$, інакше, коли $a'_{22} = a'_{32} = 0$, одразу знаходимо змінну z, або матимемо несумісну систему. Помножимо друге рівняння системи (2.5) на $-\dfrac{a'_{32}}{a'_{22}}$ і додаймо до третього, тоді

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \; = b_1; \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2; \\ \qquad a''_{33}z = b''_3. \end{cases} \tag{2.6}$$

В системі (2.6) a''_{33}, b''_3 – нові значення коефіцієнтів, причому можливі наступні випадки:

1. $a''_{33} \neq 0 \Rightarrow z = \dfrac{b''_3}{a''_{33}}$. Підставляємо значення z у друге рівняння системи (2.6) і знаходимо y. Із першого рівняння, знаючи y і z, визначаємо x.

2. $a''_{33} = 0,$ а $b''_3 \neq 0$. Тоді система (2.6) несумісна (не має розв’язань).

3. $a''_{33} = 0$ и $b''_3 = 0$. Система (2.6) набуває виду

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1; \\ \quad a'_{22}y + a'_{23}z = b'_2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Кількість рівнянь в системі (2.7) менша за кількість невідомих. Залишимо дві невідомих зліва, наприклад, x і y, а z перенесемо в праву частину системи (2.7) і будемо вважати її довільним числом. Одержимо

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 - a_{13}z; \\ \quad a'_{22}y = b'_2 - a'_{23}z. \end{cases} \tag{2.8}$$

Із системи (2.8) x та y виражаються через z , і система має нескінченну кількість розв'язань.

Приклад. Розв'язати систему із прикладу 1 методом Гаусса

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ 2x + 3y + z = 0; \\ -x + y + 2z = -5. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на –2 і додаймо до другого, потім перше рівняння додаймо до третього, отримаємо

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ -y + 3z = -6; \\ 3y + z = -2 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ y - 3z = 6; \\ 3y + z = -2. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на –3 і додаймо до третього:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3; \\ y - 3z = 6; \\ 10z = -20. \end{cases}$$

Із третього рівняння $z = -2$, із другого $y = 0$ та із першого $x = 1$.

Приклад. Розв'язати систему однорідних рівнянь методом Гаусса

$$\begin{cases} x - y + z = 0; \\ 2x + 2y - 3z = 0; \\ 3x + y - 2z = 0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на –2 і додаймо до другого, потім помножимо перше рівняння на –3 і додаймо до третього, маємо

$$\begin{cases} x - y + \ \ z = 0; \\ 4y - 5z = 0; \\ 4y - 5z = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x - y + \ \ z = 0; \\ 4y - 5z = 0, \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{5}{4}z,\ x = y - z = \frac{1}{4}z\ ,\ z \in R.$$

Система має нескінченну кількість розв’язків.

Тема 3. Матриці: основні поняття, дії над матрицями, обернена матриця, розв'язання СЛАР матричним методом

3.1. Основні види матриць

Означення. Матрицею називається сукупність чисел, розташованих в m рядках та n стовпцях, і позначається

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \quad \text{або} \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

скорочено $A=\| a_{ij} \|$ або $A=(a_{ij})$ відповідно.

Число, яке стоїть на перетині i-го рядка та j-го стовпця, позначається a_{ij} та називається елементом матриці; $m \times n$ – розмірність матриці.

Існують наступні види матриць**:**

1. Матриця-рядок: $\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{Vmatrix}$.
2. Матрица-стовпець: $\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{Vmatrix}$.
3. Нуль-матриця – всі її елементи дорівнюють нулю.
4. Одинична матриця: $E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}$.
5. Діагональна матриця: $\begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{Vmatrix}$.

6. Симетрична матриця – для її елементів виконується рівність $a_{ij} = a_{ji}$ при всіх $i \neq j$.

Важливою характеристикою квадратної матриці A є її визначник, який позначається $\det A$. Якщо $\det A \neq 0$, матриця A називається <u>невиродженою</u>. В протилежному випадку – <u>виродженою</u>.

Означення. Дві матриці $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ однакової розмірності називаються рівними, якщо дорівнюють один одному відповідні елементи $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх i, j.

3.2. Операції з матрицями

1. Транспонування матриць.

Означення. Транспонування – це заміна рядків стовпцями із збереженням їх номерів. Транспонована матриця позначається A^{T}.

Приклад. Знайти A^{T}, якщо матриця $A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{Vmatrix}$.

Отже, відповідно до означення, $A^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}$.

2. Додавання матриць.

Означення. Сумою двох матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ однакової розмірності називається матриця C тієї ж розмірності, елементи якої визначаються рівностями $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, і позначається $C = A + B$.

3. Множення матриці на число.

Означення. Добутком матриці $A = (a_{ij})$ і деякого числа λ називається матриця $B = (b_{ij})$, елементи якої дорівнюють елементам матриці A, помноженим на λ, тобто $b_{ij} = \lambda\, a_{ij}$, і позначається $B = \lambda A$.

Приклад. Знайти матрицю $C = 2A - B$, якщо

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}, \; B = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow C = \begin{Vmatrix} 6-5 & -4-4 \\ 8+1 & 2-0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -8 \\ 9 & 2 \end{Vmatrix}.$$

4. Множення матриць.

Означення. Добутком матриці $A = (a_{i\,j})$ розмірності $m \times p$ та матриці $B = (b_{i\,j})$ розмірності $p \times n$ називається матриця $C = (c_{i\,j})$ розмірності $m \times n$, елементи якої задовольняють рівність

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{ip} b_{pj};\; (i = 1, 2, \ldots, m;\; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Позначається: $C = AB$.

Зауваження. Добуток двох матриць вважається визначеним, якщо кількість стовпців першої матриці-множника дорівнює кількості рядків другої матриці-множника.

Приклад. Знайти добуток матриць $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Отже,

$$AB = \begin{Vmatrix} 3+2-2 & -1+4-1 & 0-2-3 \\ 6+0+8 & -2+0+4 & 0-0+12 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 14 & 2 & 12 \end{Vmatrix}.$$

Зауваження. В загальному випадку добуток матриць не підлягає комутативній властивості, $AB \neq BA$, що видно із наступного прикладу.

Приклад. Знайти добуток матриць $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix}$; $B = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$.

Маємо:

$$AB = \begin{Vmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -15 \end{Vmatrix}; \quad BA = \begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ 12 & -16 \end{Vmatrix}.$$

3.3. Обернена матриця

Означення. Оберненою по відношенню до матриці A називається матриця A^{-1}, яка задовольняє умову: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Поняття оберненої матриці є коректним лише для квадратних матриць, при цьому для існування оберненої матриці необхідно, щоб матриця A була невиродженою: $\det A \neq 0$.

Покажемо, що оберненою матрицею A^{-1} для матриці A розмірності 3×3 буде матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}.

Отже,

$$AA^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = E.$$

Наприклад, $b_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det A$;

$$b_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0 \quad \text{и} \quad \text{т.д.}$$

Аналогічно перевіряється умова $A^{-1}A = E$.

Зауваження. Для матриці A розмірності $(n\times n)$ обернена матриця A^{-1} має вигляд:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}.$$

3.4. Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{n3}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (3.1)$$

Введемо наступні матриці:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}; \; X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{Vmatrix}; \; B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{Vmatrix}.$$

Тоді, використовуючи правило множення матриць, систему (3.1) можна записати у виді (матрична форма запису системи рівнянь (3.1)):

$$AX = B. \qquad (3.2)$$

Нехай $\det A \neq 0,$ тоді для матриці A існує обернена A^{-1}.

Помноживши обидві частини рівності (3.2) зліва на A^{-1}, одержимо

$$(A^{-1}A)\,X = A^{-1}B \qquad (3.3)$$

В силу рівностей $A^{-1}A = E$ і $EX = X$, формула (3) перетворюється на

$$X = A^{-1}B. \qquad (3.4)$$

Неважко впевнитися в тому, що вираз (3.4) дійсно є розв'язком рівняння (3.1). Після підстановки в (3.2) матимемо:

$$AA^{-1}B = E\,B = B.$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 3x - \; y \; + \; z \; = -3; \\ 4x + 2y + \; z \; = \; 0; \\ 2x - 3y - 4z = \; 5. \end{cases}$$

Тут

$$A=\begin{Vmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -4\end{Vmatrix};\ X=\begin{Vmatrix}x\\ y\\ z\end{Vmatrix};\ B=\begin{Vmatrix}-3\\ 0\\ 5\end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 2 & -3 & -4\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & -4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-49\neq 0\ ,$$

звідки випливає, що обернена матриця існує.

Алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & -4\end{vmatrix}=-5,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}=18,\ A_{13}=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-16,$$

$$A_{21}=-7,A_{22}=-14,A_{23}=-7,A_{31}=-3,A_{32}=1,A_{33}=10\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ A^{-1}=\frac{1}{-49}\begin{Vmatrix}-5 & -7 & -3\\ 18 & -14 & 1\\ -16 & -7 & 10\end{Vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Vmatrix}x\\ y\\ z\end{Vmatrix}=\frac{1}{-49}\begin{Vmatrix}-5 & -7 & -3\\ 18 & -14 & 1\\ -16 & -7 & 10\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-3\\ 0\\ 5\end{Vmatrix}=\frac{1}{-49}\begin{Vmatrix}15-15\\ -54+5\\ 48+50\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\ 1\\ -2\end{Vmatrix}.$$

Остаточно:

$$x=0,\ y=1,\ z=-2\ .$$

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

Тема 4. Вектори: основні поняття, лінійні операції, розклад вектору за базисом в декартовій системі координат

4.1. Означення вектору

Всі величини, з якими ми зустрічалися дотепер у фізиці, техніці, були двох видів: скалярні, що характеризуються лише числовим значенням, та векторні, – характеризуються числовим значенням і напрямком.

Приклад. Скалярні величини: маса, об'єм, температура і т.д. Векторні величини: сила, швидкість, прискорення і т.д.

Означення. Напрямний відрізок називається вектором і позначається $\overline{AB}, \overline{a}$ (рис. 4.1).

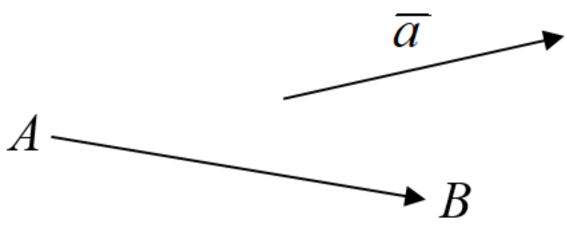


Рис. 4.1

Означення. Відстань між початком і кінцем вектора називається його довжиною (або модулем) і позначається $|\overline{AB}|, |\overline{a}|, a$.

Якщо $|\overline{AB}|=1$ або $|\overline{AB}|=0$, то вектори називаються відповідно одиничним та нульовим.

Означення. Вектори називаються колінеарними, якщо існує пряма, якій вони паралельні.

Означення. Вектори називаються компланарними, якщо існує площина, якій вони паралельні.

Означення. Два вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, мають однаковий напрямок і однаковий модуль (однакову довжину).

Нехай задано вектор $\overline{AB}$ і вісь l.

Означення. Проекцією вектору $\overline{AB}$ на вісь l називається величина $np_l\overline{AB} = \left|\overline{AB}\right|\cos\varphi$, де ϕ – кут між вектором $\overline{AB}$ та віссю l (рис. 4.2).

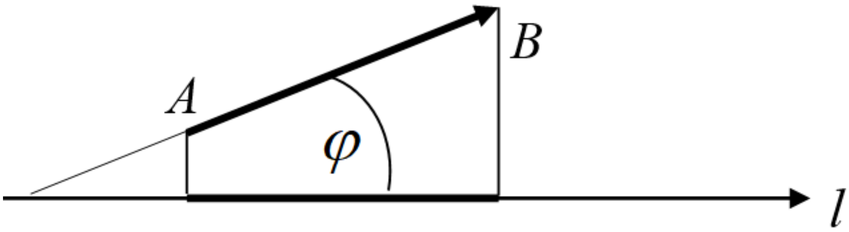


Рис. 4.2.

4.2. Лінійні операції над векторами

1. Множення вектора на число.

Означення. Добутком вектору $\overline{a}$ на число λ називається вектор $\overline{b}$, який визначається наступними умовами: $|\overline{b}|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$; вектор $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a}$; вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ однаково направлені, якщо $\lambda > 0$, і протилежно направлені, якщо $\lambda < 0$.

Приклад. Побудувати вектор (рис. 4.3) $\overline{b} = -2\overline{a}$.

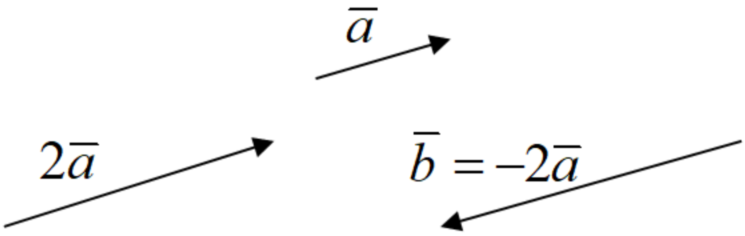


Рис.4.3.

Із означення виплива́є умова колінеарності двох векторів:

Нехай $\overline{b}$ – ненульовий вектор, тоді для будь-якого колінеарного по відношенню до нього вектору $\overline{a}$ існує єдине число λ, яке задовольняє рівність $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.

2. Додавання векторів.

Означення. Сумою двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який має спільний з доданками початок, є діагоналлю паралелограма, сторони якого – вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (рис. 4.4), і позначається: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$.

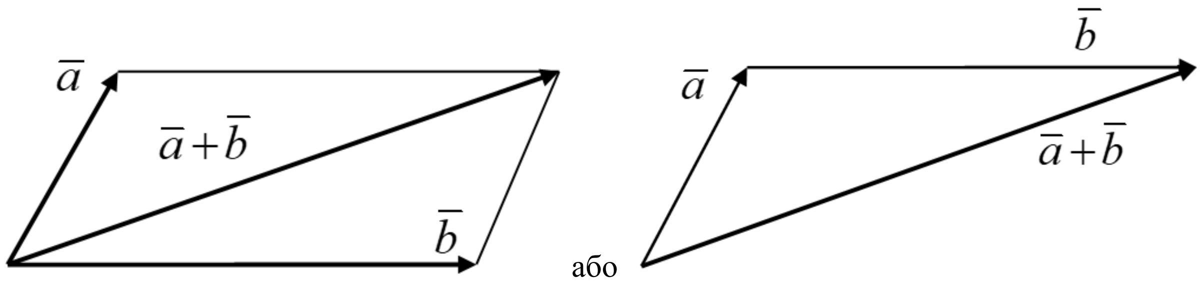


Рис. 4.4

Інший спосіб побудови суми двох векторів розповсюджується на довільну кількість доданків. Правило багатокутника**:**

Щоб побудувати суму векторів, необхідно в кінці першого вектору побудувати другий, в кінці другого – третій тощо. Вектор, який з'єднує початок першого з кінцем останнього, буде шуканою сумою (рис. 4.5).

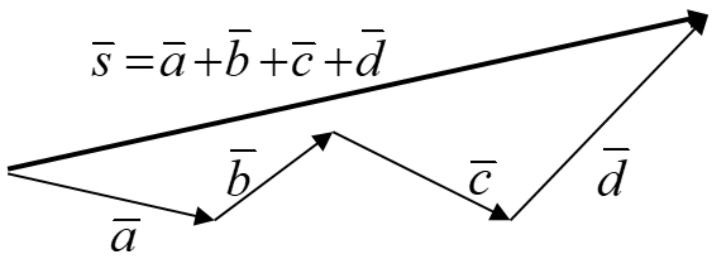


Рис.4.5

3. Віднімання векторів.

Означення. Вектор, колінеарний даному вектору $\overline{a}$, рівний йому за модулем і протилежно напрямний, називається протилежним вектором і позначається $-\overline{a}$.

Означення. Різницею $\overline{b} - \overline{a}$ векторів $\overline{b}$ та $\overline{a}$ називається сума векторів $\overline{b}$ та $-\overline{a}$, (рис. 4.6) тобто $\overline{b} - \overline{a} = \overline{b} + (-\overline{a})$.

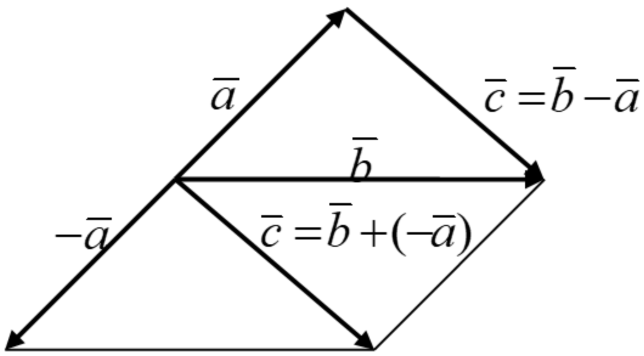


Рис. 4.6

Побудова вектора $\overline{c}=\overline{b}-\overline{a}$ базується на побудові суми векторів $\overline{b}+(-\overline{a})$.

4.3. Декартова система координат

Розглянемо систему координат, напрямки осей О*x*, О*y*, О*z* якої задаються трьома одиничними, взаємно перпендикулярними векторами $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Ця система координат називається *декартовою системою координат* (рис. 4.7). Вектори $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ називаються базисом, а кожен з цих векторів – *ортом*. Покажемо, будь-який вектор $\overline{a}$ можна єдиним чином розкласти за базисом у просторі, тобто представити у вигляді:

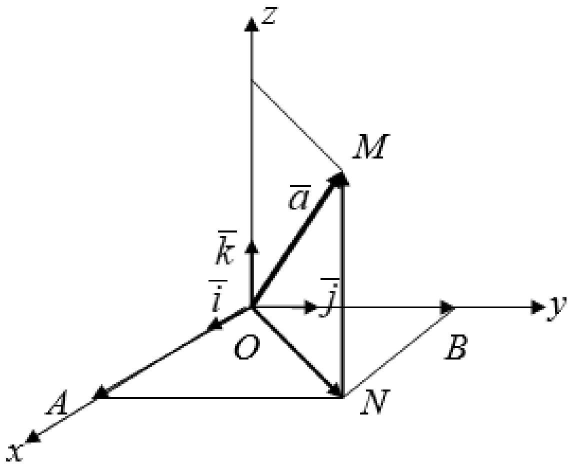


Рис. 4.7

$$\overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k} \tag{4.1}$$

Приведемо вектор $\overline{a}$ до початку системи координат – точки О. Із кінця вектору $\overline{a}$ – точки *M* опустимо перпендикуляр *MN* на площину О*xy*. Проведемо із точки *N* прямі, паралельні осям координат. Побудуємо вектори $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{ON}, \overline{NM}$. Тоді

$$\overline{a}=\overline{ON}+\overline{NM}. \tag{4.2}$$

Оскільки $\overline{ON}=\overline{OA}+\overline{OB}$, вираз (4.2) можна переписати у вигляді:

$$\overline{a}=\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{NM}. \tag{4.3}$$

В силу колінеарності векторів $\overline{ON}$ та $\overline{i}$, $\overline{OB}$ та $\overline{j}$, $\overline{NM}$ та $\overline{k}$ існують такі числа a_x, a_y, a_z, що

$$\overline{OA} = a_x \overline{i} \; ; \; \overline{OB} = a_y \overline{j} \; ; \; \overline{NM} = a_z \overline{k} . \tag{4.4}$$

Тоді формула (4.3) з рахунком (4.4) перетворюється на (4.1), що й необхідно було довести. Скорочено формула (4.1) має вид: $\overline{a}(a_x;\, a_y;\, a_z)$.

Означення. Числа a_x, a_y, a_z називаються координатами вектора $\overline{a}$, або його компонентами.

Із співвідношення (4.1) випливають наступні теореми:

Теорема. Якщо $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то сума $\overline{a} + \overline{b} = (a_x + b_x \; ; \; a_y + b_y \; ; \; a_z + b_z)$.

Теорема. Якщо $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і λ – довільне число, то добуток $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

Наслідок. Якщо вектори $\overline{a}$ та $\overline{b}$ колінеарні, то $a_x = \lambda b_x$; $a_y = \lambda b_y$; $a_z = \lambda b_z$, и тоді умова колінеарності має вид:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} . \tag{4.6}$$

Означення. Радіус-вектором точки M називається вектор $\overline{r} = \overline{OM}$.

Означення. Координати радіус-вектора точки M називаються координатами точки $M(x; y; z)$. (рис. 4.8)

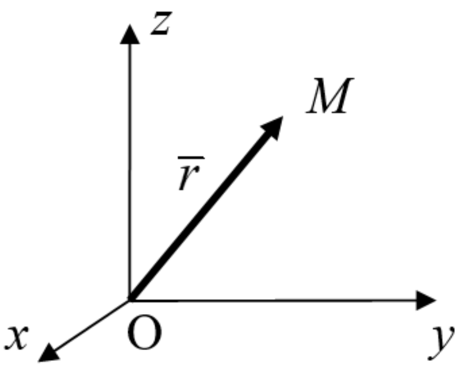


Рис. 4.8

Зауваження. Із доведення формули (4.1) випливає, що, з геометричної точки зору, координати вектору $(a_x; a_y; a_z)$ – це його проекції на відповідні координатні осі.

Зауваження. Можна показати, що базис у просторі утворюють будь-які три некомпланарні вектори: $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, тобто $\overline{d} = \lambda_1 \overline{a} + \lambda_2 \overline{b} + \lambda_3 \overline{c}$.

Тема 5. Способи завдання векторів. Скалярний добуток

5.1. Способи завдання векторів

Вектор можна задати наступними способами:

1. Координатами вектору $\overline{a} = (a_x\ ;\ a_y\ ;\ a_z)$.

2. Координатами початку $A(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ і кінця $B(x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$.

3. Модулем вектору $|\,\overline{a}\,|$ та кутами $\alpha,\ \beta,\ \gamma$,

Які він утворює з координатними осями. При цьому значення $\cos\alpha$; $\cos\beta$; $\cos\gamma$ називаються <u>напрямними косинусами</u>.

Між переліченими способами існує певний зв'язок.

Наприклад, перехід від способу 2 до способу 1 здійснюється так:

оскільки $\overline{a} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, то

$a_x = x_2 - x_1; a_y = y_2 - y_1; a_z = z_2 - z_1$.

Перехід від способу 3 до способу 1 і навпаки здійснюється за формулами:

$a_x = |\overline{a}|\cos\alpha;\ a_y = |\overline{a}|\cos\beta;\ a_z = |\overline{a}|\cos\gamma;$

$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

5.2. Ділення відрізка у даному відношенні

Розв'яжемо задачу**:** дано дві точки $A(x_1\ ;\ y_1\ ;\ z_1)$ та $B(x_2\ ;\ y_2\ ;\ z_2)$**.** Необхідно знайти точку $M(x_M\ ;\ y_M\ ;\ z_M)$, таку, що відношення $\dfrac{AM}{MB} = \lambda$.

Побудуємо вектори $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{AB}$.(рис. 4.9)

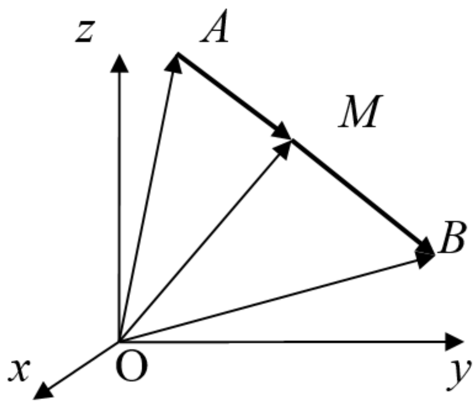


Рис. 4.9

Із умови колінеарності векторів $\overline{AM}$ і $\overline{MB}$ маємо: $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

Представимо рівність у координатній формі:

$$\begin{cases} x_M - x_1 = \lambda (x_2 - x_M), \\ y_M - y_1 = \lambda (y_2 - y_M), \\ z_M - z_1 = \lambda (z_2 - z_M), \end{cases}$$

звідки

$$\left\{ x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\ . \right. \qquad (5.1)$$

Зауваження. Із формул (5.1) випливає частинний випадок знаходження координат середини відрізка $(\lambda = 1)$:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}; z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад. Дано координати вершин трикутника: $A(2;3;-1)$, $B(0;1;2)$, $C(-2;-3;4)$. Знайти його центр ваги (рис 4.10).

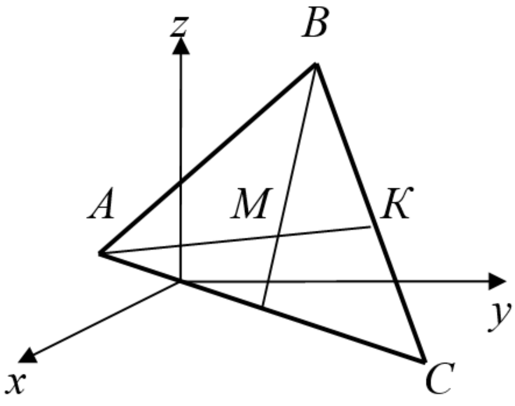


Рис. 4.10

Відомо, що центр ваги трикутника знаходиться на перетині медіан; якщо K – середина сторони BC, то за властивістю медіан, $\lambda = \frac{AM}{MK} = 2$.

Отже, координати точки K: $x_K = \frac{0-2}{2} = -1; y_K = \frac{1-3}{2} = -1; z_K = \frac{2+4}{2} = 3,$

далі за формулами (1) одержимо координати точки M:

$$x_M = \frac{2+2\cdot(-1)}{3} = 0\ ;\ y_M = \frac{3+2\cdot(-1)}{3} = \frac{1}{3}\ ;\ z_M = \frac{-1+2\cdot 3}{3} = \frac{5}{3}.$$

5.3. Скалярний добуток двох векторів та його властивості

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними, і позначається

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi\ . \tag{5.2}$$

Зауваження. Формулу (5.2) можна записати у формі:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{b}|\, np_{\overline{b}}\overline{a} = |\overline{a}|\, np_{\overline{a}}\overline{b}, \tag{5.3}$$

звідки

$$np_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|}\ ,\quad np_{\overline{b}}\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|}\ .$$

Пояснимо механічний зміст скалярного добутку. Якщо $\overline{a} = \overline{F}$ – постійна сила, а $\overline{b} = \overline{S}$ – вектор руху, то $|\overline{a}\cdot\overline{b}| = |\overline{F}\cdot\overline{S}| = A$ – робота сили $\overline{F}$ на русі $\overline{S}$.

Властивості скалярного добутку:

1. $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ – комутативність.

2. $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$, якщо вектори $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональні, або хоча б один із них є нульовим вектором.

3. $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b}) = \lambda\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{a}\cdot\lambda\overline{b}$.

4. $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}+\overline{c}\right) = \overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{a}\cdot\overline{c}$.

5.4. Скалярний добуток векторів, заданих координатами

Із означення та властивості 1 скалярного добутку отримуємо формули: $\bar{i}\cdot\bar{i}=|\bar{i}||\bar{i}|\cos 0=1$; $\bar{i}\cdot\bar{j}=|\bar{i}||\bar{j}|\cos\pi/2=0$.

Аналогічно: $\bar{j}\cdot\bar{j}=1$; $\bar{k}\cdot\bar{k}=1$; $\bar{j}\cdot\bar{k}=0$; $\bar{i}\cdot\bar{k}=0$.

Тоді, якщо

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\ ;\ \bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\,,$$

то

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\,(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \qquad (5.4)$$

5.5. Довжина вектору. Кут між двома векторами. Напрямні косинуси

За формулами (5.2) і (5.4) маємо

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0=|\bar{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2\,,$$

звідки

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (5.5)$$

Із означення скалярного добутку і формул (5.4), (5.5) випливає:

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (5.6)$$

Крім того,

$$np_{\bar{b}}\,\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (5.7)$$

Якщо у формулі (5.7) покласти $\bar{b}=\bar{i}\,(1;\,0;\,0)$, то

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\,.$$

Аналогічно знаходимо вирази для інших двох напрямних косинусів:

$$\cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \ \cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \qquad (5.8)$$

Зауваження. Із (5.8) випливає основна властивість напрямних косинусів:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Приклад. Дано два вектори: $\overline{a}(2;-1;3), \overline{b}(0;\,2;\,4)$. Знайти їх скалярний добуток та кут між ними.

Застосуємо формули (5.5) і (5.7):

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = 2\cdot 0 - 1\cdot 2 + 3\cdot 4 = 10;$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{10}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{0+4+16}} = \frac{10}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{70}}{14} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{\sqrt{70}}{14}.$$

Тема 6. Векторний та мішаний добутки векторів

6.1. Векторний добуток двох векторів та його властивості

Означення. Векторним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який задовольняє наступні умови:

1. $|\overline{c}| = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\varphi$;

2. Вектор $\overline{c}$ є перпендикулярним до векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

3. Вектори $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ утворюють праву трійку, тобто із кінця третього вектору $\overline{c}$ найкоротший поворот від вектору $\overline{a}$ до другого вектору $\overline{b}$ видно проти годинникової стрілки.

Позначається векторний добуток: $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$ або $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$.

Із означення векторного добутку випливають його властивості і геометричний зміст: *модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах-множниках*.

Основні властивості векторного добутку:

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -(\overline{b} \times \overline{a})$ – антикомутативність.

2. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$, де $\overline{0}(0;0;0)$, якщо $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні хоча б один із множників є нульовим вектором.

3. $\lambda(\overline{a} \times \overline{b}) = (\lambda\overline{a}) \times \overline{b} = \overline{a} \times (\lambda\overline{b})$.

4. $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$.

Зауваження. Трійка базисних векторів $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ є правою.

6.2. Векторний добуток векторів, заданих координатами

Із означення векторного добутку маємо:

$$\overline{i} \times \overline{i} = \overline{0};\ \overline{j} \times \overline{j} = \overline{0};\ \overline{k} \times \overline{k} = \overline{0};$$

$$\overline{i} \times \overline{j} = \overline{k};\ \overline{j} \times \overline{i} = -\overline{k};\ \overline{i} \times \overline{k} = -\overline{j}; \tag{6.1}$$

$$\overline{k} \times \overline{i} = \overline{j};\ \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i};\ \overline{k} \times \overline{j} = -\overline{i}.$$

Тоді з рахунком формул (6.1) і властивостей векторного добутку одержимо:

$$\overline{a}\times\overline{b}=(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k})\times(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k})=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\overline{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\overline{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\overline{k}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\overline{k}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (6.2)$$

Приклад. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{a}(2;\,3;\,-1)$ і $\overline{b}(1;\,3;\,2)$.

Виходячи із геометричного змісту векторного добутку, одержимо:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=9\overline{i}-5\overline{j}+3\overline{k}.$$

Тогда $S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{9^2+5^2+3^2}=\sqrt{115}$.

Зауваження. Площа трикутника, побудованого на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює $S=\dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$.

6.3. Мішаний добуток та його властивості

Означення. Векторно-скалярний добуток $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ називається мішаним і позначається $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$.

Розглянемо його геометричний зміст. Побудуємо паралелепіпед на векторах $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. (рис. 4.11). Його об’єм дорівнює $V=S_{\text{осн}}\cdot h$, в основі знаходиться паралелограм із площею $S_{\text{осн}}=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi=|\overline{a}\times\overline{b}|$.

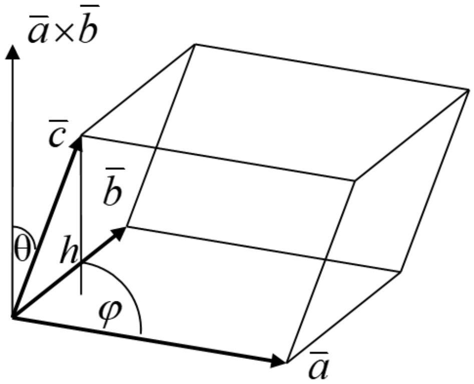


Рис. 4.11

Висота $h=|\overline{c}|\cdot|\cos\theta|$, тому

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi|\bar{c}||\cos\theta| = |\bar{a}\times\bar{b}||\bar{c}||\cos\theta| = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|. \qquad (6.3)$$

Знак у формулі (6.3) співпадає зі знаком $\cos\theta$, тому мішаний добуток додатний, якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ утворюють праву трійку.

Отже, *мішаний добуток некомпланарних векторів* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *дорівнює за модулем об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах. Він додатний, коли трійка векторів права, і від'ємний, коли трійка ліва*.

Основні властивості мішаного добутку:

1. Якщо мішаний добуток дорівнює нулю, то вектори компланарні.

Навпаки теж вірно: якщо множники компланарні, то мішаний добуток дорівнює нулю.

Рівність $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|\sin\varphi\cos\theta = 0$ має місце в наступних випадках:

а) хоча б один із векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ є нульовим, тоді вектори компланарні;

б) $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні $\Rightarrow$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні;

в) $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow$ $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – компланарні.

2. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$, тобто при циклічній перестановці множників мішаний добуток не змінює знак. Проте $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a})$.

3. $(A\bar{a}_1 + B\bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}) = A(\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c}) + B(\bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c})$, де A і B – константи.

6.4. Мішаний добуток векторів, заданих координатами

Обчислимо мішаний добуток векторів

$\bar{a}(a_x; a_y; a_z);\ \bar{b}(b_x; b_y; b_z);\ \bar{c}(c_x; c_y; c_z)$.

Із означення скалярного і векторного добутків маємо:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\bar{k}\right)\cdot(c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) =$$

$$= c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$\left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

Приклад. Піраміда задається координатами своїх вершин: $A(-1;\,2;\,3)$; $B(1;\,0;\,4)$; $C(2;\,0;\,5)$; $D(-1;-2;\,4)$. Знайти висоту, яку проведено із вершини D на грань ABC**.** (рис. 4.12)

Побудуємо вектори $\overline{AB}\left(2;-2;1\right)$; $\overline{AC}\left(3;-2;2\right)$; $\overline{AD}\left(0;-4;1\right)$.

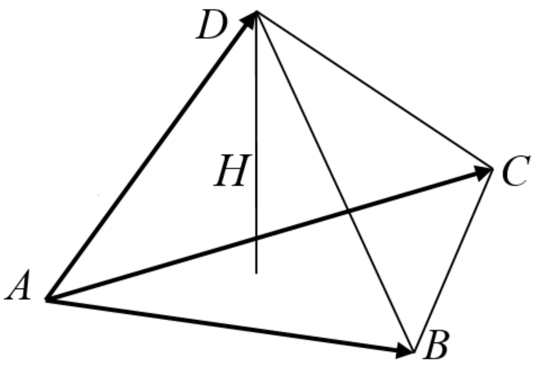


Рис.4.12

Об'єм піраміди дорівнює

$$V_{\text{пир}} = \tfrac{1}{3} \cdot S_\Delta \cdot H = \tfrac{1}{6} \cdot S_0 \cdot H = \tfrac{1}{6} \left| (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} \right| = \tfrac{1}{6} \left| (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \right|, \tag{6.5}$$

оскільки основою піраміди є трикутник (його площа S_Δ дорівнює половині площі паралелограма S_0), а висота піраміди дорівнює висоті відповідного паралелепіпеда**.**

Використовуючи геометричний зміст мішаного добутку і формули (6.4) та (6.5), одержимо

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overline{AB},\,\overline{AC},\,\overline{AD})\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=1.$$

Далі,

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{vmatrix}=-2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k};$$

$$S_{\text{осн}}=|\,\overline{AB}\times\overline{AC}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+2^2}=\frac{3}{2}.$$

Остаточно:

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}H\;\Rightarrow\;H=\frac{3V}{S_{\text{осн}}},$$

$$H=\frac{3V}{S_{\text{осн}}}=\frac{3\cdot 1}{3/2}=2.$$

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 7. Лінії на площині та їх рівняння

7.1. Лінії та їх рівняння в декартовій системі координат

В аналітичній геометрії лінії на площині розглядаються як геометричне місце точок (г.м.т.), що мають однакову властивість, загальну для всіх точок лінії.

Означення. Рівняння лінії $F(x,y)=0$ – це рівняння з двома змінними x і y, якому задовольняють координати будь-якої точки лінії і не задовольняють координати іншої точки, яка не лежить на даній лінії.

І навпаки: будь-яке рівняння виду $F(x,y)=0$ визначає в декартовій системі координат (ДСК) лінію як г.м.т., координати яких задовольняють $F(x,y)=0$. (рис. 7.1)

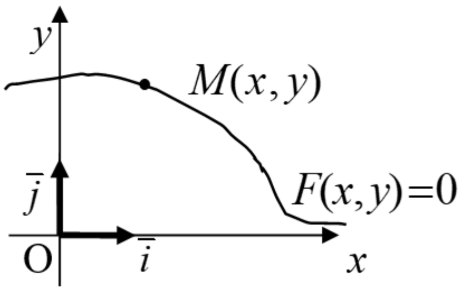


Рис.7.1

Приклад. Скласти рівняння кола радіусу R з центром в точці $M_0(x_0,y_0)$ (рис. 7.2).

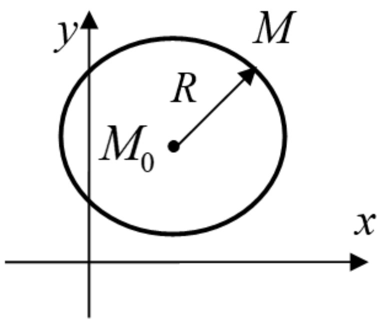


Рис. 7.2

Для будь-якої точки $M(x,y)$, яка лежить на колі, в силу означення кола як г.м.т., рівновіддалених від точки $M_0(x_0,y_0)$, маємо:

$$|\overline{M_0M}|=R \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

7.2. Параметричні рівняння ліній

Існує ще один спосіб задавати лінію на площині за допомогою рівнянь, які називаються параметричними:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2 \text{ , } t - \text{параметр.}$$

Приклад. Лінія задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$

Отримати рівняння цієї лінії в ДСК.

Виключимо параметр *t* та одержимо:

$$x^2 + y^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t = R^2 \Rightarrow \text{рівняння кола.}$$

7.3. Рівняння лінії в полярній системі координат

ДСК не є єдиним способом визначення положення точки і завдання рівняння лінії. На площині часто доцільно використовувати так звану полярну систему координат (ПСК).

ПСК є визначеною, якщо задати точку О (полюс) і луч ОР (полярну вісь). Тоді положення довільної точки визначається двома числами: полярним радіусом $\rho = |\overline{OM}|$ і полярним кутом φ – кутом між полярною віссю та полярним радіусом. Додатний напрямок відліку полярного кута від полярної осі рахується проти часової стрілки. Для всіх точок площини $\rho \ge 0$, а для однозначності полярного кута вважається $0 \le \varphi < 2\pi$ (рис.7.3).

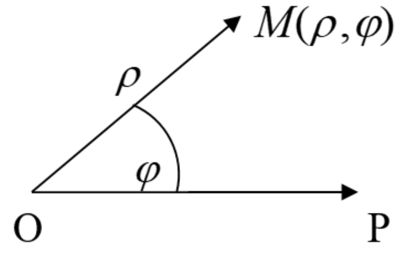


Рис.7.3

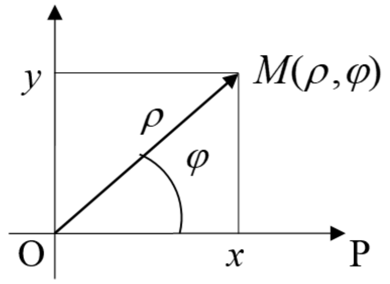


Рис.7.4

Якщо початок ДСК поєднати з полюсом, а вісь Оx направити за полярною віссю, то легко впевнитися у зв'язку між полярними та декартовими координатами (рис.7.4):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Навпаки,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,, & 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\,; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}; \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \dfrac{3\pi}{2} \le \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Якщо рівняння лінії у ДСК має вид $F(x, y) = 0$, то у ПСК – $F\left(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi\right) = 0.$ Тоді із цього рівняння можна отримати рівняння у виді $\rho = \rho(\varphi).$

Приклад. Скласти рівняння кола у ПСК, якщо центр кола міститься у полюсі.

Скористаємося формулами переходу від ДСК до ПСК, одержимо:

$$x^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = R^2 \Rightarrow \rho = R\ .$$

Приклад. Побудувати графік лінії $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$. (рис.7.5)

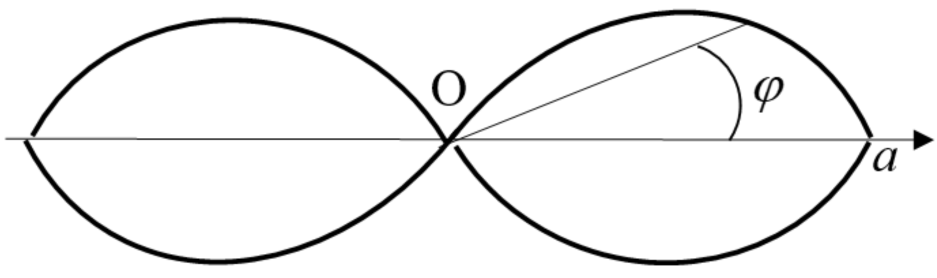


Рис. 7.5

Перейдемо до ПСК. Рівняння при цьому набуває виду: $\rho = a\sqrt{\cos 2\phi}.$

Графік лінії будуємо з рахунком його симетрії та ОДЗ функції: $\cos 2\varphi \ge 0.$

Дана лінія називається лемніскатою Бернуллі.

Тема 8. Пряма лінія на площині

8.1. Рівняння прямої лінії

Теорема. В ДСК на площині кожна пряма лінія може бути задана лінійним рівнянням і навпаки: рівняння виду $Ax + By + C = 0$ в ДСК визначає на площині пряму лінію.

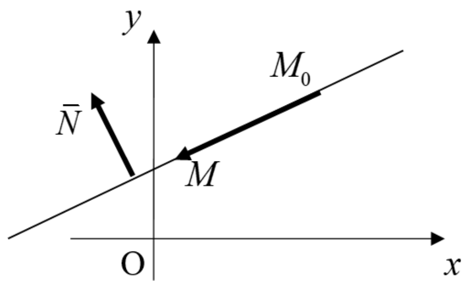


Рис. 8.1

Нехай $\bar{N}(A;\, B)$ – нормальний вектор прямої (вектор, перпендикулярний прямій) і точка $M_0(x_0, y_0)$ належить даній прямій (рис. 8.1). Якщо $M(x, y)$ – поточна точка прямої, то для всіх точок прямої виконується рівність:

$$\bar{N} \cdot \overline{M_0M} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (8.1)$$

Рівняння (8.1) є рівнянням першого ступеня.

Якщо ж маємо лінійне рівняння і точку $M_0(x_0, y_0)$, яка належить лінії, то

$$Ax + By + C = 0\,;$$
$$Ax_0 + By_0 + C = 0\ .$$

Звідси після віднімання одержимо:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Якщо позначити $\bar{N}(A;\, B)$ – нормальний вектор, то рівняння (8.1) буде визначати пряму лінію. Після розкриття дужок отримаємо загальне рівняння прямої: $Ax + By + C = 0$.

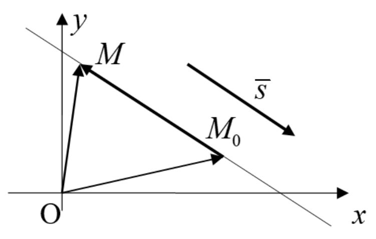


Рис.8.2

Крім того, пряму можна визначити, якщо задати точку $M_0(x_0, y_0)$, яка належить прямій, і вектор $\bar{s}(m, n)$, якому вона паралельна (напрямний вектор).

Нехай точка $M(x, y)$ – поточна точка прямої (рис.8.2). Із колінеарності векторів $\bar{s}(m, n)$ і $\overline{M_0M}$ випливає рівність:

$$\bar{r}-\bar{r}_0=t\bar{s}. \qquad (8.2)$$

Рівняння (8.2) називається векторним параметричним рівнянням прямої. В координатній формі:

$$\begin{cases} x=x_0+mt; \\ y=y_0+nt. \end{cases} \qquad (8.3)$$

Рівняння (8.3) називаються параметричними рівняннями прямої. Якщо виключити параметр t, приходимо до рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y=kx+b, \qquad (8.4)$$

де $k=\dfrac{n}{m}=\operatorname{tg}\varphi$, а φ – кут, який пряма утворює з віссю Оx; $b=y_0-\dfrac{n}{m}x_0$ – відрізок, який відсікає пряма на осі Оy (рис.8.3).

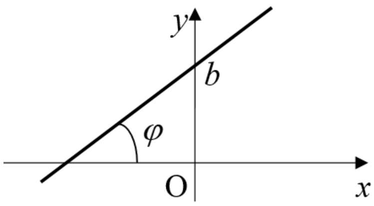


Рис. 8.3

Зауваження. Якщо пряма паралельна осі Оy, то її рівняння має вид: $x = x_0$ (оскільки $m = 0$). Якщо – осі Оx, то $y = y_0$ ($n = 0$).

8.2. Кут між двома прямими

Нехай дано рівняння двох прямих

$$\begin{matrix} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{matrix} \quad \text{або} \quad \begin{matrix} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2, \end{matrix} \quad \text{де} \quad k_1=-\frac{A_1}{B_1},\ k_2=-\frac{A_2}{B_2}.$$

Очевидно, що кут ϕ між цими прямими дорівнює куту між нормальними векторами $\bar{N}_1$ і $\bar{N}_2$ (рис. 8.4). Тому отримуємо:

$$\cos\phi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (8.5)$$

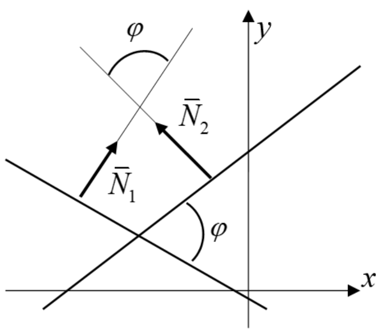


Рис. 8.4

Формула (8.5) може бути переписана інакше (в термінах кутових коефіцієнтів):

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1}=\sqrt{\frac{(A_1^2+B_1^2)(A_2^2+B_2^2)-(A_1A_2+B_1B_2)^2}{(A_1A_2+B_1B_2)^2}}\Rightarrow\ \mathrm{tg}\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \quad (8.6)$$

Із формул (8.5-8.6) одержимо умови паралельності і перпендикуляр-ності прямих:

1. Якщо прямі паралельні, то вектори $\bar{N}_1(A_1\,;\,B_1)$, $\bar{N}_2(A_2\,;\,B_2)$ колінеарні, і тоді $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ або $k_1=k_2$.

2. Якщо прямі перпендикулярні, то їх нормальні вектори теж перпендикулярні, і тоді $A_1A_2+B_1B_2=0$ або $1+k_1k_2=0\ \Rightarrow\ k_1k_2=-1$.

8.3. Взаємне розташування двох прямих

Розв’язання системи рівнянь прямих надає точку перетину:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=-C_1\,; \\ A_2x+B_2y=-C_2\,. \end{cases} \quad (8.7)$$

Якщо визначник системи (8.7)

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0\ \Rightarrow\ \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2},$$

то прямі мають точку перетину. В протилежному випадку $\Delta=0$, звідки $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, тобто прямі паралельні, і можливі випадки:

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ - паралельні та не мають спільної точки;

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ - прямі співпадають.

8.4. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки

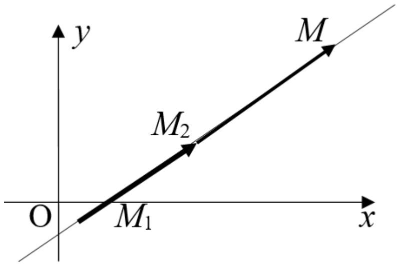


Рис. 8.5

Нехай дано дві точки $M_1(x_1,\, y_1)$ і $M_2(x_2,\, y_2)$ (рис. 8.5). Тоді, якщо $M(x,\, y)$ – поточна точка прямої, із умови колінеарності векторів $\overline{M_1M}$ та $\overline{M_1M_2}$ маємо:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (8.8)$$

Рівняння (8.8) – шукане рівняння прямої.

8.5. Рівняння прямої, яка проходить через точку, із заданим кутовим коефіцієнтом

Нехай дано точку $M_0(x_0,\, y_0)$ і кутовий коефіцієнт k. Будемо складати рівняння у виді $y=kx+b$. Коефіцієнт b знайдемо із умови проходження прямої через дану точку. Тоді

$$y_0=kx_0+b \Rightarrow b=y_0-kx_0 \Rightarrow y-y_0=k(x-x_0). \qquad (8.9)$$

Приклад. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2,1)$, перпендикулярно прямій $y=\frac{1}{3}x-2.$

Із умови перпендикулярності прямих $(k_1k_2=-1)$ обчислюємо кутовий коефіцієнт k = –3, а за формулою (8.9) одержуємо:

$$y+2=-3(x-1) \Rightarrow y=-3x+1.$$

8.6. Відстань від точки до прямої

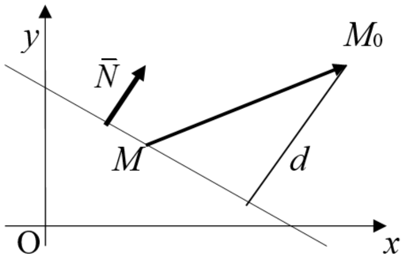


Рис. 8.6

Нехай пряма задається загальним рівнянням $Ax+By+C=0$, і необхідно знайти відстань від цієї прямої до заданої точки $M_0(x_0,\ y_0)$ (рис 8.6). Із рисунка маємо

$$d=\left|np_{\bar N}\,\overline{MM_0}\right|=\frac{\left|\bar N\cdot\overline{MM_0}\right|}{\left|\bar N\right|}=\frac{\left|A(x_0-x)+B(y_0-y)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$\frac{\left|Ax_0+By_0-Ax-By\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\left(C=-Ax-By\right)=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ . \qquad (8.10)$$

Приклад. Знайти відстань від прямої $4x-3y+10=0$ до точки $M(0;10)$.

За формулою (8.10) отримуємо $d=\dfrac{|\,4\cdot 0-3\cdot 10+10\,|}{\sqrt{16+9}}=\dfrac{20}{5}=4.$

Тема 9. Лінії другого порядку

Означення. Якщо у деякій декартовій системі координат задано лінію, яка визначається рівнянням другого степеня

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (9.1)$$

де коефіцієнти A, B, C одночасно не дорівнюють нулю, то ця лінія називається кривою або лінією другого порядку.

Може бути так, що нема точок $(x; y)$ з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (9.1). У такому випадку рівняння (9.1) визначає уявну лінію другого порядку.

Наприклад, $x^2 + y^2 = -1$ – рівняння уявного кола.

Розглянемо три частинні випадки рівняння (9.1).

9.1. Еліпс

Еліпс визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b. \qquad (9.2)$$

Рівняння (9.2) отримаємо, якщо у рівнянні (9.1) покладемо

$$A = \frac{1}{a^2}; \quad C = \frac{1}{b^2}; \quad F = -1; \quad B = D = E = 0.$$

Коефіцієнти a і b називаються відповідно великою та малою півосями, а рівняння (9.2) – канонічним рівнянням еліпса.

Припустимо, що $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ та відкладемо на осі Оx точки $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$, які називаються фокусами еліпса. Тоді означення еліпса можна задати наступним чином.

Означення. Еліпс – це геометричне місце точок, сума відстаней від яких до фокусів є величина стала та рівна $2a$ (рис.9.1).

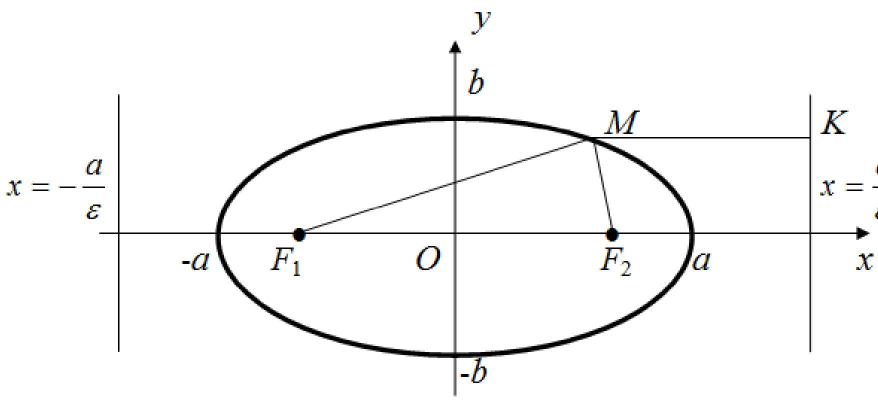


Рис. 9.1

Пояснимо означення. Нехай точка $M(x;y)$ – довільна точка еліпса. Тоді маємо, що $MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; $MF_2=\sqrt{(c-x)^2+y^2}$. Згідно означення має виконуватися рівність

$$2a=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (9.3)$$

Останній вираз представимо у вигляді

$$2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

та піднесемо до квадрату обидві частини рівності, отримаємо

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2+x^2+2cx+c^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Тоді маємо, що

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

Ще раз піднесемо вираз до квадрату та застосуємо відношення $c^2=a^2-b^2$ тоді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Розділимо обидві частину виразу на a^2b^2. Таким чином отримали канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Дослідимо рівняння (9.2).

Якщо у рівнянні замінити $x \to -x;\ y \to -y$, то рівняння (9.2) не зміниться. Це означає, що еліпс симетричний відносно координатних осей. Розглянемо докладніше ту частину еліпса, яка знаходиться у першій чверті:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Очевидно, що еліпс проходить через точки $(0;\, b),\ (a;\, 0)$. Симетрично відобразимо графік у інші чверті.

Точки $(-a;\, 0),\ (0;\, b),\ (a;\, 0),\ (0;-b)$ називаються вершинами еліпса.

Відношення $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ називається ексцентриситетом еліпса. Для еліпса $\varepsilon < 1$.

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса.

Властивість директрис. Відношення відстаней від фокуса і директриси до точок еліпса є величина стала та дорівнює ексцентриситету, тобто

$$\frac{|F_2M|}{|MK|} = \varepsilon.$$

Зауваження. Коло є частинним випадком еліпса при $a = b$. Для нього $c = 0,\ \varepsilon = 0$.

9.2. Гіпербола

Канонічне рівняння гіперболи має вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

тобто у рівнянні (9.1) необхідно покласти

$$A = \frac{1}{a^2};\quad C = -\frac{1}{b^2};\quad F = -1;\quad B = D = E = 0.$$

Коефіцієнти a і b називаються відповідно дійсною та уявною півосями.

Точки $F_1(-c;\, 0);\ F_2(c;\, 0)$ на осі Ox називаються фокусами гіперболи.

Нехай $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Тоді гіперболу можна визначити наступним чином.

Означення. Гіпербола – це геометричне місце точок, різниця відстаней від яких до фокусів за абсолютним значенням дорівнює $2a$ (рис.9.2), тобто

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

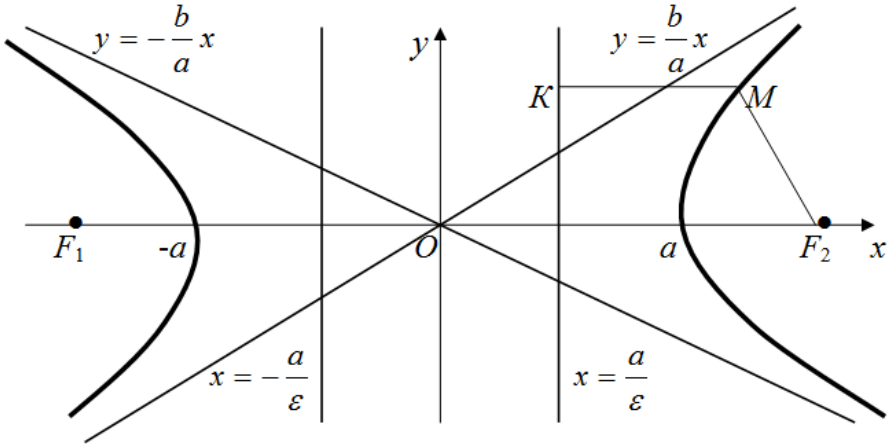


Рис. 9.2

Графік гіперболи симетричний відносно осей системи координат.

Точки $(-a;\, 0)$, $(a;\, 0)$ називаються вершинами гіперболи.

Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називаються асимптотами (прямі, до яких прямують гілки гіперболи, але не перетинають їх).

Відношення $\frac{c}{a}=\varepsilon$ називається ексцентриситетом гіперболи. Для гіперболи $\varepsilon>1$.

Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами гіперболи.

Властивість директрис гіперболи. Відношення відстаней від фокуса і директриси до точок гіперболи є величина стала та дорівнює ексцентриситету, тобто

$$\frac{|F_2M|}{|MK|}=\varepsilon.$$

Приклад. Знайти рівняння еліпса, вершини якого знаходяться у фокусах гіперболи $9x^2-16y^2=144$, а фокуси еліпса є вершинами гіперболи.

Розділимо обидві частини рівняння гіперболи на 144 та зведемо його до канонічного виду

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,$$

де $a_г^2=16$ і $b_г^2=9$.

За умовою $c_г^2=a_г^2+b_г^2=a_е^2=25$, а

$$c_e^2=a_e^2-b_e^2=a_г^2 \quad\Rightarrow\quad 25-b_e^2=16 \quad\Rightarrow\quad b_e^2=9.$$

Отримаємо
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

9.3. Парабола

Парабола визначається канонічним рівнянням

$$y^2=2px,\quad p>0,$$

тобто у рівнянні (9.1) необхідно покласти $C=1;\ D=p;\ A=B=E=F=0.$

Коефіцієнт p називається фокальним параметром.

Точку $F\left(p/2;\ 0\right)$ на осі Ox називають фокусом параболи.

Пряму $x=-p/2$ називають директрисою.

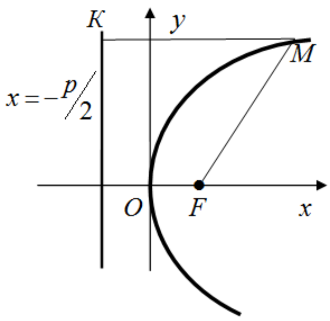


Рис. 9.3

Означення. Парабола – це геометричне місце точок, рівновіддалених від фокуса і директриси (у такому випадку $\varepsilon=1$).

Дійсно, для довільної точки $M(x;y)$ параболи маємо

$$|MK|=x+p/2 \quad\text{і}\quad |MF|^2=\left(x-p/2\right)^2+y^2,$$

з чого і випливає потрібна рівність

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2=2px.$$

9.4. Класифікація ліній другого порядку

Теорема. Будь-яке рівняння виду (9.1), якщо не розглядати випадок “уявних“ ліній, шляхом перетворення системи координат можна звести до одного з наступних видів:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – еліпс;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – гіпербола;

3) $y^2=2px$ – парабола;

4) $a^2x^2-b^2y^2=0$ – пара прямих, що перетинаються;

5) $x^2-a^2=0$ – пара паралельних прямих;

6) $x^2=0$ – пара прямих, що співпадають;

7) $a^2x^2+b^2y^2=0$ – точка.

Лінії другого порядку класифікують і за значенням ексцентриситету:

$\varepsilon<1$ – еліпс;

$\varepsilon=1$ – парабола;

$\varepsilon>1$ – гіпербола.

Тема 10. Площина та пряма у просторі

10.1. Площина у просторі

Будь-яке рівняння першого степеня з трьома змінними

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

визначає площину. І навпаки, будь-яка площина визначається рівнянням першого степеня відносно змінних координат, які задають довільну точку площини.

а) Загальне рівняння площини в тривимірному просторі, яка проходить через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ перпендикулярно до вектора $\overline{N}(A, B, C)$ має вигляд

$$A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0. \qquad (10.1)$$

Зауваження. Вектор $\overline{N}(A, B, C)$ є вектором нормалі площини.

б) Загальне рівняння площини можна отримати з рівняння (10.1), позначивши $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, тоді

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (10.2)$$

Зауваження. Спеціальними площинами є площини *OXY* (рівняння *z*=0), *OXZ* (рівняння *y*=0) та *OYZ* (рівняння *x*=0).

в) Рівняння площини, яка проходить через три задані точки (якщо ці точки не лежать на одній прямій).

Дано три точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$; $M_2(x_2, y_2, z_2)$; $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Нехай точка $M(x, y, z)$ є довільною точкою площини. Побудуємо вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ (рис. 10.1).

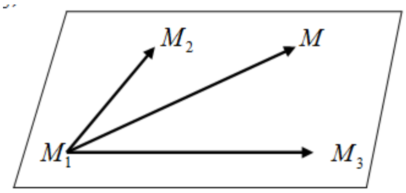


Рис. 10.1

Вони компланарні, оскільки лежать в одній площині. Їх мішаний добуток $(\overline{M_1M},\ \overline{M_1M_2},\ \overline{M_1M_3})=0$, тобто

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (10.3)$$

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і точки $A(2,1,3)$; $B(1,-2,-4)$.

З рівняння (10.3) маємо, що

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad x+11y-5z=0.$$

г) Рівняння площини у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (10.4)$$

Ця площина проходить через точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ та $(0,0,c)$.

10.2. Взаємне розташування площин у просторі

1) Кут між двома площинами. Нехай дві площини задані загальними рівняннями:

$$\alpha_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\alpha_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Кутом між двома площинами називається будь-яких двогранний кут між ними.

Очевидно, що кут між двома площинами дорівнює куту між їх нормальними векторами $\overline{N_1}(A_1,B_1,C_1)$ та $\overline{N_2}(A_2,B_2,C_2)$.

Тоді

$$\cos\varphi=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (10.5)$$

2) Перпендикулярність площин.

Якщо площини перпендикулярні, то

$$\cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3) Паралельність площин.

Площини паралельні тоді і тільки тоді, коли паралельні їх вектори нормалі, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Приклад. Знайти кут між площинами, заданими рівняннями $2x + y - 2z - 1 = 0$ і $x + 4y + 3z + 2 = 0$.

За формулою (10.5) отримаємо

$$\cos\varphi = \frac{|2\cdot 1 + 1\cdot 4 - 2\cdot 3|}{\sqrt{4+1+4}\,\sqrt{1+16+9}} = 0,$$

тобто площини перпендикулярні.

10.3. Відстань від точки до площини

Щоб знайти відстань від площини $Ax + By + Cz + D = 0$ до точки $M_0(x_0\,,\, y_0\,, z_0)$, треба знайти проекцію вектора $\overline{MM_0}$ на вектор $\bar{N}$ (рис. 10.2).

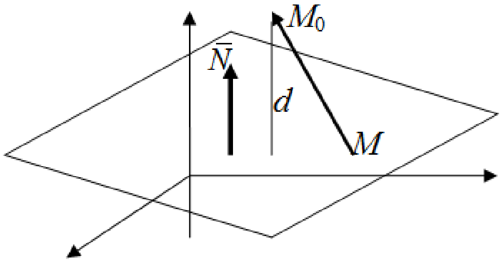


Рис. 10.2

$$d = \left| np_{\bar{N}}\, \overline{MM_0} \right| = \frac{\left| \overline{MM_0} \cdot \bar{N} \right|}{\left| \bar{N} \right|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax - By - Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

або

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{10.6}$$

10.4. Пряма у просторі та способи її задання

а) Рівняння прямої, що проходить через точку, паралельно даному вектору.

Дано точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що належить прямій l та вектор $\overline{s}(m, n, p)$, якому пряма паралельна (рис. 10.3).

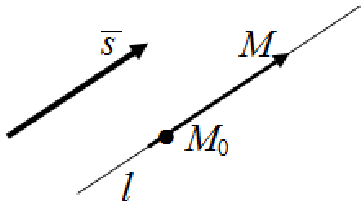


Рис. 10.3

Нехай точка $M(x, y, z) \in l$ довільна точка прямої, тоді з умови колінеарності двох векторів $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ і $\overline{s}(m, n, p)$ маємо

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{10.7}$$

Рівняння (10.7) називається канонічним рівнянням прямої.

Зауваження. Вектор $\overline{s}(m, n, p)$ називається напрямним вектором площини.

б) Параметричне рівняння прямої.

Якщо позначити рівні відношення у формулі (10.7) через *t*, то отримаємо параметричне рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{10.8}$$

в) Загальне рівняння прямої.

Пряму l у просторі можна задати як лінію перетину двох площин (непаралельних):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{10.9}$$

г) Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Нехай пряма l проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ з цієї прямої та розглянемо вектори $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ та $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Вектори $\overline{M_1M_2}$ та $\overline{M_1M}$ паралельні. Тому рівняння буде мати вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{10.10}$$

10.5. Взаємне розташування прямих у просторі

1) Кут між двома прямими.

Нехай дві прямі задані канонічними рівняннями:

$$l_1: \quad \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1},$$

$$l_2: \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Очевидно, що кут між двома прямими у просторі дорівнює куту між їх напрямними векторами $\overline{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ та $\overline{s}_2(m_2, n_2, p_2)$.

Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2}{|\overline{s}_1||\overline{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\,\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \tag{10.11}$$

2) Перпендикулярність прямих.

Прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні їх напрямні вектори. З умови перпендикулярності векторів $(\overline{s}_1 \cdot \overline{s}_2 = 0)$ маємо:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

3) Паралельність прямих.

Прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли паралельні їх напрямні вектори, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Приклад. Дві прямі l_1 і l_2 проходять через початок координат. При цьому точки $M_1(1;\,2;-3)\in l_1$; $M_2(2;\,5;\,p)\in l_2$. При якому значенні параметра p вони перпендикулярні?

Розв'язання. У якості однієї з точок на прямих оберемо початок координат $O(0,\,0,0)$. Тоді напрямні вектори будуть мати вид: $\bar{s}_1=(1,\,2,-3)$; $\bar{s}_2=(2,\,5,\,p)$. З умови перпендикулярності векторів маємо

$$2+10-3p=0 \quad\Rightarrow\quad p=4.$$

10.6. Відстань від точки до прямої

Нехай потрібно знайти відстань від точки $M_1(x_1,y_1,\,z_1)$ до прямої l, заданої канонічним рівнянням

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Побудуємо вектор $\overline{M_0M_1}=(x_1-x_0\,,\,y_1-y_0\,,\,z_1-z_0),$ (рис. 10.4) де точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

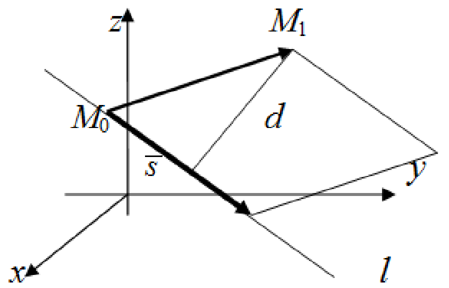


Рис. 10.4

Відстань d від точки M_1 до прямої l дорівнює висоті паралелограма, побудованого на векторах $\overline{M_0M_1}$ та $\bar{s}(m,\,n,\,p)$.

Так як площа паралелограма має вид

$$S=|\,\bar{s}\,|\cdot d \qquad \text{або} \qquad S=\left|\bar{s}\times\overline{M_0M_1}\right|,$$

то маємо

$$d = \frac{\left|\overline{s} \times \overline{M_0 M_1}\right|}{|\,\overline{s}\,|}. \qquad (10.12)$$

Приклад. Зайти відстань від точки $M_1(-1;\,2;\,2)$ до прямої

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2}.$$

Розв'язання. З умови бачимо, що $M_0(1,\,2,\,0)$, $\overline{s} = (2,\,1,-2)$. Тоді маємо, що $\overline{M_0 M_1} = (-2,\,0,\,2)$,

$$\overline{s} \times \overline{M_0 M_1} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 2\overline{k} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{4+4}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

Тема 11. Взаємне розташування прямої та площини у просторі

11.1. Кут між прямою і площиною. Умови перпендикулярності та паралельності площин

Нехай площина P та пряма l задані рівняннями:

$$Ax + By + Cz + D = 0\ ;\ \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де $\bar{N}(A, B, C)$ – нормальний вектор площини P, $\bar{s}(m;\ n;\ p)$ – напрямний вектор прямої l, а φ – кут між прямою і площиною (рис. 11.1).

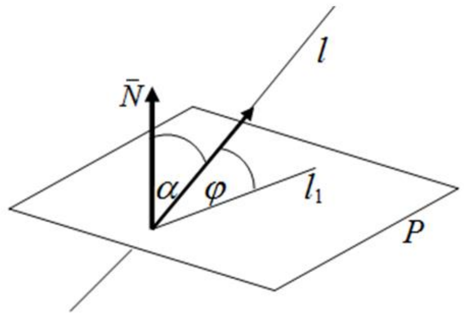


Рис.11.1

Якщо l_1 – проекція прямої l на площину P, то $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm \phi$ і тоді

$$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) = \pm\sin\varphi = \frac{\bar{N} \cdot \bar{s}}{|\bar{N}||\bar{s}|}.$$

Вважаючи, що $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$, маємо

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (11.1)$$

Умова перпендикулярності прямої і площини.

Пряма і площина перпендикулярні, тоді і тільки тоді, коли вектори $\bar{N}$ і $\bar{s}$ колінеарні, тобто

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Умова паралельності прямої і площини.

Пряма і площина паралельні, тоді і тільки тоді, коли вектори $\bar{N}$ і $\bar{s}$ перпендикулярні, тобто

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

11.2. Перетин прямої і площини

Знайдемо точку перетину прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ $\bar{N}(A;\ B;\ C)$ з площиною $Ax + By + Cz + D = 0.$

Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

Підставимо параметричне рівняння прямої у рівняння площини, отримаємо рівняння:

$$Ax_0 + Amt + By_0 + Bnt + Cz_0 + Cpt + D = 0.$$

З останньої рівності виразимо параметр t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \qquad (11.2)$$

Можливі три випадки:

1. $Am + Bn + Cp \neq 0$. За формулою (11.2) обчислимо значення параметра t та з рівняння прямої визначимо координати точки перетину.
2. $Am + Bn + Cp = 0$, а $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$. У такому випадку пряма паралельна площині.
3. $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Тоді пряма належить площині.

Приклад. Визначити взаємне розташування прямої, що проходить через дві точки $M_1(1;1;1)$ та $M_2(0;3;1)$, з площиною $2x + y - z - 2 = 0.$

Розв'язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{0}.$$

Визначимо кут між прямою та площиною за формулою (11.1):

$$\sin\varphi=\frac{|-2+2+0|}{\sqrt{1+4}\sqrt{4+1+1}}=0.$$

З отриманого результату маємо, що пряма паралельна до площини.

Перевіримо, чи належить вона площині. Для цього достатньо перевірити належність площині будь-якої точки прямої. Підставимо координати точки $M_1(1;1;1)$ у рівняння площини:

$$2\cdot 1+1-1-2=0,$$

отже, маємо що пряма належить площині.

Приклад. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ і точку $M_1(0;2;1)$ (рис.11.2)

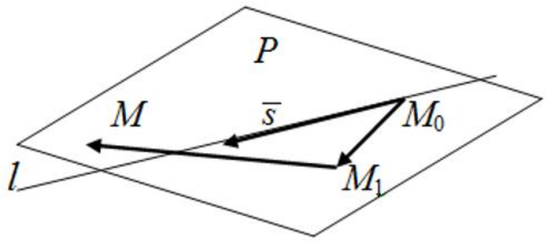


Рис.11.2

Розв'язання. З умови компланарності векторів $\overline{M_1M}$, $\overline{M_0M_1}$ і $\bar{s}$ маємо:

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

Розкриємо визначник за елементами першого рядка:

$$x\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

отримаємо рівняння площини P**:** $8x+7y-3z-11=0.$

Тема 12. Розв’язання типових завдань з теми «Лінійна та векторна алгебри. Елементи аналітичної геометрії»

Завдання 1.

Задано матриці $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

1. Обчислити матриці $C=B^TB$, $D=BB^T$, $G=AB$, $F=AD$.
2. Записати матричне рівняння $AX=B$, де $X=\left(x_1,x_2,x_3\right)^T$, у вигляді системи лінійних рівнянь.
3. Розв’язати систему:
   а) матричним методом;
   б) за формулами Крамера;
   в) методом Гаусса.

Розв’язання. 1. Транспонуємо матрицю B:

$B^T=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$

і знайдемо матриці C, D, G і F:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}=\left(2\cdot 2+(-5)\cdot(-5)+(-4)\cdot(-4)\right)=(4+25+16)=(45);$$

$$D=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -5 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-5) & 2\cdot(-4) \\ -5\cdot 2 & -5\cdot(-5) & -5\cdot(-4) \\ -4\cdot 2 & -4\cdot(-5) & -4\cdot(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -10 & -8 \\ -10 & 25 & 20 \\ -8 & 20 & 16 \end{pmatrix};$$

$$G=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-3)\cdot(-5)+1\cdot(-4) \\ 1\cdot 2+5\cdot(-5)+(-4)\cdot(-4) \\ 4\cdot 2+1\cdot(-5)+(-3)\cdot(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 \\ -7 \\ 15 \end{pmatrix};$$

$$F=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -10 & -8 \\ -10 & 25 & 20 \\ -8 & 20 & 16 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 4+(-3)\cdot(-10)+1\cdot(-8) & 2\cdot(-10)+(-3)\cdot 25+1\cdot 20 & 2\cdot(-8)+(-3)\cdot 20+1\cdot 16 \\ 1\cdot 4+5\cdot(-10)+(-4)\cdot(-8) & 1\cdot(-10)+5\cdot 25+(-4)\cdot 20 & 1\cdot(-8)+5\cdot 20+(-4)\cdot 16 \\ 4\cdot 4+1\cdot(-10)+(-3)\cdot(-8) & 4\cdot(-10)+1\cdot 25+(-3)\cdot 20 & 4\cdot(-8)+1\cdot 20+(-3)\cdot 16 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 30 & -75 & -60 \\ -14 & 35 & 28 \\ 30 & -75 & -60 \end{pmatrix}.$$

2. Запишемо матричне рівняння $AX=B$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

і виконаємо множення матриць в лівій частині рівняння

$$\begin{pmatrix} 2x_1-3x_2+x_3 \\ x_1+5x_2-4x_3 \\ 4x_1+x_2-3x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

З рівності матриць однакового розміру маємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2 \\ x_1+5x_2-4x_3=-5. \\ 4x_1+x_2-3x_3=-4 \end{cases}$$

Розв’яжемо отриману систему вказаними в умові методами:

а) матричним методом.

Розв’язком матричного рівняння $AX=B$ є матриця $X=A^{-1}\cdot B$, де A^{-1} - обернена матриця, яка обчислюється за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник системи

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-30+1+48-20-9+8=-2.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то обернена матриця існує. Обчислимо її елементи $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ - алгебраїчні доповнення елементів матриці A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Запишемо обернену матрицю A^{-1} і знайдемо розв'язок системи:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -22+40-28 \\ -26+50-36 \\ -38+70-52 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Остаточно маємо $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$. Звідки $x_1 = 5$, $x_2 = 6$, $x_3 = 10$.

б) Розв'яжемо систему за формулами Крамера.

Оскільки головний визначник системи вже обчислено, то обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 - 5 - 48 + 20 + 8 + 45 = -10;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 30 - 4 - 32 + 20 - 32 + 6 = -12;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -40 + 2 + 60 - 40 + 10 - 12 = -20;$$

За формулами Крамера отримаємо наступний розв'язок системи ($\Delta = |A|$):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6;\; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

в) Розв'яжемо систему методом Гаусса.

Поміняємо місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$$

Нове перше рівняння системи приймемо за перше ведуче рівняння системи. Виключимо x_1 з другого і третього рівнянь. Для цього помножимо перше рівняння на (-2) і (-4) і по черзі додамо до другого і третього рівнянь.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 & \Big| \quad \times(-2) \quad \times(-4) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 & \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 & \end{cases}$$

Отримаємо
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ -13x_2 + 9x_3 = 12 \\ -19x_2 + 13x_3 = 16. \end{cases}$$

Поділимо друге рівняння на (-13) і приймемо його за друге ведуче рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -5 \\ x_2 - \frac{9}{13}x_3 = -\frac{12}{13} \\ -19x_2 + 13x_3 = 16. \end{cases}$$

Виключимо x_2 з третього рівняння. Для цього помножимо друге рівняння на 19 і додамо до третього:

$$\begin{cases} x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ x_2-\frac{19}{13}x_3=-\frac{12}{13} & \Big| \quad \times 19 \\ -19x_2+13x_3=16 & \longleftarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+5x_2-4x_3=-5 \\ x_2-\frac{19}{13}x_3=-\frac{12}{13} \\ -\frac{2}{13}x_3=-\frac{20}{13}. \end{cases}$$

Прямий хід метода Гаусса закінчено. Обернений хід: з третього рівняння знаходимо x_3, з другого - x_2, з першого - x_1:

$$\begin{cases} x_3=-\frac{20}{13}:\left(-\frac{2}{13}\right)=10, \\ x_2=-\frac{12}{13}+\frac{9}{13}x_3=-\frac{12}{13}+\frac{9}{13}\cdot 10=\frac{-12+90}{13}=\frac{78}{13}=6, \\ x_1=-5-5x_2+4x_3=-5-5\cdot 6+4\cdot 10=5. \end{cases}$$

Розв’язок системи: $(5;6;10)$.

Відповідь. $x_1=5$, $x_2=6$, $x_3=10$.

Завдання 2.

Задано вектори $\vec{a}=(0;1;2)$. $\vec{b}=(1;0;1)$, $\vec{c}=(-1;2;4)$, $\vec{d}=(-2;4;7)$ у деякому базисі. Показати, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис та знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

Розв'язання. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі, якщо вони некомпланарні. Щоб перевірити це, знайдемо мішаний добуток цих векторів:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=$$
.

$$=0\cdot0\cdot4+1\cdot2\cdot2+1\cdot1\cdot(-1)-(-1)\cdot0\cdot2-1\cdot1\cdot4-0\cdot1\cdot2=4-1-4=-1$$

Оскільки $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}\neq0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарні і утворюють базис, в якому вектор $\vec{d}$ матиме розклад

$$\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c} \tag{12.1}$$

або

$$\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 7\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix},$$

де λ_1, λ_2, λ_3 - координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі. Для їх обчислення складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}\lambda_2-\lambda_3=-2,\\ \lambda_1+2\lambda_3=4,\\ 2\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_3=7.\end{cases}$$

Розв'яжемо систему за формулами Крамера: $\lambda_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\lambda_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $\lambda_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=-1,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 2\\ 7 & 1 & 4\end{vmatrix}=-2\cdot0\cdot4+4\cdot1\cdot(-1)+1\cdot2\cdot7-(-1)\cdot0\cdot7-1\cdot4\cdot4-(-2)\cdot1\cdot2=-2$$

,

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}0 & -2 & -1\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 7 & 4\end{vmatrix}=0\cdot4\cdot4+1\cdot7\cdot(-1)+(-2)\cdot2\cdot2-(-1)\cdot4\cdot2-(-2)\cdot1\cdot4-0\cdot2\cdot7=1$$

,

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 7\end{vmatrix}=0\cdot0\cdot7+1\cdot1\cdot(-2)+1\cdot4\cdot2-(-2)\cdot0\cdot2-1\cdot1\cdot7-0\cdot4\cdot1=-1.$$

Отже, $\lambda_1=\dfrac{-2}{-1}=2$, $\lambda_2=\dfrac{1}{-1}=-1$, $\lambda_3=\dfrac{-1}{-1}=1$.

Підставимо λ_1, λ_2, λ_3 у формулу (12.1) і одержимо розкладання вектора $\vec{d}$:

$$\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}.$$

Відповідь. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис у тривимірному просторі. Вектор $\vec{d}$ в цьому базисі має розклад $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Завдання 3.

Задано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;-3)$. Знайти:

1) кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$;

2) площу грані $A_1A_2A_3$; 3) об'єм піраміди;

4) рівняння висоти, яку проведено з вершини A_4 до грані $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. 1) Синус кута між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$ обчислимо за формулою

$$\sin\alpha=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \tag{12.2}$$

де A, B, C - координати нормального вектора площини (грані $A_1A_2A_3$), а m, n, p - координати напрямного вектора прямої A_1A_4.

Складемо рівняння грані $A_1A_2A_3$ як рівняння площини, що проходить через три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (12.3)$$

Підставимо в рівняння (12.3) координати точок A_1, A_2, A_3:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 2-1 & 2-3 & 1-6 \\ -1-1 & 0-3 & 1-6 \end{vmatrix} = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-6 \\ 1 & -1 & -5 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладаючи визначник за елементами першого рядка, отримаємо:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (z-6)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)(5-15) - (y-3)(-5-10) + (z-6)(-3-2) = 0,$$

$$(x-1)(-10) - (y-3)(-15) + (z-6)(-5) = 0,$$

$$(x-1)(-2) - (y-3)(-3) + (z-6)(-1) = 0,$$

$$-2x + 3y - z - 1 = 0.$$

З рівняння площини запишемо координати її нормального вектора

$$\vec{N} = (-2; 3; -1).$$

Складемо рівняння ребра A_1A_4 як рівняння прямої, що проходить через точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_4(x_4, y_4, z_4)$:

$$\frac{x-x_1}{x_4-x_1} = \frac{y-y_1}{y_4-y_1} = \frac{z-z_1}{z_4-z_1}.$$

Отримаємо

$$\frac{x-1}{-4-1} = \frac{y-3}{6-3} = \frac{z-6}{-3-6} \text{ або } \frac{x-1}{-5} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-6}{-9}.$$

З цього рівняння маємо координати напрямного вектора ребра A_1A_4: $m = -5$, $n = 3$, $p = -9$.

Підставляючи знайдені координати нормального і напрямного векторів у формулу (12.2), дістанемо

$$\sin\alpha=\frac{\left|(-2)\cdot(-5)+3\cdot 3+(-1)\cdot(-9)\right|}{\sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+3^2+(-9)^2}}=\frac{28}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{115}}\approx 0,6978,$$

$$\alpha\approx\arcsin 0,6978\approx 44^\circ 15'.$$

2) Площу грані $A_1A_2A_3$ знайдемо за формулою $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$,

де координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ знайдемо, віднімаючи від координат кінця координати початку: $\overrightarrow{A_1A_2}=(1;-1;-5)$, $\overrightarrow{A_1A_3}=(-2;-3;-5)$.

$$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&-5\\-2&-3&-5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1&-5\\-3&-5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&-5\\-2&-5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-3\end{vmatrix}=-10\vec{i}+15\vec{j}-5\vec{k},$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|=\sqrt{(-10)^2+15^2+(-5)^2}=\sqrt{350},$$

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{350}\approx 9,35(\text{кв.од.}).$$

3) Об’єм піраміди обчислимо за формулою

$$V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\overrightarrow{A_1A_4}\right|,$$

де $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\vec{N}(-10;15;-5)$, $\overrightarrow{A_1A_4}=(-5;3;-9)$. Таким чином,

$$\left(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right)\overrightarrow{A_1A_4}=(-10)\cdot(-5)+15\cdot 3+(-5)\cdot(-9)=50+45+45=140,$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot 140=\frac{70}{3}\approx 23,3(\text{куб.од.}).$$

4) Рівняння висоти, яку проведено з вершини $A_4(x_4,y_4,z_4)$ до грані $A_1A_2A_3$, отримаємо за формулою

$$\frac{x-x_4}{m}=\frac{y-y_4}{n}=\frac{z-z_4}{p},$$

де m, n, p - координати напрямного вектора висоти.

Оскільки висота піраміди, яку проведено з вершини A_4, паралельна нормальному вектору площини $A_1A_2A_3$, то координати останнього можна прийняти за координати напрямного вектора висоти, тобто $m=-10$, $n=-15$, $p=-5$. Тоді рівняння висоти матиме вигляд

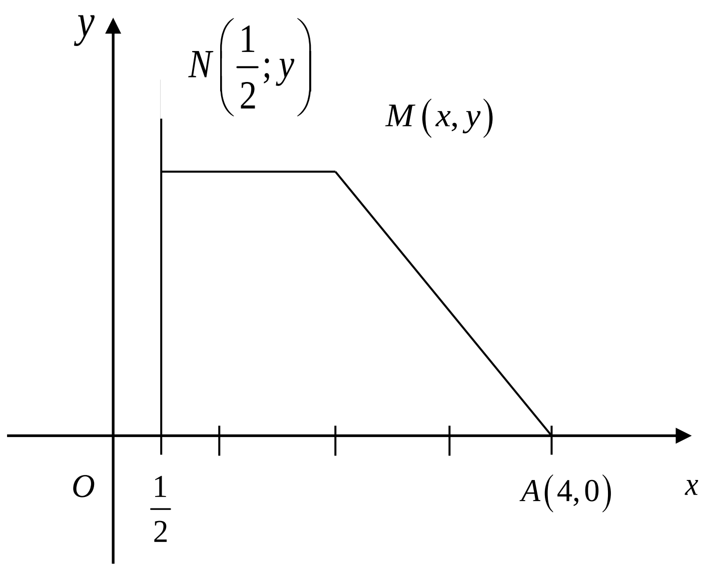
$$\frac{x+4}{-10}=\frac{y-6}{15}=\frac{z+3}{-5} \text{ або } \frac{x+4}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+3}{1}.$$

Відповідь. 1) $\alpha \approx \arcsin 0,6978 \approx 44^\circ 15'$; 2) $S_{\triangle A_1A_2A_3} \approx 9,35(кв.од.)$; 3) $V \approx 23,33(куб.од.)$; 4) $\frac{x+4}{2}=\frac{y-6}{-3}=\frac{z+3}{1}$.

Завдання 4.

Скласти рівняння лінії, для якої відстані кожної точки від точки $A(4;0)$ і від прямої $2x-1=0$ відносяться як $3:2$.

Розв'язання. Нехай $M(x;y)$ - довільна точка лінії, рівняння якої треба скласти. За умовою задачі $|AM|:|NM|=3:2$, де $|AM|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$, $|NM|=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$.



Отже, маємо рівняння

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}:\sqrt{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}=3:2 \text{ або } 2\sqrt{(x-4)^2+y^2}=3\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Перетворимо його:

$$\left(2\sqrt{(x-4)^2+y^2}\right)^2=\left(3\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\right)^2,$$

$$4(x-4)^2+4y^2=9\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$4x^2-32x+64+4y^2=9x^2-9x+\frac{9}{4},$$

$$5x^2+23x-4y^2-\frac{247}{4}=0.$$

Для доданків з x виділимо повний квадрат:

$$5\left(x^2+\frac{23}{5}x\right)-4y^2-\frac{247}{4}=0,$$

$$5\left(x^2+2\cdot\frac{23}{10}\cdot x+\left(\frac{23}{10}\right)^2-\left(\frac{23}{10}\right)^2\right)-4y^2-\frac{247}{4}=0,$$

$$5\left(x+\frac{23}{10}\right)^2-4y^2-\frac{5\cdot 529}{100}-\frac{247}{4}=0,$$

$$5\left(x+\frac{23}{10}\right)^2-4y^2=\frac{441}{5},$$

$$\frac{5\left(x+\frac{23}{10}\right)^2}{\frac{441}{5}}-\frac{4y^2}{\frac{441}{5}}=1,$$

$$\frac{\left(x+\frac{23}{10}\right)^2}{\frac{441}{25}}-\frac{y^2}{\frac{441}{20}}=1.$$

Отримали рівняння гіперболи з центром у точці $\left(-\frac{23}{10};0\right)$ і півосями $a=\sqrt{\frac{441}{25}}=\frac{21}{5}$, $b=\sqrt{\frac{441}{20}}=\frac{21}{2\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$.

Відповідь. $\frac{\left(x+\frac{23}{10}\right)^2}{\frac{441}{25}}-\frac{y^2}{\frac{441}{20}}=1$ - рівняння гіперболи з центром у точці $\left(-\frac{23}{10};0\right)$ і півосями $a=\sqrt{\frac{441}{25}}=\frac{21}{5}$, $b=\sqrt{\frac{441}{20}}=\frac{21}{2\sqrt{5}}=\frac{21\sqrt{5}}{10}$.

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 13. Поняття функції. Основні властивості. Способи задання функцій

Досліджуючи певні процеси реального світу, ми зустрічаємося з величинами, які їх характеризують та які, в свою чергу, змінюються у процесі вивчення. При цьому зміна однієї величини сприяє зміні іншої. Наприклад, при прямолінійному рівномірному русі зв’язок між пройденим шляхом s, швидкістю v та часом t виражається залежністю $s = vt$. Якщо швидкість v задано, то шлях s залежить від часу t. У такому випадку зміна величини (t) довільна, а інша (s) залежить від першої. Тоді говорять, що задано функціональну залежність.

Нехай дано дві множини X та Y.

13.1. Область визначення та область значень функції

Означення. Функцією називається закон, згідно якого кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність єдиний елемент $y \in Y$, при цьому пишуть

$$y = f(x) \text{ або } \quad X \xrightarrow{f} Y.$$

Тут $x \in X$ – аргумент функції f (незалежна змінна),
$y \in Y$ – значення функції (залежна змінна).

Означення. Областю визначення функції $D(y)$ називається сукупність усіх значень аргументу x, для яких функція буде приймати певні значення.

Означення. Областю зміни функції (областю значень) $E(y)$ називається сукупність усіх значень y для аргументу x з області визначення.

Приклади функцій:

1. Швидкість вільного падіння тіла $v = gt$. Тут X та Y – множини дійсних невід’ємних чисел.

2. Площа круга $S=\pi R^2$. Тут X та Y – множини додатних дійсних чисел.

Для наочності позначення області визначення та множини значень будемо використовувати геометричне представлення цих множин у вигляді множини точок на дійсній осі.

Розглянемо деякі числові множини (проміжки):

$\{x \mid a \le x \le b\} = [a; b]$ – відрізок;

$\{x \mid a < x < b\} = (a; b)$ – інтервал;

$\{x \mid -\infty < x < \infty\} = R$ – числова вісь (множина дійсних чисел);

$\{x \mid |x-a| < \varepsilon\}$ або $\{x \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} = U_\varepsilon(a)$ – $\varepsilon-$окіл точки a (рис.13.1).

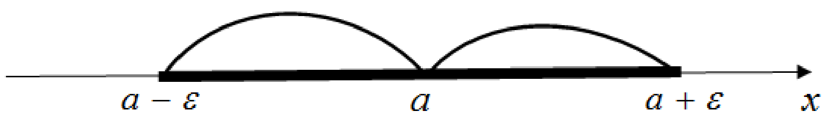


Рис.13.1

Зауваження. Вище було розглянуто означення однозначної функції. Якщо ж кожному $x \in X$ відповідає за деяким правилом певна множина чисел y, то таким правилом визначена багатозначна функція $y = f(x)$.

Наприклад, $y = \pm\sqrt{x}$; $y = (-1)^k \arcsin x + k\pi$.

Приклад. Знайти області визначення та значення функцій:

1. $y = 2x+5 \Rightarrow D(y) = R$; $E(y) = R$.
2. $y = \ln|x| \Rightarrow D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$; $E(y) = R$.
3. $y = \sqrt{4-x^2} \Rightarrow D(y) = [-2; 2]$; $E(y) = [0; 2]$.
4. $y = \sqrt{(1-x^2)(x^2-1)} \Rightarrow D(y) = \{-1; 1\}$; $E(y) = \{0\}$.

13.2. Властивості функцій

Означення. Функція називається зростаючою (спадною) на деякому проміжку, якщо $\forall x_1 < x_2$ з цього проміжку виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (або $f(x_1) > f(x_2)$),при цьому пишуть $f(x)\uparrow$ (або $f(x)\downarrow$). Зростаючі та спадні функції називаються монотонними.

Означення. Функція називається <u>обмеженою</u> на деякому проміжку, якщо $\forall x$ виконується умова $|f(x)| \le M$. У іншому випадку функція називається <u>необмеженою</u>.

Означення. Функція називається <u>парною (непарною)</u>, якщо виконуються властивості $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$. Інші функції називаються функціями <u>загального вигляду</u>.

Означення. Функція називається <u>періодичною</u> з періодом *T*, якщо $\forall x$ виконується умова $f(x)=f(x+T)$.

Наприклад:

Функція $y=x^2$ зростає $\forall x \in (0;\infty)$ та спадає $\forall x \in (-\infty;0)$.

Функція $y=x^3$ монотонна $\forall x$.

Функція $y=\sin x$ обмежена для $\forall x$, бо $|\sin x| \le 1$.

Функції: $y=x^2$; $y=\cos x$ – парні, а функції $y=x^3$; $y=\sin x$ – непарні.

Функція $y=\mathrm{tg}\, x$ – періодична з періодом $T=\pi$.

Означення. Якщо існує така функція $y=f(x)$, що $F(x, f(x)) \equiv 0$, то рівняння виду $F(x, y)=0$ визначає <u>функцію, задану неявно</u>.

Наприклад, функція $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ задана неявно, оскільки рівняння визначає багатозначну функцію.

Означення. Нехай $y=F(u)$, а $u=f(x)$, тоді функція $y=F(f(x))$ називається <u>складною функцією</u> або <u>суперпозицією двох функцій</u> *F* та *f*.

Наприклад, функція $y=\cos x^2$ є суперпозицією двох функцій $y=\cos z$ та $u=x^2$.

Означення. Якщо у якості аргументу розглянути змінну *y*, а у якості функції – змінну *x*, то отримаємо функцію, яка називається для однозначної функції $y=f(x)$ <u>оберненою</u> та позначається $x=f^{-1}(y)$.

Наприклад, для функції $y=e^x$ оберненою функцією є $x=\ln y$, або $y=\ln x$, якщо дотримуватися загальноприйнятих позначень аргументу та функції.

13.3. Способи задання функцій

1) Аналітичний спосіб.

Функції можуть задаватися за допомогою формул. Для цього використовують уже вивчені та спеціально позначені функції та алгебраїчні дії.

Приклади:

$$y=\frac{\sin x}{x-5}+e^{x}x^{3}, \qquad x^{2}+y^{2}=1, \qquad y=\cos x^{2}.$$

Зауваження. Функція може бути задана і за допомогою опису відповідності (словесно-описовий спосіб).

Наприклад, поставимо у відповідність кожному значенню $x\ge 0$ число 1, а кожному $x<0$ число 0. У результаті отримаємо одиничну функцію

$$e(x)=\begin{cases}1, & \forall x\ge 0;\\ 0, & \forall x<0.\end{cases}$$

Зауважимо, що будь-яка формула є символічним записом деякої описаної відповідності, а тому різниця між заданням функції за допомогою формули та опису відповідності тільки зовнішня.

2) Графічний спосіб.

Функція задається у вигляді графіка. Прикладом графічного задання функції можуть бути дані осцилографа (рис. 13.2).

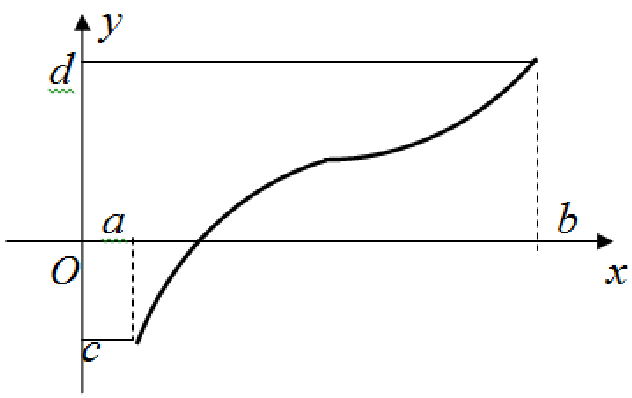


Рис.13.2

3) Табличний спосіб.

Для деяких значень змінної x задаються відповідні значення змінної y. Прикладом такого задання є таблиці значень тригонометричних функцій, таблиці, які представляють залежність між величинами, що вимірюються, тощо.

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

Для роботи на ЕОМ функцію задають алгоритмічним способом.

13.4. Елементарні функції

До основних або простих елементарних функцій відносяться:

1. Степенева: $y = x^k$, де $k \in R$.

2. Показникова: $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

3. Логарифмічна: $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

4. Тригонометричні: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \mathrm{tg}\, x$; $y = \mathrm{ctg}\, x$.

5. Обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$;

$y = \mathrm{arctg}\, x$; $y = \mathrm{arcctg}\, x$.

Застосовуючи до цих функцій арифметичні дії та операцію суперпозиції скінченну кількість разів, будемо отримувати нові більш складні функції, які називаються елементарними.

Наприклад, $y = \ln\left(\sqrt{\cos x} + \dfrac{x^3}{e^{2x}}\right)$.

Іноді корисно використовувати гіперболічні функції (гіперболічний синус, косинус, тангенс та котангенс), які також відносяться до елементарних:

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}; \quad \mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}.$$

Властивості гіперболічних функцій:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1; \quad \mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x\,\mathrm{ch}\, x; \quad \mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x.$$

Інші функції відносяться до неелементарних.

Наприклад:

а) $y=\begin{cases}\sin x, & x\ge 0;\\ x+1, & x<0;\end{cases}$

б) $y(x)=\begin{cases}1, & x-\textit{раціональне};\\ 0, & x-\textit{ірраціональне};\end{cases}$ – функція Діріхле;

в) $y=[x]$ – ціла частина числа, де x – найбільше ціле число, яке не більше *x*, наприклад, $[\pi]=3$; $[\sqrt{3}]=1$; $[-\sqrt{2}]=-2$.

Тема 14. Поняття границі послідовності та границі функції. Нескінченно великі та нескінченно малі величини

14.1. Границя послідовності

Означення. Значення функції натурального аргументу $x_n = f(n)$, де $n = 1, 2, 3, ...,$ називається послідовністю, яка позначається

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Приклади послідовностей:

1. $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = \left\{0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dots\right\}$, 2. $\left\{n^2\right\} = \{1, 4, 9, \dots\}$,

3. $\left\{(-1)^n\right\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається <u>обмеженою зверху (знизу)</u>, якщо існує таке число M (m), що будь-який член x_n цієї послідовності задовольняє нерівність $x_n \le M$ $(x_n \ge m)$.

Якщо послідовність обмежена зверху і знизу, то вона називається <u>обмеженою</u>.

Наприклад,

послідовність $\{-n\} = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$ обмежена зверху (бо усі члени цієї послідовності задовольняють нерівності $x_n \le -1$);

послідовність $\left\{n^2\right\} = \{1, 4, 9, \dots\}$ обмежена знизу ($x_n = n^2 \ge 1$);

послідовність $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dots\right\}$ обмежена $\left(0 < \dfrac{1}{n} \le 1\right)$.

Означення. Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$**,** якщо $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)$, що $\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$, та пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{або} \quad x_n \to a.$$

Дамо геометричне представлення границі: $|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(a)$, що виглядає наступним чином (рис. 14.1)

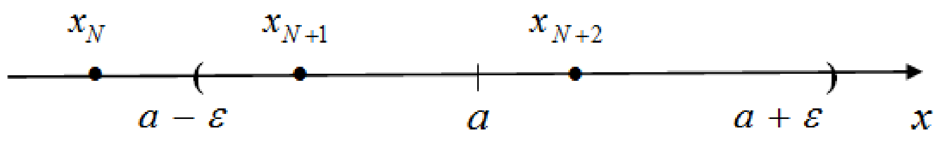


Рис. 14.1

Отже, якщо a – границя послідовності $\{x_n\}$, то $\exists$ $\mathrm{U}_\varepsilon(a)$, такий, що всі її члени, починаючи з деякого x_{N+1}, потраплять у даний окіл.

Приклад. Покажемо, що границя даної послідовності дорівнює 1, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1.$

Задамо довільне значення $\varepsilon>0$ та складемо нерівність $\left|\dfrac{n-1}{n}-1\right|<\varepsilon \Rightarrow$ $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, тобто $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тоді номер члена, починаючи з якого усі члени послідовності потрапили в окіл $\mathrm{U}_\varepsilon(1)$, можна визначити з умови $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]$.

Наприклад, якщо $\varepsilon=0{,}01$, то, починаючи з номера $N=101$, усі члени послідовності задовольняють нерівності або потрапили в окіл $\mathrm{U}_{0{,}01}(1)$ $=(0{,}99;1{,}01)$.

Означення. Змінна x_n називається нескінченно великою при $n\to\infty$, якщо $\forall\ M>0\ \exists\ N$, що $\forall\ n>N \Rightarrow |x_n|>M$ и при цьому пишуть

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty \text{ або } x_n\to\infty, \text{ якщо } x_n>0 \text{ і}$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty \text{ або } x_n\to-\infty, \text{ якщо } x_n<0.$$

З означення границі послідовності випливають властивості:

1. Якщо послідовність має границю, то вона єдина.
2. Границя сталої величини дорівнює цій сталій.
3. Якщо послідовність має границю, то вона обмежена.
4. Монотонна обмежена послідовність має границю.

14.2. Поняття границі функції

Розглянемо функцію $f(x)$, яка визначена у деякому околі $\mathrm{U}(a)$, за винятком, можливо, самої точки $x = a$.

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ у точці $x = a$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, таке, що $\forall x : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, і при цьому пишуть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Геометрично це можна представити наступним чином: $\exists\ \mathrm{U}_\delta(a)$, такий, що $\forall\ x \in \mathrm{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(A)$ (рис.14.2).

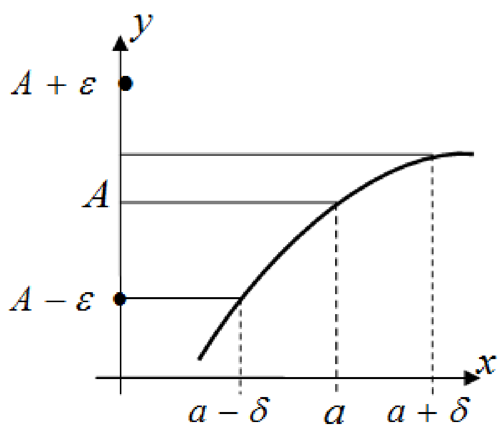


Рис.14.2

Означення (спрощене). Число A називається границею функції $f(x)$ при x, прямуючому до числа a, якщо точка $f(x)$ наближається до числа A, коли точка x наближається до a.

Приклад. Покажемо, що $\lim\limits_{x \to 1}(4x - 1) = 3$.

Задамо довільне значення $\varepsilon > 0$ та визначимо δ.

Запишемо нерівність

$$|f(x) - A| = |4x - 1 - 3| = 4|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Важливими поняттями при знаходженні границі функції є <u>односторонні</u> границі.

Означення. Число A називається <u>правою</u> (<u>лівою</u>) границею функції $f(x)$ у точці $x=a$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$, таке що $\forall x: a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$ і при цьому пишуть

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=A\left(\lim_{x\to a-0} f(x)=A\right).$$

Теорема. Якщо функція $f(x)$ у точці $x=a$ має границю $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$**.** Вірно і обернене твердження.

Аналогічно, задамо границю функції при $x\to\pm\infty$.

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x\to\pm\infty$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists M>0$, таке, що $\forall\,|x|>M$ виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$, і при цьому пишуть

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A, \text{ якщо } x>0 \text{ та}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A, \text{ якщо } x<0.$$

Геометрична інтерпретація:: $\forall\varepsilon>0\ \exists M>0$, що $\forall x>M$ маємо $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ (рис. 14.3).

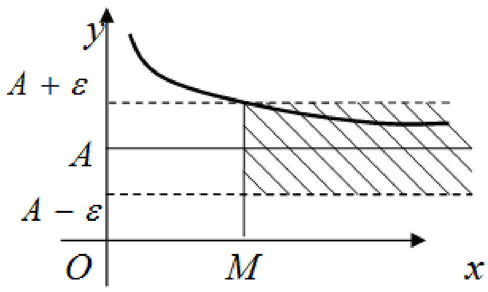


Рис.14.3

14.3. Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Означення. Функція називається нескінченно малою величиною (н.м.в.) при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Означення. Функція називається нескінченно великою величиною (н.в.в.) при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Зауваження. При визначенні н.м.в. та н.в.в. необхідно звернути увагу на фразу “при $x \to x_0$“. Наприклад, функція $y = \mathrm{tg}\, x$ є н.м.в. при $x \to 0$ та н.в.в. при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, що видно, з графіка цієї функції.

Зауваження. Усі н.в.в. є необмеженими функціями. Зворотне твердження не вірне!

Властивості н.м.в. та н.в.в:

1. Сума скінченної кількості н.в.в є н.в.в.
2. Добуток обмеженої функції на н.в.в є н.в.в.
3. Якщо $\alpha(x)$ – н.м.в. при $x \to x_0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – н.в.в. при $x \to x_0$.

Вірно й обернене твердження.

14.4. Основні теореми про границі

Припустимо, що існують границі відповідних функцій.

Теорема. Границя суми скінченної кількості функцій дорівнює сумі границь цих функцій, тобто

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) + ... + f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + ... + \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Теорема. Границя добутку скінченної кількості функцій дорівнює добутку границь цих функцій, тобто

$$\lim_{x \to x_0} (f_1(x) \cdot ... \cdot f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot ... \cdot \lim_{x \to x_0} f_n(x).$$

Наслідки:

1. Якщо $C = \mathrm{const} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x).$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim\limits_{x \to x_0} f(x))^n.$

Теорема. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$.

Теорема. Якщо у деякому околі $\mathrm{U}(x_0)$ виконується нерівність $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

Покажемо застосування теорем на прикладі.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+5x-6}{2x^2-x+2}$.

Так як $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-x+2) = 2(\lim\limits_{x\to 2}x)^2 - \lim\limits_{x\to 2}x + 2 = 6$, то маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+5x-6}{2x^2-x+2} = \frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^3 + 5\lim\limits_{x\to 2}x - 6}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

14.5. Розкриття невизначеностей

Розглянемо приклад $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4}$.

Маємо, що $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-2) = 0$ і $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4) = 0$. Цей випадок класифікують як невизначеність виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$.

Види невизначеностей: $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}, \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$; $\{\infty-\infty\}$; $\{0\cdot\infty\}$; $\{\infty^0\}$; $\{0^0\}$.

Якщо 1 є границею деякої функції, то $\{1^\infty\}$.

Щоб позбутися невизначеності (знайти границі), необхідно виконати відповідні тотожні перетворення функції під знаком границі, які залежать від виду невизначеності та самої функції.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-4} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{3}{4}$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+5}{x^3+4x^2+1} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^3}} = 2.$

Приклад.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+6}-\sqrt{x})=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+6}-\sqrt{x})(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+6-x}{(\sqrt{x+6}+\sqrt{x})}=0.$$

Приклад.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=1.$$

Тема 15. Перша та друга чудові границі. Порівняння нескінченно малих величин

15.1. Перша чудова границя

Розглянемо границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$. Вираз під знаком границі є невизначеністю виду $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Розкриємо дану невизначеність, виходячи з геометричної інтерпретації.

Побудуємо коло з центром у точці $O(0;0)$ та радіусом *R*.

Оберемо кут *x* у першій координатній чверті і порівняємо площі трьох фігур: ΔAOB, сектор *AOB* і ΔCOB. (рис. 15.1)

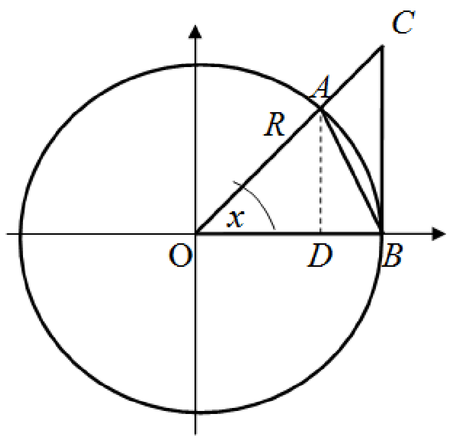


Рис. 15.1

З рисунка видно, що площі вказаних фігур пов'язані співвідношенням:

$$S_{\Delta AOB} < S_{сект.\,AOB} < S_{\Delta COB}\,.$$

Обчислимо ці площі:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot|OB|\cdot|AD| = \frac{1}{2}\cdot R\cdot R\sin x = \frac{R^2\sin x}{2};$$

$$S_{сект.\,AOB} = \frac{1}{2}R^2 x;$$

$$S_{\Delta COB} = \frac{1}{2}\cdot|OB|\cdot|CB| = \frac{1}{2}\cdot R\cdot R\,\mathrm{tg}\,x = \frac{R^2\,\mathrm{tg}\,x}{2},$$

звідки маємо $\dfrac{R^2\sin x}{2}<\dfrac{R^2x}{2}<\dfrac{R^2\operatorname{tg}x}{2}\Rightarrow\sin x<x<\operatorname{tg}x$.

Враховуючи, що $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, розділимо обидві частини нерівності на $\sin x$ та отримаємо

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{1}{1}<\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}<\frac{1}{\cos x}\quad\Rightarrow\quad 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x,$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Так як $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1,$ то за теоремою «про двох міліціонерів» маємо, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Сформулюємо теорему про першу чудову границю.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$ (15.1)

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\sin 2x}{2x}}{\frac{3\sin 3x}{3x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}.$

15.2. Друга чудова границя

Розглянемо другу чудову границю (без доведення).

Теорема. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$. (15.2)

Схематично графік функції $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ зображено на рисунку 15.2.

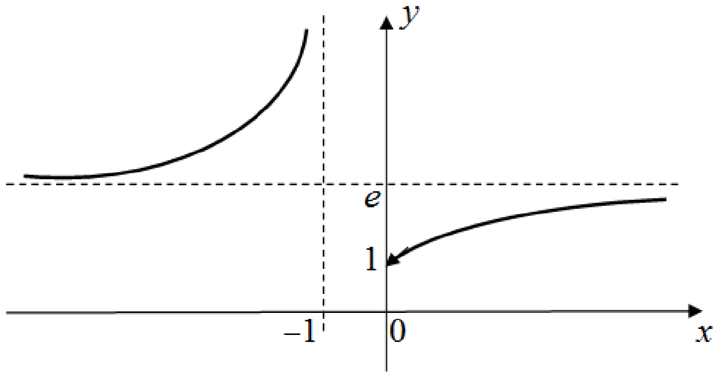


Рис.15.2

Зауваження. Якщо у формулі (15.2) зробити заміну $t=\dfrac{1}{x}\ \Rightarrow\ t\to 0$ при $x\to\infty$. Тоді $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

Приклад. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x=\left\{1^\infty\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}\cdot k}=e^k.$

Приклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)=\log_a e.$$

15.3. Порівняння н.м.в.

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ – н.м.в. при $x\to x_0$ $(x\to\pm\infty)$.

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називається н.м.в. <u>більш високого порядку</u>, ніж $\beta(x)$ при $x\to x_0$, та пишуть $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Приклад. Нехай $\alpha(x)=x^2$; $\beta(x)=\sin x$, тоді при $x\to 0$ маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0\ \Rightarrow\ x^2=o(\sin x).$$

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq \begin{cases} 0 \\ \pm\infty \end{cases}$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються н.м.в. <u>одного порядку</u>.

Приклад. Нехай $\alpha(x) = a^x - 1;\quad \beta(x) = x$, тоді при $x \to 0$ маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \Rightarrow$$

$\alpha(x) = a^x - 1$ та $\beta(x) = x$ – н.м.в. одного порядку.

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називаються <u>еквівалентними</u> н.м.в. та позначаються $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

Таблиця еквівалентних н.м.в. при $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$;
3. $\arcsin x \sim x$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$;
5. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$;
6. $\ln(x+1) \sim x$;
7. $e^x - 1 \sim x$;
8. $(1+x)^n - 1 \sim nx, \quad \forall n \in R$;
9. $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$;
10. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$.

Зауваження. Легко показати, що границя відношення н.м.в. не зміниться при заміні їх еквівалентними н.м.в.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x \sin 3x}{(\operatorname{tg} 2x)^2} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x \cdot 3x}{(2x)^2} = \dfrac{3}{4}.$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos x}{(e^x - 1)^2} = \left\{\dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

Тема 16. Розв'язання типових завдань з теми «Розкриття невизначеностей при обчисленні границь функцій. Порівняння нескінченно малих функцій»

16.1. Обчислення границь функцій

Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+7}{4x^3+2x^2-5x}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник дробу прямують до нескінченності. Маємо невизначеність $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Щоб розкрити її, поділимо чисельник і знаменник дробу на найвищу степінь x, що зустрічається у членів дробу, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+7}{4x^3+2x^2-5x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{7}{x^3}}{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{5x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=$$

$$=\frac{0-0+0}{4+0-0}=\frac{0}{4}=0.$$

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{3x+4}-4}{7x^2-30x+8}$.

Розв'язання. При $x\to 4$ чисельник і знаменник дробу прямують до нуля. Отже, маємо невизначеність $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для її розкриття позбавимось ірраціональності в чисельнику: помножимо чисельник і знаменник на $\left(\sqrt{3x+4}+4\right)$ і скористаємось формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Знаменник розкладемо на множники за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 - корені квадратного тричлена. Знайдемо їх:

$$7x^2-30x+8=0;\ D=(-30)^2-4\cdot 7\cdot 8=676=26^2;\ x=\frac{30\pm 26}{2\cdot 7};$$

$$x_1=\frac{30-26}{14}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7},\ x_2=\frac{30+26}{14}=\frac{56}{14}=4.$$

Отже, $7x^2-30x+8=7\left(x-\frac{2}{7}\right)(x-4)=(7x-2)(x-4)$. Таким чином,

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{7x^2-30x+8}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{3x+4}-4\right)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}{(7x-2)(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{3x+4}\right)^2-4^2}{(7x-2)(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{3x+4-16}{(7x-2)(x-4)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=\lim_{x\to4}\frac{3\cancel{(x-4)}}{(7x-2)\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=3\lim_{x\to4}\frac{1}{(7x-2)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=$$

$$=3\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to4}(7x-2)\left(\sqrt{3x+4}+4\right)}=\frac{3}{(7\cdot4-2)\left(\sqrt{3\cdot4+4}+4\right)}=\frac{3}{26(4+4)}=\frac{3}{208}.$$

в) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}}\frac{\arcsin(3x-4)}{9x^2-16}$.

Розв'язання. При обчисленні цієї границі маємо невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$. Розкриваючи її, розкладемо знаменник на множники за формулою $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$: $9x^2-16=(3x-4)(3x+4)$ і перепишемо границю так:

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\frac{\arcsin(3x-4)}{(3x-4)(3x+4)}=\lim_{x\to\frac{4}{3}}\frac{\arcsin(3x-4)}{3x-4}\cdot\lim_{x\to\frac{4}{3}}\frac{1}{3x+4}=\lim_{x\to\frac{4}{3}}\frac{\arcsin(3x-4)}{3x-4}\cdot\frac{1}{3\cdot\frac{4}{3}+4}=$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{x\to\frac{4}{3}}\frac{\arcsin(3x-4)}{3x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{8}\cdot1=\frac{1}{8}.$$

До останньої границі був застосований наслідок з першої важливої границі.

г) $\lim\limits_{x\to7}\left(\frac{2x+1}{3x-6}\right)^{\frac{x}{x-7}}$.

Розв'язання. При $x\to7$ вираз у дужках прямує до 1, а показник степеня до ∞. Маємо невизначеність $\left(1^\infty\right)$. Щоб розкрити її, перетворимо границю так:

$$\lim_{x\to7}\left(\frac{2x+1}{3x-6}\right)^{\frac{x}{x-7}}=\lim_{x\to7}\left(1+\frac{2x+1}{3x-6}-1\right)^{\frac{x}{x-7}}=\lim_{x\to7}\left(1+\frac{2x+1-3x+6}{3x-6}\right)^{\frac{x}{x-7}}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\left(1+\frac{7-x}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7-x}\cdot\frac{7-x}{3x-6}\cdot\frac{x}{x-7}}=\lim_{x\to 7}\left(\left(1+\frac{7-x}{3x-6}\right)^{\frac{3x-6}{7-x}}\right)^{\frac{-x}{3x-6}}=e^{\lim\limits_{x\to 7}\frac{x}{6-3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 7}\frac{7}{6-3\cdot 7}}=e^{-\frac{7}{15}}.$$

16.2. Порівняння нескінченно малих функцій

Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ і $\gamma(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to a$. Будемо позначати ці функції α, β і γ відповідно. Ці нескінченно малі функції можна порівнювати за швидкістю їхнього спадання, тобто за швидкістю їхнього наближення до нуля.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$, то функція α називається нескінченно малою більш високого порядку, ніж функція β. У такому разі пишуть: $\alpha=o(\beta)$.

2. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=A,\quad A\neq 0,\quad A=const$, то α і β називаються нескінченно малими одного порядку. Зокрема, якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1$, то функції α і β називаються еквівалентними нескінченно малими. Записують $\alpha\sim\beta$.

3. Якщо $\frac{\alpha}{\beta}\to\infty$, то це означає, що $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=0$. Таким чином, функція β називається нескінченно малою більш високого порядку, ніж функція α. У такому разі пишуть: $\beta=o(\alpha)$.

4. Нескінченно мала функція α називається нескінченно малою порядку k відносно нескінченно малої функції β, якщо границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ кінцева й відмінна від нуля.

Відмітимо деякі властивості еквівалентних нескінченно малих функцій.

1. $\alpha\sim\alpha$, оскільки $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha}=1$.

2. Якщо $\alpha\sim\beta$ і $\beta\sim\gamma$, то $\alpha\sim\gamma$, $\quad\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=1\cdot 1=1.$

3. Якщо α ~ β, то β ~ α, $\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}=\frac{1}{1}=1$.

4. Якщо α ~ α1, β ~ β1 та $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=k$, то й $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=k$ і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

Корисно мати на увазі еквівалентність наступних нескінченно малих величин: якщо $x\to 0$, то

$$\sin x \sim x,\ tgx \sim x,\ arctg \sim x,\ \ln(1+x) \sim x.$$

Приклад. Нехай x − нескінченно мала величина. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha = 5x^2+2x^5$ та $\beta = 3x^2+2x^3$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+2x^5}{3x^2+2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{5+2x^3}{3+2x}=\frac{5}{3}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5}{3}\neq 0$, то α та $\beta-$ нескінченно малі одного порядку.

Приклад. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha = x\sin^2 x$ та $\beta = 2x\sin x$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin^2 x}{2x\sin x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Тобто $\alpha = o(\beta)$.

Приклад. Порівняти нескінченно малі величини $\alpha = x\ln(1+x)$ та $\beta = x\sin x$ при $x\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}}=1.$$

Таким чином, $\alpha \sim \beta$.

Приклад . Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}$.

Замінимо чисельник і знаменник дробу еквівалентними нескінченно малими: $\ln(1+3x\sin x)\sim 3x\sin x$, $tgx^2 \sim x^2$. Тоді отримаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x\sin x)}{tgx^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\sin x}{x^2}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=3$$

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{tg3x}$.

Замінимо знаменник дробу еквівалентною нескінченно малою: $tg3x \sim 3x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{tg3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}{3x(\sqrt{1+2x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+2x-1}{3x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3(\sqrt{1+2x}+1)}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+2x}+1}=\frac{1}{3}$$

Тема 17. Неперервність функції. Класифікація точок розриву

17.1. Означення неперервної функції

Нехай $y = f(x)$ визначена у деякому околі $\mathrm{U}(x_0)$. Близька до неї інша точка з того ж околу може бути представлена у вигляді $x = x_0 + \Delta x$, де Δx називається приростом аргументу (рис.17.1).

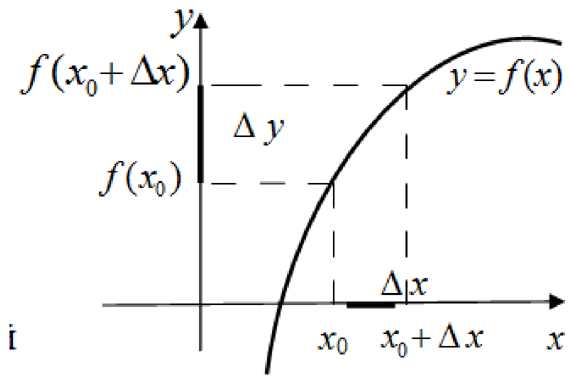


Рис.17.1

Різниця $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називається приростом функції у точці x_0.

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною у точці x_0, якщо вона визначена у точці x_0 і в деякому її околі та

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (17.1)$$

Перетворимо вираз (17.1):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

звідки випливає

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0). \qquad (17.2)$$

Так як $x = x_0 + \Delta x$ і $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$, і тоді формула (17.2) приймає вид

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (17.3)$$

Формула (3) є іншим еквівалентним означенням неперервності функції $f(x)$ у точці x_0, яке можна сформулювати так:

Означення. Функція $f(x)$ називається неперервною у точці x_0, якщо вона визначена у цій точці і деякому її околі, має границю при $x \to x_0$ та ця границя дорівнює значенню функції у цій точці.

Означення. Функція $f(x)$, неперервна у всіх точках деякого проміжку, називається неперервною на цьому проміжку.

Приклад. Доведіть, що функція $y = e^x$ неперервна на своїй області визначення.

Маємо, що $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$, де $x \in R$. Тоді отримаємо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (e^{x+\Delta x} - e^x) = \lim_{\Delta x \to 0} e^x (e^{\Delta x} - 1) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \left(e^{\Delta x} - 1\right) = 0.$$

Зауваження. Аналогічно можна довести, що усі основні елементарні функції неперервні на своїй області визначення.

17.2. Основні теореми про неперервні функції

Теорема. Сума скінченної кількості неперервних функцій є неперервною функцією.

Доведення. Нехай функції $f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x)$ неперервні у точці x_0 і

$$g(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Тоді маємо

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \dots + \lim_{x \to x_0} f_n(x) = g(x_0),$$

що завершує доведення твердження теореми.

Теорема. Добуток скінченної кількості неперервних функцій є неперервною функцією. (Доведення аналогічне)

Теорема. Частка двох неперервних функцій є неперервною функцією, якщо знаменник у точці, у якій розглядається неперервність, не дорівнює нулю. (Доведення аналогічне)

Теорема. Нехай функція $f(u)$ неперервна у точці u_0, а функція $u = u(x)$ неперервна у точці x_0, і нехай $u(x_0) = u_0$. Тоді складна функція $F(x) = f(u(x))$ неперервна у точці x_0.

Доведення. Застосуємо підстановку $u = u(x)$ та умову неперервності функції $u(x)$ у точці x_0

$$\lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} f(u(x)) = \lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0) = f(u(x_0)) = F(x_0).$$

У результаті доведення цих теорем та неперервності основних елементарних функцій приходимо до важливої узагальнюючої теореми:

Теорема. Усе елементарні функції неперервні у своїй області визначення.

17.3. Класифікація точок розриву функції

Означення. Якщо у точці x_0 порушується умова неперервності функції $f(x)$, то функція називається розривною в точці x_0, а точка x_0 – точкою розриву функції.

Означення. Точка розриву x_0 називається точкою розриву першого роду, якщо існують скінченні односторонні границі функції $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$.

Ці границі можуть бути як однаковими, так і різними між собою. Різниця $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ називається стрибком.

Схематичний вид функції $f(x)$ у точці розриву першого роду (рис. 17.2):

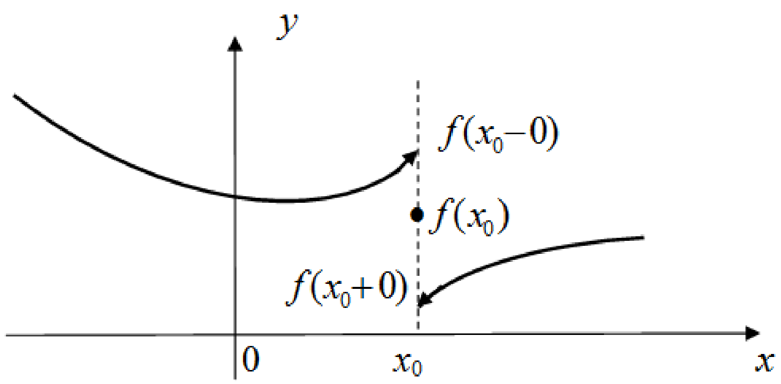


Рис. 17.2

Наприклад, функцією, що має розрив першого роду, є

$$y(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0, \\ 1\,, & x \geq 0. \end{cases}$$

Зауваження. Якщо $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, а $f(x_0)$ не визначена, то точку розриву першого роду x_0 називають точкою усувного розриву.

Функція $f(x)$ в цій точці має вид (рис.17.3):

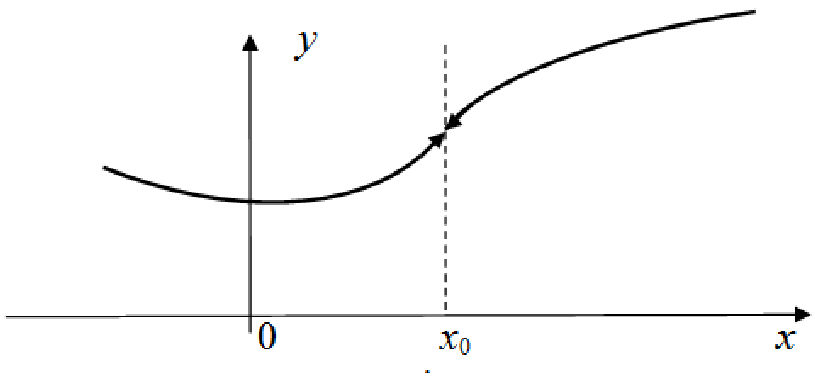


Рис.17.3

Приклад. Для функції $y=\frac{\sin x}{x}$ точка $x_0=0$ є точкою усувного розриву.

Означення. Точка x_0 називається точкою розриву <u>другого роду</u>, якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності

Приклад. Покажемо, що функція $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ у точці $x_0=1$ має розрив <u>другого роду</u>.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=0;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{\infty}=\infty.$$

Або так:

$$\left(\begin{array}{l} f(1-0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(1-\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}}}=0; \\ f(1+0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(1+\varepsilon)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}}=\infty. \end{array}\right)$$

17.4. Властивості функцій неперервних на відрізку

Теореми, які описують ці властивості, проілюструємо на графіках.

Теорема. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то вона обмежена на $[a;b]$, тобто $\exists M>0 \Rightarrow |f(x)|\le M \quad \forall x\in[a;b]$.

Теорема. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то на $[a;b]$ існує її найбільше та найменше значення (рис.17.4), тобто

$$\exists \ x=c;\ x=d \ \Rightarrow \ f(c)\le f(x)\le f(d) \ \ \forall x\in[a;b],$$

і пишуть $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=f(c);$ $\qquad \max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)=f(d).$

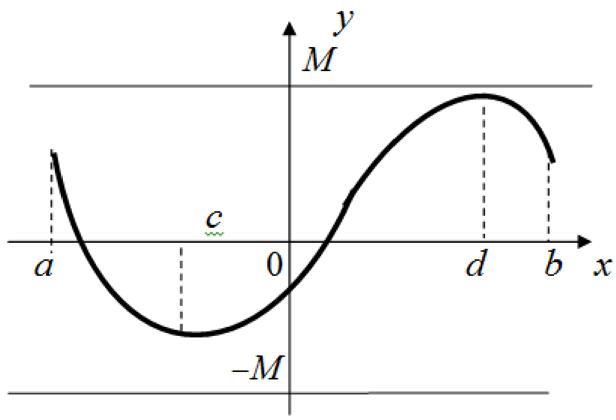


Рис.17.4

Теорема. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і приймає на кінцях відрізка різні значення, то для будь-якого проміжного значення *M* між цими числами існує принаймні одна точка $c\in(a;b)$, для якої $f(c)=M$ (рис.17.5).

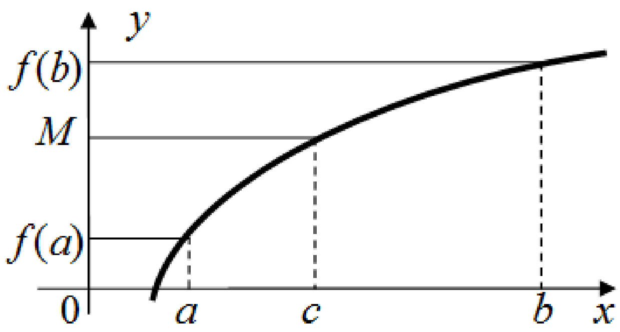


Рис. 17.5

Наслідок. Якщо неперервна на $[a; b]$ функція $f(x)$ приймає на кінцях значення різних знаків, то існує принаймні одна точка $c \in (a; b)$, у якій $f(c) = 0$. Цей факт використовують для знаходження коренів рівняння.

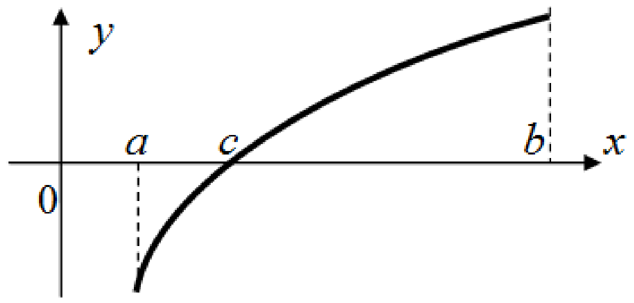


Рис.17.6

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Тема 18. Похідна функції у точці. Таблиця похідних. Механічний та геометричний зміст похідної

18.1. Поняття диференційованості функції. Зв'язок диференційованості з неперервністю

Нехай функція $f(x)$ визначена у точці x та деякому її околі $\mathrm{U}(x)$.

Означення. Похідною від функції $f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції Δy у цій точці до відповідного приросту аргументу Δx при $\Delta x \to 0$ і позначається

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (18.1)$$

Інші позначення похідної: y'; $\dfrac{dy}{dx}$.

Зауваження. Очевидно, що для існування границі (18.1) необхідно щоб виконувалися рівності $f'(x-0) = f'(x+0)$, де $f'(x-0)$ – ліва похідна $(\Delta x < 0)$, а $f'(x+0)$ – права похідна $(\Delta x > 0)$.

Означення. Функція $f(x)$, яка має скінченну похідну у точці x, називається диференційованою у цій точці, а якщо вона диференційована у кожній точці проміжку $[a; b]$, то вона називається диференційованою на цьому проміжку.

Зауваження. Не для усіх функцій існує границя (18.1).

Наприклад, визначимо похідну функції $y = |x|$ в точці $x = 0$. Для цього розкриємо знак модуля та обчислимо границю (1) зліва і справа,

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1; \qquad f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Так як ліва і права похідні не співпадають, то функція $y = |x|$ є недиференційованою у точці $x = 0$.

Даний приклад показує, що не кожна неперервна функція є диференційованою.

Теорема. Якщо функція $y = f(x)$ диференційована у деякій точці x, то вона неперервна у цій точці.

Обернене твердження невірне, що ілюструє функція $y = |x|$.

18.2. Похідні основних елементарних функцій

Застосовуючи означення похідної, можна отримати значення похідних основних елементарних функцій. Розглянемо приклади.

Приклад. Знайти похідну функції $y = a^x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \left(\begin{matrix} t = a^{\Delta x} - 1 \\ \Delta x = \log_a (t+1) \end{matrix} \right) = a^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a (1+t)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$$

$$= \left(\begin{matrix} n = \frac{1}{t}, \;\; t = \frac{1}{n} \\ n \to \infty \end{matrix} \right) = a^x \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n \log_a \left(1 + \frac{1}{n} \right)} = a^x \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log_a \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{a^x}{\log_a e} = a^x \ln a.$$

Очевидно, що для функції $y = e^x$ похідна буде $y' = e^x$.

Приклад. Аналогічно, для функції $y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$ та $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \sin x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x.$$

Приклад. Аналогічно, для функції $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

Нижче наводиться зведена **таблиця похідних елементарних функцій:**

1. $y = x^k \Rightarrow y' = kx^{k-1};\ k \in R$.

2. $y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$. 3. $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$.

4. $y = \log_a x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$. 5. $y = \ln x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x}$.

6. $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$. 7. $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

8. $y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. 9. $y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

10. $y = \arcsin x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 11. $y = \arccos x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2}$. 13. $y = \operatorname{arcctg} x \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

18.3. Механічний зміст похідної

Розглянемо прямолінійний рух точки M. Нехай у момент часу t точка M знаходилася на відстані $s(t)$ від початкового положення M_0 (рис. 18.1).

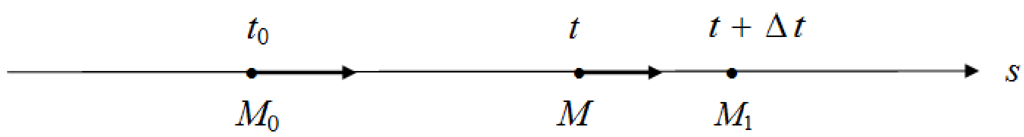


Рис. 18.1

У наступний момент часу $t + \Delta t$ точка M зайняла положення M_1 на відстані $s + \Delta s$ від початкового положення. Тоді середня швидкість за час Δt буде $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, а швидкість $v(t)$ у момент часу t:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s'(t).$$

Таким чином, якщо функція $s(t)$ – це шлях, який проходить точка M, то похідна $s'(t)$ від цієї функції – швидкість $v(t)$ руху точки.

18.4. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної та нормалі

Нехай функція диференційована у точці x (рис. 18.2).

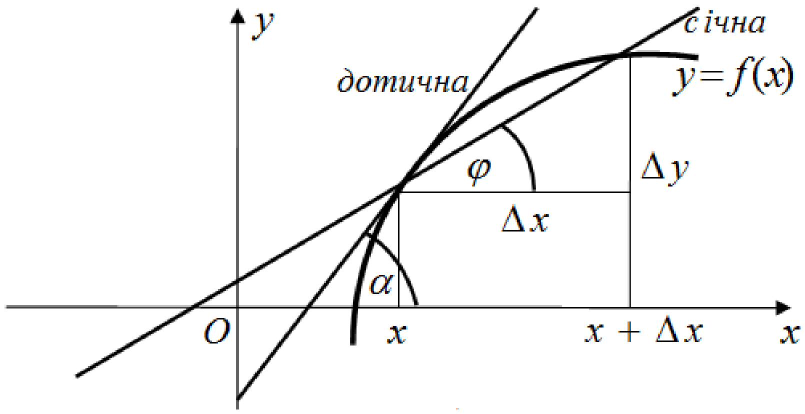


Рис.18.2

З рисунка слідує, що $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким чином, значення похідної дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної, проведеної у даній точці.

Тоді <u>рівняння дотичної</u> у точці $M_0(x_0; y_0)$ до кривої $y = f(x)$ має вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Пряма, що проходить через точку M_0, перпендикулярно до дотичної, називається <u>нормаллю</u>. Її рівняння має вид :

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до функції $y = \sin x$ в точці $x = -\pi/6$.

Маємо, що $x_0 = -\pi/6 \Rightarrow y_0 = \sin\left(-\pi/6\right) = -1/2$.

Знайдемо похідну функції $y = \sin x$

$$y' = (\sin x)' = \cos x \Rightarrow \qquad y_0' = \cos\left(-\pi/6\right) = \sqrt{3}/2.$$

Таким чином, маємо

$$y + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2}$$ – рівняння дотичної,

$$y+\frac{1}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \quad y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{2}$$ – рівняння нормалі.

Зауваження. Якщо $f'(x_0)=0 \Rightarrow y=y_0$ – рівняння дотичної, а $x=x_0$ – рівняння нормалі.

18.5. Правила диференціювання

Нехай функції $U(x)$ та $V(x)$ диференційовані.

1. Якщо $C=const \Rightarrow (C)'=0$.
2. $(U\pm V)'=U'\pm V'$.
3. $(UV)'=U'V+V'U$.
4. $\left(\dfrac{U}{V}\right)'=\dfrac{U'V-UV'}{V^2}$.

Доведемо останнє правило

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{U+\Delta U}{V+\Delta V}-\frac{U}{V}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V\dfrac{\Delta U}{\Delta x}-U\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{\left(V+\Delta V\right)V}=\frac{U'V-UV'}{V^2}.$$

Приклад. Знайти похідну функції $y=\operatorname{tg}x$ та $y=\operatorname{ctg}x$.

$$y=\operatorname{tg}x \Rightarrow y'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогічно, $y=\operatorname{ctg}x \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

18.6. Похідна складної функції

Нехай дано складну функцію $y=y(u), u=u(x)$, тобто $y=y(u(x))=F(x)$.

Теорема. Якщо функція $u=u(x)$ має у точці x похідну u'_x, а функція $y=y(u)$ у відповідній точці u також має похідну y'_u, то складна функція $y=y(u(x))$ у точці x має похідну, яка дорівнює

$$y'_x=y'_u u'_x. \qquad (18.2)$$

Зауваження. Формулу (18.2) можна узагальнити для будь-якої кількості суперпозицій функцій. Наприклад, якщо

$$y = y(u),\, u = u(v),\, v = v(x) \Rightarrow y'_x = y'_u u'_v v'_x .$$

Приклад. Знайти y', якщо $y = \ln(\operatorname{arctg} e^x)$.

$$y' = \left(\ln(\operatorname{arctg} e^x)\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^x} \cdot \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x .$$

Приклад. Знайти y', якщо $y = x^k; \quad k \in R.$

Представимо $y = x^k = e^{k \ln x}$ і за правилом диференціювання складної функції маємо

$$y' = \left(e^{k \ln x}\right)' = e^{k \ln x} \cdot \frac{k}{x} = x^k \cdot \frac{k}{x} = kx^{k-1} .$$

Тема 19. Похідна функції, заданої параметрично та неявно. Похідні вищих порядків. Поняття диференціала функції

19.1. Похідна функції, заданої параметричними рівняннями

Нехай функція задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases}$

тоді справедлива наступна теорема.

Теорема. *Якщо функції $x = x(t);\ y = y(t)$ є диференційованими у відповідній точці, то*

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{19.1}$$

Доведення. Нехай функція $x = x(t)$ має обернену функцію $t = \varphi(x)$, тоді функція $y = y(t);\ t = \varphi(x)$ є складною функцією, і за правилом диференціювання складної функції маємо $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Застосувавши формулу про диференціювання оберненої функції , маємо

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної до лінії $\begin{cases} x = 6\cos t; \\ y = 2\sin t \end{cases}$ при $t = \pi/4$, тобто у точці $M_0(3\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

Маємо

$$y'_x = -\frac{2\cos t}{6\sin t} = -\frac{\mathrm{ctg}\, t}{3} \Rightarrow (y'_x)_{M_0} = -\frac{1}{3},$$

тоді рівняння дотичної буде мати вид

$$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{3}(x - 3\sqrt{2}) \Rightarrow y = -\frac{x}{3} + 2\sqrt{2}.$$

19.2. Похідна функції, заданої неявно

Нехай функція задана неявно

$$F(x, y) = 0. \tag{19.2}$$

Продиференціюємо вираз (19.2) по аргументу x з урахуванням того, що $y = y(x)$ та виразимо з отриманого співвідношення y'_x.

Покажемо цю процедуру на прикладі.

Приклад. Знайти y', якщо $y^2 + xe^y - \sin x + 4 = 0$.

$$2yy' + e^y + xe^y y' - \cos x = 0 \Rightarrow y' = \frac{\cos x - e^y}{2y + xe^y}.$$

19.3. Похідна степенево-показникової функції

Означення. Функція виду $y = (u(x))^{v(x)}$ називається степенево-показниковою.

Прологарифмуємо цю функцію

$$y = (u(x))^{v(x)} \Rightarrow \ln y = v \ln u. \tag{19.3}$$

Продиференціюємо обидві частини виразу (19.3), в результаті отримаємо

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}$$

або

$$y' = u^v\left(v'\ln u + v\frac{u'}{u}\right) = u^v \ln u \cdot v' + vu^{v-1} \cdot u'.$$

Розглянута операція називається <u>логарифмічним диференціюванням</u>.

Приклад. Знайти y', якщо $y = x^{arctgx}$.

Прологарифмуємо $y = x^{\operatorname{arctg} x} \Rightarrow \ln y = \operatorname{arctg} x \cdot \ln x$.

Продиференціювавши останню рівність, отримаємо

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \ln x \cdot \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y' = x^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{1}{x}\operatorname{arctg} x + \frac{\ln x}{1+x^2}\right).$$

19.4. Похідні вищих порядків

Якщо функція $f(x)$ диференційована, то функція $f'(x)$ може також бути диференційованою функцією. Тоді похідна від цієї функції називається <u>другою похідною</u> (або похідною другого порядку) від функції $f(x)$ та позначається

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)' \text{ або } \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Похідною порядку n від функції $f(x)$ називається перша похідна від похідної $(n-1)$-го порядку та позначається

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)' \text{ або } \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Приклад. Знайти n-у похідну від функції $y=e^{kx}$.

$$y'=ke^{kx}\ ;\ y''=k^2e^{kx}\ ;\ \ldots ;\ y^{(n)}=k^ne^{kx}.$$

Означення. Нехай функція задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t). \end{cases}$$

Тоді y''_{xx} можна обчислити за формулою

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}. \tag{19.4}$$

Приклад. Знайти $\frac{d^2y}{dx^2}$ циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t); \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

За формулою (19.4) маємо

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a\cos t\cdot a(1-\cos t)-a\sin t\cdot a\sin t}{a^3(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

Знаходження другої похідної функції заданої неявно, розглянемо на прикладі.

Приклад. Знайти y'', якщо $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Продиференціюємо це рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2}-\frac{2yy'}{b^2}=0 \Rightarrow y'=\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Продиференціюємо отриману першу похідну y' ще раз

$$y' = \frac{b^2 x}{a^2 y} \Rightarrow y'' = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}.$$

Враховуючи вираз для y' отримаємо

$$y'' = \frac{b^4}{a^2} \cdot \frac{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}{y^3} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}.$$

Зауваження. Аналогічно можна знаходити похідні вищих порядків від функцій, які задані неявно або параметричними рівняннями.

Зауваження. Механічний зміст другої похідної: якщо $s = s(t)$ шлях, який пройшла матеріальна точка, то її прискорення є друга похідна від шляху $a = v'(t) = s''(t)$.

19.5. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має у точці x похідну, тобто існує

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тоді за теоремою про границю функції $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$,

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ або

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \qquad (19.5)$$

Другий доданок у формулі (19.5) є н.м.в. більш високого порядку, ніж Δx. Перший доданок називається головною або лінійною частиною приросту функції.

Означення. Головна частина приросту Δy називається диференціалом функції та позначається

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (19.6)$$

Тоді формула (19.5) буде мати вид

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Для функції $y = x \Rightarrow dy = dx = \Delta x$, тобто для аргументу $dx = \Delta x.$ Тому формула (19.6) остаточно буде мати вид

$$dy = f'(x)dx.$$

З рисунка випливає геометричний зміст диференціала (рис.19.1)

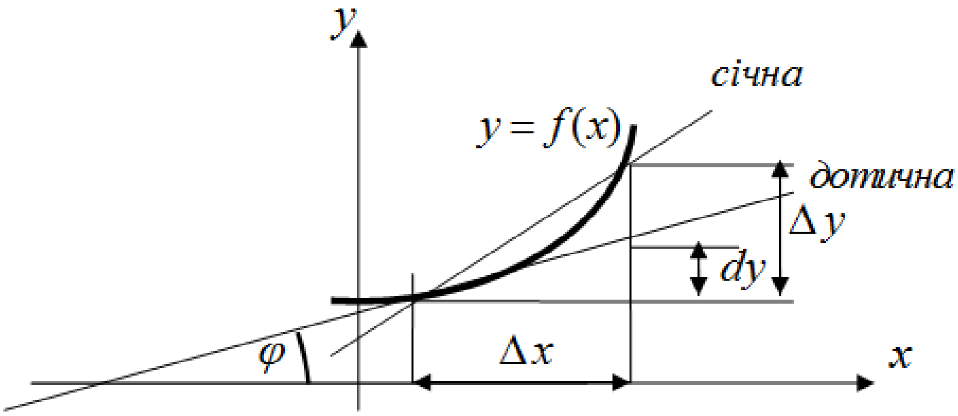


Рис.19.1

Таким чином, диференціал функції $dy = f'(x)\Delta x = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$ – це приріст ординати точки, що лежить на дотичній.

Властивості диференціала випливають з відповідних правил диференціювання:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2. $d(uv) = vdu + udv$;
3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Отримаємо вираз для диференціала складної функції $y = y(u)$; $u = u(x)$. Маємо $\dfrac{dy}{dx} = y'_u(u)u'(x)$ або $dy = y'_u(u)u'(x)dx = y'_u(u)du$.

Таким чином, форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною або функцією іншого аргументу. Ця властивість першого диференціала називається <u>інваріантністю</u>.

Зауваження. З позначення похідної $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ випливає, що похідну $f'(x)$ можна розглядати як відношення диференціалів $\dfrac{dy}{dx}$.

Тема 20. Розв'язання типових задач з теми «Похідна та диференціал функції»

Розв'яжемо декілька типових завдань на застосування теоретичного матеріалу лекцій № 18 - 19.

Завдання 1.

Знайти похідні наступних функцій.

а) $y = \ln^3 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. За правилом диференціювання складеної функції $\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'(u)\cdot u'(x)$ маємо

$$y' = \left(\ln^3 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\ln^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\ln \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 3\ln^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' =$$

$$= \frac{3\ln^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{3\ln^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{\arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= -\frac{3\ln^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{x \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{3\ln^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

При цьому використовувались наступні формули диференціювання:

$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$, $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$, $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$,

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Відповідь. $-\dfrac{3\ln^2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x-1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}}$.

б) $1-\sin(xy)=\cos(x+y)$.

Розв'язання. Це рівняння задає функцію $y=y(x)$ неявно. Щоб знайти похідну, продиференціюємо обидві його частини, пам'ятаючи, що $y=y(x)$ є функція змінної x:

$$\left(1-\sin(xy)\right)'=\left(\cos(x+y)\right)',$$

$$-\cos(xy)\cdot(xy)'=-\sin(x+y)\cdot(x+y)',$$

$$-\cos(xy)\cdot(y+xy')=-\sin(x+y)\cdot(1+y').$$

Отримане рівняння розв'яжемо відносно y':

$$-y\cos(xy)-xy'\cos(xy)=-\sin(x+y)-y'\sin(x+y),$$

$$y'\sin(x+y)-xy'\cos(xy)=y\cos(xy)-\sin(x+y),$$

$$y'\left(\sin(x+y)-x\cos(xy)\right)=y\cos(xy)-\sin(x+y),$$

$$y'=\frac{y\cos(xy)-\sin(x+y)}{\sin(x+y)-x\cos(xy)}=-\frac{\sin(x+y)-y\cos(xy)}{\sin(x+y)-x\cos(xy)}.$$

Відповідь. $-\dfrac{\sin(x+y)-y\cos(xy)}{\sin(x+y)-x\cos(xy)}$.

в) $y=\left(x^4+5\right)^{ctgx}$.

Розв'язання. Для обчислення похідної такої функції (так званої степенево-показникової) використаємо логарифмічне диференціювання: прологарифмуємо обидві частини рівності $y=\left(x^4+5\right)^{ctgx}$. Отримаємо

$$\ln y=\ln\left(x^4+5\right)^{ctgx}=ctgx\cdot\ln\left(x^4+5\right).$$

Тепер, продиференціювавши ліву і праву частини останньої рівності, враховуючи, що $y=y(x)$, знаходимо

$$\left(\ln y\right)' = \left(ctgx \cdot \ln\left(x^4+5\right)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \left(ctgx\right)' \ln\left(x^4+5\right) + ctgx\left(\ln\left(x^4+5\right)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sin^2 x}\ln\left(x^4+5\right) + ctgx \cdot \frac{1}{x^4+5} \cdot 4x^3.$$

Звідки $y' = y\left(-\dfrac{\ln\left(x^4+5\right)}{\sin^2 x} + \dfrac{4x^3 ctgx}{x^4+5}\right)$ або

$$y' = \left(x^4+5\right)^{ctgx}\left(\frac{4x^3 ctgx}{x^4+5} - \frac{\ln\left(x^4+5\right)}{\sin^2 x}\right).$$

Відповідь. $\left(x^4+5\right)^{ctgx}\left(\dfrac{4x^3 ctgx}{x^4+5} - \dfrac{\ln\left(x^4+5\right)}{\sin^2 x}\right).$

г) $\begin{cases} x = ctg\left(2e^t\right) \\ y = \ln tge^t \end{cases}$ $y'_x - ?$, $y''_{xx} - ?$

Розв'язання. Функція задана параметрично. Її похідна обчислюється за формулою $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знайдемо $y'_t = \left(\ln tge^t\right)'_t = \dfrac{1}{tge^t} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 e^t} \cdot e^t$ та

$x'_t = \left(ctg\left(2e^t\right)\right)'_t = -\dfrac{1}{\sin^2 2e^t} \cdot 2e^t = -\dfrac{2e^t}{\sin^2 2e^t}$. Отже,

$$y'_x = \frac{e^t}{tge^t \cdot \cos^2 e^t} : \left(-\frac{2e^t}{\sin^2 2e^t}\right) = -\frac{e^t \cdot \sin^2 2e^t}{\dfrac{\sin e^t}{\cos e^t} \cdot \cos^2 e^t \cdot 2e^t} = -\frac{\sin^2 2e^t}{\sin 2e^t} = -\sin 2e^t.$$

Друга похідна функції, заданої параметрично, знаходиться за формулою $y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$. Диференціюємо отриману похідну за змінною t:

$$\left(y'_x\right)'_t = \left(-\sin 2e^t\right)'_t = -\cos 2e^t \cdot \left(2e^t\right)'_t = -2e^t \cos 2e^t .$$

За допомогою наведеної вище формули дістанемо

$$y''_{xx} = \frac{-2e^t \cos 2e^t}{-\dfrac{2e^t}{\sin^2 2e^t}} = \sin^2 2e^t \cos 2e^t .$$

Відповідь. $-\sin 2e^t$; $\sin^2 2e^t \cos 2e^t$.

Завдання 2.

Визначити диференціал dy функції y , якщо $y = arctg\left(tg\dfrac{x}{2}+1\right)$.

Розв’язання. Диференціал функції $y = f(x)$ обчислюється за формулою $dy = f'(x)dx$.

$$f'(x) = \left(arctg\left(tg\frac{x}{2}+1\right)\right)' = \frac{1}{1+\left(tg\dfrac{x}{2}+1\right)^2}\cdot\left(tg\frac{x}{2}+1\right)' = \frac{1}{1+\left(tg\dfrac{x}{2}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\dfrac{x}{2}\left(1+\left(tg\dfrac{x}{2}+1\right)^2\right)} .$$

$$dy = \frac{dx}{2\cos^2\dfrac{x}{2}\left(1+\left(tg\dfrac{x}{2}+1\right)^2\right)} .$$

Відповідь. $\dfrac{dx}{2\cos^2\dfrac{x}{2}\left(1+\left(tg\dfrac{x}{2}+1\right)^2\right)}$.

Завдання 3.

Знайти диференціали першого, другого, третього порядків функції $y = (2x-3)^3$.

Розв'язання. $dy = 3(2x-3)^2 \cdot 2dx = 6(2x-3)^2 dx$,

$$d^2y = 12(2x-3) \cdot 2dx^2 = 24(2x-3)dx^2,$$

$$d^3y = 24 \cdot 2dx^3 = 48dx^3.$$

Завдання 4.

Обчислити наближене значення $\arcsin 0,51$

Розв'язання. Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Вважаючи $x = 0,5;\ \ \Delta x = 0,01$ та застосовуючи формулу

$$\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \Delta x,$$

отримуємо

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513$$

Тема 21. Проміжки монотонності. Необхідні та достатні умови екстремуму функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Опуклість функції, точки перегину

21.1. Проміжки монотонності

Означення. Функція $y = f(x)$ називається зростаючою на даному числовому проміжку X, якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає більше значення функції $f(x)$, тобто для будь-яких $x_1,\ x_2 \in X$ при $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $y = f(x)$ називається спадною на даному числовому проміжку X, якщо більшому значенню аргументу $x \in X$ відповідає менше значення функції $f(x)$, тобто для будь-яких $x_1,\ x_2 \in X$ при $x_2 > x_1$ $\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Функція, тільки зростаюча або тільки спадна на даному числовому проміжку, називається монотонною на цьому проміжку.

Теорема. Якщо диференційована на $(a;b)$ функція $f(x)$ зростає (спадає), то $\forall x \in (a;b)$ виконується умова $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$. Вірним є і обернене твердження.

Доведення. Нехай $f(x)\uparrow$. Тоді відношення

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0,\ \forall \Delta x.$$

Переходимо до границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0.$

Аналогічно доводиться випадок $f(x)\downarrow$.

Обернене твердження доводити не будемо.

Зауваження. У деяких точках може бути $f'(x) = 0$, так як похідна є границею.

Означення. Внутрішні точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками цієї функції (стаціонарні, підозрілі на екстремум).

Алгоритм дослідження функції на монотонність.

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну та прирівнюємо її до нуля (знаходимо критичні точки).
3. Визначаємо знак похідної на кожному з інтервалів, на які поділяється область існування функції критичними точками.
4. За отриманим знаком похідної робимо висновок про зростання та спадання функції.

Приклад. Знайти проміжки монотонності функції

$$y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+1.$$

1. $D(x)=\mathbb{R}$.

2. Знаходимо похідну даної функції

$$y'=x^3-x=x(x-1)(x+1).$$

$$x(x-1)(x+1)=0,$$

$$x=0,\ \ x=1,\ \ x=-1$$ – критичні точки.

3. Знаки похідної визначаємо методом інтервалів (рис.21.1):

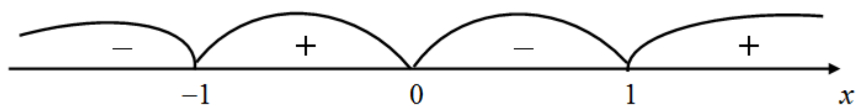


Рис.21.1

4. Тоді маємо, що $y\uparrow$: $x\in(-1;\,0)\cup(1;\,\infty)$; $y\downarrow$: $x\in(-\infty;-1)\cup(0;\,1)$.

21.2. Екстремум функції. Необхідні та достатні умови екстремуму

Означення. Точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо в деякому околі цієї точки виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$ $\left(f(x_0) < f(x) \right)$.

Означення. Точки максимуму (max) і точки мінімуму (min) називаються точками екстремуму функції $f(x)$, а відповідні значення функції – екстремальними значеннями.

Зауваження. Не слід вважати, що максимум і мінімум функції являються відповідно її найбільшим або найменшим значеннями на заданому відрізку (рис. 21.2).

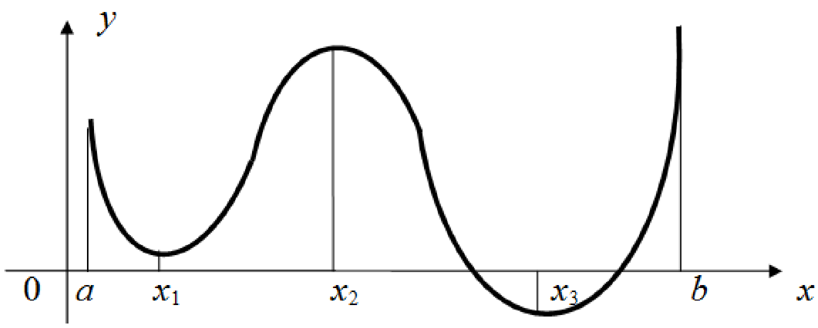


Рис. 21.2

На рисунку x_1, x_3 – точки мінімуму, x_2 – точка максимуму функції $f(x)$, але

$$\min_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(x_3)\ ;\ \max_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(b).$$

Необхідна умова існування екстремуму функції.

Якщо неперервна функція $f(x)$ диференційована та має екстремум у точці x_0, то у цій точці похідна $f'(x_0) = 0$ або не існує.

Наприклад, очевидно, що функція $y = |x|$ має мінімум при $x_0 = 0$, де вона не диференційована (похідна не існує).

Щоб виділити з критичних точок точки екстремуму, існують достатні умови екстремуму.

Достатні умови екстремуму функції.

Так як точка максимуму розділяє інтервали зростання та спадання, а точка мінімуму – спадання та зростання, то маємо <u>першу достатню умову екстремуму</u>: Якщо при переході через критичну точку зліва направо похідна змінює знак з плюса на мінус, то ця точка є $\max$. Якщо – з мінуса на плюс, то ця точка – $\min$.

<u>Друга достатня умова екстремуму</u>. Нехай точка x_0 є критичною точкою функції $f(x)$, яка має неперервну похідну другого порядку в околі цієї точки. Тоді, якщо $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 – точка $\max$, а якщо $f''(x_0) > 0$, то – $\min$.

<u>Алгоритм дослідження функції на екстремум.</u>

1. Знаходимо область визначення функції.
2. Знаходимо похідну та прирівнюємо її до нуля (знаходимо критичні точки).
3. Визначаємо знак похідної в околі критичної точки та робимо висновок про наявність екстремуму.
4. Обчислюємо екстремальні значення функції.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2}$.

1. $D(x) = \mathbb{R}$.

2. Знайдемо похідну даної функції та визначимо критичні точки

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x - 4}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}},$$

$$\frac{2x - 4}{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}} = 0,$$

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0. \end{cases}$$

Критичні точки: $x_1 = 2;\ x_2 = 1;\ x_3 = 3.$

Складемо таблицю:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; 3)$	3	$(3; \infty)$
y'	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
y	$f(x)\downarrow$	0	$f(x)\uparrow$	1	$f(x)\downarrow$	0	$f(x)\uparrow$
		min		max		min	

Отже, функція $f(x)$ має три точки екстремуму:

$$x_{\max} = 2;\; x_{\min} = 1;\; x_{\min} = 3.$$

Відповідні екстремальні значення: $y_{\max}(2) = 1,\; y_{\min}(1) = y_{\min}(3) = 0.$

21.3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай задано неперервну на відрізку $[a; b]$ функцію $f(x)$. Вона досягає найбільшого та найменшого значення або у внутрішніх критичних точках, або на кінцях відрізка $[a; b]$.

<u>Алгоритм відшукання найбільшого (найменшого) значення функції на відрізку.</u>

1. Знаходимо критичні точки, які належать даному відрізку $[a; b]$.

2. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у критичних точках та на кінцях відрізка $[a; b]$.

3. Обираємо з отриманих значень найбільше та найменше.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - x^2 - x + 2$ на відрізку $[0; 2]$.

1. Знаходимо критичні точки

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\; x_2 = -2/3 \notin [0; 2].$$

2. Обчислюємо значення функції у критичній точці $x = 1$ та на кінцях відрізка $[0; 2]$:

$$f(0) = 2; \quad f(1) = 1; \quad f(2) = 4.$$

3. $\max\limits_{x\in[0;\,2]} f(x) = f(2) = 4;\; \min\limits_{x\in[0;\,2]} f(x) = f(1) = 1.$

21.4. Опуклість функції та точки перегину

Означення. Крива $f(x)$ називається опуклою на $(a;b)$, якщо усі точки кривої, окрім точки дотику, лежать нижче будь-якої дотичної на цьому інтервалі.

Крива $f(x)$ називається угнутою на $(a;b)$, якщо усі точки кривої, окрім точки дотику, лежать вище будь-якої дотичної на цьому інтервалі.

Точка, яка відділяє опуклу частину графіка від угнутої, називається точкою перегину (рис.21.3).

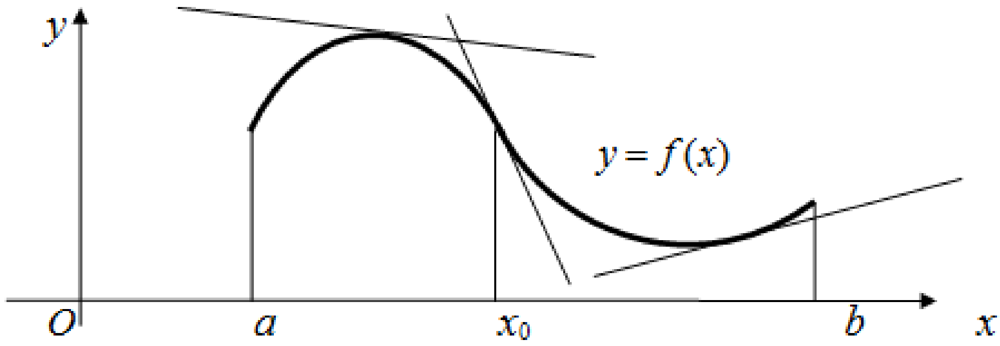


Рис. 21.3

На рисунку на інтервалі $(a; x_0)$ функція $f(x)$ опукла, а на інтервалі $(x_0; b)$ функція $f(x)$ угнута, x_0 – точка перегину.

Для визначення інтервалів опуклості та угнутості застосовують наступну теорему.

Теорема. Якщо $\forall x \in (a;b)$ $f''(x) < 0 \left(f''(x) > 0 \right)$, то на цьому інтервалі функція опукла (угнута).

Необхідна умова точки перегину. Якщо x_0 – точка перегину функції $f(x)$, то в цій точці $f''(x_0) = 0$ або не існує.

Достатня умова точки перегину. Якщо $f''(x_0) = 0$ або не існує і при переході через цю точку $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину.

Алгоритм дослідження функції на опуклість.

1. Знаходимо область визначення функції.

2. Знаходимо другу похідну та прирівнюємо її до нуля (знаходимо критичні точки другого роду).

3. Визначаємо знак другої похідної в околі критичної точки другого роду.

4. Робимо висновок про опуклість (угнутість) функції.

Приклад. Знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину функції $y = x\ln x - \frac{x^2}{2}$.

1. $D(x)$: $x > 0$.

2. Знаходимо другу похідну даної функції

$$y' = 1 + \ln x - x;\ y'' = \frac{1-x}{x},$$

$\frac{1-x}{x} = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 0$. Точка $x_2 = 0$ не належить області визначення функції.

Складемо таблицю

x	$(0;1)$	1	$(1;\infty)$
y''	+	0	–
y	$\cup$	перегин	$\cap$

Таким чином, на інтервалі $(0;1)$ функція $f(x)$ угнута, на інтервалі $(1;\infty)$ функція $f(x)$ опукла, $x_0 = 1$ – точка перегину.

Тема 22. Правило Лопіталя. Асимптоти кривої. Повне дослідження функції

22.1. Правило Лопіталя

Теорема. (Розкриття невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$). Нехай $f(x)$ та $g(x)$ диференційовані в околі точки x_0 та $f(x_0)=g(x_0)=0$. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, при цьому $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауваження. Правило Лопіталя справедливе і для випадку, коли $x_0=\infty$, так як заміною $x=\frac{1}{t}$ границя зводиться до випадку при $x_0=0$.

Покажемо це:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\begin{matrix} x=\frac{1}{t} \\ t\to 0\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження. Теорема має місце і для невизначеності виду $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

Невизначеності видів $\{0\cdot\infty\}$ та $\{\infty-\infty\}$ зводяться до розглянутого випадку за допомогою алгебраїчних перетворень.

Наприклад, з невизначеністю виду $\{0\cdot\infty\}$ роблять наступне:

$$0\cdot\infty \Leftrightarrow \frac{0}{1/\infty} \Leftrightarrow \frac{0}{0}.$$

При невизначеностях виду $\{0^0\};\{\infty^0\};\{1^\infty\}$ застосовують логарифмування, тобто замість границі функції $f(x)^{g(x)}$ розглядаємо границю виразу

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}.$$

Зауваження. Вимога існування границі у правилі Лопіталя дуже важлива. Так, наприклад, правило Лопіталя неможна застосовувати до границі

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},$$

так як границя $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x}$ не існує. Але можна зробити наступне

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}}=1.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-e^x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{-e^x}=0.$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2)=\{0\cdot\infty\}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-2)}{\dfrac{1}{x-2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{1}{x-2}}{-\dfrac{1}{(x-2)^2}}=-\lim_{x\to 2}(x-2)=0.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\{\infty-\infty\}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Приклад. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}=\{\infty^0\}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x\ln\operatorname{ctg} x}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x}=e^0=1.$$

22.2. Асимптоти кривої

Означення. Пряма називається асимптотою кривої $y=f(x)$, якщо відстань від точки M кривої до цієї прямої при $M\to\infty$ прямує до нуля.

Асимптоти можуть бути вертикальними, похилими та горизонтальними.

З означення маємо, що:

1. Пряма $x=a$ є <u>вертикальною асимптотою</u>, коли функція має у точці розрив другого роду, тобто коли хоча б одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f\left(x\right)=\pm\infty$.

2. Якщо для кривої $y=f(x)$ пряма $y=kx+b$ – <u>похила асимптота</u>, то $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

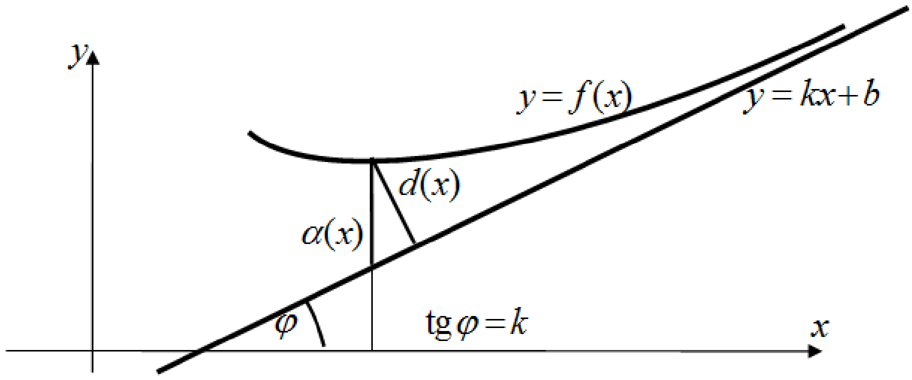


Рис. 22.1

З рисунка 22.1 $\alpha(x)=\dfrac{d(x)}{\cos\varphi}$, тобто якщо відстань $d(x)\to 0 \Rightarrow \alpha(x)\to 0.$

Для знаходження асимптот кривої застосовують теорему.

Теорема. Якщо для кривої $y=f(x)$ пряма $y=kx+b$ є асимптотою при $x\to\infty$ $(x\to-\infty)$, то $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, а $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)$. Вірно й обернене твердження.

Доведення. Нехай $y=kx+b$ є асимптотою для $y=f(x)$. Це означає, що $f(x)=kx+b+\alpha(x)$, і тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx+b+\alpha(x)}{x}=k$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(kx+b+\alpha(x)-kx)=b$.

Приклад. Знайти асимптоти до графіка функції $y=\dfrac{x^2}{x-2}$.

1) $x=2$ – можлива вертикальна асимптота. Розглянемо границі:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x^2}{x-2}=-\infty, \qquad \lim_{x\to 2+0}\frac{x^2}{x-2}=\infty,$$

отже, маємо, що $x=2$ – вертикальна асимптота.

2) Будемо шукати похилі асимптоти у вигляді $y=kx+b$.

Для цього обчислимо кутовий коефіцієнт k:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-2x}=1,$$

та вільний член b:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x-2}=2.$$

Томі маємо, що похила асимптота має вид: $y=x+2$.

Зауваження. Іноді значення границь можуть бути різними при $x\to\infty$ та $x\to-\infty$. У такому випадку говорять, що існують односторонні асимптоти.

Наприклад, для функції $y=x\operatorname{arctg}x$:

$$k_1=\lim_{x\to\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{x}=\frac{\pi}{2},\qquad k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{x}=-\frac{\pi}{2}\ .$$

Коефіцієнт b знаходимо за допомогою правила Лопіталя:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\operatorname{arctg}x\mp\frac{\pi}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arctg}x\mp\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=-1,$$

тобто функція має правосторонню $y=\frac{\pi}{2}x-1$ та лівосторонню $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ асимптоти.

22.3. План дослідження функції та побудова графіків

Для дослідження функцій та побудови графіків зручно дотримуватися наступного плану:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність, непарність функції.
3. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

4. Знайти точки розриву функції та з'ясувати їх характер .
5. Визначити проміжки монотонності та точки екстремуму функції.
6. Знайти інтервали опуклості (угнутості) та точки перегину.
7. Знайти асимптоти.
8. За отриманими результатами побудувати графік функції.

Приклад. Дослідити функцію та побудувати її графік

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1} .$$

1. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Функція загального виду.

3. $y(0) = 0$.

4. Функція, як елементарна, неперервна всюди, окрім точки $x = 1$.

Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty; \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = \infty.$$

Отже, точка $x = 1$ – точка розриву другого роду.

5. Обчислимо похідну та прирівняємо її до нуля

$$y' = \frac{4x^3(x^3 - 1) - 3x^6}{(x^3 - 1)^2} = \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2} = 0 .$$

Знаходимо критичні точки: $x_1 = 0; x_2 = \sqrt[3]{4}$.

Складемо таблицю

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; \sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4}; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$f(x)\uparrow$	0	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	$f(x)\uparrow$
		max			min	

6. Обчислимо другу похідну

$$y'' = \frac{(6x^5 - 12x^2)(x^3 - 1)^2 - 6x^2(x^3 - 1)(x^6 - 4x^3)}{(x^3 - 1)^4} = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}.$$

Знаходимо точки, у яких друга похідна обертається в нуль: $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt[3]{2}$.

Складемо таблицю

x	$(-\infty; -\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2}; 0)$	0	$(0; 1)$	$(1; \infty)$
y''	+	0	–	0	–	+
y	$\cup$	перегин	$\cap$	0	$\cap$	$\cup$

7. Знаходимо асимптоти:

– вертикальна асимптота: $x = 1$;

– похила асимптота: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3}{x^3 - 1} = 1;$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1} = 0 \Rightarrow y = x.$$

8. На основі отриманих результатів побудуємо графік функції (рис.22.2).

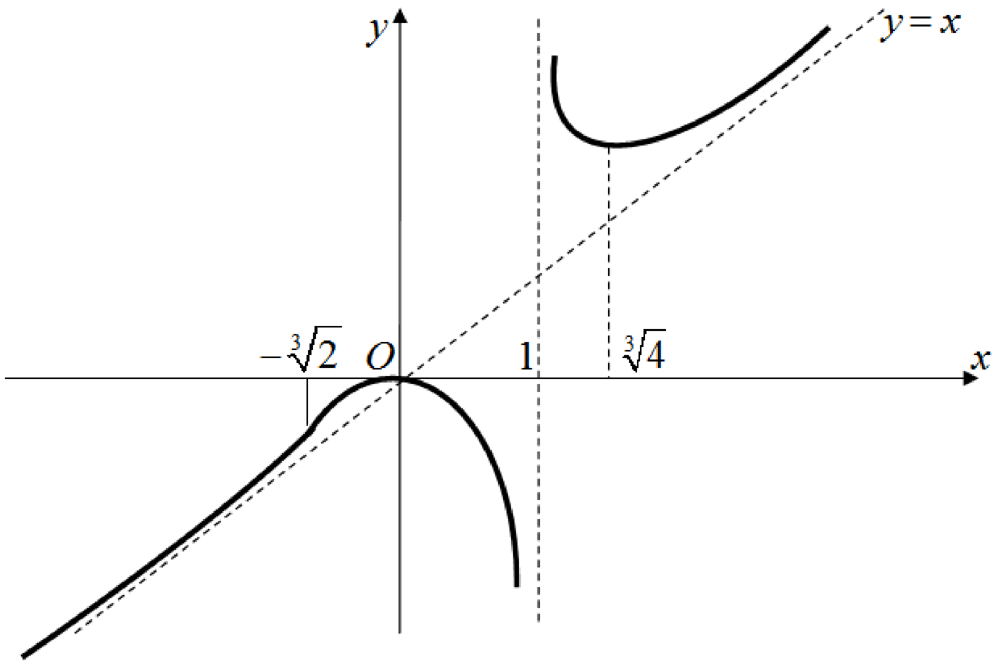


Рис. 22.2

Тема 23. Розв'язання типових завдань з теми «Застосування похідних до знаходження границі функції. Правило Лопіталя»

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки x_0, причому

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

і в околі цієї точки $\varphi'(x) \neq 0$. Тоді, якщо існує границя відношення похідних

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то існує і границя відношення функції

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

і ці границі рівні між собою

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Теорема. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і диференційовані в деякому околі точки x_0 і в цьому околі

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty, \ \varphi'(x) \neq 0.$$

Тоді, якщо існує границя

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то існує границя

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

причому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження. Правило Лопіталя застосовується лише для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Невизначеності вигляду

$$[0\cdot\infty],\ [\infty-\infty],\ \left[0^0\right],\ \left[\infty^0\right],\ \left[1^\infty\right]$$

алгебраїчними перетворюваннями зводяться до основних $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

1. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, тоді

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-\varphi(x))=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, тоді $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\ln x}{x}$

Розв'язання. Підставимо в функції $f(x)=\ln x$ і $\varphi(x)=x$ граничне значення аргументу x і одержимо

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Застосовуємо правило Лопиталя

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}$

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5e^{5x}-2e^{2x}}{1}=3$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^{x}}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x/2}(1+\frac{x}{2})}{1+e^{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}e^{x/2}(2+\frac{x}{2})}{e^{x}}=$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{(1/2)e^{x/2}}=0$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x}{-2/x^3}=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Розв'язання. У даному випадку маємо невизначеність виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Позначимо дану функцію через y, тобто $y=(\sin x)^x$ та прологарифмуємо її:

$$\ln y = x\cdot\ln\sin x=\frac{\ln\sin x}{1/x}.$$

Знайдемо границю логарифма даної функції за допомогою правила Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{1/x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\sin x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=-\lim_{x\to 0}(x\cdot\cos x\cdot\frac{x}{\sin x})=0$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}y=e^0=1$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$.

Розв’язання. Маємо невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$. Нехай $y=\left(1+x\right)^{\ln x}$. Прологарифмуємо цю функцію

$$\ln y=\ln x\cdot\ln(1+x)$$

Знайдемо границю логарифма даної функції за допомогою правила Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{-1/(x\ln^2 x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{x+1}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+1/x}=-\lim_{x\to 0}\frac{(2\ln x)/x}{-1/x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x}=2\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2}=0$$

Тема 24. Застосування апарату диференціального числення при дослідженні функцій однієї змінної

Розглянемо наступну задачу. Методами диференціального числення дослідити функцію $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ і за результатами дослідження побудувати її графік.

Розв'язання. Задана функція дробово-раціональна. Отже, вона визначена при всіх x, крім точок $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$. Дослідимо поведінку функції в їх околі. Для цього обчислимо односторонні границі при $x\to-\sqrt{3}$ і при $x\to\sqrt{3}$:

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to-\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{3}+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to-\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} f\left(x\right)=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} f\left(x\right)=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=-\infty.$$

Знайдені границі говорять про те, що обидві точки є точками розриву другого роду і визначають вертикальні асимптоти, рівняння яких $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$.

На інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ функція неперервна.

Знайдемо точки перетину графіка з осями координат:

а) з віссю Ox: якщо $y=0$, то $x=0$;

б) з віссю Oy: якщо $x=0$, то $y=0$.

Отже, графік функції перетинає координатні осі в точці $\left(0;0\right)$, тобто проходить через початок координат.

Знайдемо інтервали знакосталості функції (рис.24.1). Розв'яжемо нерівність $f(x)>0$: $\dfrac{x^3}{3-x^2}>0$:

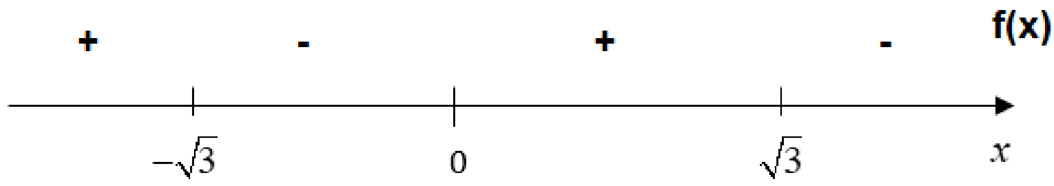


Рис. 24.1

Таким чином, $f(x)>0$ на інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ і $\left(0;\sqrt{3}\right)$; $f(x)<0$ на інтервалах $\left(-\sqrt{3};0\right)$ і $\left(\sqrt{3};\infty\right)$. На інтервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ і $\left(0;\sqrt{3}\right)$ графік функції розташований вище осі Ox, а на інтервалах $\left(-\sqrt{3};0\right)$ і $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ нижче осі Ox.

Функція непарна, оскільки

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{3-x^2}=-f(x)$, тому її графік симетричний відносно початку координат. Подальше дослідження можна проводити для $x\geq 0$.

З'ясуємо поведінку функції при $x\to\infty$:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{3-x^2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{-2x}=-\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to\infty}x=-\infty$. Отже, горизонтальна асимптота відсутня.

Похилу асимптоту будемо шукати у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(3-x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{-2x}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x)'}{\left(3-x^2\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{-2x}=-\frac{3}{2}\cdot 0=0$$

Отже, $y=-x$ - рівняння похилої асимптоти.

Дослідимо функцію на монотонність та екстремум:

$$y'(x)=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\left(3-x^2\right)-x^3\left(3-x^2\right)'}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=$$

$$=\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}.$$

З рівняння $y'(x)=0$ знайдемо критичні точки першого роду:

$$\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\left(9-x^2\right)=0, \\ 3-x^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-3, \\ x_2=0, \\ x_3=3, \\ x\neq\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Враховуючи непарність функції, встановимо знак першої похідної на інтервалах $\left(0;\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};3\right)$, $(3;\infty)$ (рис. 24.2).

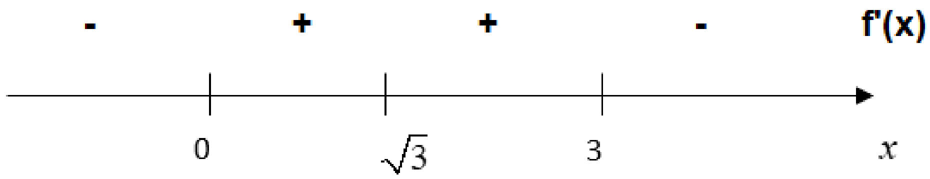


Рис. 24.2

Таким чином, функція зростає на інтервалах $\left(0;\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};3\right)$; спадає на інтервалі $(3;\infty)$. В точці $x=3$ функція має максимум, рівний $f(3)=\frac{3^3}{3-3^2}=-\frac{27}{6}=-\frac{9}{2}$.

Знайдемо інтервали опуклості графіка функції і точки перегину:

$$y''(x)=\left(\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(9x^2-x^4\right)'\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)\left(\left(3-x^2\right)^2\right)'}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-\left(9x^2-x^4\right)\cdot 2\cdot\left(3-x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(3-x^2\right)\left(\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)+2\left(9x^2-x^4\right)\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(27-9x^2-6x^2+\cancel{2x^4}+18x^2-\cancel{2x^4}\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{2x\left(3x^2+27\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(x^2+9\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

Розв’язуючи рівняння $y''(x)=0$, знайдемо критичні точки другого роду:

$$\frac{6x\left(x^2+9\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+9\right)=0, \\ 3-x^2\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x\neq\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Знак другої похідної встановимо на інтервалах $\left(0;\sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ (рис. 24.3).

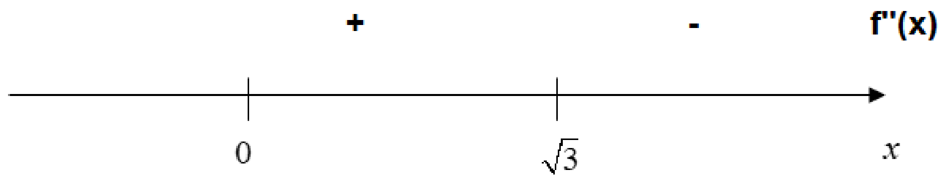


Рис. 24.3

Таким чином, на інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ графік функції вгнутий, а на інтервалі $\left(\sqrt{3};\infty\right)$ - опуклий.

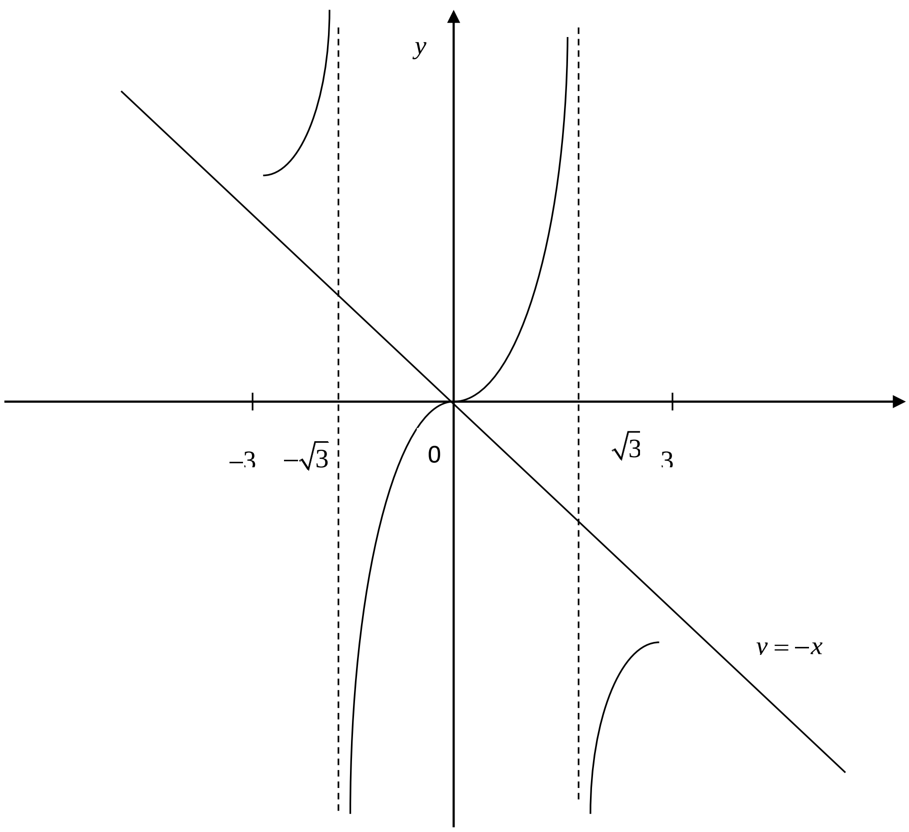


Рис.24.4

Враховуючи непарну симетрію кривої, точка $(0;0)$ є точкою перегину. Точка $x=\sqrt{3}$ - точка розриву і не може бути точкою перегину. За результатами дослідження будуємо графік функції (рис.24.4) для $x\geq 0$. Частина графіка для $x<0$ відображається за принципом непарної функції (поворотом на 180° відносно початку координат).

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик, В.П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – 4-те вид. – Харків : Веста, 2013. – 648 с.

2. Литвин, І.І. Вища математика / І.І. Литвин, О.М. Конопчук, Г.О. Желізняк. – К. : ЦНЛ, 2019. – 368 с.

3. Клепко, В.Ю. Вища математика в прикладах і задачах / В.Ю. Клепко, В.Л. Голець. – К. : ЦНЛ, 2019. – 594 с.

4. Фомичова, Л.Я. Математика 1. Конспект лекций. Частина 1 / Л.Я. Фомичова. – Донецьк : Лізунов Прес, 2017. – 72 с.

5. Турчанінова, Л.І. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – К. : Ліра-К, 2018. – 348 с.

6. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Николаевский. – М. : Высш. шк., 1981. – 368 с.

7. Ильин, В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1981. – 224 с.

8. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М. : Наука, 1988. – 432 с.

9. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1 / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – 561 с.

10. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.2 / Н.С. Пискунов. – М. : Наука, 1978. – 560 с.

11. Сборник задач по математике (для втузов) / [под ред. А.М. Ефимова, Б.П. Демидовича]. – Т.1. – М. : Наука, 1981. – 465 с.

12. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студ. втуз. В 2-х ч. Ч.I / П.Е. Данко, А.Г. Попов. – М. : Высш. шк., 1971. – 288 с.

13. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 640 с.