

О. Н. Романюк¹, д-р техн. наук, проф.
Н.С. Костюкова², канд. техн. наук, доц.
І. В. Абрамчук¹, ст. викладач.
О.В. Мельник¹

¹Вінницький національний технічний університет, Україна

²Донецький національний технічний університет, Україна
Rom8591@gmail.com

Особливості формування еліпсів на гексагональному растрі

Еліпси відносять до найбільш поширених графічних примітивів, тому розробка алгоритмів еліптичної інтерполяції є актуальною задачею. При формуванні траєкторії кривих на гексагональному растрі досягається їх краща згладженість.

Розглянуто особливості формування еліпсів на гексагональному растрі, що дає можливість реалізувати ефективні алгоритми еліптичної інтерполяції. Визначено типи елементарних крокових приростів для різних ділянок екранної системи координат.

При визначенні типів крокових приростів використано властивостей симетрії еліпсів.

Ключові слова: еліпс, гексагональний растр, метод оцінювальної функції, еліптична інтерполяція, крокова траєкторія.

DOI: 10.31474/1996-1588-2018-1-26-86-90

Вступ

При формуванні графічних сцен використовують примітиви [1-5], серед яких найбільшого поширення отримали відрізки прямих, дуги кіл і еліпсів.

При цьому використовують різні моделі [6-8] пікселів, відповідно до яких розробляють ефективні алгоритми інтерполяції.

Останнім часом для відтворення графічної інформації використовують гексагональну решітку, яка дозволяє підвищувати реалістичність формування графічних зображень [2].

Питання реалізації алгоритмів формування відрізків прямих і кіл на гексагональній решітці розглянуто в [9-11].

Однак питання формування крокової траєкторії еліпсів на гексагональному растрі не розглядалося. Саме цим питання і присвячено статтю.

Аналіз літературних джерел

Рівняння еліпса в полярній системі координат має вигляд [1]:

$$X = a \cos Y, Y = b \sin Y,$$

де a, b – розміри еліпса по осях X і Y відповідно.

Згідно наведених формул можна згенерувати траєкторію еліпса за прямим методом. Для еліпса крок приросту полярного кута є змінним та повинен обчислюватися на кожному кроці інтерполяції.

Траєкторію еліпса можна отримати шляхом стиснення траєкторії кола. Цей метод не отримав широкого поширення із-за низької точності та складної процедури формування дуги еліпса.

У комп'ютерній графіці найбільшого поширення отримав метод оцінювальної функції.

Розглянемо формування еліпса за методом оцінювальної функції. Для цього використаємо таке рівняння

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \text{ або } X^2 b^2 + Y^2 a^2 = a^2 b^2$$

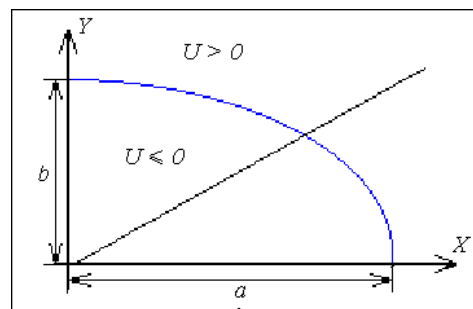


Рисунок 1 - Формування оцінювальної функції при еліптичній інтерполяції

Оцінювальна

функція $U_{ij} = X_i^2 b^2 + Y_j^2 a^2 - a^2 b^2$

за еліпсом (рис.1) має додатне значення, всередині його - від'ємне. Для першого квадранта при $U_{ij} \geq 0$ виконується крок по осі $Y^3 Y_{i+1} = Y_i - 1$, а при $U_{ij} < 0$ – крок по осі $\tilde{O}$. При цьому $X_{i+1} = X_i + 1$.

Після кроку по осі Y оцінювальна функція буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_{i,j+1} &= b^2 X_i^2 + a^2 (Y_j - 1)^2 - a^2 b^2 = \\ &= b^2 X_i^2 + a^2 Y_j^2 + 2a^2 Y_j + a^2 - a^2 b^2 = \\ &= U_{ij} + 2a^2 Y_j + a^2 \end{aligned}$$

Аналогічно можна показати, що після виконання кроку по осі X нове значення оцінювальної функції буде мати вид

$$U_{i+1,j} = U_{ij} + 2b^2 X_i + b^2$$

Приведені формули показують, що після кожного кроку необхідно виконувати операцію множення, що суттєво обмежує швидкодію формування крокової траєкторії.

Визначення типів крокових приростів

Нехай потрібно відобразити на гексагональну сітку еліпс з центром $O(x_0, y_0)$, що збігається з центром деякої комірки гексагональної сітки та півосями a, b паралельними координатним осям декартової системи координат. Розглянемо спочатку дугу еліпса з початковою точкою $(x_0 + a, y_0)$, що відповідає $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$, де θ – кут, утворений вектором дотичної $\vec{t}$ до еліпса з додатним напрямком осі x декартової системи координат (див. рис.2). Нехай i надалі напрямком будь-якого вектора визначає кут θ – кут, утворений цим вектором з додатним напрямком осі x .

Вузлом назовемо центр гексагональної комірки. Нехай відстань між сусідніми вузлами дорівнює одиниці. Відстанню від лінії (еліпса) до комірки назовемо найкоротшу відстань від вузла до лінії (при умові, що лінія не має ширини). Для відображення на гексагональну сітку кривої(еліпса), згідно алгоритму Брезенхема, зафарбовуються лише ті комірки, для яких відстань до лінії найменша. Прийнемо, що відображення лінії має одиничну ширину. Якщо лінія неперервна, то комірки зафарбовуються неперервно, тобто для кожної зафарбованої комірки обов'язково має бути зафарбована лише одна з шести сусідніх.

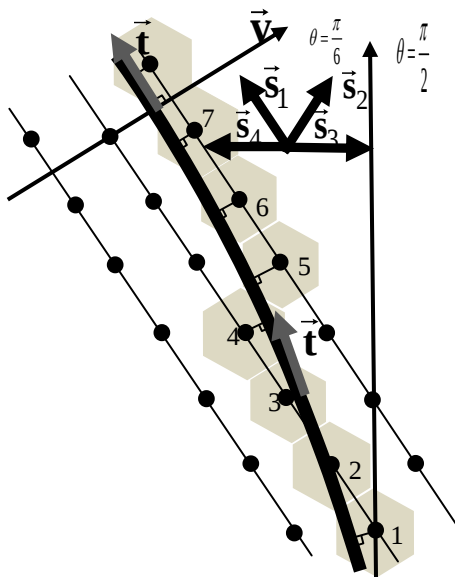


Рисунок 2 - Оптимальні напрямки зафарбовування комірок сітки, що відповідають дузі еліпса.

У роботі [10] доведено, що у випадку, коли дотична $\vec{t}$ до лінії утворює кути $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$ (обхід

проти годинникової стрілки), то зафарбувати комірки гексагональної сітки, що відображають задану дугу, можна рухаючись від початкової точки ($\theta = \pi/2$) у напрямку проти годинникової стрілки, переходячи від комірки до сусідньої комірки з використанням лише переходів у напрямках $\vec{s}_1$ (що відповідає $\theta = 2\pi/3$) і $\vec{s}_2$ (що відповідає $\theta = \pi/3$) (див. рис.3), причому перехід у напрямку $\vec{s}_2$ не може відбуватися двічі підряд.

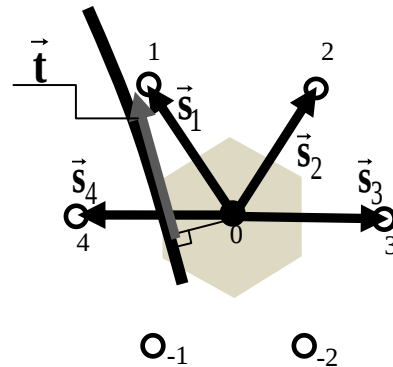


Рисунок 3 – Можливі напрямки зафарбовування комірок

Для простоти міркувань перемістимо центр декартової системи координат у точку $O(x_0, y_0)$, залишивши орієнтацію координатних осей. Параметричне рівняння еліпса з півосями a, b , паралельними координатним осям і центром у початку координат має вигляд: $x(\varphi) = a \cos(\varphi)$, $y(\varphi) = b \sin(\varphi)$, де φ -- кут, утворений радіус-вектором $\vec{v}$ точки еліпса та додатним напрямком осі абсцис. Зазначимо, що вектори $\vec{v}$ і $\vec{t}$ для точки еліпса, на відміну від кола, не ортогональні. Визначимо кут $\varphi(\theta) = \varphi_\theta$ точки еліпса, у якій дотична $\vec{t}$ нахилена під кутом θ з умови: $\frac{dy}{dx} \varphi(\theta) = \tan \theta$. Звідки отримуємо $-\frac{b}{a} \cot \varphi_\theta = \tan \theta$ і для кутів $\varphi_\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\theta \in (0, \pi)$ маємо

$$\varphi_\theta = \arctg\left(-\frac{b}{a} \cot \theta\right).$$

З останньої формули отримаємо $\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right)$ і, очевидно, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Таким чином, у той час коли радіус-вектор $\vec{v}$ точки еліпса рухається по дузі $\varphi \in \left[0, \arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right)\right]$ (обхід проти годинникової стрілки), дотична $\vec{t}$ до лінії утворює кути $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$. А отже, як зазначено у роботі [10]

зафарбувати комірки, що відображають задану дугу еліпса, можна рухаючись від початкової точки ($\theta = \pi/2$ еквівалентно $\varphi = 0$) у напрямку проти годинникової стрілки, переходячи від комірки до комірки з використанням лише переходів у напрямках $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$, причому перехід у напрямку $\vec{s}_2$ не може відбуватися двічі підряд.

У силу симетрії еліпса відносно осі абсцис $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right)$ можемо узагальнити правило зафарбовування комірок на дугу $\varphi \in \left[-\arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right), \arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right)\right]$.

Якщо радіус-вектор $\vec{v}$ точки еліпса рухається по дузі $\varphi \in \left[-\arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right), \arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right)\right]$ (обхід проти годинникової стрілки), то дотична $\vec{t}$ до лінії утворює кути $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$ і зафарбувати комірки гексагональної сітки, що відображають задану дугу, можна рухаючись від початкової точки ($\theta = \pi/3$ еквівалентно $\varphi = -\arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right)$) у напрямку проти годинникової стрілки з використанням лише переходів у напрямках $\vec{s}_1$ (що відповідає $\theta = 2\pi/3$) і $\vec{s}_2$ (що відповідає $\theta = \pi/3$). Причому, перехід у напрямку $\vec{s}_1$ не може відбуватися двічі підряд при $\theta \in [\pi/3, \pi/2]$, а перехід у напрямку $\vec{s}_2$ не може відбуватися двічі підряд при $\theta \in [\pi/2, 2\pi/3]$.

Розглянемо дугу еліпса, до якої дотична $\vec{t}$ утворює кути $\theta \in [2\pi/3, \pi]$ (обхід проти годинникової стрілки). З наведених раніше міркувань і геометрії еліпса випливає, що радіус

вектор $\vec{v}$ точки еліпса, який відповідає цій дузі, утворює кути $\varphi \in [\arctg(b/a\sqrt{3}), \pi/2]$ і, як було доведено у [10] зафарбовування (обхід проти годинникової стрілки) вимагає лише двох переходів у напрямках $\vec{s}_1$ ($\theta = 2\pi/3$) та $\vec{s}_4$ ($\theta = \pi$). Причому перехід у напрямку $\vec{s}_4$ не може відбуватися двічі підряд при $\theta \in [2\pi/3, 5\pi/6]$, а перехід у напрямку $\vec{s}_1$ не може відбуватися двічі підряд при $\theta \in [5\pi/6, \pi]$.

Використаємо тепер симетрію еліпса відносно осей декартової системи координат. З попередніх досліджень і властивостей симетрії випливає, що у кожному з секторів еліпса (див. рис.4), у яких вектор дотичної $\vec{t}$ утворює кути $\theta \in \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}n, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}n\right]$, $n = 0..5$ а це еквівалентно тому, що радіус вектор $\vec{v}$ точки еліпса розбиває еліпс на сектори критичними точками

$$\varphi_\theta \in \left\{ -\arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right), \arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right), \frac{\pi}{2}, \pi - \arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right), \frac{3\pi}{2}, 2\pi - \arctg\left(\frac{b}{a\sqrt{3}}\right) \right\},$$

існує лише по два напрямки переходу. Причому, якщо розділити кожний із зазначених секторів $\theta \in \left[\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}n, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}n\right]$ навпіл, то на кожній з утворених ділянок, по одному з двох можливих напрямків, виконати два переходи підряд неможливо.

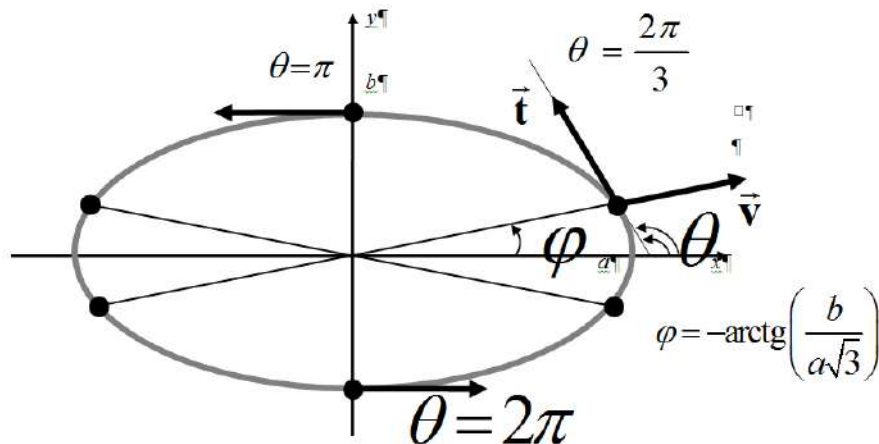


Рисунок 4 – Розбиття еліпса на сектори, у кожному з яких можливі лише по два напрямки переходу.

Зауважимо, що для простоти програмної реалізації алгоритму необхідне швидке обчислення значень трансцендентної функції $\arctg(z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Стандартні методи апроксимації $\arctg(z)$ [12,13]: модель [12]

$$\arctg(z) \approx \frac{z}{1 + 0.28125z^2}$$

дає похибку $5 \cdot 10^{-3}$, при $-1 \leq z \leq 1$; інша модель [2]

$$\arctg(z) \approx \frac{\pi}{4}x + 0.273x(1 - |x|),$$

має похибку $4 \cdot 10^{-3}$, при $-1 \leq z \leq 1$.

Для значень z поза межами проміжку $-1 \leq z \leq 1$ використовується тотожність $\arctg(z) + \arctg(1/z) = \pi/2$.

Висновки

Розглянуто особливості формування еліпсів на гексагональному растрі, що дає можливість реалізувати ефективні алгоритми еліптичної інтерполяції. Визначено типи елементарних крокових приростів для різних ділянок екранної системи координат.

Список літератури

1. Романюк О. Н. Комп'ютерна графіка. Навчальний посібник / О. Н. Романюк — Вінниця: ВДТУ, 2001. — 129 с.
2. Романюк О. Н. Нові підходи до реалізації функцій колової інтерполяції / О. Н. Романюк, І. М. Якубішин, О. В. Сіденко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2000. — № 3. — С. 85—88.
3. Романюк О. Н. Усунення ефекту аліазингу границі кола / О. Н. Романюк, М. С. Курінний, А. А. Сахно // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2001. — № 2. — С. 86—89.
4. [Романюк О. Н. Метод антиаліазингу зображень відрізків прямих з використанням додаткових оцінювальних функцій / О. Н. Романюк, О. В. Мельник, О. В. Романюк // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. - 2014. - № 2. - С. 210-214](#)
5. Романюк О. Н. Антиаліазинг зображення кривих другого порядку, заданих загальним рівнянням / О. Н. Романюк, М. С. Курінний // Проблеми інформатизації та управління: Збірник наукових праць. — 2007. — Т. 8. — № 3. — С. 11—19..
6. Романюк О. Н. Математичні моделі пікселів для задач антиаліазингу / О. Н. Романюк, М. С. Курінний // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. — 2002. — № 3. — С. 35—47.
7. Романюк О. Н. Високопродуктивна конусна модель пікселя для антиаліазингу відрізків прямих / О. Н. Романюк, М. М. Курінний, Н. С. Костюкова, О. В. Мельник // [Наукові праці Донецького національного технічного університету. Сер. : Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. - 2011. - Вип. 14. - С. 216-220.](#)
8. Романюк О.Н. Особливості гексагональної моделі пікселя/ О.Н. Романюк, О.В. Мельник// Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах 2014, № 1. — С. 91—95
9. [Романюк О. Н. Формування відрізків прямих на гексагональному растрі / О. Н. Романюк, О. В. Мельник, О. В. Романюк // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія : Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. - 2016. - Вип. 2. - С. 69-72.](#)
10. [Романюк О. Н. Реалізація кругової інтерполяції при використанні гексагонального растру / О. Н. Романюк, О. В. Мельник, О. В. Романюк // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія : Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка. - 2017. - № 1. - С. 53-58.](#)
11. Романюк О.Н. Визначення типів крокових приростів для побудови кола на гексагональному растрі/, О.В. Мельник, І.В. Абрамчук// Вісник Хмельницького національного університету, №3, 2017 (249). - С. 172-176.
12. R. Lyons, "Another contender in the arctangent race," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 20, no. 1, pp. 109–111, 2004.
13. S. Rajan, S. Wang, R. Inkol, A. Joyal, "Efficient approximations for the arctangent function," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 23, no. 3, pp. 108–111, 2006.

References

1. Romanyuk O. N. Komp'yuterna hrafika. Navchalnyy posibnyk / O. N. Romanyuk - Vinnytsya: VDTU, 2001. - 129 s.
2. Romanyuk O. N. Novi pidkhody do realizatsiyi funktsiy kolovoy interpoliyatsiyi / O. N. Romanyuk, I. M. Yakubishyn, O. V. Sidenko // Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu. - 2000. - № 3. - S. 85-88.
3. Romanyuk O. N. Usunennya efektu aliazynhu hranysti kola / O. N. Romanyuk M. S. Kurinnyy, A. A. Sakhno // Vymiryuvalna ta obchyslyuvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh. - 2001. - № 2. - S. 86-89.
4. Romanyuk O. N. Metod antyaliazynhu zobrazen vidtyskiv pryamykh z vykorystannyam dodatkovykh otsinyuvalnykh funktsiy / O. N. Romanyuk O. V. Melnyk, O. V. Romanyuk // Vymiryuvalna ta obchyslyuvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh. - 2014. - № 2. - S. 210-214
5. Romanyuk O. N. Antyaliazynh zobrazhennya kryvykh druhooho poryadku, zadanykh zahalnym rivnem / O. N. Romanyuk M. S. Kurinnyy // Problemy informatyzatsiyi ta upravlinnya: Zbirnyk naukovykh prats. - 2007. - T. 8. - № 3. - S. 11-19 .

6. Romanyuk O. N. Matematychni modeli pikseliv dlya zadach antyaliayzynhu / O. N. Romanyuk M. S. Kurinni // Visnyk Zhytomyrskoho inzhenerno-tehnolohichnoho instytutu. - 2002. - № 3. - S. 35-47.
7. Romanyuk O. N. Vysokoproduktyvna konusna model piksela dlya antyaliayzynhu vidrizkiv pryamykh / O. N. Romanyuk M. M. Kurinnyy, N. S. Kostyukova, O. V. Melnyk // Naukovi pratsi Donetskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu. Ser. : Informatyka, kibernetyka ta obchyslyuvalna tekhnika. - 2011. - Vyp. 14. - S. 216-220.
8. Romanyuk O.N. Osoblyvosti heksahonalnoyi modeli piksela / O.N. Romanyuk, O.V. Melnyk // Vymiryuvalna ta obchyslyuvalna tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh 2014, № 1. - S. 91-95
9. Romanyuk O. N Formuvannya vidbytkiv pryamykh na heksahonalnyy raster / O. N. Romanyuk O. V. Melnyk, O. V. Romanyuk // Naukovi pratsi Donetskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu. Seriya: Informatyka, kibernetyka ta obchyslyuvalna tekhnika. - 2016 r. - Vyp. 2. - S. 69-72.
10. Romanyuk O. N. Realizatsiya kruhovoyi interpolatsiyi pry vykorystanni heksahonalnoho rasteru / O. N. Romanyuk O. V. Melnyk, O. V. Romanyuk // Naukovi pratsi Donetskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu. Seriya: Informatyka, kibernetyka ta obchyslyuvalna tekhnika. - 2017. - № 1. - S. 53-58.
11. Romanyuk O.N. Vyznachennya typiv krokovoyi pryrostiv dlya pobudovy kola na heksahonalnyy raster / O.V. Melnyk, I.V. Abramchuk // Visnyk Khmelnytskoho natsionalnoho universytetu, №3, 2017 (249). - S. 172-176.
12. R. Lyons, "Another contender in the arctangent race," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 20, no. 1, pp. 109–111, 2004.
13. S. Rajan, S. Wang, R. Inkol, A. Joyal, "Efficient approximations for the arctangent function," IEEE Signal Processing Magazine, vol. 23, no. 3, pp. 108–111, 2006.

Надійшла до редакції 06.06.2018

O.N. ROMANYUK, N.S. KOSTYUKOVA, I.V. ABRAMCHUK, A.V. MELNIK

Vinnitsia National Technical University, Donetsk National Technical University

FEATURES OF FORMATION OF ELLIPSES ON A HEXAGONAL RASTER

Ellipses are most common graphic primitives, so the development of elliptic interpolation algorithms is an urgent task. Forming the trajectory of curves on a hexagonal raster leads to their better smoothness.

The features of the formation of ellipses on a hexagonal raster are considered, which makes it possible to implement effective algorithms of elliptic interpolation. The types of incremental step increments for different sections of the screen coordinate system are determined.

The obtained results simplify the computational process by eliminating additional calculations from it for analysis of the orientation of step moving.

When determining the types of step increments, the symmetry properties of the ellipses are used.

Research results can be used in highly realistic computer graphics systems, in particular, for constructing graphic scenes and implementing antialiasing procedures.

Keywords: *ellipse, hexagonal raster, estimation function method, elliptic interpolation, stepper trajectory.*

А. Н. РОМАНИЮК, Н.С. КОСТЮКОВА, И.В. АБРАМЧУК, А.В. МЕЛЬНИК

Винницкий национальный технический университет, Донецкий национальный технический университет, Украина

ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЛИПСОВ НА ГЕКСАГОНАЛЬНОМ РАСТРЕ

Эллипсы относят к наиболее распространенным графическим примитивам, поэтому разработка алгоритмов эллиптической интерполяции является актуальной задачей. При формировании траектории кривых на гексагональном растре лучше достигается их сглаженность.

Рассмотрены особенности формирования эллипсов на гексагональном растре, что дает возможность реализовать эффективные алгоритмы эллиптической интерполяции. Определены типы элементарных шаговых приростов для различных участков экранной системы координат.

При определении типов шаговых приростов использовано свойств симметрии эллипсов.

Ключевые слова: *эллипс, гексагональный растр, метод оценочной функции, эллиптическая интерполяция, шаговая траектория.*