

УДК 519.65:514.182.7:004.92

О. В. Фролов, канд. техн. наук, доц.
Донецький національний технічний університет, м. Покровськ, Україна
frolgx@gmail.com

Моделювання похибок апроксимації плоских кривих ламаними побудованими за асимптотично оптимальним алгоритмом інтерполяції

В роботі розглядається апроксимація плоских параметричних кривих ламаними за асимптотично оптимальним алгоритмом інтерполяції в хаусдорфовій метриці з обчисленням похибок наближення. Досліджено вплив кількісної характеристики ступеню дискретизації інтегральної функції - регулятора вузлів інтерполяції на показники розподілу похибок. Наведена теоретична основа досліджень – рівняння, що визначають кількість вузлів інтерполяційної ламаної та умови отримання значень параметру кривої для визначення вузлів асимптотично оптимальної вибірки. Запропоновано алгоритм отримання значень ряду, складений на основі чисельного інтегрування функції розподілу та лінійної інтерполяції її значень. Обґрунтовано методику оцінки результатів моделювання апроксимації реальних кривих. Проведено моделювання апроксимації реальних кривих та досліджено вплив на показників розподілу похибок кількісної характеристики ступеню дискретизації інтегральної функції - регулятора вузлів.

Ключові слова: інтерполяція, ламана, еквідистанта, інтегрування, плоска параметрична крива, похибка апроксимації.

DOI: 10.31474/1996-1588-2020-1-30-58-68

Вступ

Досить велике коло прикладних застосувань потребує переходу від «криволінійного» представлення об'єктів до їх опису у вигляді полігонів чи відрізків прямих ліній. Це задачі рендерінгу, теселяції, знаходження перетинів кривих ліній та поверхонь. Більшість систем управління верстатів з ЧПК та 3D принтерів також підтримують лише обмежену множину команд інтерполяції, серед яких найбільш поширеними є команди лінійного переміщення, переміщень по дугам кіл та гвинтових ліній. Отже, відтворення безперервних геометричних об'єктів, таких як криві лінії та поверхні, на комп'ютерах, станках чи принтерах потребує дискретизації, тобто представлення у вигляді кінцевої множини точок (вузлів). Ця множина надалі перетворюється у пікселі, або з'єднується простішими лініями (найчастіше, прямими). Звичайно, при цьому виникає проблема оптимізації кількості вузлів та їх розташування уздовж кривої чи поверхні, що відтворюється. Таким чином, розробка ефективних алгоритмів відтворення кривих ламаними з урахуванням точності апроксимації та оптимізації кількості вузлів становить актуальну наукову проблему.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Розробці алгоритмів шматко-лінійного відтворення кривих присвячена багаточисельна множина досліджень.

Ці дослідження можливо поділити на роботи з інтерполяції кривих, коли вузли ламаної знаходяться на первісній кривій, та дослідження з апроксимації кривих, під якими будемо розуміти розташування цих вузлів і самої ламаної в межах границь «допуску», що визначається точністю відтворення. Інтерполяція з нерівномірним вибором вузлів, що адаптується під форму кривої була розглянута в роботі [1]. Зазвичай при цьому виконується наступна процедура: береться вихідний упорядкований набір точок кривої, отриманий первісним рівномірним обранням вузлів дискретизації; вихідний набір ділиться на інтервали; для кожного інтервалу проводиться перевірка внутрішніх вузлів згідно обраної стратегії визначення локального сплюснення; в залежності від результату перевірку інтервал, або розділяється на дві частини з подальшою рекурсивною перевіркою сплюснення, або крайні точки інтервалу зберігаються в окремому списку вузлів, що відповідають критерію сплюснення.

Вибірка точок кривих на основі їх репараметризації в залежності від кривини та змішаної параметризації довжиною дуги та кривиною з рівними вагами була розглянута в роботі [2]. Схожий підхід до відбору точок кривої наведений в [3], де за змішаний критерій було взято довжину дуги та енергію згину кривої (яка залежить від квадрату кривини). Згадані методи [2,3] потребують чисельного інтегрування та розв'язання системи нелінійних рівнянь.

Огляд та аналіз методів лінійної інтерполяції параметричних кривих стосовно їх подальшого

використання в системах верстатів з ЧПК наведений в роботі [4].

Питання апроксимації плоскої кривої заданої в явній формі відрізками прямих ліній було розглянуто в роботі [5]. Підхід до розв'язання проблеми, що був застосований в [5], базується на застосуванні метода найменших квадратів та мінімізації функції, що містить вихідну криву, кутові коефіцієнти відрізків та межі зміни аргументу – координати x . Цей підхід потребує розв'язання системи (в загальному випадку нелінійних) рівнянь чисельними методами. В роботі [6] для мінімізації вказаної функції було застосовано методи динамічного програмування.

Апроксимація дискретного набору точок на основі алгоритму роз'єднання та злиття сегментів ліній задовольняючих розробленому критерію розглядалась в роботі [7].

В роботі [8] при побудові шматково-лінійної апроксимації параметричних кривих був застосований метод оптимізації рою часток.

Загальні алгоритми асимптотичної оптимальної інтерполяції та апроксимації кривих технологічними лініями (в т. ч. ламаними) було розглянуто в роботі [9]. Застосуванню асимптотично оптимального алгоритму лінійної інтерполяції до задач розрахунку траєкторій обробки на верстах з ЧПК присвячена робота [10]. Особливістю такого підходу є те, що він дає ламану з найменшою кількістю ланок. Проаналізувавши роботи [9, 10] можливо виділити ряд невирішених питань, а, саме: обґрунтування кількості точок попередньої дискретизації кривої; обрання методу чисельного інтегрування при обчисленні значень функції регулятора вузлів та методу інтерполяції значень цієї функції; обґрунтування обчислювальних формул дискретних аналогів похідних при обчисленні значень інтегральної функції та ін.

Метою роботи є вдосконалення методів використовуваних алгоритмом асимптотично оптимальної шматково-лінійної інтерполяції плоских параметричних кривих на основі дослідження впливу їх параметрів на розподіли похибок апроксимації при моделюванні реальних кривих ліній.

Асимптотичні оптимальні моделі інтерполяції кривих ламаними в хаусдорфовій метриці

Теоретичною базою досліджень, викладених в даному розділі, є монографія [9], де в формі теорем було доведено асимптотичну оптимальність моделей для загальних випадків подання кривих.

Далі будемо вважати, що криві, які відтворюються, мають представлення в параметричній векторній формі у вигляді єдиної дуги:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t) \quad (x = x(t), y = y(t)), \quad (1)$$

або складаються з декількох дуг зі спільною параметризацією, наприклад, мають форму сплайну:

$$S(t) = \sum_{j=1}^k a_j B_j(t). \quad (2)$$

Асимптотично оптимальною в хаусдорфовій метриці, згідно доведеному в [9], вважається інтерполяція плоскої кривої ламаною, що базується на виборі вузлів на основі репараметризації кривої за наступною схемою.

Визначається кількість ланок інтерполяції за формулою:

$$m = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon}} \int_0^T \Phi(t) dt \right\rceil + 1, \quad (3)$$

де $[a]$ – ціла частина числа a ;

ε – похибка інтерполяції, якій відповідає допустима хаусдорфова відстань між кривою та ламаною;

t – параметр кривої з областю зміни $[0, T]$;

$\Phi(t)$ – функція розподілу, що має такий вигляд:

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{|x''(t)y'(t) - x'(t)y''(t)|}{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. \quad (4)$$

Значення параметру кривої – t_j , яким відповідають вузли інтерполяції, визначається з умов:

- при $\Phi(t) \neq 0, t \in [0, T]$

$$\int_0^{t_j} \Phi(t) dt = \frac{j}{m} \int_0^T \Phi(t) dt, \quad (j = 0, 1, \dots, m) \quad (5)$$

- при наявності нульових значень функції $\Phi(t)$ до неї додається величина $m^{-\alpha}$ і рівняння розподілу перетворюється на

$$\int_0^{t_j} (\Phi(t) + m^{-\alpha}) dt = \frac{j}{m} \int_0^T (\Phi(t) + m^{-\alpha}) dt, \quad (j = 0, 1, \dots, m), \quad (6)$$

де α – стала, що згідно [9] може приймати значення в межах від 0 до 2/3.

Оскільки, права частина рівняння (5) або (6) являє собою монотонну зростаючу дискретну послідовність значень, то у граничному випадку при $m \rightarrow \infty$ цю послідовність можливо розглядати як змінну s , а вираз (5) або (6) – як рівняння репараметризації. Якщо пожити, наприклад, для випадку рівняння (6)

$$\Psi(t) = \int_0^t (\Phi(u) + m^{-\alpha}) du, \quad (7)$$

залежність між параметрами матиме такий вигляд:

$$t = \Psi^{-1}(s), \quad (8)$$

де Ψ^{-1} – функція, зворотна до Ψ .

Природньо, такий підхід можливий тільки, коли Ψ монотонно зростає. До того ж найчастіше інтеграл правої частини (7) не має кінцевого виразу. Це призводить до необхідності дискретизації

значень інтегральної функції на основі чисельного інтегрування правої частини (7).

Отримання вузлів асимптотично оптимального розбиття кривої

Як зазначалось раніше, рівняння (5) або (6), що регулюють значення параметру розбиття, в загальному потребують розв'язання за допомогою чисельних методів. Сутність такого підходу зводиться до інтерполяції значень інтегральної функції розподілу. Для цього може бути запропонований наступний алгоритм.

Поперед усього, призначимо кількість інтервалів первісної дискретизації інтеграла правої частини рівнянь (5) або (6), яку позначимо через N .

Далі визначимо шаг рівномірної сітки дискретизації $h = \frac{T}{N}$ та отримаємо набір точок кривої:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}\left(\frac{i}{N}\right), (i = 0, 1, \dots, N), \quad (12)$$

що відповідають дискретному ряду значень параметру кривої $\Delta_N^t \left\{ t_i = 0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, T \right\}$.

Для отримання значень послідовності вузлів:

$$\Delta_m^t = \{t_{j,m}^*\} (j = 0, 1, \dots, m)$$

асимптотично оптимального розбиття кривої одним із відомих чисельних методів інтегрування обчислимо послідовність значень $s_i = \Psi(t_i)$, $t_i \in \Delta_N^t$, ($i = 0, 1, \dots, N$) функції (7) у вузлах первісної рівномірної сітки по t – Δ_N (див. рис. 1). І, далі, інтерполюючи ці значення між вузлами, знайдемо значення зворотної функції $t_j = \Psi^{-1}(s_j)$ при рівномірному вже, згідно правій частині (5) або (6), розподілу значень s_j від 0 до $s_N = \Psi(t_N)$.

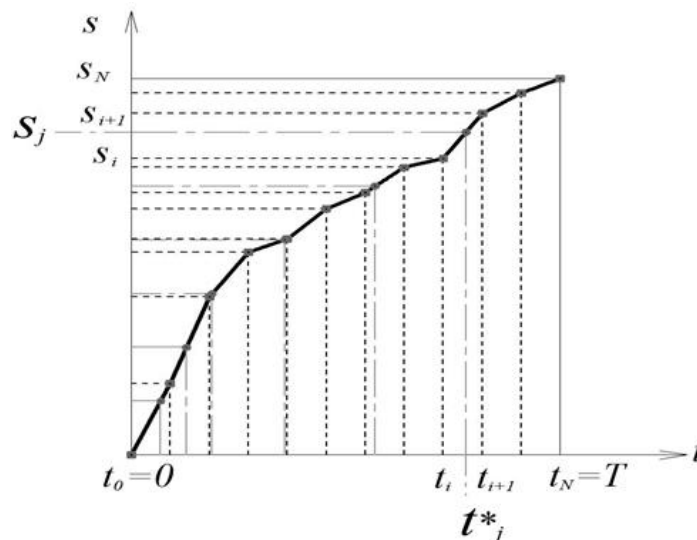


Рисунок 1 – Визначення значень параметру кривої для асимптотично оптимальної вибірки

При цьому кількість ланок m асимптотично оптимального розбиття, згідно (3), набуде значення:

$$m = \left\lceil \frac{s_N}{\sqrt{8\varepsilon}} \right\rceil + 1. \quad (13)$$

Значення вузлів рівномірної сітки по s – $\Delta_m^s \{s_j, j = 0, 1, \dots, m\}$ обчислимо за виразом:

$$s_j = \frac{j s_N}{m}. \quad (14)$$

Визначимо значення параметру кривої – $t_{j,m}^*$, які утворюють асимптотично оптимальну послідовність вузлів. Найпростішим таким підходом є побудова штатково-лінійної інтерполяції функції $s = \Psi(t)$ за її значеннями на первісній рівномірній сітці Δ_N^t . Знаходячи перетин ліній сітки $s = s_j$ із побудованим на сітці Δ_N графіком $\Psi(t)$,

знайдемо відповідні значення послідовності Δ_m^t з наступного виразу оберненої залежності:

$$t_j^* = t_i + \frac{T(s_j - s_i)}{N(s_{i+1} - s_i)}, \text{ при } s_i \leq s_j \leq s_{i+1} (t_i \in \Delta_N^t). \quad (15)$$

Критерії оцінки достовірності результатів моделювання

Перед тим, як перейти до обговорення результатів моделювання – побудови апроксимуючих ламаних для конкретних кривих ліній за різними варіантами алгоритмів, розглянемо питання оцінки забезпечення необхідної точності наближення.

Для можливості оцінювання результатів моделювання у порівнянні із максимальною допустимою відстанню між кривою на ламаною – ε , що її апроксимує, може бути застосований метод

еквідистант до кривої – [9]. Сутність цього методу полягає в побудові разом із ламаною внутрішньої та зовнішньої еквідистант до відтвореної кривої за їх загальними параметричними рівняннями.

Метод еквідистант надає можливості візуального контролю за поведінкою ламаною відносно меж ε – допустимого коридору вихідної кривої. Однак, суттєвими недоліками такого підходу є відсутність кількісної оцінки якості наближення, складність такого контролю зі зменшенням похибки i , як слідство, із зростанням кількості ланок апроксимуючої ламаної.

Щоб усунути недоліки метода еквідистат, розглянемо можливості оцінки на основі кількісної характеристики якості відтворення. Природньо за таку характеристику прийняти максимальну відстань між ланкою ламаної l_j асимптотично оптимального розбиття та точками відповідної їй дуги кривої – $\Gamma_{t_{j-1}}^*$, яку апроксимує ламана, та порівнювати її з заданою похибкою наближення. Отже, склавши ряд таких відстаней для усієї ламаної $\{d_{j,m}^{\max}\} (j=1, \dots, m)$, де $d_j^{\max} = \max\{d(\Gamma_{t_{j-1}}^*, l_j)\}$

можливо представити похибки для всієї кривої графічно у вигляді точкової діаграми або гістограми, де по осі абсцис відкладати номери ланок ламаної, а по осі ординат – відповідну відстань від кривої до ламаної.

У випадку інтерполяційної ламаної початкова та кінцеві точки її довільної ланки збігаються з точками вхідної кривої при $t = t_{j-1}^*$ та $t = t_j^*$. Таким чином, дуга кривої, яку інтерполює поточна ланка, визначається інтервалом зміни параметру кривої – (t_{j-1}^*, t_j^*) .

Відстань між прямою j -ї ланки інтерполяційної ламаної та точкою $M(x_M(t), y_M(t))$ при $t \in (t_{j-1}^*, t_j^*)$ кривої, визначається рівністю:

$$d_j(t) = \left| \frac{A_j x_M + B_j y_M + C_j}{\sqrt{A_j^2 + B_j^2}} \right|, \quad (22)$$

де коефіцієнти $A_j = y_{j-1} - y_j$, $B_j = x_j - x_{j-1}$, $C_j = y_j x_{j-1} - x_j y_{j-1}$ залежать від координат кінцевих точок ланки.

Щоб отримати локальні екстремуми функції (22), диференціюємо праву частину (22) по t та дорівнявши її нулеві, отримаємо

$$A_j x'(t) + B_j y'(t) = 0.$$

Отримавши корені цього рівняння, що лежать в досліджуваному інтервалі значень, обираємо з них максимальне значення – $d_j^{\max}$.

Якщо вхідна крива є складеною із декількох елементарних дуг, вузлові точки інтерполяційної ламаної можуть належати до різних складових дуг. Це, значить, що відстань між кривою та ламаною

потрібно визначати серед усіх дуг кривої, що знаходяться в межах вузлів інтерполяції такої ланки. Наприклад, для випадку B – сплайну з відкритим вузловим вектором $T(t_i \in [0, T])$ знаходимо наступні значення вузлового вектору $t_i \geq t_j$

(при $t_{i-1} < t_j$) та $t_{i-k} \geq t_{j-1}$, (при $t_{i-k-1} < t_{j-1}$), які відповідають j -ї ланці ламаної. Для кожної дуги сплайну в межах значень вузлового вектору $[t_{i-k-1}, t_i]$ знаходимо відстані за наведеним вище алгоритмом – $\{d_k^{\max}\}$. І, далі обираємо максимальне з них – $d_j^{\max} = \max\{d_k^{\max}\}$.

Результати моделювання

Моделювання відтворення ламаними за асимптотичними оптимальними алгоритмами інтерполяції та апроксимації конкретних кривих ставило за мету дослідити вплив різних варіантів цих алгоритмів на якість результатів відтворення.

Перед початком розгляду результатів моделювання зупинимось на питанні їх оцінки в залежності від заданої (яку необхідно забезпечити) точності наближення. Розподіл значень похибок або відстаней від кривої до ланок ламаної звісно залежить та порівнюється із значенням допустимої похибки наближення. Щоб спростити це порівняння та мати змогу аналізувати результати отримані при різних значеннях точності, введемо поняття відносної похибки наближення ланки ламаної до кривої, за яку візьмемо відношення максимальної відстані від ланки ламаної до дуги кривої, яку вона апроксимує, до значення заданої допустимої похибки наближення. Це означає, що значення відносної похибки в межах від 0 до 1 задовольняють заданій точності апроксимації, а значення більші за одиницю виходять за рамки допустимої точності.

Обговорення результатів моделювання почнімо з дослідження чинників, що пов'язані з інтерполяцією інтегральної функції та її впливом питання впливу на точність відтворення кривої. До цих чинників можна віднести: кількість вузлів первісної сітки дискретизації інтерполюваної інтегральної функції – N , похибка обчислення значень функції Ψ у вузлах цієї сітки – δ^Ψ , метод інтерполяції. В рамках даної роботи обмежимося вивченням впливу на результати відтворення кількісної характеристики N при визначеній рівнянням (15) лінійної інтерполяції функції – регулятора вузлів.

Для моделювання відтворення було обрано дві криві лінії (замкнута та незамкнута). Перша крива (рис. 2а) є кривою Без'є шостого порядку з координатами точок опорного полігону (0.0; 0.0), (0.55; 6.9), (11.8; 9.2), (16.5; 6.25), (22.0; 3.2), (24.5; 0.0), (18.0; -1.0). Друга крива (рис. 2б) носить назву раулика Паскаля та має параметри: радіус вихідного кола – 2.5, зміщення – 14. Обидві криві мають

опуклу форму без точок перегину, що виключає необхідність розгляду питання оптимізації значення параметру α в рівнянні (6).

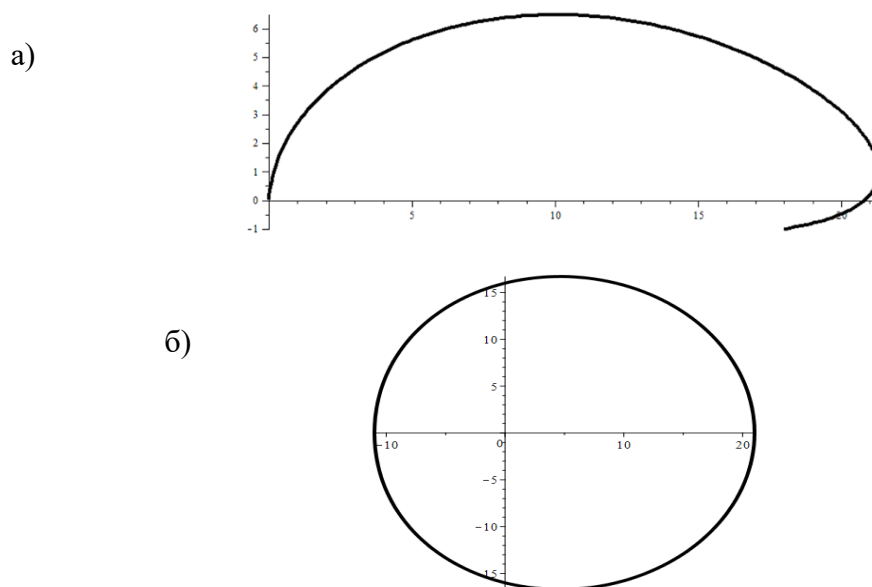


Рисунок 2 – Криві лінії обрані для відтворення ламаними: а) крива Без'є, б) равлик Паскаля

В роботі [9] при визначенні значення N використовувалась наступна залежність

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1, \quad (23)$$

яка враховує тільки допустиму похибку відтворення та не залежить від властивостей самої кривої. До того ж цей вираз не залежить від того, яким чином відбувається інтерполяція значень

інтегральної функції на проміжках між вузлами її дискретизації – прямими лініями, як в даній роботі, або іншими методами. З метою подальшого порівняння наведемо ряд значень похибок апроксимації та відповідні їм за виразом (23) значення кількості вузлів дискретизації, що представимо в табл. 1.

Таблиця 1 – Ряд значень кількості вузлів дискретизації, отриманий за виразом (23)

Похибка ε	0.0001	0.001	0.005	0.0075	0.01	0.025	0.05	0.1
Кількість вузлів - N	10001	1001	201	134	101	41	21	11

Для визначення необхідної кількості вузлів за розглядуваним методом інтерполяції і подальшого порівняння з результатами табл. 1, візьмемо за основу оцінку похибки лінійної інтерполяції та відштовхуючись від нею будемо визначати кількість точок дискретизації, одночасно фіксуючи вплив на розподіл похибок відтворення. Згідно з [12] оцінка максимальної похибки лінійної інтерполяції на відрізьку $[t_{i-1}, t_i]$ має вигляд

$$\delta_i = \max_{[t_{i-1}, t_i]} |f(t) - L_1(t)| \leq h^2 \frac{M_{2,i}}{8}, \quad (24)$$

$$\text{де } M_{2,i} = \max_{[t_{i-1}, t_i]} |f''(t)|.$$

Враховуючи, що при сталому кроці дискретизації $h = \frac{T}{N}$ та розповсюджуючи оцінку на всі інтервали $M_2 = \max_T |f''(t)|$ знайдемо:

$$N \geq T \sqrt{\frac{M_2}{8\delta}}.$$

Для визначеності приймемо:

$$N = \left\lceil T \sqrt{\frac{M_2}{8\delta}} \right\rceil + 1. \quad (25)$$

При такому підході залишається невизначеним питання вибору значення похибки інтерполяції інтегральної функції – δ . Оскільки від цього значення буде залежати отримана точність наближення кривої, почнемо з оцінки $\delta = \varepsilon$, далі зменшуючи цю величину. В табл. 2 - 5 наведено для характеристики розподілів похибок апроксимації обраних кривих при сталому значенні похибки інтегрування $\delta^\Psi = 0.5 \cdot 10^{-10}$ при отриманні значень Ψ_i . Із представлених результатів слідує, що при значеннях $\delta = \varepsilon / 64 \dots \varepsilon / 256$ похибка апроксимації стабілізувалася знаходячись в межах діапазону

допустимих значень досить близько до його верхньої границі – 0.9...0.98. Збільшення кількості на порядок не давало значного впливу на результати

апроксимації. Більш наочно уявити результати можна безпосередньо порівнявши діаграми розподілів похибок при різних значеннях δ , зобразивши їх в одному масштабі – рис. 3 та 4.

Таблиця 2 – Результати відтворення кривої для рис. 2а при $\varepsilon=0.001$ (кількість вузлів апроксимації $m = 122$)

Найменування показника	Значення похибки інтерполяції інтегральної функції, δ								
	ε	$\varepsilon/4$	$\varepsilon/8$	$\varepsilon/16$	$\varepsilon/32$	$\varepsilon/64$	$\varepsilon/128$	$\varepsilon/256$	ε^2
Максимальна відносна похибка	0.989389	0.974665	0.972353	0.972083	0.971481	0.971236	0.971281	0.97122	0.9712
Мінімальна відносна похибка	0.953614	0.967626	0.969393	0.969849	0.970404	0.970604	0.97069	0.970703	0.970723
Розмах відносної похибки	0.035775	0.007039	0.002959	0.002234	0.001077	0.000632	0.000591	0.000516	0.00047
Середнє значення відносної похибки	0.970928	0.970912	0.970915	0.970911	0.970911	0.970911	0.970909	0.970912	0.97091
Медіана відносної похибки	0.970446	0.97083	0.970909	0.970871	0.970897	0.9709	0.970899	0.970911	0.97091
Середнє квадратичне відхилення відносної похибки	0.007305	0.001057	0.000627	0.000401	0.000196	0.000141	0.000108	0.000101	$9.72 \cdot 10^{-5}$
Коефіцієнт варіації, %	0.752	0.109	0.065	0.041	0.020	0.015	0.011	0.010	0.010
Кількість вузлів інтерполяції інтегральної функції - N	73	144	203	287	405	572	808	1143	2257

Таблиця 3 – Результати відтворення кривої для рис. 2а при $\varepsilon=0.01$ (кількість вузлів апроксимації $m = 40$)

Найменування показника	Значення похибки інтерполяції інтегральної функції, δ								
	ε	$\varepsilon/4$	$\varepsilon/8$	$\varepsilon/16$	$\varepsilon/32$	$\varepsilon/64$	$\varepsilon/128$	$\varepsilon/256$	ε^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Максимальна відносна похибка	0.957806	0.914664	0.908149	0.90704	0.905889	0.905787	0.905455	0.905296	0.905335
Мінімальна відносна похибка	0.852996	0.894885	0.897718	0.899909	0.901159	0.901194	0.901487	0.901521	0.901572
Розмах відносної похибки	0.10481	0.019779	0.010431	0.00713	0.004729	0.004592	0.003968	0.003775	0.003763
Середнє значення відносної похибки	0.903137	0.902994	0.902989	0.902987	0.902986	0.902987	0.902987	0.902986	0.902986
Медіана відносної похибки	0.900533	0.901924	0.902694	0.902683	0.902828	0.902873	0.902906	0.902914	0.902931

Продовження таблиці 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Середнє квадратичне відхилення відносної похибки	0.022944	0.004583	0.002402	0.001687	0.00108	0.001008	0.000904	0.000875	0.000853
Коефіцієнт варіації, %	2.541	0.508	0.266	0.187	0.120	0.112	0.100	0.097	0.095
Кількість вузлів інтерполяції інтегральної функції - N	24	47	65	92	129	182	257	362	639

Таблиця 4 – Результати відтворення кривої для рис. 2б при $\epsilon=0.001$ (кількість вузлів апроксимації $m = 286$)

Найменування показника	Значення похибки інтерполяції інтегральної функції, δ								
	ϵ	$\epsilon/4$	$\epsilon/8$	$\epsilon/16$	$\epsilon/32$	$\epsilon/64$	$\epsilon/128$	$\epsilon/256$	ϵ^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Максимальна відносна похибка	1.00654	0.99214	0.98935	0.98913	0.98854	0.98828	0.98822	0.98821	0.98821
Мінімальна відносна похибка	0.9693	0.98395	0.98678	0.98681	0.98743	0.98768	0.98769	0.98773	0.98774
Розмах відносної похибки	0.03724	0.00819	0.00257	0.00232	0.00111	0.0006	0.00053	0.00048	0.00047
Середнє значення відносної похибки	0.98798	0.98797	0.987955	0.98797	0.987969	0.987963	0.987971	0.987967	0.987966
Медіана відносної похибки	0.98799	0.987935	0.98798	0.98798	0.98796	0.98796	0.98796	0.98797	0.98797
Середнє квадратичне відхилення відносної похибки	0.006474	0.001683	0.00052	0.00035	0.000216	0.000121	8.56 10-5	7.47 10-5	6.96 10-5
Коефіцієнт варіації, %	0.655	0.170	0.053	0.035	0.022	0.012	0.009	0.008	0.007
Кількість вузлів інтерполяції інтегральної функції - N	87	172	243	343	484	684	966	1366	7627

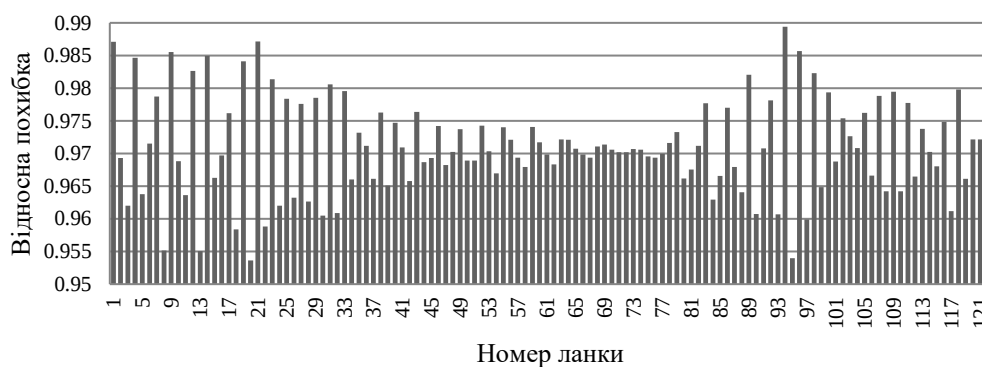
Таблиця 5 – Результати відтворення кривої для рис. 2б при $\epsilon=0.01$ (кількість вузлів апроксимації $m = 91$)

Найменування показника	Значення похибки інтерполяції інтегральної функції, δ								
	ϵ	$\epsilon/4$	$\epsilon/8$	$\epsilon/16$	$\epsilon/32$	$\epsilon/64$	$\epsilon/128$	$\epsilon/256$	ϵ^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Максимальна відносна похибка	1.031872	0.988514	0.979086	0.978574	0.977092	0.976432	0.976231	0.975974	0.975947

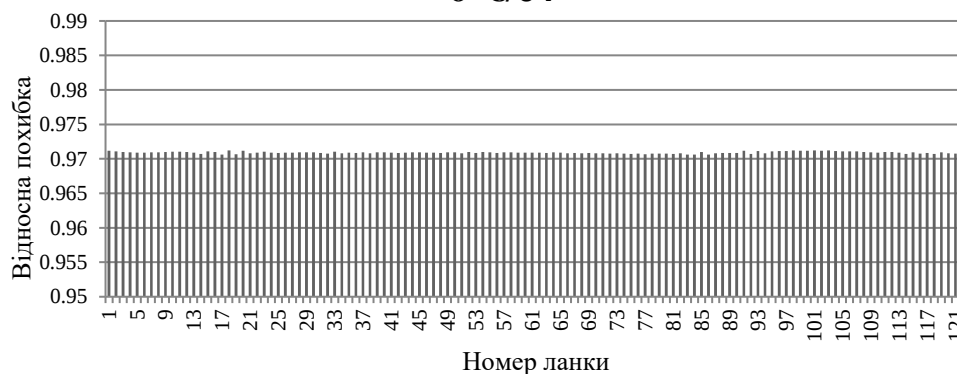
Продовження таблиці 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Мінімальна відносна похибка	0.918589	0.964541	0.971311	0,972784	0,974536	0.975064	0.975238	0.975292	0.975361
Розмах відносної похибки	0.113283	0.023973	0.007775	0.00579	0.002556	0.001368	0.000993	0.000682	0.000586
Середнє значення відносної похибки	0.975881	0.975791	0.975784	0.975784	0.975783	0.975783	0.975783	0.975783	0.975783
Медіана відносної похибки	0.975494	0.975165	0.976036	0.975893	0.97578	0.975793	0.975794	0.975787	0.975783
Середнє квадратичне відхилення відносної похибки	0.019654	0.005374	0.001766	0.001046	0.00058	0.000264	0.000185	0.000101	9 10-5
Коефіцієнт варіації, %	2.014	0.551	0.181	0.107	0.059	0.027	0.019	0.010	0.009
Кількість вузлів інтерполяції і інтегральної функції - N	28	55	78	109	154	217	307	433	764

$$\delta = \varepsilon$$



$$\delta = \varepsilon/64$$

Рисунок 3 – Розподіли похибок при відтворенні кривої для рис. 2а із точністю $\varepsilon=0.001$

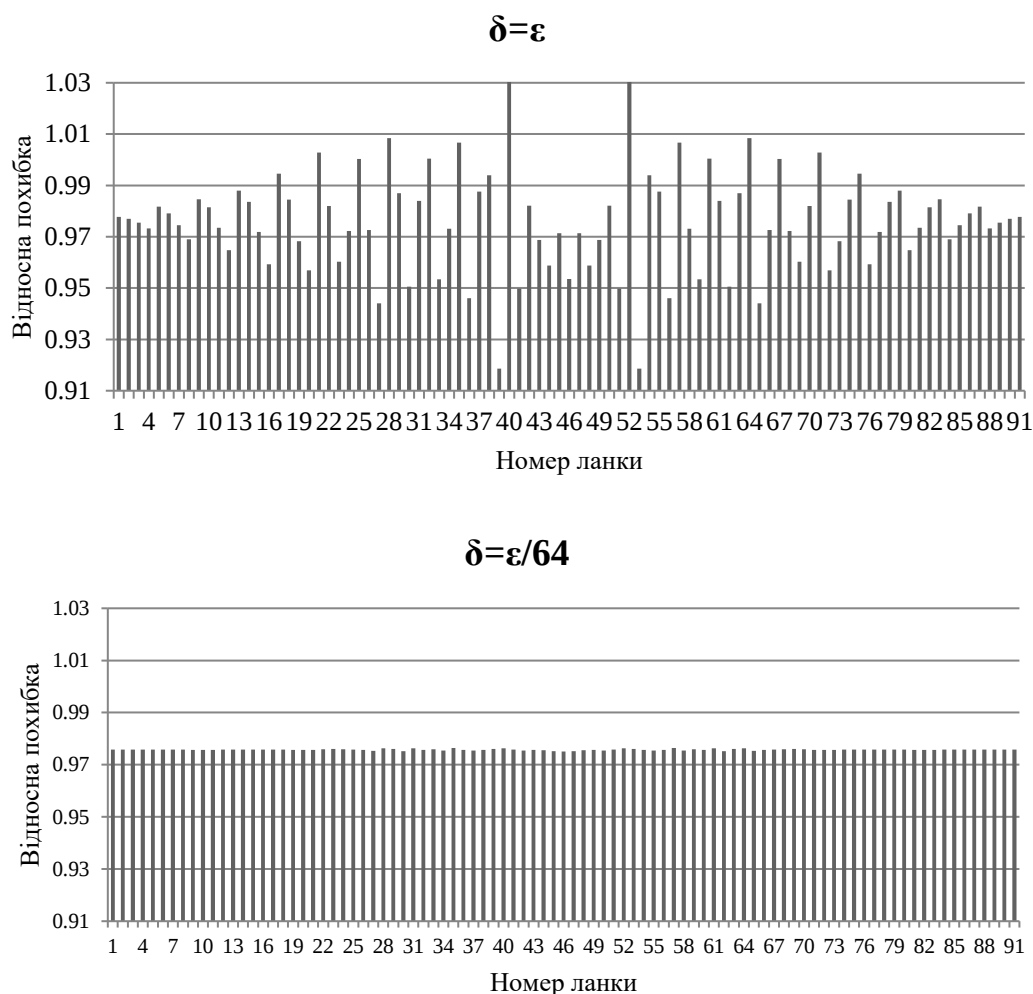


Рисунок 4 – Розподіли похибок при відтворенні кривої для рис. 2б з точністю $\varepsilon=0.01$

Обговорення результатів

Моделювання відтворення реальних плоских параметричних кривих опуклої форми ламаними за асимптотично оптимальним алгоритмом з лінійним методом інтерполяції значень інтегральної функції показало цілком прийнятні результати роботи алгоритму без перевищення допустимої похибки апроксимації у випадках достатнього ступеню дискретизації значень зазначеної функції.

Порівняння кількісних показників дискретизації за виразами (23) та (25) демонструє, що формула (23) може давати як підвищену, так і знижену кількість точок дискретизації по відношенню до значень стабілізації похибки апроксимації на рівні $\varepsilon/64$ (див. табл. 2 - 5).

Результати моделювання також дозволили встановити вплив підвищення якості апроксимації інтегральної функції за рахунок збільшення кількості вузлів дискретизації на результати відтворення кривої ламаною. Він полягає в покращенні показників розподілу похибок апроксимації за ланками апроксимуючої ламаної, а, саме зниження коефіцієнтів варіації та

середньоквадратичних відхилень цих рядів, що відображає стабілізацію значень похибок навколо середнього значення

Висновки

Проведене дослідження показали придатність застосованих розрахункових моделей до відтворення реальних кривих ліній. При цьому похибка апроксимації ланок ламаних стабілізувалась на рівні 90 – 98 відсотків від допустимої межі. Остання обставина свідчить про прагнення асимптотично оптимального алгоритму до верхньої границі ε – допустимого коридору апроксимації та до найменшої кількості ланок інтерполяційної ламаної.

Отримані результати мають широке коло застосувань пов'язаними з виготовленнями виробів складної форми та візуалізацією кривих та поверхонь на ПК.

Наукова новизна роботи полягає у виявленні сутності впливу первісної дискретизації інтегральної функції – регулятора вузлів на якість відтворення кривих ламаними за асимптотично оптимальним алгоритмом.

Список літератури

1. de Figueiredo L. H. Adaptive sampling of parametric curves. *Graphics Gems V*. 1995. P. 173-178.
2. Pagani L., Scott P. J. Curvature based sampling of curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*. 2018. Vol. 59. P. 32-48.
3. Hernández-Mederos V., Estrada-Sarlabous J. Sampling points on regular parametric curves with control of their distribution. *Computer Aided Geometric Design*. 2003. Vol. 20, Is. 6. P. 363-382.
4. Zhong W., Luo X., Chang W., Ding F., Cai Y. A real-time interpolator for parametric curves. *Computer International Journal of Machine Tools and Manufacture*. 2018. Vol. 125. P. 133-145.
5. Stone H. Approximation of curves by line segments. *Mathematics of computation*. 1961. Vol. 15, № 73. P. 40-47.
6. Gluss B. A line segment curve-fitting algorithm related to optimal encoding of information. *Information and Control*. 1962. Vol. 5, Is. 3. P. 261-267.
7. Pavlidis T., Horowitz S.L. Segmentation of plane curves. *EEE Transactions on Computers*. 1974. Vol. C-23, Is. 8. P. 860-870.
8. Cleghorn C.W., Engelbrecht A. P. Piecewise linear approximation of n-dimensional parametric curves using particle swarms. In: Dorigo M. et al. (eds) *Swarm Intelligence. ANTS 2012. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, Heidelberg. 2012. Vol. 7461. P. 292-299.
9. Лигун А.А., Шумейко А.А. Асимптотические методы восстановления кривых. Киев: Институт математики НАН Украины, 1997. 358 с.
10. Коротков В.С. Построение асимптотически оптимального алгоритма кусочно-линейной интерполяции. *Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки)*. Кам'янське. 2016. Т. 1, № 28. С. 29-33.
11. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. К.: BHV, 2006. 480 с.
12. Волков Е. А. Численные методы. СПб.: Лань, 2008. 248 с.

References

1. de Figueiredo, L. H. (1995), "Adaptive sampling of parametric curves", *Graphics Gems V*. pp. 173-178.
2. Pagani, L., Scott, P. J. (2018), "Curvature based sampling of curves and surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, v. 59, pp. 32-48.
3. Hernández-Mederos, V., Estrada-Sarlabous, J. (2003), "Sampling points on regular parametric curves with control of their distribution", *Computer Aided Geometric Design*, v. 20, Is. 6. pp. 363-382.
4. Zhong, W., Luo, X., Chang, W., Ding, F., Cai, Y. (2018), "A real-time interpolator for parametric curves", *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, v. 125, pp. 133-145.
5. Stone, H. (1961), "Approximation of curves by line segments. *Mathematics of computation*", v. 15. No. 73, pp. 40-47.
6. Gluss, B. (1962), "A line segment curve-fitting algorithm related to optimal encoding of information", *Information and Control*, v. 5, Is. 3. pp. 261-267.
7. Pavlidis, T., Horowitz, S. L. (1974), "Segmentation of plane curves", *EEE Transactions on Computers*, v. C-23, Is. 8, pp. 860 - 870.
8. Cleghorn, C.W., Engelbrecht, A. P. (2012), "Piecewise linear approximation of n-dimensional parametric curves using particle swarms", In: Dorigo M. et al. (eds) *Swarm Intelligence. ANTS 2012. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, Heidelberg, v. 7461, pp. 292-299.
9. Ligun, A.A., Shumeyko, A.A. (1997), *Asymptotic methods of curve reconstruction [Asimptoticheskie metody vosstanovleniya krivyyh]*, Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine Kiev, 358 p.
10. Korotkov, V.S. (2016), "Construction of an asymptotically optimal piecewise linear interpolation algorithm" ["Postroenie asimptoticheski optimal'nogo algoritma kusochno-linejnoj interpolacii"], *Proceedings of Dniprovsky State Technical University (Technical Sciences)*, Kamianske, v. 1, No. 28, pp. 29-33.
11. Feldman, L., Petrenko, A., Dmitrieva, O. (2006), *Numerical methods in computer science [Chisel'ni metodi v informatici]*, Kiev, Publishing Group BHV, 480 p.
12. Volkov, E.A. (2008), *Numerical methods. 5-th ed. [Chislennyye metody. 5-e izd.]*, Lan, St. Petersburg, 248 p.

Надійшла до редакції 15.03.2020

О.В. ФРОЛОВ

ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет», г. Покровск, Украина
frolgx@gmail.com

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЛОМАНЫМИ ПОСТРОЕННЫМИ АЛГОРИТМОМ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

В работе рассматривается моделирование аппроксимации плоских параметрических кривых ломаными асимптотически оптимальным алгоритмом интерполяции в хаусдорфовой метрике на основе вычисления погрешностей аппроксимации, исследовано влияние количественной характеристики степени дискретизации интегральной функции – регулятора узлов интерполяции на показатели распределения погрешностей. Цель работы – совершенствование методов, используемых алгоритмом асимптотически оптимальной кусочно-линейной интерполяции плоских параметрических кривых на основе исследования влияния параметров методов при моделировании погрешностей аппроксимации реальных кривых линий. Аппроксимация кривых ломаными привлекает внимание с целью ее применения к воспроизводству объектов сложной формы на компьютере, станке с ЧПУ и 3D принтере. При этом желательно иметь наименьшее количество звеньев ломаной, заменяющей кривую с сохранением необходимой точности. В работе были проанализированы существующие методы аппроксимации кривых ломаными линиями и выявлены направления дальнейших исследований. При этом был сделан акцент на рассмотрении существующих асимптотически оптимальных моделей, которые удовлетворяют требованию минимизации количества звеньев аппроксимации. В начале исследований была приведена теоретическая основа исследований – уравнения, определяющие количество узлов интерполяционной ломаной и условия получения значений параметра кривой для определения узлов асимптотически оптимальной выборки. Далее в работе был предложен алгоритм получения значений ряда узлов, составленный на основе численного интегрирования функции распределения и линейной интерполяции ее значений. Обоснована методика оценки результатов моделирования аппроксимации реальных кривых, основанный на статистической обработке рядов относительных погрешностей звеньев ломаной. Проведено моделирование аппроксимации реальных кривых и исследовано влияние на показатели распределения погрешностей количественной характеристики степени дискретизации интегральной функции – регулятора узлов. Научная новизна и практическая значимость полученных в работе результатов заключается в выявлении сущности влияния первоначальной дискретизации интегральной функции – регулятора узлов на качество воспроизведения кривых ломаными асимптотически оптимальным алгоритмом и возможности определения рациональной степени дискретизации при практических расчетах для воспроизведения изделий сложной формы.

Ключевые слова: *интерполяция, ломаная, эквидистанта, интегрирования, плоская параметрическая кривая, погрешность аппроксимации.*

O.V. FROLOV

Donetsk National Technical University, Pokrovsk, Ukraine
frolgx@gmail.com

APPROXIMATION ERROR OF PIECEWISE LINEAR ASYMPTOTIC OPTIMAL INTERPOLATION OF PLANAR PARAMETRIC CURVES

The piecewise linear approximation of curves is used in the manufacture of complex shaped objects for CNC machines and 3D printers, and their visualization on a computer. In this case, it is desirable to have the least number of segments, that approximating the curve with preservation of necessary accuracy of reproduction. In this paper, the existing methods for approximating curves by broken lines were analyzed. At the same time, emphasis was placed on considering existing asymptotically optimal models that satisfy the requirement of minimizing the number of linear segments. At the beginning of the research, the theoretical basis of the research was given – the equations that determine the number of nodes of the interpolation polygonal line and the conditions for determining the values of the curve parameter for the nodes of the asymptotically optimal sample. Further in the work, the algorithm for obtaining the parameter values based on the numerical integration of the distribution function and linear interpolation of its values was proposed. The methodology for estimating the results of approximations of real curves, based on the statistical processing of the series of relative errors of the linear segments. The approximation of real curves is simulated and the influence of the discretization of the integral function on the error distribution parameters is investigated. The scientific novelty and practical significance of the results obtained in the work consists in revealing the essence of the impact of the initial discretization of the integral function – the regulator of nodes on the quality of reproduction of curves by linear segments and the possibility of determining the rational number of discretization in practical calculations with the purpose of reproducing products of complex shape.

Keywords: *interpolation, polynomial, equidistant, integration, plane parametric curve, error of approximation.*