Український математичний вісник
Том 17 **(2020)**, № 1, 144 – 148

Abstracts

2010 MSC. 30C75

A. K. Bakhtin, L. V. Vyhivska. **Problem on extremal decomposition of the complex plane with free poles** // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 3–29.

We consider the well-known problem of the geometric theory of functions of a complex variable on non-overlapping domains with free poles on radial systems. The main results of the present work strengthen and generalize several known results for this problem.

В даній статті вивчається одна відома задача геометричної теорії функцій комплексної змінної для неперетинних областей з вільними полюсами. Добре відомим напрямком геометричної теорії функцій є розділ, який вивчає різноманітні екстремальні задачі на класах областей, які не перетинаються. Цей напрямок бере початок з відомої роботи М.А. Лаврентьєва [24], в якій вперше розглядалась задача про добуток конформних радіусів двох взаємно неперетинних однозв'язних областей. В цій роботі було показано, що ця задача має досить красивий геометричний розв'язок, тому робота М.А. Лаврентьєва викликала неабиякий інтерес до задач подібного виду і була узагальнена в різних напрямках. Одне із важливих узагальнень було запропоновано Г.М. Голузіним [9]. Він розглядає фіксовані точки $a_1, ..., a_k \subset \mathbb{C}$ та однозв'язні області $B_1, ..., B_k$, які взаємно неперетинаються і $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$. Оскільки точки a_k, $k = \overline{1, n}$ були фіксовані, то П.М. Тамразов [25] назвав такі проблеми екстремальними задачами з фіксованими полюсами відповідних квадратичних диференціалів.

Значний вклад у розвиток екстремальних задач з фіксованими полюсами внесли Г.М. Голузін, М.А. Лєбєдєв, Дж. А. Дженкінс, П.М. Тамразов, Г.В. Кузьміна, Ю.Є. Аленіцин, З. Нехарі, В.Я. Гутлянський та багато інших. У 1968 році П.М. Тамразов запропонував ідею про те, що досить цікаво досліджувати екстремальні задачі про неперетинні області, у яких деякі точки a_k мають певну "свободу" тобто не є фіксованими. Задачі такого типу отримали назву задач про екстремальне розбиття комплексної площини з вільними полюсами.

В 1994 році В.М. Дубінін [12] в якості відритої проблеми поставив наступну задачу про екстремальне розбиття. А саме: розглядається задача про оцінку функціонала $I_n(\gamma) = r^\gamma(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)$, де $r(B_k, a_k)$ — внутрішній

ISSN 1810 – 3200.

радіус області B_k відносно точки a_k, при умові $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, де області $B_k \cap B_p = \emptyset, k \neq p, k,p = \overline{0,n}$. На даний момент ця задача повністю не розв'язана, відомо лише часткові розв'язки. У роботі [1] введено поняття n-променевої системи точок, яка є істотним узагальненням розміщення полюсів не лише на колі, а й на деякій системі променів.

В даній публікації отримано також значно більш загальний результат, який справедливий і для системи вільних полюсів, розміщених на так званих n-променевих системах точок. Основні результати даної публікації посилюють та узагальнюють багато відомих результатів, отриманих раніше в цій задачі.

References. 31

2000 MSC. 34E99

K.S. Fayazov, I.O. Khajiev. **A nonlocal boundary value problem for a fourth order mixed type equation** // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 30–41.

The criterion of uniqueness of a solution of the problem with periodicity and nonlocal and boundary conditions is established by the spectral analysis for a fourth-order mixed-type equation in a rectangular region. When constructing a solution in the form of the sum of a series, we use the completeness in the space L_2, the system of eigenfunctions of the corresponding problem orthogonally conjugate. When proving the convergence of a series, the problem of small denominators arises. Under some conditions imposed on the parameters of the data of the problem and given functions, the stability of the solution is proved.

References. 14

2010 MSC. 34B15

O. Nesmelova. **Matrix boundary value problems for differential equations with p-Laplacian** // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 41–58.

Boundary value problems for differential equations with p-Laplacian arise while studying the radial solutions of nonlinear partial differential equations [1-3]. A feature of such various boundary value problems for differential, including difference equations with p-Laplacian is the lack of uniqueness of the solution. In this paper, we consider the boundary-value problem for the linear system of differential equations with matrix p-Laplacian, which is reduced to the traditional differential-algebraic system with an unknown in the form of the vector function. We considered two cases of the obtained differential-algebraic system, in particular, the cases of solvability and insolubility of the differential-algebraic system with respect to the derivative. For both cases, we obtained a sufficient condition for the solvability of the matrix boundary value problem for the differential equation with p-Laplacian, in which connection its general solution determines the general solution for the homogeneous part of the matrix differential equation with p-Laplacian and the Green operator of the original matrix boundary value problem. The relevance of studying the boundary value problems for differential equations with p-Laplacian is associated with numerous applications of such problems in the theory of elasticity, the theory of plasma, and astrophysics [3]. The purpose of this article is to generalize various boundary value problems for differential equations with p-Laplacian, which preserves the features of the solution of such problems, namely, the lack of uniqueness of the solution, and, in this case, the dependence of the desired solution of the arbitrary function. The research scheme proposed in the article can be transferred on the nonlinear matrix boundary value problems for differential equations with p-Laplacian, on the linear matrix boundary value problems for difference equations, and also on the matrix boundary value problems for functional differential equations with p-Laplacian in abstract spaces , particular on the matrix boundary value problems for differential equations with argument deviation. The proposed scheme of investigation of the linear system of differential equations with matrix p-Laplacian in the article was illustrated in details with examples.

References. 19

2010 MSC. 42A10, 42A27

I. Protasov. **Weakening topologies on a countable abelian group of finite exponent** // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 58–59.

We prove that a countable locally minimal abelian group of finite exponent m is discrete. For prime m, this answers Question 7.35(b) from [2].

References. 3

2010 MSC. Primary 31A05, 31A20, 31A25, 31B25, 35Q15; Secondary 30E25, 31C05, 34M50, 35F45

V. Ryazanov, S. Volkov. **Mappings with finite length distortion and prime ends on Riemann surfaces** // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 60–76.

The present paper is a continuation of our research that was devoted to the theory of the boundary behavior of mappings in the Sobolev classes (mappings with generalized derivatives) on Riemann surfaces. Here we develop the theory of the boundary behavior of the mappings in the class of FLD (mappings with finite length distortion) first introduced for the Euclidean spaces in the article of Martio–Ryazanov–Srebro–Yakubov at 2004 and then included in the known book of these authors at 2009 on the modern mapping theory. As was shown in the recent papers of Kovtonyuk–Petkov–Ryazanov at 2017, such mappings, generally speaking, are not mappings in the Sobolev classes, because their first partial derivatives can be not locally integrable. At the same time, this class is a natural generalization of the well-known significant classes of isometries and quasiisometries.

We prove here a series of criteria in terms of dilatations for the continuous and homeomorphic extensions to the boundary of the mappings with finite length distortion between domains on Riemann surfaces by Carathéodory prime ends. The criterion for the continuous extension of the inverse mapping to the boundary is turned out to be the very simple condition on the integrability of the dilatations in the first power. The criteria for the continuous extension of the direct mappings to the boundary have a much more refined nature. One of such criteria is the existence of a majorant for the dilatation in the class of functions with finite mean oscillation, i.e., having a finite mean deviation from its mean value over infinitesimal disks centered at boundary points. As consequences, the corresponding criteria for a homeomorphic extension of mappings with finite length distortion to the closures of domains by Carathéodory prime ends are obtained.

References. 31

2010 MSC. 30C65, 30C75

R. R. Salimov, M. V. Stefanchuk. **On local properties of solutions of nonlinear Beltrami equation** // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 77–95.

A power estimate of the area of the image of a disk for regular homeomorphisms possessing the Luzin N-property is obtained in terms of the p-angular dilation for $p > 2$. The result generalizes the known estimate by M.A. Lavrent'ev. A number of theorems on the asymptotic behavior of regular homeomorphic solutions of the nonlinear Beltrami equation are proved, and an extreme analog of the Ikoma–Schwartz lemma is formulated.

References. 52

2010 MSC. 33C45, 33C50, 33D50, 41A10, 41A46, 42C05

S. B.Vakarchuk, M. B.Vakarchuk. **On the estimates of the values of various widths of classes of functions of two variables in the weight space $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$,** $\gamma = \exp(-x^2 - y^2)$ // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 94–102.

For the classes of functions of two variables $W_2(\Omega_{m,\gamma}, \Psi) = \{f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) : \Omega_{m,\gamma}(f,t) \leqslant \Psi(t) \, \forall t \in (0,1)\}$, $m \in \mathbb{N}$, where $\Omega_{m,\gamma}$ is a generalized modulus of continuity of the m-th order, and Ψ is a majorant, the upper and lower bounds for the ortho-, Kolmogorov, Bernstein, projective, Gel'fand, and linear widths in the metric of the space $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ are found. The condition for a majorant under which it is possible to calculate the exact values of the listed extreme characteristics of the optimization content is indicated. We consider the similar problem for the classes $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma}, \Psi) = L_{2,\gamma}^{r,0}(D, \mathbb{R}^2) \cap W_2^r(\Omega_{m,\gamma}, \Psi)$, $r, m \in \mathbb{N}$, $\big(D = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$ being the differential operator$\big)$. Those classes consist of functions $f \in L_{2,\gamma}^{r,0}(\mathbb{R}^2)$ whose Fourier–Hermite coefficients are $c_{i0}(f) = c_{0j}(f) = c_{00}(f) = 0 \; \forall i,j \in \mathbb{N}$. The r-th iterations $D^r f = D(D^{r-1} f)$ $(D^0 f \equiv f)$ belong to the space $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ and satisfy the inequality $\Omega_{m,\gamma}(D^r f, t) \leqslant \Psi(t) \; \forall t \in (0,1)$. On the indicated classes, we have determined the upper bounds (including the exact ones) for the Fourier–Hermite coefficients. The exact results obtained are specified, and a number of comments regarding them are given.

Для классів функций двох змінних $W_2(\Omega_{m,\gamma},\Psi) = \{f \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2) : \Omega_{m,\gamma}(f,t) \leqslant \Psi(t)\,\forall t \in (0,1)\}$, $m \in \mathbb{N}$, где $\Omega_{m,\gamma}$ – узагальнений модуль неперервності m-го порядка, Ψ – мажоранта, знайдено оцінки зверху та знизу різних поперечників – колмогоровського, бернштейновського, проекційного, гельфандовського, лінійного, ортопоперечника – в метриці простору $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$. Вказано умову на мажоранту, при якій вдається обчислити точні значення перерахованих екстремальних характеристик оптимізаційного змісту. Аналогічну за змістом задачу розглянуто і для класів $W_2^{r,0}(\Omega_{m,\gamma},\Psi) = L_{2,\gamma}^{r,0}(D,\mathbb{R}^2) \cap W_2^r(\Omega_{m,\gamma},\Psi)$, $r,m \in \mathbb{N}$, $\big(D = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial}{\partial x} - 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$ — диференційовний оператор$\big)$, які складаються із функцій $f \in L_{2,\gamma}^{r,0}(\mathbb{R}^2)$, коефіцієнти Фур'е–Ерміта яких $c_{i0}(f) = c_{0j}(f) = c_{00}(f) = 0\ \forall i,j \in \mathbb{N}$, а r-ті ітерації $D^r f = D(D^{r-1}f)$ $(D^0 f \equiv f)$ належать простору $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^2)$ і задовольняють нерівність $\Omega_{m,\gamma}(D^r f,t) \leqslant \Psi(t)\ \forall t \in (0,1)$. На вказаних класах знайдено оцінки (в тому числі і точні) верхніх меж коефіцієнтів Фур'е–Ерміта. Наведено конкретизації отриманих точних результатів та надано ряд коментарів щодо них.

References. 40

2010 MSC. 35B09, 35B40, 35K59

Y. Zozulia. **Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials** // Ukrainian Mathematical Bulletin, **17** (2020), No. 1, 116–144.

For the weighted parabolic equation

$$v\,(x)\,u_t - div(\omega(x)u^{m-1}\nabla u) = f(x,t)\,,\ u \geq 0\,,\ m \neq 1,$$

we prove the local boundedness of weak solutions in terms of the weighted Riesz potential on the right-hand side of the equation.

References. 71