УДК 531.1

ГОРЯЧЕВА Т.В., старший викладач, БАБЕНКО Є. Г., студент (КІДонНТУ)

ВИКОРИСТАННЯ АНАЛОГОВИХ ЕЛЕКТРОННИХ МАШИН ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянуто приклад застосування І-ї електромеханічної аналогії для дослідження динаміки механічних систем

Часто для дослідження динаміки механічних процесів доцільним є використання електромеханічних аналогій. За допомогою відповідних електричних ланцюгів аналогових машин всі процеси спостерігаються на осцилографах. Для цього потрібно створити електричний аналог механічного процесу за допомогою аналогових машин з'єднуючи елементи у відповідні ланцюги. Так досить просто визначаються частоти власних коливань багатомасових систем.

За допомогою аналогових машин можна розв'язати нелінійні задачі, коли лінеалізація диференціальних рівнянь по якимось причинам неприпустима, а також задачі, що приводять до лінійних диференціальних рівнянь з перемінними коефіцієнтами.

Використання електромеханічних аналогій в класичному виді застосовується для систем з одним ступенем свободи. В статті показано можливість застосування 1-ї системи електромеханічної аналогії до електричних систем з багатьма ступенями свободи. Також приведені аналогії для визначення кінетичної та потенціальної енергії, функції розсіювання релея і узагальненої сили для складних електричних схем.

Покажемо електромеханічну аналогію для опису динамічних процесів (таблиця 1).

Таблиця 1. –

Електромеханічні аналогії

механічні величини		електричні величини			
		1-а аналогія **напруга - сила**		2-а аналогія **сила - струм**	
Координата	x	Заряд	q	Напруга	U
Маса	m	Індуктивність	L	Ємкість	C
Коефіцієнт жорсткості	c	Зворотна величина ємкості	1/C	Зворотна величина індуктивності	1/L
Коефіцієнт опору середовища	b	Омічний опір	R	Проводимість	1/R
Сила	Q(t)	Е.Р.С.	E(t)	Швидкість струму	di/dt

По 1-й системі аналогій узагальненій координаті механічної системи q відповідає заряд q електричної системи. Таким чином, числу незалежних узагальнених координат відповідає число незалежних струмів. З електротехніки відомо, що число незалежних струмів, або число незалежних контурів складного електричного ланцюга визначається в тих випадках, коли розрахунок ланцюга ведуть методом контурних струмів. При цьому число незалежних струмів визначається формулою $n = s-(m-1)$, s – число ланцюгів електричної системи; m – число її вузлів.

Тоді диференціальне рівняння електромеханічної системи, що складено за допомогою рівняння Лагранжа 2-го роду буде мати вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T'}{\partial q_k}=Q'_k-\frac{\partial V'}{\partial q_k}-\frac{\partial R'}{\partial \dot{q}_k}, \quad k=1,2,...,\mathrm{n} \tag{1.1}$$

В цьому рівнянні $T'=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}L_k\dot{q}_k$ є магнітною енергією електричної системи, яка служить аналогом кінетичної енергії механічної системи.

Сумарна індуктивність k-ї гілки електричного ланцюга розраховується по формулі:

$$L_k=\sum_{k=1}^{n}L_{kp}$$

де p – число індуктивностей, розміщених в *k-й* гілці ланцюгу.

У випадку багатоконтурного ланцюга розрахунок електричної схеми ускладнюється тим, що при наявності декількох магнітно пов'язаних індуктивностей, розміщених в різних ланках ланцюга, вони взаємно наводять додаткові електрорушійні сили, які необхідно враховувати при обчисленні аналога кінетичної енергії чи аналога узагальненої сили.

Якщо взаємна індуктивність враховується додатковою магнітною енергією, то магнітна енергія електричної системи T' буде визначатися виразом:

$$T'_M=\sum_{\mu,\nu=1}^{p}\sum_{i,j=1}^{s}\pm M_{\mu i,\nu j}q_i'q_j' \tag{1.2}$$

де $M_{\mu i,\nu i}$ – взаємна індуктивність, що обумовлена взаємодією індуктивної котушки з номером μ розміщеній в *i*-й гілці з струмом q'_i і індуктивної котушки з номером ν в *j*-й гілці по якій протікає струм q'_j;

p – число котушок, розміщених в кожній ланці.

Аналогом потенціальної енергії механічної системи служить електрична енергія, що накопичується в ємкості:

$$V'=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}S_k q_k^2 \tag{1.3}$$

де S_k – сумарна ємкість всіх конденсаторів визначається по формулі:

$$S_k=\sum_{p=1}^{p}\frac{1}{C_{ip}}.$$

Аналог функції розсіювання Релея представляє собою електромагнітну енергію яка переходить в теплову енергію і може бути виражена як:

$$R'=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}R_k\dot{q}_k \tag{1.4}$$

де R_k – сумарний електроопір ланцюга *k*-і гілки визначиться по формулі:

$$R_k=\sum_{p=1}^{p}R_{ip}$$

Аналогом узагальненої сили по 1-й системі аналогій служить електрорушійна сила джерела енергії розміщеного в заданому контурі $Q'_k=e_k(t)$.

Якщо додаткова магнітна енергія, що обумовлена взаємною індуктивністю не врахована при обчисленні аналога кінетичної енергії T', то при встановлення аналога узагальненої сили *i*-го контуру необхідно додати додаткову е.р.с., що наводиться взаємною індуктивність в *i*-й гілці:

$$e_i=\sum_{\mu,\nu=1}^{p}\sum_{j=1}^{s}M_{\mu i,\nu j}\frac{dI_j}{dt}=\sum_{\mu,\nu=1}^{p}\sum_{j=1}^{s}M_{\mu i,\nu j}\frac{d^2q_j}{dt^2} \tag{1.5}$$

Якщо електрична схема, що розглядається, має джерела струму, то їх потрібно замінити еквівалентними джерелами напруги, користуючись прийомами викладеними в теорії ланцюгів електротехніки.

При складанні рівнянь Лагранжа 2-го роду у виразах T', V', R' *і* Q' всі $s - n$ залежні струми $q_{n+1},...,q_s$ слід виразити через n незалежних $q_1,...,q_n$ за допомогою 1 закону Кіргхофа.

Для пояснення застосування 1–ї системи аналогій в динаміці електричних систем розглянемо приклад.

Приклад. Задана електрична схема (рис.1). Необхідно скласти диференціальні рівняння що описують її динамічний стан, використовуючи 1-у систему електромеханічних аналогій.

Число гілок цієї системи $s = 6$, число вузлів цієї системи $m = 4$, число незалежних струмів: $n = s - m + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$.

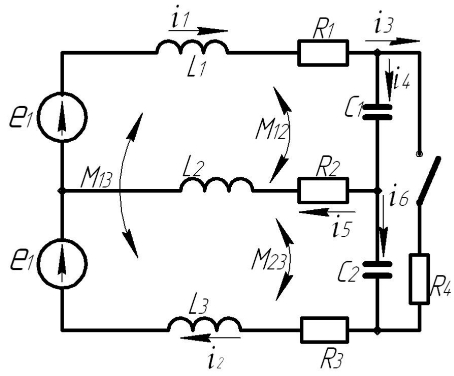

Рисунок 1 – Електрична схема

В якості незалежних можна вибрати струми i_1, i_2, i_3. Тоді залежні струми i_4, i_5, i_6 можна за допомогою 1-го закону Кіргофа виразити через незалежні струми:

$$i_4 = i_1 - i_3, \qquad i_5 = i_1 - i_2, \quad i_6 = i_2 - i_3.$$

Як відомо струм $i_k = \dot q_k$.

Визначимо аналог кінетичної енергії з врахуванням взаємної індуктивності всіх трьох котушок:

$$T = \frac{L_1\dot q_1^2}{2} + \frac{L_2\dot q'_5}{2} + \frac{L_3\dot q_2^2}{2} \pm M_{12}\cdot\dot q_1\cdot\dot q_5 \pm M_{13}\cdot\dot q_1\cdot\dot q_2 \pm M_{23}\cdot\dot q_5\cdot\dot q_2 =$$

$$= \frac{1}{2}[L_1\dot q_1^2 + L_2(\dot q_1 - \dot q_2)^2 + L_3\dot q_2^2] \pm M_{12}\dot q_1(\dot q_1 - \dot q_3) \pm M_{13}\dot q_1\dot q_2 \pm M_{23}\dot q_2(\dot q_1 - \dot q_2)$$

Всі позначення в формулі вказані відповідно номеру електричного елемента на схемі (рис.1).

Визначимо аналог потенціальної енергії:

$$V' = \frac{S_1q_4^2}{2} + \frac{S_2q_6^2}{2} = \frac{1}{2}[S(q_1 - q_3)^2 + S_2(q_2 - q_3)^2]$$

де $S_i = \dfrac{1}{C_i}$ – інверсна ємкість.

Аналог функції розсіювання Релея для заданої схеми

$$R' = \frac{1}{2}(R_1\dot q_1^2 + R_2\dot q_5^2 + R_3\dot q_2^2 + R_4\dot q_3^2) = \frac{1}{2}[R_1\dot q_1^2 + R_2(\dot q_1 - \dot q_2)^2 + R_3\dot q_2^2 + R_4\dot q_3^2]$$

Аналог узагальнених сили

$Q'_1(t) = e_1(t)$, $Q'_2(t) = e_2(t)$, $Q'_3(t) = 0$.

Складемо рівняння Лагранжа 2-го роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T'}{\partial q_k} = -\frac{\partial V'}{\partial q_k} - \frac{\partial R'}{\partial \dot{q}_k} + Q_k', \quad (k = 1, 2, 3)$$

Після підстановки зазначених електромеханічних аналогій та виконання спрощень отримаємо для електричної схеми систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} 1. \quad L_1\ddot{q}_1 + L_2(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) \pm M_{12}(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) \pm M_{13}\ddot{q}_2 \pm M_{23}\ddot{q}_2 + S_1(q_1 - q_2) + \\ \quad + R_1\dot{q}_1 + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = e_1(t) \\ 2. \quad L_2(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) \pm M_{12}\ddot{q}_1 \pm M_{13}\ddot{q}_1 \pm M_{23}(\ddot{q}_1 - 2\ddot{q}_2) + S_2(q_2 - q_3) + \\ \quad + R_3\dot{q}_2 - R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = e_2(t) \\ 3. \quad S_1(q_3 - q_1) + S_2(q_3 - q_2) + R_4\dot{q}_3 = 0 \end{cases}$$

Отримана система диференціальних рівнянь розв’язується загально прийнятими математичними методами.

Бібліографічний список

1. А.Ю. Львович. Основы теории электромеханических систем. – М.: Наука, 1973.
2. Основы теории цепей/ Под ред. Г.В. Зевеке. – М.: Наука, 1975.
3. Бутенин Й.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. В 2-х т. – М.: Наука, 1985.