# ТЕМА 4 МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

## 4.1 Математичний апарат, що застосовується при експертній оцінці

У випадках складності наукової задачіпроблеми, її новизни, недостатності наявної інформації, неможливості математичної формалізації процесу рішення дослідникам доводиться звертатися до рекомендацій компетентних фахівців – до експертів. Їх рішення задачі, аргументація, формування кількісних оцінок та обробка останніх формальними методами отримала назву методу експертних оцінок.

Експерти (від латинського «expertus» – досвідчений) – це особи, які володіють знаннями і здатні висловити аргументовану думку з досліджуваного явища.

Процедура отримання оцінок від експертів називається експертизою.

При використанні експертного методу для оцінки якості явища як правило використовується шкала порядку. ЇЇ суть полягає в упорядкуванні об’єктів (явищ), а точніше, у виявленні за допомогою експертів прихованої упорядкованості, яка, за припущенням, властива множині об’єктів. Результатом оцінки є рішення про те, що який-небудь об’єкт (явище) переважніше іншого у відношенні якогось критерію.

Способи вимірювання об’єктів, що найбільш часто вживаються при оцінці за порядковою шкалою це ранжирування, парне порівняння та безпосередня оцінка.

Ранжирування – це розташування об’єктів у порядку зростання або зменшення якої-небудь властивої їм характеристики. Ранжирування дозволяє вибрати з досліджуваної сукупності факторів найбільш істотний.

У разі участі в опитуванні декількох експертів в їхніх оцінках неминучі розбіжності і величина цієї розбіжності має дуже важливе значення. Групова оцінка може вважатися достатньо надійною тільки за умови достатньої узгодженості відповідей окремих фахівців.

Для аналізу розкиду і узгодженості оцінок застосовуються статистичні характеристики – міри розкиду.

Варіаційний розмах (R):

(4.1)

де $X_{max}$ – максимальна оцінка об’єкта;

$X_{min}$ – мінімальна оцінка об’єкта.

Середнє квадратичне відхилення, яке обчислюється за відомою формулою:

(4.2)

де $x_j$ – оцінка, дана $j$-им експертом;

$m$ – кількість експертів.

Коефіцієнт варіації ($V$), який зазвичай виражається у відсотках:

(4.3)

Специфічні підходи до перевірки узгодженості, використовувані при оцінці об’єктів методом ранжирування.

У цьому випадку результатом роботи експерта є ранжирування, що представляє собою послідовність рангів (для експерта $j$): $x_{1j}, x_{2j}, ..., x_n$.

Узгодженість результатів ранжирування двох експертів можна визначити за допомогою коефіцієнта рангової кореляції Спірмена:

(4.4)

де $x_{ij}$ – ранг, присвоєний і-му об’єкту $j$-им експертом;

$x_{ik}$ – ранг, присвоєний і-му об’єкту $k$-им експертом;

$d_i$ – різниця між рангами, присвоєними і-му об’єкту.

Величина може змінюватися в діапазоні від -1 до +1. При повному збігу оцінок коефіцієнт дорівнює одиниці. Рівність коефіцієнта мінус одиниці спостерігається при найбільшому розходженні в думках експертів.

Крім того, розрахунок коефіцієнта рангової кореляції може застосовуватися як спосіб оцінки взаємин між яким-небудь фактором і результативним ознакою (реакцією) у тих випадках, коли ознаки не можуть бути виміряні точно, але можуть бути впорядковані. У цьому випадку значення коефіцієнта Спірмена може бути інтерпретовано подібно значенням коефіцієнта парної кореляції. Позитивне значення свідчить про прямий зв’язок між факторами, негативне - про зворотний, при цьому, чим ближче абсолютне значення коефіцієнта до одиниці, тим тісніше зв’язок.

Коли необхідно визначити узгодженість в ранжировках великого (більше двох) числа експертів, розраховується так званий коефіцієнт конкордації ($W$) – загальний коефіцієнт рангової кореляції для групи, що складається з експертів $m$:

(4.5)

де

Зауважимо, що від’ємник в дужках являє собою не що інше, як середню суму рангів (при підсумовуванні для кожного об’єкта), отриманих $i$ об’єктами від експертів.

Коефіцієнт $W$ змінюється в діапазоні від 0 до 1. Його рівність одиниці означає, що всі експерти присвоїли об’єктам однакові ранги. Чим ближче значення коефіцієнта до нуля, тим менш

узгодженими є оцінки експертів.

4.2 Кореляційний аналіз

Для виявлення зв’язку між двома параметрами явища, що досліджується, оцінки напряму та інтенсивності застосовують кореляційний аналіз.

Кореляція (від лат. correlatio – співвідношення) – це статистична залежність між випадковими величинами, що носить імовірнісний характер.

Кореляційний зв’язок – це узгоджена зміна двох ознак, що відображає той факт, що мінливість однієї ознаки знаходиться у відповідності з мінливістю іншої.

Кореляційні зв’язки можна вивчати на якісному рівні з діаграм розсіювання емпіричних значень змінних *x* і *y* (рис. 2.1) і відповідним чином їх інтерпретувати.

Рисунок 4.1 – Діаграми розсіювання емпіричних значень змінних *x* і *y*:
а) пряма кореляція; б) зворотна кореляція; в) відсутність кореляції;
г) чітка позитивна кореляція; д) сильна позитивна кореляція; е) нелінійна кореляція

Кореляційні зв’язки розрізняються за напрямком, формою та ступенем (силою).

За напрямком кореляційний зв’язок може бути позитивним («прямий») і негативним («зворотний»). При позитивній прямолінійній кореляції вищим значенням однієї ознаки відповідають вищі значення іншої, а нижчим значенням однієї ознаки - нижчі значення іншої (рис. 2.1 а). При негативній кореляції співвідношення зворотні (рис. 2.1 б). При позитивній кореляції коефіцієнт кореляції має позитивний знак, при негативній кореляції – негативний знак.

Нульовою називається кореляція за відсутності зв’язку змінних (рис. 2.1 б). Проте нульова загальна кореляція може свідчити лише про відсутність лінійної залежності, а не взагалі про відсутність будь якого статистичного зв’язку.

За формою кореляційний зв’язок може бути прямолінійним (рис. 2.1 г) або криволінійним (нелінійним) (рис. 2.1 е).

Ступінь, сила чи тіснота кореляційного зв’язку визначається за величиною коефіцієнта кореляції ($r_{xy}$). Сила зв’язку не залежить від її спрямованості і визначається за абсолютним значенням коефіцієнта кореляції (рис. 2.1 г та 2.1 д).

Коефіцієнт кореляції – показник ступеня взаємозалежності статистичного зв’язку двох змінних змінюється в межах від -1 до +1. Значення коефіцієнта кореляції 0 вказує на можливу відсутність залежності, значення +1 свідчить про узгодженість змінних.

В залежності від коефіцієнта кореляції розрізняють наступні кореляційні зв’язки:

– сильний, або тісний при коефіцієнті кореляції $r_{xy} > 0{,}70$;

– середній (при $0,50 < r_{xy} < 0,69$);

– помірний (при $0,30 < r_{xy} < 0,49$);

– слабкий (при $0,20 < r_{xy} < 0,29$);

– дуже слабкий (при $r_{xy} < 0,19$).

## 4.3 Регресійний аналіз

Для аналізу залежності однієї величини (параметру) від іншої застосовується регресійний аналіз.

Регресійний аналіз (англ. regression analysis) – це метод визначення відокремленого і спільного впливу факторів на результативну ознаку та кількісної оцінки цього впливу шляхом використання відповідних критеріїв.

На відміну від кореляційного аналізу, регресійний аналіз не з'ясовує чи істотний зв'язок, а займається пошуком моделі цього зв'язку, вираженої у функції регресії.

У загальному вигляді функцію (рівняння) регресії можна представити у вигляді:

(4.6)

де $y_x$ – залежна змінна величина;

$x_i$ – незалежні змінні величини (фактори).

Якщо незалежна змінна одна – це простий регресійний аналіз. Якщо ж їх декілька, то такий аналіз називається багатофакторним.

В ході регресійного аналізу вирішуються дві основні задачі:

1. Побудова рівняння регресії, тобто знаходження виду залежності між результативним показником і незалежними факторами $x_1, x_2, ..., x_n$.

2. Оцінка значущості отриманого рівняння, тобто визначення того, наскільки обрані факторні ознаки пояснюють варіацію ознаки $y_x$.

## 4.4 Дисперсійний аналіз

Одним з основних завдань наукових досліджень є необхідність визначення, значущості впливу ряду факторів на функцію відгуку з метою її покращення. Дослідження впливу тих чи інших факторів на функцію відгуку – завдання дисперсійного аналізу.

Проводячи дисперсійний аналіз, використовують властивість адитивності випадкової величини, яка полягає в тому, що дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин. Тому для виділення і оцінки впливу окремих факторів, що викликають

мінливість випадкової величини (функції відгуку), проводиться розкладання сумарної вибіркової дисперсії на складові, обумовлені окремими незалежними факторами. Кожна з цих складових являє собою оцінку дисперсії генеральної сукупності.

Для визначення значущості впливу окремого фактора необхідно оцінити значимість відповідної йому вибіркової дисперсії у порівнянні з дисперсією відтворюваності, обумовленою помилкою дослідження. Перевірка значущості оцінок дисперсій проводиться за критерієм Фішера.

4.5 Використання математичних методів у дослідженнях Математичне моделювання

Вирішення наукових завдань за допомогою математичних методів здійснюється шляхом математичного формулювання завдання (розроблення математичної моделі), вибору методу дослідження одержаної математичної моделі, аналізу одержаного математичного результату.

***Математична модель*** є системою математичних співвідношень – формул, функцій, рівнянь, систем рівнянь, що описують ті або інші сторони об’єкта, який вивчається, явища, процесу.

Вибір методу дослідження математичної моделі багато в чому визначається її видом. Статичні системи, що представлені за допомогою алгебраїчних рівнянь, досліджуються за допомогою визначників, методу ітерацій, методів Крамера і Гауса. У разі труднощів з аналітичними рішеннями використовуються приблизні методи: графічний метод; метод хорд; метод дотичних.

Дослідження динамічних режимів функціонування об’єкта, що представлені за допомогою диференціальних рівнянь, також визначається класом, до якого належать ці рівняння. Для розв’язання диференціальних рівнянь використовують такі методи: метод поділу змінних; метод підстановки; метод інтегруючого множника; метод якісного аналізу тощо. Для одержання приблизних рішень використовують метод послідовних наближень, метод функціональних рядів; метод Рунге – Кута; числові методи інтегрування тощо.

В випадках, коли дослідник не має вичерпних відомостей про механізм досліджуваного процесу (він може назвати тільки фактори, що визначають умови протікання процесу, і вимоги до його результатів) побудова об’єкта дослідження (ОД) базується на використанні метода «Чорний ящик» (див. рис. 4.2).

Стрілками, що входять в об’єкт, показані вхідні фактори ($x$). Функціонування ОД може характеризуватися відгуком (на схемі це $y$).

Залежність між відгуком і вхідними факторами називається функцією відгуку й має вигляд:

Для отримання такої залежності виконують планування експерименту. Планування експерименту

– це процедура вибору числа та умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для отримання математичної моделі процесу.

Рисунок 4.2 – Схема «Чорного ящика»:

$x_1, x_2, \ldots x_k$ – незалежні змінні фактори, які можуть варіювати при постановці експериментів; $y$ – відгук – результат експерименту; *ОД* – об'єкт дослідження

В залежності від того який вид буде рівняння регресії отриманого за результатами експериментів плани експериментів діляться на плани першого і більш високих порядків. Після проведення експерименту за планом першого порядку отримане рівняння буде мати вигляд:

(4.7)

де $b_0$ – вільний член рівняння регресії;

$b_u$ – коефіцієнт лінійного ефекту;

$k$ – число факторів;

$x_u$ – фактори експерименту.

При плані другого порядку рівняння регресії матиме вигляд:

(4.8)

де $c$ – кількість поєднань з $k$ факторів по два;

$l$ – порядковий номер фактора відмінного від $u$;

$b_{ul}$ – коефіцієнт ефекту парного взаємодії.

Отримане емпіричним шляхом рівняння називається математичною моделлю процесу.

4.6 Планування експерименту

При проведенні прикладних досліджень в першу чергу слід орієнтуватися на організацію плану першого порядку і отримання лінійного рівняння регресії якщо отримане лінійне рівняння буде адекватно досліджуваному процесу то ускладнювати завдання (організовувати план другого порядку) не доцільно.

Розрізняють повний факторний експеримент (ПФЕ) і подрібнений факторний експеримент (ДФЕ).

При організації повного факторного експерименту передбачається проведення експериментів за всіх можливих комбінацій факторів.

Подріднений факторний експеримент передбачає використання тільки частини повного

факторного експерименту.

При плануванні за схемою ПФЕ реалізуються всі можливі комбінації факторів на всіх обраних для дослідження рівнях. Необхідне число дослідів визначається за формулою:

(4.9)

де $g$ – кількість рівнів на яких фіксується фактор при проведенні експерименту;

$k$ – кількість вхідних факторів.

Рівнем фактора прийнято називати його значення зафіксоване при експерименті.

При організації плану першого порядку значення фактора фіксується на верхньому і нижньому рівнях, тобто $g = 2$ і $N = 2^k$.

Верхній рівень – max значення фактора, що встановлюється при експерименті.

Нижній рівень – min значення фактора, що встановлюється при експерименті.

Для розрахунків вводиться нульовий рівень фактора який представляє собою середньоарифметичне значення верхнього та нижнього рівня. Інтервал значень фактора від нижнього до верхнього рівнів називають областю визначення фактора.

Інтервал варіювання фактора (зміни) це значення фактора у натуральних величинах додавання якого до нульового рівня дає верхній рівень фактора а віднімання нижній

(4.10)

При складанні матриці експерименту використовують кодовані значення факторів. При плані першого порядку кодовані значення факторів представлені + 1 і - 1.

Кодування значення фактора в матриці експерименту є відношення

(4.11)

Матриця ПФЕ типу $2^k$ будується з використанням прийому чергування знаків, що можна розглянути на прикладі побудови матриці ПФЕ $2^3$ першого порядку. див. таблицю 4.1. Суть прийому чергування знаків: позитивне і негативне значення (верхнє і нижнє значення кожного наступного фактора в матриці) повторюється на верхньому і нижньому значеннях попереднього фактора.

У матрицю експерименту також вводиться фактор $x_0$ – фіктивний фактор, що перебуває на верхньому рівні фактора – (+ 1).

Таблиця 4.1 – Матриця ПФЕ $2^3$

| Номер досліду | Кодовані значення факторів | | | | Параметр |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
| 1 | +1 | +1 | +1 | +1 | $y_1$ |
| 2 | +1 | -1 | +1 | -1 | $y_2$ |
| 3 | +1 | +1 | -1 | -1 | $y_3$ |
| 4 | +1 | -1 | -1 | +1 | $y_4$ |

В разі необхідності врахування взаємодії між факторами типу $x_1x_2$ в таблиці добавляються додаткові колонки.

Виявити помилку експериментів можна шляхом повторення кожного досліду кілька разів (тобто кожен рядок матриці планування повторюється, наприклад $r$ раз). Для виключення систематичних помилок застосовують метод рандомізації дослідів. Сутність методу полягає в тому, що досліди проводять у випадковому порядку, для чого користуються таблицею випадкових чисел.

## 4.7 Планування експерименту за методом латинського квадрату

Для зменшення кількості дослідів багатофакторного експерименту, застосовують планування експерименту за схемою латинський квадрат. Так, при вивченні впливу трьох факторів, кожний з яких змінюють на чотирьох рівнях, необхідно провести $N = 4^3 = 64$ досліди. Їхнє число можна значне скоротити, якщо план експерименту побудувати за схемою латинського квадрата.

Латинським квадратом $n \times n$ називається така таблиця з $n^2$ елементів (букв або чисел), кожний з яких зустрічається в точності один раз у кожному рядку й у кожному стовпці.

Рядки й колонки квадрата використовують для позначення рівнів двох факторів, а рівні третього утворюють латинський квадрат.

Наприклад, матрицю (план) експерименту для трьох факторів, позначених буквами A, B і C, кожний з яких варіюється на чотирьох рівнях, можна представити латинським квадратом $4 \times 4$ (табл. 4.2).

Таблиця 4.2 – Матриця трьохфакторного експерименту (латинський квадрат $4 \times 4$)

| Фактор A<br>Фактор B | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| B1 | C1 | C2 | C3 | C4 |
| B2 | C2 | C3 | C4 | C1 |
| B3 | C3 | C4 | C1 | C2 |
| B4 | C4 | C1 | C2 | C3 |

З матриці плану експерименту випливає, що для вивчення впливу трьох факторів, що змінюються на чотирьох рівнях, слід провести тільки шістнадцять дослідів.

Розташування елементів квадрата оптимально в тому розумінні, що кожний елемент зустрічається один і тільки єдиний раз у стовпці й рядку. Тому, яким б не був навантажувальний вплив джерела неоднорідностей, він в рівній мірі позначиться при підрахунку значень у рядку й стовпці в процесі обробки результату експерименту.

Щоб виключити вплив систематичних помилок, викликаних зовнішніми умовами, рекомендується встановлення випадкової послідовності постановки дослідів, тобто досліди необхідно рандомізувати в часі. Для латинського квадрата проводять рандомізацію рядків і

колонок, що гарантує випадковий вибір, квадрата з всієї множини квадратів, а також установлюють випадковий порядок проведення дослідів. Рандомізацію можна проводити за допомогою таблиці випадкових чисел. Після виконання рандомізації дослідів, отримана послідовність їх виконання заноситься у вихідну матрицю (таблиця 4.3).

Таблиця 4.3 – План проведення трьохфакторного експерименту з урахуванням рандомізації дослідів

| Фактор А<br>Фактор В | A1 | A2 | A3 | A4 |
|---|---|---|---|---|
| B1 | 11 C1 | 5 C2 | 10 C3 | 12 C4 |
| B2 | 6 C2 | 8 C3 | 2 C4 | 7 C1 |
| B3 | 14 C3 | 1 C4 | 15 C1 | 13 C2 |
| B4 | 16 C4 | 4 C1 | 9 C2 | 3 C3 |

Нерідко, при проведенні експериментальних досліджень, дослідникам доводиться зустрічатися з якісними факторами. Якісним фактором називають змінну величину, яка характеризується якісними властивостями. Їй не відповідає числова шкала в тому розумінні, як це розуміється для кількісних факторів. Однак для якісних факторів усе-таки використовують умовну порядкову шкалу, яка ставить у відповідність рівням якісного фактора числа натурального ряду, тобто робить кодування рівнів фактора. Порядок рівнів може бути довільний, але після кодування він фіксується в межах дослідження.

4.8 Закони розподілу випадкової величини

Змінна величина називається випадковою, якщо в результаті досліду вона може приймати дійсні значення з певними ймовірностями. Найбільш повною, вичерпною характеристикою випадкової величини є закон розподілу. Закон розподілу – функція (таблиця, графік, формула), яка дозволяє визначати ймовірність того, що випадкова величина $X$ приймає певне значення $x_i$ або потрапляє в деякий інтервал. Якщо випадкова величина має даний закон розподілу, то говорять, що вона розподілена по цьому закону або підкоряється цьому закону розподілу.

Випадкова величина $X$ називається дискретною, якщо існує така ненегативна функція

(4.12)

яка ставить у відповідність значенню $x_i$ змінної $X$ ймовірність $p_i$, з якою вона набуває це значення.

Випадкова величина $X$ називається безперервною, якщо для будь-яких $a < b$ існує така ненегативна функція $f(x)$, що

(4.13)

Функція $f(x)$ називається щільністю розподілу неперервної випадкової величини.

Імовірність того, що випадкова величина $X$ (дискретна або безперервна) приймає значення, менше $x$, називається функцією розподілу випадкової величини $X$ і позначається $F(x)$:

(4.14)

Функція розподілу є універсальним видом закону розподілу, придатним для будь-якої випадкової величини.

Загальні властивості функції розподілу:

а) функція розподілу приймає значення тільки з відповідного інтервалу $0 \le F(x) \le 1$;

б) $F(x)$ – неспадаюча функція, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$;

в)

г) ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $(a, b)$ (причому $a < b$), дорівнює:

(4.15)

д) $F(x)$ неперервна зліва.

Крім цього універсального, існують також окремі види законів розподілу: ряд розподілу (тільки для дискретних випадкових величин) і щільність розподілу (тільки для неперервних випадкових величин).

Основні властивості щільності розподілу:

(4.16)

Можна сказати, що кожен закон розподілу – це деяка функція яка повністю описує випадкову величину з імовірнісної точки зору.

Для отримання наближеного уявлення про вид закону розподілу ймовірностей для випадкової величини $X$ будують гістограму розподілу дослідних частот.