Алгоритмическое программирование. Алгоритм поиска экстремума функции методом «Золотого сечения», «Фибоначчи». История алгоритмов, принципы работы алгоритмов., алгоритмизация и кодирование алгоритмов.

Метод золотого сечения — метод поиска значений действительно - значной функции на заданном отрезке. В основе метода лежит принцип деления в пропорциях золотого сечения. Наиболее широко известен как метод поиска экстремума в решении задач оптимизации.

Описание метода

Пусть задана функция . Тогда для того, чтобы найти определённое значение этой функции на заданном отрезке, отвечающее критерию поиска (пусть это будет минимум), рассматриваемый отрезок делится в пропорции золотого сечения в обоих направлениях, то есть выбираются две точки и такие, что:

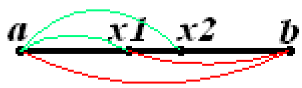

Иллюстрация выбора промежуточных точек метода золотого сечения.

, где — пропорция золотого сечения.

Таким образом:

То есть точка делит отрезок в отношении золотого сечения. Аналогично делит отрезок в той же пропорции. Это свойство и используется для построения итеративного процесса.

Алгоритм

На первой итерации заданный отрезок делится двумя симметричными относительно его центра, точками и рассчитываются значения в этих точках. После чего тот из концов отрезка, к которому среди двух вновь поставленных точек ближе оказалась та, значение в которой максимально (для случая поиска минимума), отбрасывают. На следующей итерации в силу показанного выше свойства золотого сечения уже надо искать всего одну новую точку. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность.

Формализация

Шаг 1. Задаются начальные границы отрезка и точность , рассчитывают начальные точки деления: и значения в них целевой функции: .

Шаг 2.

Если , то .

Иначе .

Шаг 3.

Если , то и останов.

Иначе возврат к шагу 2.

Метод чисел Фибоначчи

Числа Фибоначчи — элементы числовой последовательности

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597 … (последовательность A000045 в OEIS)

в которой каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел. Название по имени средневекового математика Леонардо Пизанского (или Фибоначчи).

Более формально, последовательность чисел Фибоначчи задается рекуррентным соотношением:

Иногда числа Фибоначчи рассматривают и для неположительных номеров как двусторонне бесконечную последовательность, удовлетворяющую основному соотношению. Члены с такими номерами легко получить с помощью эквивалентной формулы «назад»:

n	−10	−9	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fn	−55	34	−21	13	−8	5	−3	2	−1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Легко видеть, что . Для чисел Фибоначчи с отрицательными индексами остаются верными большинство нижеприведённых свойств.

Происхождение

Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии, где она применялась в метрических науках (просодии, другими словами — стихосложении), намного раньше, чем она стала известна в Европе.

Образец длиной может быть построен путём добавления к образцу длиной , либо к образцу длиной ; и просодицисты показали, что число образцов длиною является суммой двух предыдущих чисел в последовательности.

На Западе эта последовательность была исследована Леонардо Пизанским, известным как Фибоначчи, в его труде «Liber Abaci» (1202). Он рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая что:

В «нулевом» месяце, имеется пара кроликов (0 новых пар).

В первом месяце, первая пара производит на свет другую пару (1 новая пара).

Во втором месяце, обе пары кроликов порождают другие пары и первая пара погибает (1 новая пара).

В третьем месяце, вторая пара и две новые пары порождают в общем три новые пары, а старая вторая пара погибает (2 новые пары).

Закономерным является тот факт, что каждая пара кроликов порождает ещё две пары на протяжении жизни, а затем погибает.

Пусть популяция за месяц будет равна . В это время, только кролики, которые жили в месяце являются способными к размножению и производят потомков, тогда пар прибавится к текущей популяции . Таким образом, общее количество пар будет равно .

Формула Бине.

Формула Бине выражает в явном виде значение как функцию от :

,

где — золотое сечение. При этом и являются корнями квадратного уравнения .

Из формулы Бине следует, что для всех , есть ближайшее к целое число, то есть . В частности, справедлива асимптотика .

Тождества

$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$

$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$

$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$

$F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^{n+1}$

$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$

$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2$

$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$

И более общие формулы:

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$$

$$F_{(k+1)n} = F_{n-1}F_{kn} + F_nF_{kn+1}$$

$$F_n = F_lF_{n-l+1} + F_{l-1}F_{n-l}$$

Числа Фибоначчи представляются значениями континуант на наборе единиц: , то есть

$$F_n = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$ а также

$$F_{n+1} = \det\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \cdots & 0 \\ i & 1 & i & \ddots & \vdots \\ 0 & i & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & i \\ 0 & \cdots & 0 & i & 1 \end{pmatrix},$$

где матрицы имеют размер $n \times n$, i — мнимая единица.

Числа Фибоначчи можно выразить через многочлены Чебышёва:

$$F_{n+1} = (-i)^n U_n\left(\frac{-i}{2}\right) = (-i)^n T_n(-i)$$

$$F_{2n+2} = U_n\left(\frac{3}{2}\right) = T_n(3)$$

Для любого n,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Следствие. Подсчёт определителей даёт

$$(-1)^n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$$

Свойства

- Наибольший общий делитель двух чисел Фибоначчи равен числу Фибоначчи с индексом, равным наибольшему общему делителю индексов, т. е. (,) = . Следствия:

- делится на тогда и только тогда, когда m делится на n (за исключением n = 2). В частности, делится на F_3 = 2 (то есть является чётным) только для m = 3k; делится на F_4 = 3 только для m = 4k; делится на F_5 = 5 только для m = 5k и т. д.

- Fm может быть простым только для простых m (с единственным исключением m = 4) (например, число 233 простое, и индекс его, равный 13, также прост). Обратное не верно, первый контрпример — $F_{19} = 4181 = 37 \cdot 113$. Неизвестно, бесконечно ли множество чисел Фибоначчи, являющихся простыми.

Последовательность чисел Фибоначчи является частным случаем возвратной последовательности, её характеристический многочлен

имеет корни и .

Отношения являются подходящими дробями золотого сечения и, в частности, .

Суммы биномиальных коэффициентов на диагоналях треугольника Паскаля являются числами Фибоначчи ввиду формулы

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

В 1964 Дж. Кон (J. H. E. Cohn) доказал, что единственными точными квадратами среди чисел Фибоначчи являются числа Фибоначчи с индексами 0, 1, 2, 12: $F_0 = 0^2 = 0$, $F_1 = 1^2 = 1$, $F_2 = 1^2 = 1$, $F_{12} = 12^2 = 144$. При этом для n=0,1,12 верно утверждение .

Производящей функцией последовательности чисел Фибоначчи является:

$$0 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Множество чисел Фибоначчи совпадает с множеством положительных значений многочлена

на множестве неотрицательных целых чисел x и y.

Произведение и частное двух любых различных чисел Фибоначчи, отличных от единицы, никогда не является числом Фибоначчи.

Последние цифры чисел Фибоначчи образуют периодическую последовательность с периодом 60, последняя пара цифр чисел Фибоначчи образует последовательность с периодом 300, последние три цифры — с периодом 1500, последние четыре — с периодом 15000, последние пять — с периодом 150000 и т. д.

В силу того, что в асимптотике , метод золотого сечения может

быть трансформирован в так называемый метод чисел Фибоначчи. Однако при этом в силу свойств чисел Фибоначчи количество итерации строго ограничено. Это удобно, если сразу задано количество возможных обращений к функции.

Алгоритм

Шаг 1. Задаются начальными границами отрезка и числом итераций ,

рассчитывают начальные точки деления: и

значения в них целевой функции: .

Шаг 2. .

Если , то .

Иначе .

Шаг 3.

Если $n = 1$, то и останов.

Иначе возврат к шагу 2.