Лекция № 2

Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки.

1. Сила – величина постоянная.

Тело массой m движется вдоль оси OX под действием постоянной силы $F = const$.

В начальный момент $V = V_0$; $x = x_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.

Составляем дифференциальное уравнение движения т.М вдоль оси OX. Из уравнений (1.5) используем только одно уравнение:

$m\ddot{x} = \Sigma Fkx$. Итак: $m\ddot{x} = F$; т.к. $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt}$;

$m\dfrac{dV}{dt} = F \;|: m \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{F}{m} \;|\times(dt) \Rightarrow dV = \dfrac{F}{m}dt \Rightarrow$ интегрируем

$\int dV = \dfrac{F}{m}\int dt \Rightarrow V = \dfrac{F}{m}t + C_1$;

Постоянную интегрирования C_1 определяем из начальных условий.

При $t = 0$; $V = V_0$ $\Rightarrow V_0 = \dfrac{F}{m}\cdot O + C_1 \Rightarrow C_1 = V_0$;

тогда $V = \dfrac{F}{m}\cdot t + V_0$ - закон изменения скорости движения.

Т.к. $V = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F}{m}t + V_0 \;|\times(dt) \Rightarrow dx = \dfrac{Ft}{m}dt + V_0\,dt \Rightarrow$ интегрируем

$\int dx = \dfrac{F}{m}\int tdt + V_0\int dt \Rightarrow x = \dfrac{F}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2} + V_0 t + C_2$.

Постоянную интегрирования C_2 определяем из начальных условий.

При $t = 0$; $x = x_0$, тогда $x_0 = \dfrac{F}{m}\cdot\dfrac{0}{2} + V_0\cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0$;

$x = \dfrac{F}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2} + V_0\cdot t + x_0$ или $x = x_0 + V_0 t + \dfrac{F}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2}$ - закон движения тела.

2. Сила – функция времени.

Тело массой m движется вдоль оси OX под действием силы $F = 2t$. Начальные условия: $x = x_0$; $V = V_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.

Составляем дифференциальное уравнение вида:

$m\ddot{x} = \Sigma Fkx \Rightarrow m\ddot{x} = 2t \;\big|: m \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \dfrac{2}{m}t$ - закон изменения скорости вдоль оси OX.

Т.к. $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt} \Rightarrow \quad \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{2}{m}t \;\big|\times(dt) \Rightarrow dV = \dfrac{2}{m}tdt \Rightarrow$ интегрируем

$\Rightarrow \int dV = \dfrac{2}{m}\int tdt \Rightarrow \quad V = \dfrac{2}{m}\cdot\dfrac{t^2}{2} + C_1$ или $V = \dfrac{t^2}{m} + C_1$

C_1 определяем из начальных условий.

При t = 0; V = V_0; $V_0 = \dfrac{0}{m} + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = V_0$

$V = \dfrac{t^2}{m} + V_0$ - закон изменения скорости движения.

Т.к. $V = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2}{m} + V_0 \;\big|\times(dt) \Rightarrow dx = \dfrac{t^2}{m}dt + V_0dt \Rightarrow$ интегрируем

$\Rightarrow \int dx = \dfrac{1}{m}\int t^2dt + V_0\int dt \;\Rightarrow \quad x = \dfrac{t^3}{3m} + V_0t + C_2$

C_2 определяем из начальных условий.

При $t = 0$; $x = x_0$; $x_0 = \dfrac{0}{3m} + V_0\cdot 0 + C_2 \Rightarrow \quad C_2 + x_0$

$x = \dfrac{t^3}{3m} + V_0\cdot t + x_0$ или $x = x_0 + V_0\cdot t + \dfrac{t^3}{3m}$ - закон движения.

3. Сила – функция скорости.

Тело массой m движется вдоль оси OX под действием силы сопротивления $F = 3V$, начальные условия: $x = x_0$; $V = V_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.

Составляем дифференциальное уравнение движения вдоль оси ОХ.

$$m\ddot{x} = -F \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -3V \ \left|:(m)\right. \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{3V}{m};$$

Т.к $\ddot{x} = \dfrac{dV}{dt} \Rightarrow \quad \dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{3V}{m} \ \left|\times(dt)\right. \Rightarrow dV = -\dfrac{3V}{m}dt \ \left|:(V)\right. \Rightarrow \dfrac{dV}{V} = -\dfrac{3}{m}dt \Rightarrow$ интегрируем

$$\Rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V} = \int_{0}^{t} -\frac{3}{m}dt \Rightarrow \quad \ln V \Big|_{V_0}^{V} = -\frac{3}{m}t \Big|_{0}^{t} \Rightarrow \ln V - \ln V_0 = -\frac{3}{m}t \Rightarrow \quad \ln\frac{V}{V_0} = -\frac{3}{m}t \Rightarrow$$

$\dfrac{V}{V_0} = e^{-\frac{3}{m}t} \Rightarrow \quad V = V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t}$ - закон изменения скорости движения.

Т.к. $V = \dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dt} = V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} \ \left|\times(dt)\right. \Rightarrow \quad dx = V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} \cdot dt \Rightarrow$ интегрируем

$$\Rightarrow \int_{0}^{x} dx = \int_{0}^{t} V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} dt \Rightarrow \quad x = -\frac{m}{3}V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} \Big|_{0}^{t} \Rightarrow x = -\frac{m}{3}V_0\left(e^{-\frac{3}{m}t} - e^{-\frac{3}{m}0}\right) \Rightarrow$$

$x = -\dfrac{m}{3}V_0\left(e^{-\frac{3}{m}t} - 1\right)$ - закон движения.

4. Сила – функция перемещения.

Тело массой *m* движется под действием силы сопротивления $F = 2x$ вдоль оси ОХ с начальными условиями $x = x_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.

Составляем уравнение вида:

$$m\ddot{x} = \Sigma Fkx \Rightarrow \ m\ddot{x} = -F \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -2x \ \left|:(m)\right. \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{2}{m}x;$$

Обозначим $\dfrac{2}{m} = k^2 \Rightarrow \quad \ddot{x} = -k^2 x \Rightarrow \quad \ddot{x} + k^2 x = 0$ (2.1)

Составим характеристическое уравнение $z^2 + k^2 = 0$; его корни $z_{1,2} = \pm i \cdot k$.

Т.к. корни мнимые, то общее решение уравнения (*) имеет вид:

$$x = C_1 \cdot sin(kt) + C_2 \cdot cos(kt) \qquad (2.2)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 продифференцируем по времени (2.2):

$$\dot{x} = C_1 \cdot k \cdot cos\ (kt) - C_2 \cdot k \cdot sin\ (kt); \qquad (2.3)$$

и из начальных условий при $t = 0;\ x = x_0;\ \dot{x} = \dot{x}_0$ будем иметь:

$$\begin{cases} x_0 = C_1\, sin(k \cdot 0) + C_2 \cdot cos(k \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad C_2 = x_0 \\ \dot{x}_0 = C_1 \cdot k\, cos(k \cdot 0) - C_2 \cdot k\, sin(k \cdot 0) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{\dot{x}_0}{k} \end{cases}$$, тогда

$\dot{x} = \dfrac{\dot{x}_0}{k} \cdot k\, cos(k \cdot t) - x_0 \cdot k\, sin(k \cdot t)$ - закон изменения скорости движения.

$x = \dfrac{\dot{x}_0}{k} \cdot sin(k \cdot t) + x_0 \cdot cos(k \cdot t)$ - закон движения,

где $k = \sqrt{\dfrac{2}{m}}$

По этой теме выполняется ДКР №1 из учебника: А.А. Яблонский «Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике», раздел третий. Динамика. Задание Д-1. «Интегрирование дифференцированных уравнений движения материальной точки, находящихся под действием постоянных сил».

Механическая система. Силы внутренние и внешние.

Механической системой называется совокупность материальных точек, между которыми существуют силы взаимодействия.

Например: любой механизм, кривошипно-шатунный механизм.

Если движение материальных точек механической системы ничем не ограничено, такая механическая система называется **свободной**.

Например: солнечная система, в которой все тела сведены между собой силами взаимного притяжения.

Если движение точек механической системы, чем-либо ограничено, такая система называется **несвободной**.

Например: движение деталей в любом механизме, машине.

При изучении движения системы материальных точек, используют **принцип освобождаемости от связей**, т.е. будем заменять действие связей их реакциями и рассматривать систему свободной, которая находится под действием сил, как активных, так и реакций связей.

Силы, которые действуют на систему материальных точек, делят на

внешние и **внутренние**.

Внешними называются силы, которые действуют на материальные точки системы со стороны точек, или тел, которые не входят в данную систему. Обозначаются - $\overline{F}_k^e$.

Геометрическая сумма **внешних сил** называется **главным вектором внешних сил.**

$$\overline{R}^e = \overline{F}_1^e + \overline{F}_2^e + \ldots + \overline{F}_n^e = \sum \overline{F}_k^e;$$

$\overline{R}^e = \sum \overline{F}_k^e$ - главный вектор внешних сил. (2.4)

Главный момент внешних сил относительно центра:

$$\overline{M}_0^e = \overline{m}_0\left(\overline{F}_1^e\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_2^e\right) + \ldots + \overline{m}_0\left(\overline{F}_n^e\right) = \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^e\right);$$

$\overline{M}_0^e = \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^e\right)$ - главный момент внешних сил. (2.5)

Внутренними называются силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга. Обозначаются - $\overline{F}_k^i$.

Геометрическая сумма **внутренних сил** – **главный вектор внутренних сил**.

$$\overline{R}^i = \overline{F}_1^i + \overline{F}_2^i + \ldots + \overline{F}_n^i = \sum \overline{F}_k^i;$$

$\overline{R}^i = \sum \overline{F}_k^i$ - главный вектор внутренних сил. (2.6)

Геометрическая сумма моментов **внутренних сил** – **главный момент внутренних сил.**

$$\overline{M}_0^i = \overline{m}_0\left(\overline{F}_1^i\right) + \overline{m}_0\left(\overline{F}_2^i\right) + \ldots + \overline{m}_0\left(\overline{F}_n^i\right) = \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^i\right);$$

$\overline{M}_0^i = \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^i\right)$ - главный момент внутренних сил. (2.7)

Свойства внутренних сил.

1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равен нулю.

Из системы материальных точек возьмем две точки (1 и 2).

По III закону динамики какие-нибудь две точки действуют друг на друга с силами равными по модулю и противоположными по направлению, сумма которых равна нулю.

Т.к. $\overline{F}_1^i = -\overline{F}_2^i \Rightarrow \quad \overline{R}^i = \sum \overline{F}_k^i = 0$ (2.8)

(2.8) справедливо для какой-нибудь пары точек системы.

2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы, относительно некоторого центра или оси равняется нулю.

$$\begin{cases} m_0\left(\overline{F}_1^i\right) = -F_1^i \cdot h \\ m_0\left(\overline{F}_2^i\right) = F_2^i \cdot h \end{cases} \Rightarrow m_0\left(\overline{F}_1^i\right) + m_0\left(\overline{F}_2^i\right) = -F_1^i \cdot h + F_2^i \cdot h;$$

Т.к. $F_1^i = F_2^i \quad \Rightarrow \quad m_0\left(\overline{F}_1^i\right) + m_0\left(\overline{F}_2^i\right) = -F_2^i \cdot h + F_2^i \cdot h = 0$.

Итак: $\overline{M}_0{}^i = \sum \overline{m}_0\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$ (2.9)

Формулы (2.8) и (2.9) – закон парности внутренних сил.

II закон динамики для системы материальных точек.

Рассмотрим систему материальных точек, которые находятся под действием внешних и внутренних сил. Для каждой точки запишем II закон динамики.

$$\begin{cases} m_1\overline{a}_1 = \overline{F}_1^e + \overline{F}_1^i; \\ m_2\overline{a}_2 = \overline{F}_2^e + \overline{F}_2^i; \\ + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_n\overline{a}_n = \overline{F}_n^e + \overline{F}_n^i. \end{cases}$$

$$m_1\overline{a}_1 + m_2\overline{a}_2 + \ldots + m_n\overline{a}_n = \left(\overline{F}_1^e + \overline{F}_2^e + \ldots + \overline{F}_n^e\right) + \left(\overline{F}_1^i + \overline{F}_2^i + \ldots + \overline{F}_n^i\right);$$

$\sum m_k \overline{a}_k = \sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^i$ - II закон динамики для системы (2.10)

материальных точек.

Т. к. $\sum \overline{F}_k^i = 0,$ согласно закона парности внутренних сил, следовательно (2.10) примет вид:

$$\sum m_k \overline{a}_k = \sum \overline{F}_k^e \text{ - II закон динамики} \tag{2.11}$$