

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

по дисципліні «ОСНОВИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ»

для студентів денної та заочної форми навчання,
з напрямом підготовки 6.050301 – Гірництво

РОЗГЛЯНУТО

на засіданні кафедри «Охорона праці
та аерологія»

Протокол № від 2013 р.

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні навчально-видавничої
ради ДонНТУ

Протокол № від 2013 р.

УДК 001

Методичні вказівки до самостійної роботи студентів по дисципліні «Основи наукових досліджень» для студентів денної та заочної форми навчання, з напрямом підготовки 6.050301 – Гірництво // Укл.: Кавера О.Л., Біла Н.С. – Донецьк: ДонНТУ. – 2013. – 31 С.

Розглядаються теми, винесені на самостійне вивчення студентами. Наведені методика і вихідні дані для виконання контрольної роботи студентами заочної форми навчання та методика і вихідні дані для виконання індивідуального завдання студентами денної форми навчання.

Укладачі:

доц. О.Л. Кавера,
ст. викл. Н.С. Біла

1 МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА СТАТИСТИЧНИХ ДАНИХ

Математична статистика — розділ математики, що вивчає математичні методи систематизації, обробки і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.

Статистичними даними називають відомості про об'єкти, системи і явища, дослідження, що повністю або частково характеризують об'єкт. Наприклад, дані про характеристики міцності великої кількості зразків однієї і тієї ж гірничої породи, що визначалися у багатьох ділянках масиву; про собівартість видобутку однієї тони корисної копалини; про вміст золи і сірки у відібраних пробах вугілля і т.п.

Під **об'єктом дослідження** розуміють умовно ізольоване ціле, що містить сукупність процесів і засобів їх реалізації. До засобів реалізації відносяться обладнання контролю і керування, а також зв'язки між ними і об'єктом.

Повністю ізольованих об'єктів у природі не існує. А для всебічного дослідження, відповідно до діалектики, необхідний облік усіх зв'язків. Однак щоб не заплутатися в нескінченних зв'язках, дослідник повинен уміти виділити головне, абстрагуватися від другорядного і, таким чином, представити об'єкт дослідження як умовно ізольоване ціле.

В інженерному експерименті часто для об'єкта дослідження використовується модель "чорного ящика", яку представляють у вигляді прямокутника з вихідними і вхідними стрілками (рис. 1).

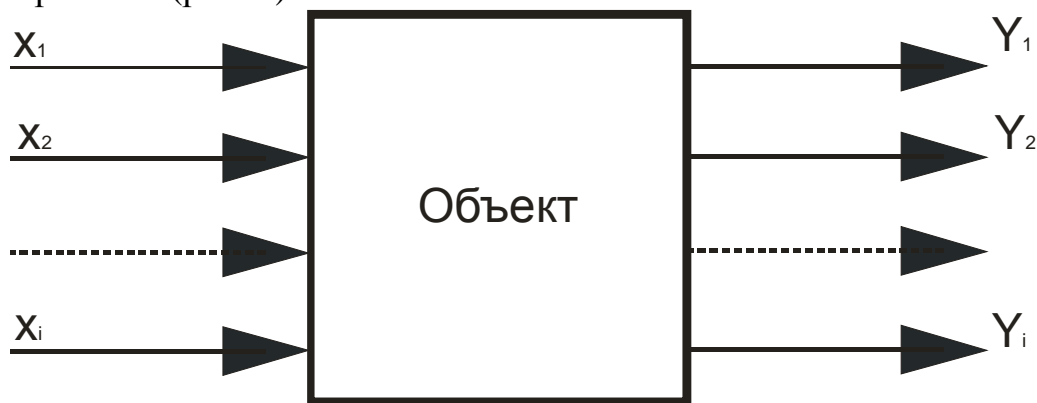


Рисунок 1 – Кібернетична модель "чорний ящик"

Вхідні стрілки відповідають вхідним величинам (x), а вихідні – вихідним величинам (y). Останні характеризують стан об'єкта дослідження. Першими позначається все, що впливає на вихідні величини. Передбачається, що внутрішня структура об'єкта і сутність зв'язків між вхідними і вихідними величинами дослідникові невідомі, про них він судить по тому, які значення приймають вихідні величини при даних значеннях вхідних.

У теорії експерименту вхідні величини звичайно називають **факторами**, а вихідні — параметрами, відгуками, реакціями і цільовими функціями.

Правильний вибір параметрів і факторів у значній мірі визначає успіх дослідження. Строго формалізованої методики їх вибору немає. Тут багато чого залежить від досвіду експериментатора, знань теорії експерименту.

Експеримент ставлять або з метою апроксимації, установлення (перевірки) зв'язків для даного об'єкта між параметрами і факторами, або з метою оптимізації,

вибору найкращого, з яких-небудь міркувань, стану. В останньому випадку вихідна величина називається **параметром** або критерієм оптимізації.

У якості параметрів приймаються економічні величини (собівартість, продуктивність праці і т.д.) або технічні (коефіцієнт корисної дії, витрата енергії і т.д.).

До параметра пред'являються наступні основні вимоги.

- Параметр повинен бути кількісним і оцінюватися числом, для якісних параметрів використовуються рангові і умовні показники оцінки.
- Параметр повинен допускати проведення експерименту при будь-якій комбінації факторів.
- Неприпустимо, щоб при якій-небудь комбінації відбувся вибух, поломка і т.д.
- Даній комбінації факторів з точністю до погрішності повинне відповідати одне значення параметра.
- Параметр повинен бути універсальним, тобто характеризувати об'єкт всебічно. Бажане, щоб параметр мав простий економічний або фізичний зміст, просто і легко обчислювався.

Рекомендується, щоб параметр був єдиним. Досліджувати об'єкт, побудувати математичні залежності можна для кожного параметра, оптимізація ж може виконуватися тільки по одному. Якщо параметрів декілька, то розглядаються компромісні завдання. Вибирається основний, з точки зору дослідника, параметр, а інші використовуються для накладення відповідних обмежень на об'єкт.

Фактором є будь-яка величина, що впливає на параметр і здатна змінюватися незалежно від інших.

Фактори можна розділити на наступні три групи:

1. контрольовані і керовані, які можна вимірювати і установлювати на відповідному рівні за бажанням експериментатора (подача насоса, напруга мережі і т.д.).
2. контрольовані, але некеровані величини (температура навколишнього середовища, сонячна радіація і т.д.).
3. неконтрольовані і некеровані вхідні параметри (впливи, пов'язані зі старінням матеріалу деталей об'єкта).

До факторів пред'являються наступні вимоги.

- Фактори повинні бути операціонально визначеними величинами (наприклад, якщо в якості фактора обрано тиск, то необхідно встановити, у якій точці він буде вимірюватися і за допомогою якого приладу).
- Сумісність факторів означає, що при всіх комбінаціях їх рівнів, експеримент можна поставити і він буде безпечним.
- Керованість означає, що експериментатор може встановлювати значення рівня фактора на власний розсуд.
- Точність установлення факторів повинна бути суттєво вище точності визначення параметра (принаймні, на порядок).
- Однозначність означає безпосередність впливу фактора на об'єкт дослідження. Фактори, як і параметри, повинні бути кількісними.

Об'єкт дослідження характеризується рядом властивостей. Найважливіші з яких — складність, повнота апріорної інформації, керованість і відтворюваність.

Складність об'єкта — число станів, які відповідно до мети дослідження і прийнятої техніки експерименту, можна розрізнати.

Під **апріорною інформацією** розуміється, відома до початку дослідження інформація, яка міститься у монографіях, наукових статтях, звітах, описах відкриттів і винаходів, каталогах, довідниках і т.д. Якщо про об'єкт відомо все (апріорна інформація максимально висока), то дослідження не потрібні.

Керованість — властивість, що дозволяє змінювати стан об'єкта по розсуду дослідника. Керовані об'єкти характерні тим, що дослідник може змінювати всі вхідні величини. У частково керованих можна міняти тільки їх частину. На керованих і частково керованих об'єктах можна ставити експеримент, за некерованими — можна тільки спостерігати.

Відтворюваність — властивість об'єкта переходити в один і той же стан, якщо комбінація факторів перебуває на тому самому рівні. Чим вище відтворюваність, тим простіше виконувати експеримент і тим достовірніше його результати.

2 ПОНЯТТЯ ПРО РЕГРЕСІЙНИЙ ТА КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ

Методом кореляції вивчається в математичній статистиці взаємозв'язок явищ. Термін «кореляція» походить від англійського слова correlation — співвідношення, відповідність. До вивчення зв'язку методом кореляції звертаються в тому випадку, якщо не можна ізолювати вплив сторонніх факторів (або тому, що вони невідомі, або через неможливість їх ізоляції). Тому кореляція застосовується для того, щоб при складній взаємодії сторонніх впливів з'ясувати, яка була б залежність між результатом і розглянутими факторами, якби сторонні фактори не змінювалися і своєю зміною не спотворювали б основну залежність. При цьому число спостережень повинно бути досить велике, тому що мале число спостережень не дозволяє виявити закономірність зв'язку.

Перше завдання кореляції полягає у виявленні на основі значного числа спостережень того, як міняється в середньому результативна ознака у зв'язку зі зміною одного або декількох факторів. Друге завдання полягає у визначенні ступеня впливу факторів, що спотворюють.

Перше завдання вирішується встановленням рівняння регресії і зветься регресійним аналізом, друге — визначенням різних показників тісноти зв'язку і називається, власне, кореляційним аналізом.

Регресійний аналіз дає можливість установити, як у середньому змінюється результативна ознака під впливом одного або декількох факторів.

Кореляційний аналіз кількісно оцінює зв'язок між двома або декількома взаємодіючими явищами. Його застосування дозволяє визначити наявність і силу зв'язку між явищами.

При вивченні впливу одних ознак на інші виділяються факторні і результативні ознаки. Попередньо встановлюється, які з ознак факторні, які — результативні. Встановлення видів ознак ведеться логічним шляхом.

Наприклад, продуктивність праці прохідників залежить, крім інших факторів, від стажу їх роботи. Продуктивність праці виступає тут як результативна ознака, а стаж роботи — як факторна. У математиці результативна ознака називається ще ознакою-функцією, факторна — ознакою-аргументом.

Зв'язки між величинами називаються **функціональними**, якщо кожному значенню величини факторної ознаки відповідає тільки одне значення результативної ознаки. Функціональні зв'язки зазвичай виражаються формулами.

Зв'язки, встановлювані при великій кількості спостережень, які проявляються в тому, що зміна середнього значення однієї ознаки приводить у цілому до зміни середнього значення іншої ознаки, називаються **статистичними**.

Функція, що відображає статистичний зв'язок між ознаками, називається **рівнянням регресії**. Якщо таке рівняння зв'язує лише дві ознаки — це рівняння парної регресії, якщо воно відображає залежність результативної ознаки від двох або більш факторних ознак — це рівняння множинної регресії.

При відшуванні функції, що зв'язує результативну ознаку з одним фактором, допомагає графічне зображення статистичного зв'язку. Маючи числові характеристики обох ознак, можна кожен пару чисел графічно представити у вигляді точки на площині, яка утворена системою прямокутних координат, у якій по осі абсцис відкладається факторна ознака, а по осі ординат — результативна. З'єднавши отримані точки прямими, одержимо ламану лінію, яка називається ламаною лінією регресії і є графічним зображенням зв'язку між двома ознаками. *Наприклад, залежність щільності вугілля від його зольності.*

Ламана лінія регресії дає дослідникові вказівки, яку функцію для відображення зв'язку треба прийняти. Рівняння парної регресії інтерпретується як пряма і крива, рівняння множинної регресії — як гіперповерхня.

При встановленні емпіричної залежності, вирішують наступні завдання:

1. збір вихідної інформації;
2. установлення однорідності даних;
3. установлення достатності числа даних;
4. установлення виду залежності;
5. визначення коефіцієнта емпіричної залежності (рівняння регресії);
6. установлення помилки рівняння регресії.

Необхідна кількість статистичних даних n для встановлення достовірної регресійної залежності визначається з вираження

$$n = \frac{\sigma_y^2 t^2}{\Delta y^2}, \quad (1)$$

де σ_y^2 — дисперсія значень результативної ознаки для генеральної сукупності; звичайно в практичних розрахунках при визначенні n значення дисперсії факторної ознаки σ_y^2 визначають при обмеженому числі спостережень $n' < n$ по формулі

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n'}, \quad (2)$$

де y_i — значення результативної ознаки в спостереженні,

\bar{y} — математичне очікування значень результативної ознаки, визначається з вираження

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n'}, \quad (3)$$

t – стандартизована випадкова величина (параметр функції Лапласа), що визначається від довірчої ймовірності: $t=1,96$ при довірчій ймовірності 0,95;

Δy — величина помилки у визначенні величини результативної ознаки по рівнянню регресії, яка може бути допущена через недостатню кількість статистичних даних. Звичайно в розрахунках приймають $\Delta y = (0,05 \dots 0,1) \bar{y}$, тобто в межах 5-10 % від середнього значення, при обмеженій кількості спостережень ($n'=6-8$).

Перевірку даних на однорідність здійснюють у двох випадках: при наявності результатів, що явно виділяються, в одній і тій же сукупності вихідних даних і при об'єднанні двох і більш сукупностей в одну для одержання більш достовірної залежності на базі великої кількості спостережень.

Згідно з теоремою Ляпунова прийнято вважати, що з ймовірністю 0,997 усі дані належать одній сукупності (тобто однорідні), якщо виконується умова

$$\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \leq 3,$$

де y_i – підозріле значення результату.

Значення результату, для якого ця умова не виконується, необхідно вилучити із загальної сукупності, тому що його зміна викликана впливом інших факторів. Викладений принцип перевірки на однорідність буде тем точніше, чим більше є вихідних даних.

Завдання 1. На шахті зібрані дані про собівартість видобутку 1 т вугілля в лавах з добовим навантаженням A . Значення цих показників (для нульового варіанту) дорівнюють: $C=2,25; 3,15; 4,08; 2,72; 3,68$ у.о./т і відповідно $A=540; 420; 290; 480; 350$ т/добу. Передбачається встановити залежність C від A . Необхідно визначити, яка повинна бути кількість спостережень, щоб обумовлена по встановленій залежності собівартість видобутку 1 т вугілля відрізнялася не більше ніж на 5 % від собівартості, обумовленої по залежності, встановленої при дуже великій кількості спостережень (що прагне до нескінченності).

Увага! Для одержання вихідних даних для свого номера варіанту (X) необхідно: до даних про добове навантаження (A), що узяті для нульового варіанту, додати X , а до даних про собівартість видобутку 1 т вугілля (C) додати $0,01X$. Так, наприклад, якщо студент значиться за списком під номером 30 ($X=30$), тоді вихідні дані для нього приймуть вид: $A=570; 450; 320; 510; 380$ т/добу; $C=2,55; 3,45; 4,38; 3,02; 3,98$ у.о./т.

Завдання 2. На шахті зібрані відомості про вартість перекріплення 1 м штреку залежно від потужності пласту. Значення цих показників (для нульового варіанту) склали: $P=198, 36, 40, 42, 45, 56, 57, 58, 60, 64, 68, 70, 72, 84, 87, 93, 96$ у.о./м і відповідно $m=0,50; 0,51; 0,54; 0,52; 0,56; 0,62; 0,64; 0,69; 0,68; 0,74; 0,78; 0,76; 0,79$;

0,85; 0,86; 0,92; 0,98 м. Як видно, у наведеній сукупності даних, перший результат явно виділяється з інших. Необхідно перевірити, чи можна використовувати значення цього результату для подальших статистичних розрахунків.

Увага! Для одержання вихідних даних для свого номера варіанту (X) необхідно: до даних про вартість (P), що узяті для нульового варіанту, додати X , а до даних про потужність шару (m) додати $0,01X$.

3 ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

В основу планування покладений багатофакторний експеримент, у якому при переході від досліду до досліду одночасно змінюються всі вхідні величини. У традиційному однофакторному експерименті сукупність дослідів ділиться на серії. У даній серії змінюється одна вхідна величина, а інші підтримуються постійними. Така методика прийнятна для відносно простих об'єктів. Коли ж параметр залежить від чотирьох-шести і більш факторів, використання однофакторних експериментів ускладнене. Планування експерименту дозволяє зменшити число дослідів і підвищити точність коефіцієнтів рівняння регресії, яке одержується при обробці результатів.

Розрізняють плани експерименту, що відсіває і основного експерименту. Ціль, експерименту, що відсіває, полягає у виявленні значимих факторів. Ціль основного – у встановленні потрібних залежностей для об'єкта дослідження.

Усі плани можна розділити на плани оптимізації і апроксимації. При оптимізації (екстремальний експеримент) шукаються найкращі умови функціонування об'єкта. При апроксимації встановлюється аналітична залежність між параметрами і факторами.

Залежно від того, коефіцієнти якого полінома знаходять при експерименті, розрізняють плани першого і вищих порядків. Добре розроблені плани першого і другого порядків. У першому випадку шукаються коефіцієнти лінійного рівняння

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i,$$

де y – параметр; b_0 – вільний член; k – число факторів; i – порядковий номер; b_i – коефіцієнт при відповідному факторові; x_i – фактор.

У планах другого порядку визначаються коефіцієнти полінома другого ступеня.

Зазвичай до основного експерименту, по тим або іншим міркуванням, можна виділити діапазон, у якому дослідника цікавить залежність параметра від даного фактора. У цьому випадку найбільше значення фактора в діапазоні приймається за верхній рівень, а найменше – за нижній.

Інтервалом варіювання називається значення фактора в натуральних одиницях, додавання якого до нульового – дає верхній, а віднімання – нижній рівень. Позначимо даний фактор x_i , його нижній рівень – x_{in} , верхній – x_{iv} і нульовий – x_{i0} . Тоді інтервал варіювання

$$\Delta x_i = x_{iv} - x_{in} = x_{iv} - x_{i0}.$$

У теорії планування експерименту широко використовуються кодовані значення фактора. Таким чином, кодоване значення будь-якого фактора на нижньому рівні $x_{in}=-1$, а на верхньому рівні $x_{iv}=+1$.

План експерименту можна зобразити у вигляді матриці планування для двох і більш факторів. Якщо факторів два, то перебір усіх можливих комбінацій на двох рівнях технічно нескладне. Збільшення числа факторів значно ускладнює завдання. Існує кілька прийомів побудови матриці. Один з найпоширеніших – прийом чергування знаків.

Таблиця 1 – Матриця планування експерименту

Номер досліджу	Фактори				
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1	+1	-1	-1	-1	-1
2	+1	+1	-1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1	-1	-1
5	+1	-1	-1	+1	-1
6	+1	+1	-1	+1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1
8	+1	+1	+1	+1	-1
9	+1	-1	-1	-1	+1
10	+1	+1	-1	-1	+1
11	+1	-1	+1	-1	+1
12	+1	+1	+1	-1	+1
13	+1	-1	-1	+1	+1
14	+1	+1	-1	+1	+1
15	+1	-1	+1	+1	+1
16	+1	+1	+1	+1	+1

Прийом полягає в тому, що елементарна комбінація першого фактора (-1; +1) повторюється для кожного наступного на нижньому і верхньому рівнях. При цьому в першому стовпці, що відповідає x_0 , знаки не змінюються. x_0 – фіктивний фактор, уведений для зручності визначення вільного члена рівняння регресії. У другому стовпці знаки змінюються через один; у третьому – через два, у четвертому – через чотири і т.д.

Приклад. Скласти план експерименту по встановленню залежності продуктивності гідровідбійки при нарізних роботах, від визначальних факторів в умовах даного пласту, при постійному тиску води, що підводиться до ділянки.

Параметром у цьому випадку є продуктивність гідровідбійки. Вона залежить від характеристик пласту (потужність, кут падіння, міцність, в'язкість, тріщинуватість вугілля та ін.), ширини заходки і властивостей струменя в контакті з масивом. Для даного пласту його характеристики є заданими величинами і тому в умовах прикладу не можуть бути факторами. При нарізних роботах ширина заходки також задана величина.

Властивості струменя залежать від тиску перед насадком, його діаметра і відстані до вибою. Якщо задано тиск води, що підводиться до ділянки, то тиск перед насадком функціонально пов'язаний з діаметром останнього. Тому одночасно

діаметр насадка і тиск перед ним не можуть бути факторами. Таким чином, факторами є діаметр насадка і відстань до вибою.

Приймемо в якості першого фактора діаметр насадка. Позначимо його x_1 . Другим фактором x_2 буде відстань до вибою. Попередніми експериментами встановлена доцільність проведення досліджень при діаметрах насадка $x_1=16\dots 22$ мм і відстанях $x_2=1\dots 9$ м. З урахуванням цього всі можливі комбінації при варіюванні факторів на двох рівнях у розглянутому прикладі визначаються чотирма дослідями. Матриця планування експерименту буде виглядати в такий спосіб.

Таблиця 2 – Матриця планування експерименту

Номер дослідів в матриці	Порядок реалізації дослідів	x_0	Діаметр насадка		Відстань		Продуктивність гідромонітора, т/год	
			код	мм	код	м	по дослідом	середня
1	4	+1	-1	16	-1	1	9	11
	12						10	
	2						14	
2	3	+1	+1	22	-1	1	25	24
	7						20	
	8						27	
3	9	+1	-1	16	+1	9	5	5
	1						4	
	11						6	
4	5	+1	+1	22	+1	9	13	10
	6						8	
	10						9	

Визначимо коефіцієнти лінійного рівняння регресії:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2,$$

де \hat{y} – розрахункове значення параметра.

Коефіцієнти рівняння регресії з урахуванням паралельних дослідів визначаються по формулі

$$b_i = \sum_{u=1}^n \bar{y}_u x_{iu} / n,$$

де n – число дослідів; u – номер дослідів; \bar{y}_u – математичне очікування параметра в u -ом досліді; x – значення визначального фактора.

Тоді

$$b_0 = (11 + 24 + 5 + 10) / 4 = 12,5 \text{ т/год},$$

$$b_1 = (-11 + 24 - 5 + 10) / 4 = 4,5 \text{ т/год},$$

$$b_2 = (-11 - 24 + 5 + 10) / 4 = -5 \text{ т/год}.$$

Відтворюваність дослідів оцінюється в наступному порядку.

Розраховується порядкова дисперсія по вираженню

$$S_n^2 = \frac{\sum_{u=1}^m (y_{nu} - \bar{y}_n)^2}{m - 1},$$

де m – число паралельних дослідів,

y_{nu} – значення вихідного параметра в досліді u даного n рядка.

Отримуємо:

$$S_1^2 = \frac{(9-11)^2 + (10-11)^2 + (14-11)^2}{3-1} = 7 \text{ т/год}^2,$$

$$S_2^2 = \frac{(25-24)^2 + (20-24)^2 + (27-24)^2}{3-1} = 13 \text{ т/год}^2,$$

$$S_3^2 = \frac{(5-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2}{3-1} = 1 \text{ т/год}^2,$$

$$S_4^2 = \frac{(13-10)^2 + (8-10)^2 + (9-10)^2}{3-1} = 7 \text{ т/год}^2.$$

Перевіримо однорідність дисперсій, використовуючи критерій Кохрена (G-критерій) по формулі

$$G = S_{\max}^2 / \sum_{i=1}^n S_i^2.$$

Оскільки $S_{\max}^2 = S_2^2$, одержуємо: $G=13/(7+13+1+7)=0,464$.

Для рівня значущості $\alpha=0,05$ при числі ступенів свободи для дисперсій $f_1=2$ ($f=m-1$) і числі дисперсій $n=4$ табличне значення G-критерію $G_T=0,9057$. Оскільки $G < G_T$ $0,464 < 0,9057$, то дисперсії однорідні. Дисперсія відтворюваності визначається по вираженню

$$S_B^2 = S_{CB}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n S_i^2 f_{li}}{\sum_{i=1}^n f_{li}} = \frac{7 \cdot 2 + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 7 \cdot 2}{2 + 2 + 2 + 2} = 7 \text{ т/год}^2.$$

Значимість коефіцієнтів рівняння регресії перевіряється в такому порядку. Визначають дисперсію коефіцієнтів по наступним вираженню:

$$S_{B_i}^2 = S_B^2 / n = 7 / 4 = 1,75 \text{ т/год}^2.$$

Для значимості коефіцієнтів повинна виконуватися умова

$$|b_i| > t_{\alpha} S_{B_i},$$

де t_{α} – критерій, прийнятий з таблиць для відповідного рівня значущості $\alpha=0,05$ і числа ступенів свободи $f=n \cdot (m-1)=4 \cdot (3-1)=8$ і який складає 2,306.

$$|b_i| > (2,306 \cdot \sqrt{1,75} = 3,05).$$

Оскільки виконуються умови:

$$|b_0| = 12,5 > 3,05,$$

$$|b_1| = 4,5 > 3,05,$$

$$|b_2| = 5 > 3,05,$$

те всі коефіцієнти значимі. Виходить, рівняння регресії буде мати вигляд

$$\hat{y} = 12,5 + 4,5x_1 - 5x_2.$$

Отримавши по даному рівнянню розрахункові продуктивності для всіх 4 випадків, рівняння регресії перевіряється на адекватність.

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{(11-13)^2 + (24-22)^2 + (5-3)^2 + (10-12)^2}{4-3} = 16 \text{ т/год}^2.$$

Розрахункове значення F-критерію (критерію Фішера) $F_p = S_{\text{ад}}^2 / S_{\text{в}}^2 = 16/7 = 2,286$. Критичне значення для рівня значущості 0,05: $F_{\alpha} = 5,32$. А оскільки $2,286 < 5,32$, то можна вважати, що рівняння адекватне експерименту.

4 ЛІНІЙНА І ПАРАБОЛІЧНА ПАРНА РЕГРЕСІЯ

Лінійна парна регресія.

При вивченні залежності результативної ознаки лише від однієї факторної, рівняння регресії можна записати у вигляді рівняння прямої

$$\bar{y} = a_0 + a_1 x,$$

де x – факторна ознака; \bar{y} – результативна ознака; a_0, a_1 – параметри рівняння.

Для визначення параметрів a_0 і a_1 необхідно розв'язати систему із двох рівнянь першого ступеня, яка називається системою нормальних рівнянь і має вигляд:

$$\begin{cases} \sum y_i = n \cdot a_0 + a_1 \sum x_i \\ \sum y_i x_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 \end{cases}$$

Набагато простіше визначити вид рівняння регресії, значення параметрів і вірогідність апроксимації, на комп'ютері за допомогою програми Excel, що входить до пакету Microsoft Office. Для цього в 1-й стовпець або рядок аркуша Excel слід увести значення факторної ознаки, а в 2-й – результативної. Потім «мишею» вибирається весь діапазон даних, що включає обидва стовпця (рядка). У меню **Вставка** слід вибрати пункт **Діаграма** (або нажати відповідну піктограму на панелі інструментів, яка розташовується нижче рядка **Меню**). Буде запущений **Майстер діаграм**. На вкладці **Стандартні** слід вибрати **Точковий** тип діаграми і 1-й або 2-й вид (сукупність крапок або плавна крива). Після натискання кнопки **Далі** на вкладці **Діапазон даних** перевіряємо правильність вибору рядів (у рядках або стовпцях). На вкладці **Ряд** переконуємося, що прийнято до розгляду тільки 1 ряд. Після натискання кнопки **Далі** встановлюємо параметри діаграми такі як **Заголовки**, **Осі**, **Лінії сітки**, **Легенда** і **Підписи даних**. Після натискання кнопки **Далі** вибираємо на якому аркуші буде побудована діаграма (на окремому або наявному).

Якщо при роботі з **Майстром діаграм** було щось пропущене (наприклад, не показані лінії сітки по осі x), то це завжди можна додати, клацнувши правою кнопкою «миші» в область діаграми і вибравши відповідний пункт контекстного меню.

Після цього, клацнувши правою кнопкою «миші» по представленому на діаграмі ряду, вибираємо пункт **Додати лінію тренда**. У вікні, що з'явилося, на вкладці **Тип** вибрати тип **Лінійна**, а на вкладці **Параметри** поставити позначки **Показувати рівняння на діаграмі** і **Помістити на діаграму величину вірогідності апроксимації**. Після натискання кнопки **ОК** до діаграми буде додана лінія тренда, поруч із якою буде представлено її рівняння і вірогідність апроксимації.

Клацнувши правою кнопкою «миші» по лінії тренда і вибравши пункт **Формат лінії тренда**, можна змінити всі стосовні до неї параметри (від типу до кольору).

Параболічна парна регресія.

Пряма парна регресія, при якій результативна ознака змінюється повільніше (швидше), ніж факторна, відображається рівнянням параболи 2-го порядку

$$\bar{y} = a_0 + a_1x + a_2x^2.$$

Для визначення параметрів a_0 , a_1 і a_2 необхідно розв'язати наступну систему із трьох нормальних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum y = n \cdot a_0 + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 \\ \sum yx = a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 \\ \sum yx^2 = a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 \end{cases}$$

При використанні програми Excel при додаванні лінії тренда, у вікні, що з'явилося, на вкладці **Тип** слід обрати тип **Поліноміальна**, а у вікні **Ступінь** слід встановити **2**.

У цьому випадку вірогідність апроксимації виявилася вище (рис. 1).

Таким чином, Excel набагато полегшує побудова апроксимуючих кривих і знаходження рівняння регресії для однофакторних експериментів.

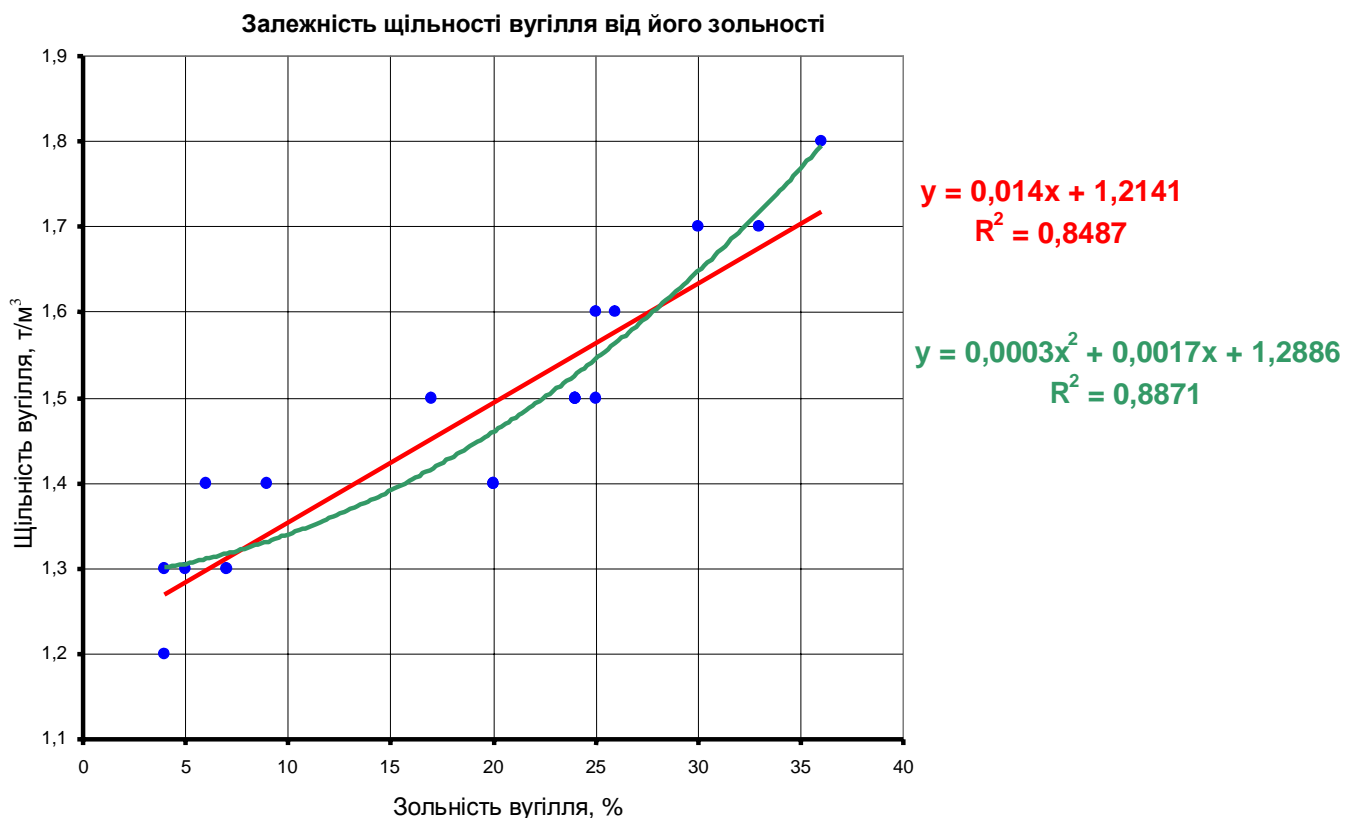


Рисунок 1 – Вид регресійної залежності, побудованої за допомогою Excel

Завдання 3. У таблиці 3 наведені (для нульового варіанту) значення щільності вугілля і його зольності, відібраних з різних ділянок пласту. Вид ламаної регресії показує, що зв'язок лінійний. Необхідно:

- визначити значення параметрів і побудувати рівняння регресії, що відображає залежність y від x (не використовуючи Майстер діаграм Excel). Привести результати всіх розрахунків;
- визначити вид рівняння регресії за допомогою програми Excel. Привести результат у вигляді діаграми;
- визначити вид рівняння регресії за допомогою програми Excel, якщо вважати, що залежність – квадратична. Привести результат у вигляді діаграми.

***Увага!** Для одержання вихідних даних для свого номера варіанту (X) необхідно: до даних про зольність вугілля, що узяті для нульового варіанту, додати $0,1X$, а до даних про щільність вугілля додати $0,01X$ (результат округляти до сотих).*

Таблиця 3 – Вихідні дані

Зольність вугілля x_i , %	Щільність вугілля y_i , т/м ³
4	1,2
4	1,3
5	1,3
7	1,3
6	1,4
9	1,4
20	1,4
20	1,4
17	1,5
24	1,5
24	1,5
24	1,5
25	1,5
25	1,6
26	1,6
30	1,7
33	1,7
36	1,8

5 АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВИНАХІДНИЦЬКИХ ЗАДАЧ (АРВЗ)

АРВЗ — покрокова програма (послідовність дій) по виявленню і вирішенню протиріч, тобто розв'язку винахідницьких задач (близько 85 кроків).

Теорія розв'язання винахідницьких задач (ТРВЗ) розроблена радянським письменником і винахідником Г.С. Альтшуллером. Робота зі створення ТРВЗ почалася в 1946 р. З позицій ТРВЗ усі інженерні задачі можна розділити на два типи:

1. Задачі, розв'язувані прямим застосуванням законів розвитку технічних систем, або правил, що випливають із цих законів.
2. Задачі, розв'язок яких поки не піддається повній формалізації.

Умовно можна вважати, що задачі діляться на типові, стандартні і нестандартні, причому розподіл цей залежить від сучасного стану ТРВЗ. Задачі, що є сьогодні нестандартними, завтра — після виявлення ще невідомих закономірностей — стануть задачами стандартними. Для розв'язку типових задач застосовуються так звані стандартні процедури. Під стандартними розуміють комплексні прийоми подолання фізичних протиріч, що включають кілька простих прийомів (евристичний прийом, фізичні ефекти і явища, репольні перетворення). В основу системи стандартів, використовуваних у ТРВЗ, покладена загальна схема розвитку технічних систем.

Система стандартів постійно удосконалюється. У цей час вона містить близько 70 стандартів, що відбивають основні етапи розвитку систем (синтез простих систем, їх перетворення, перехід до складних систем і т.д.). Стандарти дають можливість упевнено вирішувати приблизно 15-20 % усього обсягу задач, що зустрічаються. Для розв'язання інших, нетипових, задач призначений основний робочий інструмент ТРВЗ — алгоритм розв'язання винахідницьких задач (АРВЗ).

АРВЗ — це комплексна програма, заснована на використанні об'єктивних законів розвитку технічних систем і узагальненні найбільш сильних елементів творчого дослідження, що дозволяє проаналізувати вихідну задачу, побудувати її модель, виявити протиріччя, що заважає розв'язку звичайними (відомими) шляхами, і знайти найбільш ефективний прийом вирішення цього протиріччя (*заснований на вченні про протиріччя*).

Не представляючи собою якоїсь твердої, раз і назавжди встановленої, евристичної програми, ця методика постійно доповнюється, частково видозмінюється, удосконалюється, однак при цьому постійними залишаються основні принципи її побудови.

Кожна модифікація АРВЗ включає три головні складові:

1. Основою АРВЗ є програма послідовних операцій по виявленню і усуненню протиріч. Вона дозволяє крок за кроком переходити від розпливчастої вихідної ситуації до чітко поставленого завдання, потім до моделі завдання і аналізу протиріч. У цій програмі, у самій її структурі і правилах по виконанню окремих операцій, відбиті об'єктивні закони розвитку технічних систем.

2. Оскільки програму реалізує людина, необхідні засоби керування психологічними факторами: потрібно гасити психологічну інерцію і стимулювати роботу уяви. Звичайно джерелами психологічної інерції є технічна термінологія і просторово-часові уявлення об'єкта. Тому при постановці завдання в АРВЗ рекомендують видалити спеціальні терміни, у яких сформульовано завдання.

3. АРВЗ повинен бути оснащений великим і в той же час компактним інформаційним фондом. Основні складові цього фонду: евристичні прийоми, фізичні ефекти і явища, стандарти.

При розв'язку складних завдань фізичні ефекти застосовуються в комбінації із прийомами. Уся «хитрість» саме в їхній комбінації. Найбільш сильні комбінації повинні постійно поповнювати фонд стандартів.

Формулюють вихідну задачу (ВЗ) у загальному виді. Обробляють і уточнюють її, враховуючи дію вектора психологічної інерції (ВІ) і технічні рішення в цій та інших областях. Одержують оброблену задачу (ЗО).

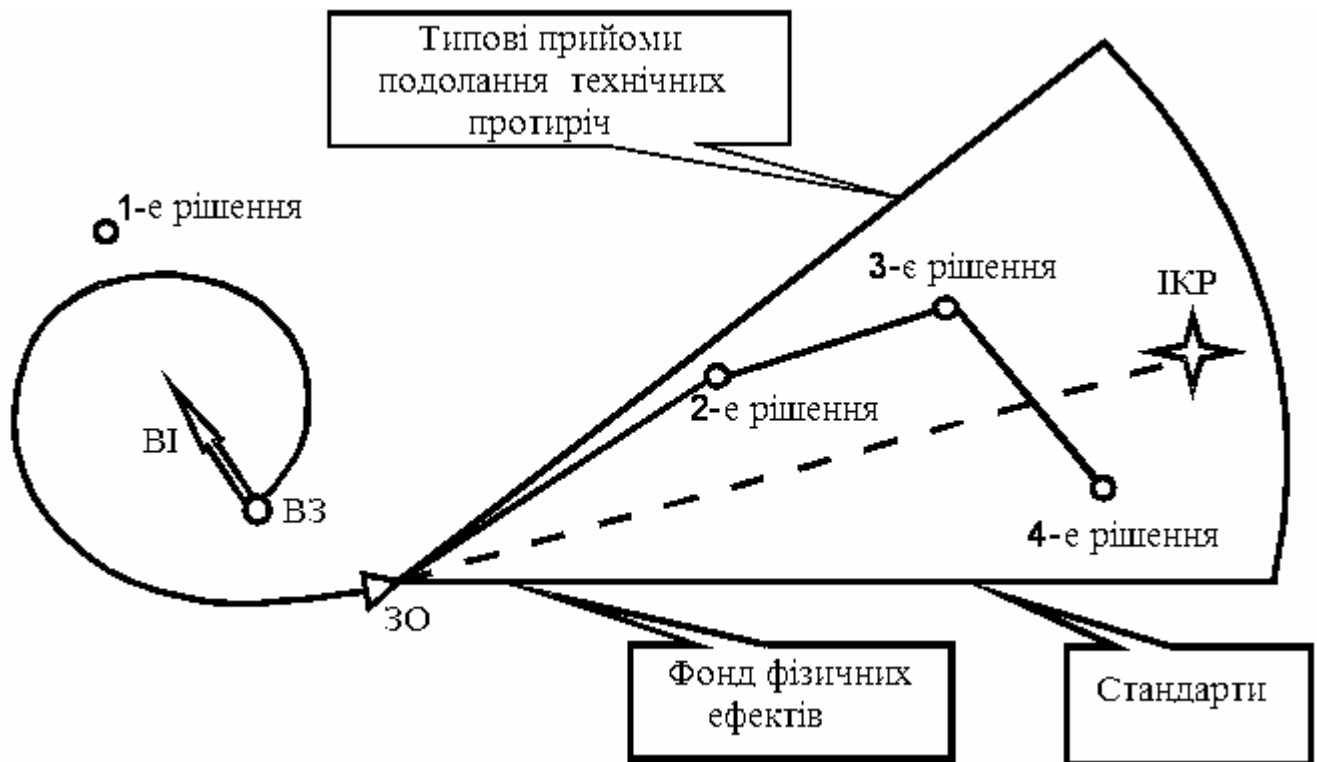


Рисунок 2 – Принципова схема роботи АРВЗ

Викладають умови задачі, що складаються з перерахування елементів технічної системи і небажаного ефекту, виробленого одним з елементів. Формулюють за певною схемою ідеальний кінцевий результат (ІКР), який є орієнтиром (маяком), у напрямку якого йде процес розв'язання задачі і знаходяться найбільш ефективні варіанти розв'язку. При цьому психологічно дуже важливо заздалегідь не загадувати, чи можливо досягти ідеального результату і яким шляхом. У порівнянні ІКР із реальним технічним об'єктом виявляється технічне протиріччя, а потім його причина — фізичне протиріччя. *(Збільшення міцності конструкції може бути пов'язане з неприпустимим збільшенням ваги, збільшення продуктивності — з неприпустимим погіршенням якості, поліпшення точності — з неприпустимим збільшенням витрат і т.д.)*

Зміст АРВЗ полягає в тому, щоб шляхом порівняння ідеального і реального виявити технічне протиріччя або його причину (фізичне протиріччя), і вирішити їх, використовуючи закони розвитку технічних систем, репольний аналіз і інформаційний фонд.

Евристичні прийоми. (складові інформаційного фонду)

Евристичний прийом — це коротка вказівка (правило, приписання, принцип) того, які перетворення в даній технічній системі можна здійснити для одержання нового технічного рішення.

Найбільш повним вважається фонд прийомів узагальненого евристичного алгоритму, створеного в Марійському політехнічному інституті. Цей фонд містить 420 евристичних прийомів, розділених на 15 груп.

Аналіз більш 40 тис. винаходів показав, що, незважаючи на незліченну безліч винахідницьких завдань технічні протиріччя, що містяться в них, часто повторюються. А якщо є типові протиріччя, то повинні існувати і типові прийоми їх усунення. Статистична обробка винаходів розкрила сорок найбільш ефективних прийомів (принципів) усунення технічних протиріч. *Їм дані короткі і образні назви, що добре відбивають їх сутність і легко запам'ятовуються.*

Винаходи високих рівнів утворюються в результаті використання не одного, а двох, трьох і більш прийомів одночасно або в певній послідовності. *Наприклад, принцип порошкової металургії полягає в тому, що матеріал дроблять у порошок, а потім спікають у єдине ціле, тобто використовують принцип дроблення, а потім принцип об'єднання.*

Прийом 1. Принцип дроблення. а) Розділити об'єкт на незалежні частини. б) Виконати об'єкт розбірним. в) Збільшити ступінь дроблення об'єкту.

Прийом 2. Принцип винесення. Відокремити від об'єкта частину, "що заважає" (властивість, "що заважає") або, навпаки, виділити єдину потрібну частину (потрібну властивість).

Прийом 3. Принцип місцевої якості. а) Перейти від однорідної структури об'єкта (або зовнішнього середовища, зовнішнього впливу) до неоднорідної. б) Різні частини об'єкта повинні мати (виконувати) різні функції. в) Кожна частина об'єкта повинна перебувати в умовах, найбільш сприятливих для її роботи.

Прийом 4. Принцип асиметрії. а) Перейти від симетричної форми об'єкта до асиметричної. б) Якщо об'єкт асиметричний, збільшити ступінь асиметрії.

Прийом 5. Принцип об'єднання. а) З'єднати однорідні або призначені для суміжних операцій об'єкти. б) Об'єднати в часі однорідні або суміжні операції.

Прийом 6. Принцип універсальності. Об'єкт виконує кілька різних функцій, завдяки чому відпадає необхідність в інших об'єктах.

Прийом 7. Принцип "матрьошки". а) Один об'єкт розміщений усередині іншого об'єкту, який, у свою чергу, перебуває усередині третього і т.д. б) Один об'єкт проходить крізь порожнину в іншому об'єкті.

Прийом 8. Принцип антиваги. а) Компенсувати вагу об'єкту з'єднанням з іншими об'єктами, що володіють підйомною силою. б) Компенсувати вагу об'єкту взаємодією із середовищем (за рахунок аеро-, гідродинамічних і інших сил).

Прийом 9. Принцип попередньої антидії. а) Заздалегідь додати об'єкту напруги, протилежні неприпустимим або небажаним робочим напруженням. б) Якщо за умовами завдання необхідно зробити якусь дію, треба заздалегідь зробити антидію.)

Прийом 10. Принцип попередньої дії. а) Заздалегідь виконати необхідну зміну об'єкту (повністю або хоча б частково). б) Заздалегідь розставити об'єкти так, щоб вони могли вступити в дію з найбільш зручного місця і без витрат часу на доставку.

Прийом 11. Принцип "заздалегідь підкладеної подушки". Компенсувати відносно невисоку надійність об'єкту заздалегідь підготовленими аварійними засобами.

Прийом 12. Принцип екіпотенціальності. Змінити умови роботи так, щоб не доводилося піднімати або опускати об'єкт.

Прийом 13. Принцип "навпаки". а) Замість дії, що диктується умовами завдання, здійснити зворотну дію (наприклад, не охолоджувати об'єкт, а нагрівати). б) Зробити

рухливу частину об'єкта (або зовнішнього середовища) нерухливою, а нерухливу – такою, що рухається. в) Перевернути об'єкт "догори дригом".

Приєм 14. Принцип сферіодальності. а) Перейти від прямолінійних частин об'єкту до криволінійних, від плоских поверхонь до сферичних, від частин, виконаних у вигляді куба або паралелепіпеда, до кульових конструкцій. б) Використовувати ролики, кульки, спіралі. в) Перейти до обертового руху, використовувати відцентрову силу.

Приєм 15. Принцип динамічності. а) Характеристики об'єкта (або зовнішнього середовища) повинні мінятися так, щоб бути оптимальними на кожному етапі роботи. б) Розділити об'єкт на частини, здатні переміщатися відносно один одного. в) Якщо об'єкт у цілому нерухливий, зробити його рухливим.

Приєм 16. Принцип часткового або надлишкового розв'язку. Якщо важко одержати 100% необхідного ефекту, треба одержати "ледве менше" або "ледве більше". Завдання при цьому може суттєво спроститися.

Приєм 17. Принцип переходу в інший вимір. а) Труднощі, пов'язані з рухом (або розміщенням) об'єкта по лінії, усуваються, якщо об'єкт здобуває можливість переміщатися у двох вимірах (тобто на площині). Відповідно, завдання, пов'язані з рухом (або розміщенням) об'єктів в одній площині, усуваються при переході до тривимірного простору. б) Багатоповерхове компонування об'єктів замість одноповерхового. в) Нахилити об'єкт або покласти його "набік". г) Використовувати зворотну сторону даної площини. д) Використовувати оптичні потоки, що падають на сусідню площину або на зворотну сторону наявної площини.

Приєм 18. Використання механічних коливань. а) Привести об'єкт у коливальний рух. б) Якщо такий рух уже відбувається, збільшити його частоту (аж до ультразвукової). в) Використовувати резонансну частоту. г) Застосувати замість механічних вібраторів п'єзовібратори. д) Використовувати ультразвукові коливання в комбінації з електромагнітними полями.

Приєм 19. Принцип періодичної дії. а) Перейти від безперервної дії до періодичної (імпульсної). б) Якщо дія вже здійснюється періодично - змінити періодичність. в) Використовувати паузи між імпульсами для іншої дії.

Приєм 20. Принцип безперервності корисної дії. а) Вести роботу безупинно (усі частини об'єкта повинні увесь час працювати з повним навантаженням). б) Усунути холості і проміжні ходи.

Приєм 21. Принцип проскакування. Вести процес або окремі його етапи (наприклад, шкідливі або небезпечні) на великій швидкості.

Приєм 22. Принцип "звернути шкоду на користь". а) Використовувати шкідливі фактори (зокрема, шкідливий вплив середовища) для одержання позитивного ефекту. б) Усунути шкідливий фактор за рахунок складання з іншим шкідливим фактором. в) Підсилити шкідливий фактор настільки, щоб він перестав бути шкідливим.

Приєм 23. Принцип зворотного зв'язку. а) Увести зворотний зв'язок. б) Якщо зворотний зв'язок є – змінити його.

Приєм 24. Принцип "посередника". а) Використовувати проміжний об'єкт, що переносить або передає дію. б) Тимчасово приєднати до об'єкта інший (що легко видаляється) об'єкт.

Приєм 25. Принцип самообслуговування. а) Об'єкт повинен сам себе обслуговувати, виконуючи допоміжні і ремонтні операції. б) Використовувати відходи (енергії, речовини).

Приєм 26. Принцип копіювання. а) Замість недоступного, складного, дорогого, незручного або тендітного об'єкту використовувати його спрощені і дешеві копії. б) Замінити об'єкт або систему об'єктів їх оптичними копіями (зображеннями). Використовувати при цьому зміну масштабу (збільшити або зменшити копії). в) Якщо використовуються видимі оптичні копії, перейти до копій інфрачервоних або ультрафіолетових.

Приєм 27. Дешева недовговічність замість дорогої довговічності. Замінити дорогий об'єкт набором дешевих об'єктів, поступившись при цьому деякими якостями (наприклад, довговічністю).

Приєм 28. Заміна механічної схеми. а) Замінити механічну систему оптичної, акустичної або "запаховою". б) Використовувати електричні, магнітні і електромагнітні поля для взаємодії з об'єктом. в) Перейти від нерушливих полів до тих, що рухаються, від фіксованих – до мінливих у часі, від неструктурних – до тих, що мають певну структуру. г) Використовувати поля в комбінації з феромагнітними частками.

Приєм 29. Використання пневмо- і гідроконструкцій. Замість твердих частин об'єкта використовувати газоподібні і рідкі: надувні і гідронаповнювані, повітряну подушку, гідростатичні і гідрореактивні.

Приєм 30. Використання гнучких оболонок і тонких плівок. а) Замість звичайних конструкцій використовувати гнучкі оболонки і тонкі плівки. б) Ізолювати об'єкт від зовнішнього середовища за допомогою гнучких оболонок і тонких плівок.

Приєм 31. Застосування пористих матеріалів. а) Виконати об'єкт пористим або використовувати додаткові пористі елементи (вставки, покриття і т.п.). б) Якщо об'єкт уже виконаний пористим, попередньо заповнити пори якоюсь речовиною.

Приєм 32. Принцип зміни фарбування. а) Змінити фарбування об'єкта або зовнішнього середовища. б) Змінити ступінь прозорості об'єкта або зовнішнього середовища. в) Для спостереження за погано видимими об'єктами або процесами використовувати барвні добавки. г) Якщо такі добавки вже застосовуються, використовувати мічені атоми.

Приєм 33. Принцип однорідності. Об'єкти, що взаємодіють з даним об'єктом, повинні бути зроблені з того ж матеріалу (або близького йому за властивостями).

Приєм 34. Принцип відкидання і регенерації частин. а) Частина об'єкту, що виконала своє призначення або стала непотрібною, повинна бути відкинута (розчинена, випарувана і т.д.) або видозмінена безпосередньо в ході роботи. б) Частини об'єкту, що витрачаються, повинні бути відновлені безпосередньо в ході роботи.

Приєм 35. Зміна фізико-хімічних параметрів об'єкта. а) Змінити агрегатний стан об'єкту. б) Змінити концентрацію або консистенцію. в) Змінити ступінь гнучкості. г) Змінити температуру.

Приєм 36. Застосування фазових переходів. Використовувати явища, що виникають при фазових переходах, наприклад зміна обсягу, виділення або поглинання тепла і т.д.

Приєм 37. Застосування термічного розширення. а) Використовувати термічне розширення (або стискання) матеріалів. б) Якщо термічне розширення вже використовується, застосувати кілька матеріалів з різними коефіцієнтами термічного розширення.

Приєм 38. Застосування сильних окиснювачів. а) Замінити звичайне повітря збагаченим. б) Замінити збагачене повітря киснем. в) Впливати на повітря або кисень іонізуючими випромінюваннями. г) Використовувати озонований кисень. д) Замінити озонований (або іонізований) кисень озоном.

Приєм 39. Застосування інертного середовища. а) Замінити звичайне середовище інертним. б) Вести процес у вакуумі.

Приєм 40. Застосування композиційних матеріалів. Перейти від однорідних матеріалів до композиційних.

Завдання 4. Проблема: сніг, що падає взимку на автостоянку, утрудняє пересування автомобілів і пішоходів. Завдання: не допускати падіння снігу на поверхню дороги або тротуару. Запропонувати приклади використання кожного (з сорока) прийомів усунення технічних протиріч для розв'язання поставленої задачі. Пропонуючи деякі рішення, не слід приділяти уваги складності їх реалізації. Кожна пропозиція повинна мати пояснення (можна додавати схематичні малюнки). Якщо прийом має кілька способів реалізації (наприклад, а і б), то слід використовувати тільки один з них.

6 ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Лінійне програмування – вид математичного моделювання, який служить для пошуку оптимального варіанту розподілу обмежених ресурсів між конкуруючими роботами. Воно отримало розвиток після Другої світової війни, і сфера його застосування розширилась паралельно з розвитком комп'ютерної індустрії, оскільки його практичне застосування потребує великих обчислювальних потужностей. Будь-яка задача, пов'язана з максимізацією чи мінімізацією (тобто оптимізацією) лінійної цільової функції і виражена у формі комплексу лінійних нерівностей (наприклад, обмежень по робочій силі, матеріалам чи іншим ресурсам), буде задачею лінійного програмування.

Приклад

Хімічний завод отримав замовлення на виробництво 50000 т спеціальної суміші з трьох компонентів, склад якої має наступні обмеження:

компонент 1: 1000 грн. за т, не більше 15000 т; (1)

компонент 2: 1200 грн. за т, не менше 7500 т; (2)

компонент 3: 1400 грн. за т, не менше 10000 т. (3)

Потрібно визначити: яку кількість кожного компоненту повинно бути використано для мінімізації вартості продукту?

Форма постановки такої задачі має наступний вигляд:

Нехай x_1 = кількості m компоненту 1;

x_2 = кількості m компоненту 2;

x_3 = кількості m компоненту 3.

Потрібно мінімізувати

$$Z = 1000 x_1 + 1200 x_2 + 1400 x_3 \quad (4)$$

при умові, що

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 50000; \quad (5)$$

$$x_1 \leq 15000; \quad (6)$$

$$x_2 \geq 7500; \quad (7)$$

$$x_3 \geq 10000; \quad (8)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0. \quad (9)$$

Рівняння (1), (2) і (3) визначають змінні x_1 , x_2 , x_3 в межах кількості компонентів 1, 2 і 3-го виду відповідно. Ці кількості, звісно, не можуть бути меншими нуля. Рівняння (4) стверджує, що мета даної задачі – в мінімізації вартості набору компонентів. (Вартість компоненту вираховується шляхом множення його кількості на вартість його одиниці. Сумуючи вартість всіх компонентів, отримуємо повну вартість набору.) Рівняння (5) вказує, що повна вага суміші повинна бути не менше 50000 т. Рівняння (6) стверджує, що повинно бути використано не більше 15000 т компоненту 1. Рівняння (7) встановлює, що повинно бути використано не менше 7500 т компоненту 2. Рівняння (8) стверджує, що повинно бути використано не менше 10000 т компоненту 3. Рівняння (9) формально стверджує, що ці змінні будуть додатними.

Наведена постановка задачі відповідає формату, закладеному в пакеті прикладних програм ЕОМ для розв'язання задач лінійного програмування. Після введення дані обробляються комп'ютерною програмою, результатом використання якої є розв'язок задачі. Для нашої задачі розв'язком є наступні величини:

$$x_1 = 15000, x_2 = 25000, x_3 = 10000.$$

Лінійне програмування може бути використане лише для розв'язання задач, що мають всі чотири представлені далі характеристики:

- комплекс невід'ємних незалежних змінних;
- одну і тільки одну мету, що є функцією змінних (наприклад, мінімізація затрат);
- наявність обмежень, що накладають межі на досягнення мети. Звичайно вони мають вигляд верхньої чи нижньої границі для системи змінних;
- лінійний характер кількісних співвідношень.

В наведеному прикладі є три змінних, якщо є лише дві змінні, то можна використати графічний метод. Графічний метод практично не використовується для розв'язання реальних задач лінійного програмування, однак він дуже корисний для пояснення базових концепцій, методів і елементарної геометрії лінійного програмування.

Приклад

Гончарне підприємство «Посуд» випускає два види глиняного посуду: горщики і вази. Для виготовлення горщика потрібно 4 кг глини і 1 год. роботи, а його реалізація приносить 4 грн. прибутку. Для виготовлення вази потрібно 3 кг глини і 2 год. роботи. Прибуток від реалізації вази складає 5 грн. На фірмі 40 годин

на тиждень працює один гончар; допустимі витрати глини складають 120 кг за тиждень. Скільки горщиків і ваз потрібно виготовити за тиждень, щоб максимізувати прибуток підприємства?

Розв'язання:

Крок 1. Визначення змінних.

Нехай

x_1 – кількість глиняних горщиків, що виробляються за день;

x_2 – кількість ваз, що виробляються за день.

Крок 2. Визначення цільової функції.

Кожен горщик приносить 4 грн. прибутку, а кожна ваза – 5 грн. Ціль Z , що полягає в максимізації прибутку, виражається як

$$Z=4x_1+5x_2.$$

Крок 3. Визначення обмежень.

А) обмеження працею.

Виготовляючи горщики чи вази, гончар буде працювати максимум 40 годин на тиждень. Він може працювати менше, але не більше. Кожен горщик потребує 1 годину роботи, а кожна ваза – 2 години. Відповідно

$$x_1+2x_2\leq 40.$$

Б) обмеження матеріалами.

Гончар має максимум 120 кг глини на тиждень, що витрачається на виробництво як горщиків, так і ваз. Кожен горщик потребує 4 кг глини, а кожна ваза – 3 кг. Відповідно

$$4x_1+3x_2\leq 120.$$

Крок 4. Введення обмежень на значення змінних.

Фізично неможливо виробити від'ємну кількість горщиків чи ваз.

Відповідно

$$x_1, x_2\geq 0.$$

Крок 5. Побудова осей графіка.

Позначимо горизонтальну вісь x_1 , а вертикальну вісь – x_2 . Ці осі визначають межі невід'ємних обмежень. Всі точки, що лежать вище горизонтальної осі і справа від вертикальної осі, задовольнятимуть цим обмеженням.

Обмеження працею виражається нерівністю $x_1+2x_2\leq 40$. Якщо $x_2=0$, то $x_1\leq 40$, і $x_1=40$ дає точку перетину з віссю X . Якщо $x_1=0$, то $x_2\leq 20$, і $x_2=20$ дає точку перетину з віссю Y . Тоді лінія $x_1+2x_2=40$, проведена між двома цими точками перетину, дасть верхню межу затемненої області (рис. 3). Всі точки, що лежать в цій області, включаючи точки на цій лінії, задовольнятимуть обмеження за працею.

Обмеження матеріалами виражається нерівністю $4x_1+3x_2\leq 120$. Якщо $x_2=0$, то $x_1\leq 30$, і $x_1=30$ дає точку перетину з віссю X . Якщо $x_1=0$, то $x_2\leq 40$, і $x_2=40$ дає точку перетину з віссю Y . Ми проводимо лінію $4x_1+3x_2=120$ між цими точками перетину (рис. 4). Лінія обмеження за матеріалами перетинає лінію обмеження за працею в точці з координатами (24; 8), а затемнена площа називається областю допустимих розв'язків.

Ці координати можна знайти, розв'язавши одночасно два рівняння:

$$x_1+2x_2=40 \text{ та } 4x_1+3x_2=120$$

$$x_1=24, x_2=8.$$

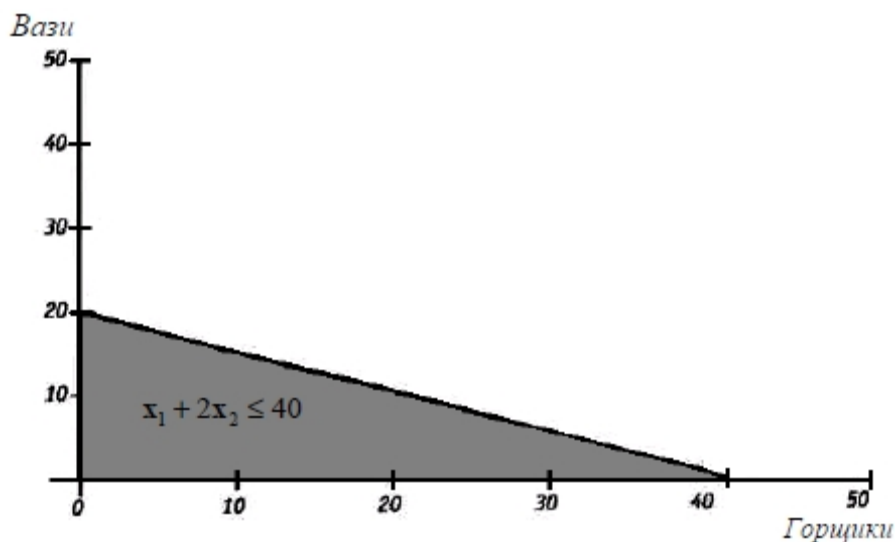


Рис. 3 — Обмеження за працею

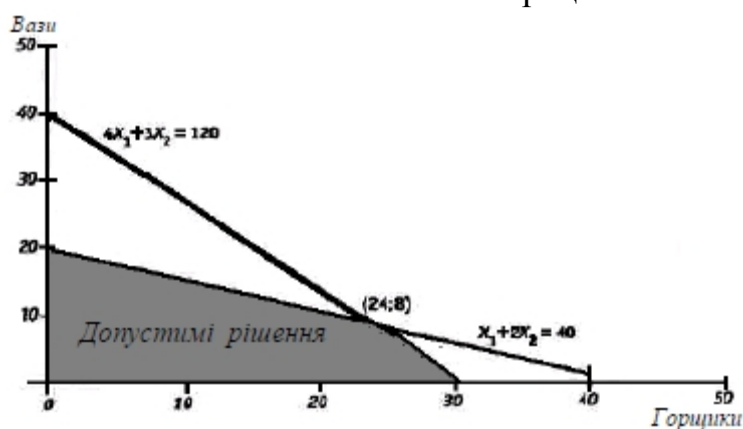


Рис. 4 — Область допустимих рішень, що задовольняє всім обмеженням

Очевидно, що існує величезна кількість комбінацій, що задовольняють всім обмеженням: фактично їх число нескінченне, у зв'язку з чим немає необхідності розглядати будь-яку з можливих комбінацій всередині затемненої області, оскільки оптимальний розв'язок потрібно шукати в одному з кутів чи в крайніх точках.

На рис. 5 проілюстровано базовий принцип розв'язання задач лінійного програмування: проводячи паралельні лінії, що виражають різні рівні цільової функції $Z=4x_1+5x_2$, ми отримаємо розв'язок в кутку області допустимих розв'язків.

В початку координат всі обмеження будуть задоволені, але значення цільової функції дорівнюватиме нулю. В міру паралельного руху цільової функції від початку координат прибутки збільшуються. В точці (0; 20) всі обмеження будуть задоволені, а прибуток складатиме 100 грн. Він може бути підвищеним при переході до точки (30; 0). Тут всі обмеження також будуть задоволені, а прибуток складатиме 120 грн. Цей розв'язок ще не буде оптимальним, оскільки прибуток можна збільшити, якщо перейти в точку (24; 8), де перетинаються дві лінії обмежень. Тут прибуток складатиме 136 грн. і буде максимальним. Якщо ми віддалимося від початку координат, то обмеження більше не задовольнятимуться, тобто ні одна частина лінії цільової функції не лежатиме в області допустимих розв'язків. Це демонструє лінія $4x_1+5x_2=160$.

Слід відзначити, що задача лінійного програмування необов'язково має єдиний розв'язок. Якщо цільова функція буде паралельною одній з границь обмежень, то будь-яка точка на цій межі буде оптимальною, даючи нескінченне число розв'язків. Другим граничним випадком може бути відсутність розв'язків задачі у сформульованому вигляді. Так, наприклад, якщо задано мінімальну кількість одиниць продукції, що випускається, а ресурсне обмеження таке, що недостатньо для виробництва такої мінімальної кількості, то задача не матиме розв'язку.

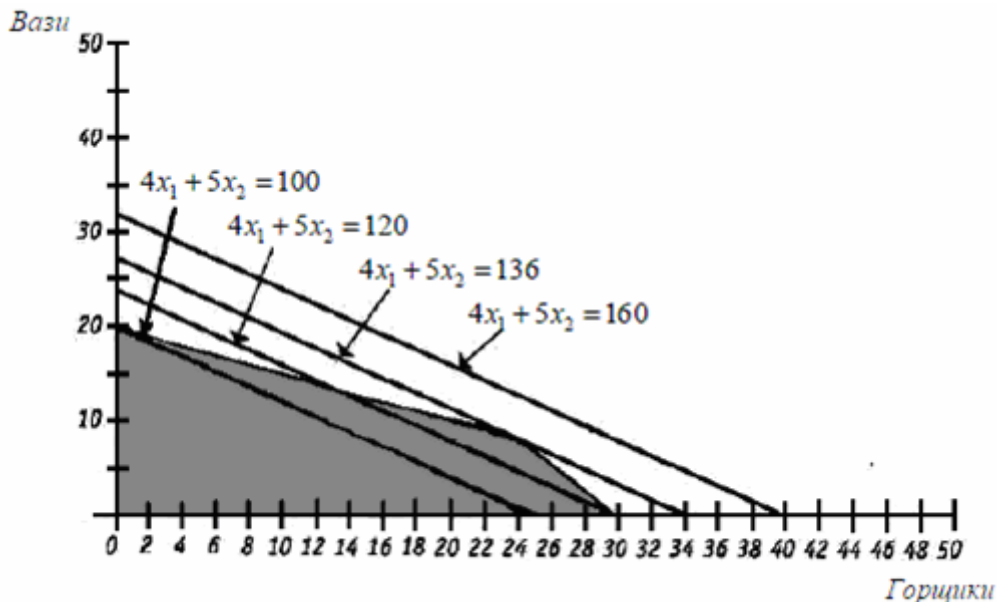


Рис. 5 — Допустимі розв'язки

Задачі оптимізації зручно розв'язувати за допомогою програми Excel, що входить до пакету Microsoft Office.

Приклад

Фабрика виготовляє два види фарб: для внутрішніх (В) і зовнішніх робіт (Н). Продукція обох видів надходить в оптовий продаж. Для виробництва фарб використовуються два вихідні продукти — П1 і П2. Максимально можливі добові запаси цих продуктів становлять 6 і 8 т, відповідно. Витрати продуктів П1 і П2 на одну тону відповідних фарб наведені в таблиці.

Вихідний продукт	Витрата вихідних продуктів на тону фарби, т		Максимальний запас вихідних продуктів, т
	фарба Н	фарба В	
П1	1	2	6
П2	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу В ніколи не перевищує попиту на фарбу Н більш ніж на 1 т. Крім того, установлене, що попит на фарбу В ніколи не перевищує 2 т на добу. Оптові ціни однієї тонни фарб дорівнюють: 3 тис. дол. для фарби Н і 2 тис. дол. для фарби В. Яку кількість фарб кожного виду повинна робити фабрика, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

Приступаючи до розв'язку цього завдання, припустимо, що нам приблизно відомо, скільки фарби потрібно робити (наприклад, 4 т фарби Н і 2 т фарби В). Складемо електронну таблицю, яка дозволяє розрахувати витрати продуктів на виробництво фарб і одержуваний дохід (рис. 6). При цьому всі клітинки з розрахунковими даними повинні мати вигляд як на рис. 7. Аналізуючи рис. 6, зауважуємо, що витрати продуктів П1 і П2, які необхідні для виробництва фарб відповідно до нашого припущення, перевищують максимальний добовий запас. Отже, одержати 16 тис. дол. доходу неможливо.

	A	B	C	D	E
11	Исходные продукты для производства красок				
12					
13					
14	Вид исх.прод	Расход исх.прод. (т/т)		Макс. запас исх. прод., т	Суточный расход исх. прод., т
15		Краска Н	Краска В		
16	П1	1	2	6	8
17	П2	2	1	8	10
18	Суточное производство красок				
19					
20					
21	Вид краски	Объем пр-ва, т	Опт. Цена, тыс.\$/т	Прибыль, тыс.\$	Общая прибыль, тыс.\$
22					
23	Н	4	3	12	16
24	В	2	2	4	
25	Ограничения суточного спроса по видам красок, т				
26					
27					
28			макс	мин	
29		Краска Н		1	
30		Краска В	2		

Рис. 6.

Спробуємо зменшити обсяги виробництва фарб, наприклад 2 т фарби Н і 2 т фарби В. Підставивши ці числа в таблицю, ми одержимо нові значення прибутку, добової витрати продуктів і попиту на фарби. Продовжуючи цей процес перебору варіантів, ми рано або пізно знайдемо варіант, при якому прибуток буде максимальним, і в той же час будуть виконані обмеження по запасах продуктів і попиту на фарби. Це буде означати, що ми розв'язали оптимізаційне завдання.

Однак такий процес пошуку розв'язків може виявитися занадто довгим і стомлюючим. Крім того, якби номенклатура фарб містила в собі не два, а, наприклад, десять видів, ми взагалі чи навряд змогли б знайти оптимальний варіант організації виробництва шляхом простого перебору варіантів.

У цьому змісті ускладнення завдання пов'язане зі збільшенням його розмірності (кількості змінюваних клітинок) і числа обмежень. Практичні завдання оптимізації містять у собі десятки і навіть сотні змінюваних гнізд і обмежень. У таких випадках на допомогу приходять спеціальні програми — вирішувачі оптимізаційних завдань. Одна з таких програм — «Пошук розв'язку» — включена в систему Microsoft Excel. Для цього необхідно викликати додаток **Пошук розв'язку** (меню **Сервіс**). При цьому на екрані з'явиться діалогове вікно **Пошук розв'язку**

(рис. 8). Якщо в меню **Сервіс** відсутній **Пошук розв'язку**, то необхідно відкрити **Надбудови** (у меню **Сервіс**) і встановити відповідну відмітку «**Пошук розв'язку**» (після підтвердження Excel може вимагати установки додаткових компонентів, якщо ця надбудова не була включена раніше).

	A	B	C	D	E
11	Исходные продукты для производства красок				
12					
13					
14	Вид исх.прод.	Расход исх.прод. (т/т)		Макс. запас исх. прод., т	Суточный расход исх. прод., т
15		Краска Н	Краска В		
16	П1	1	2	6	=B23*B16+B24*C16
17	П2	2	1	8	=B23*B17+B24*C17
18	Суточное производство красок				
19					
20					
21	Вид краски	Объем пр-ва, т	Опт. Цена, тыс.\$/т	Прибыль, тыс.\$	Общая прибыль, тыс.\$
22					
23	Н	4	3	=C23*B23	=D23+D24
24	В	2	2	=C24*B24	
25	Ограничения суточного спроса по видам красок, т				
26					
27					
28			макс	мин	
29		Краска Н		=B24-1	
30		Краска В	2		

Рис. 7.

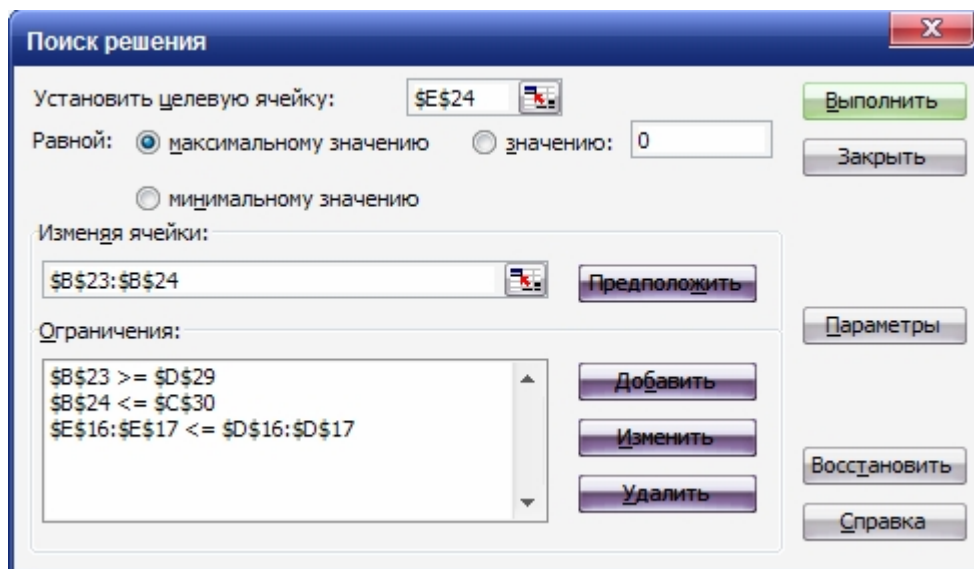


Рис. 8.

У поле **Встановити цільову клітинку** вікна **Пошук розв'язку** необхідно ввести ім'я (адреса) відповідної клітинки. Для нашого прикладу це клітинка E24. Потім вказується вид оптимізації (у нашій випадку **максимальному значенню**).

У поле **Змінюючи клітинки** вказуються імена (адреси) клітинок, вміст яких підбирається програмою пошуку розв'язку таким чином, щоб забезпечити необхідне значення цільової клітинки. Для нашого прикладу змінюваними клітинками є B23, B24, що містять обсяги добового виробництва фарб.

У поле **Обмеження** повинні бути введені всі обмеження, пов'язані з розв'язуванням завданням. У нашій прикладі такі обмеження діляться на три групи:

- природні обмеження: $B23:B24 \geq 0$ (вони вводяться шляхом натискання на кнопку **Параметри** і установкою оцінки **Невід'ємні значення**);
- обмеження по запасах вихідних продуктів: $E16:E17 \leq D16:D17$;
- обмеження попиту на фарби: $B23 \geq D29$; $B24 \leq 330$.

Додавання, зміна і видалення обмежень здійснюється з використанням відповідних кнопок, розташованих праворуч від вікна обмежень.

Натискання кнопки **Додати** або **Змінити** приводить до виклику додаткового вікна визначення обмежень (рис. 9). У полі **Посилання на клітинку** вводиться ліва частина обмеження. Список **Обмеження** містить у собі відношення: =, >=, <=, **цілий** (яке означає, що ліва частина обмеження повинна бути цілим числом), **двоич** (означає, що ліва частина обмеження повинна бути бінарним числом, тобто які приймають значення 0 або 1). При використанні відносин **цілий** і **двоич** поле праворуч від списку обмежень залишається порожнім. При використанні будь-якого іншого відношення в цьому полі розміщується права частина обмеження.

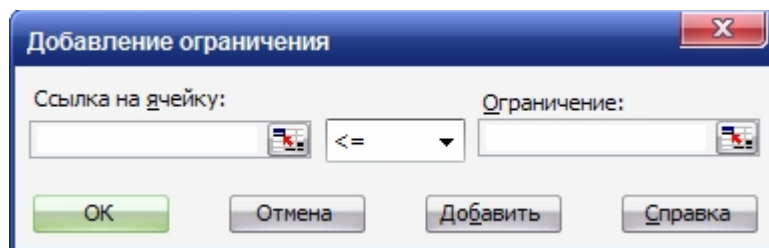


Рис. 9.

Натискання кнопки **Виконати** вікна **Пошук розв'язку** приводить до запуску процесу пошуку розв'язку завдання оптимізації. У результаті пошуку програма знаходить такі значення змінюваних клітинок, при яких досягається оптимальне значення цільової клітинки.

Для нашого завдання про фарби оптимальний розв'язок буде визначатися наступними значеннями змінюваних клітинок:

- обсяг виробництва фарби Н (клітинка B23) — 3,33333333333375 т;
- обсяг виробництва фарби В (клітинка B24) — 1,333333333333079 т;
- оптимальне значення цільової клітинки — 12,66666667 тис. дол.

Вище ми вже використовували поняття *змінюваної клітинки цільової клітинки*. Змінювані клітинки завжди містять числову інформацію, яка підбирається в процесі пошуку розв'язку таким чином, щоб забезпечити оптимальне значення цільової клітинки. Крім того, у процесі пошуку використовуються ще два види клітинок:

- клітинки вихідних даних;
- залежні клітинки.

Клітинки вихідних даних містять числа, які не міняються програмою пошуку розв'язку, залежні клітинки містять формули, які неодноразово перераховуються в процесі пошуку розв'язку. клітинки різного виду в електронній таблиці доцільно фарбувати різним кольором.

Наявність залежностей між клітинками різних видів у середовищі Excel може бути проілюстроване *графом залежностей*, побудованим безпосередньо на структурі таблиці (рис. 10). Побудова такого графа пов'язана з використанням меню **Сервіс (Залежності формул, Панель залежностей)**.

	A	B	C	D	E
11	Исходные продукты для производства красок				
12					
13					
14	Вид исх. прод.	Расход исх. прод. (т/т)		Макс. запас исх. прод., т	Суточный расход исх. прод., т
15		Краска Н	Краска В		
16	П1	1	2	6	6
17	П2	2	1	8	8
18	Суточное производство красок				
19					
20					
21	Вид краски	Объем пр-ва, т	Опт. Цена, тыс. \$/т	Прибыль, тыс. \$	Общая прибыль, тыс. \$
22					
23	Н	3,33333333	3	10	12,66666667
24	В	1,66666667	2	2,66666667	
25	Ограничения суточного спроса по видам красок, т				
26					
27					
28			макс	мин	
29		Краска Н		0,33333333	
30		Краска В	2		

Рис. 10.

Використання графа залежностей дозволяє формально контролювати структуру таблиці. У правильно складеній таблиці всі стрілки повинні починатися в змінюваних клітинках або клітинках вихідних даних і закінчуватися в залежній або цільовій клітинці. Із цільової клітинки стрілки залежностей не можуть виходити. Таблиця вважається добре структурованою, якщо граф залежностей наочно ілюструє причинно-наслідкові зв'язки між клітинками. «Заплутаний» граф свідчить про погану структуру таблиці.

Завдання 5. (Тільки для виконання студентами денної форми навчання!)

Увага! Перед виконанням завдання студентові необхідно довідатися номер варіанта N для прийняття своїх «унікальних» вихідних даних.

Фірма «Бук» виробляє двері для продажу місцевим будівельним компаніям. Репутація фірми дозволяє їй продавати всю вироблену продукцію. На фірмі працює 10 робітників, що дає $(400+N)$ годин на тиждень. Робочий час поділений між двома технологічними процесами: виробництвом і кінцевою обробкою дверей. З $(400+N)$ робочих годин у тиждень 250 відведені під власне виробництво і $(150+N)$ під

кінцеву обробку. «Бук» виробляє 3 типи дверей: стандартні, поліровані і різьблені. У таблиці наведені часові витрати і прибуток від продажу однієї двері кожного типу.

Тип дверей	Час на виробництво (хв)	Час на обробку (хв)	Прибуток (\$)
Стандартні	30	15	$45+N$
Поліровані	30	30	$90+2N$
Різьблені	60	30	$120+3N$

- А. Скільки дверей різних типів потрібно робити, щоб максимізувати прибуток?
- Б. Чи є оптимальним розподіл робочого часу між двома технологічними процесами (виробництво і кінцева обробка)? Як зміниться прибуток, якщо розподілити робочий час між цими процесами оптимально?
- В. На майбутньому тижні «Бук» повинен виконати контракт на поставку 280 стандартних, $(120+N)$ полірованих і 100 різьблених дверей. Для виконання замовлення «Бук» може закупити деяку кількість заготовок дверей у зовнішнього постачальника. Ці заготовки «Бук» може використовувати тільки для виробництва стандартних і полірованих, але не різьблених дверей. При цьому виготовлення стандартної двері вимагає лише 6 хв. процесу обробки, а полірованої – 30 хв. обробки (процес виробництва для цих заготовок не потрібен). Отримані в такий спосіб одні стандартні двері приносять $(15+N)$ \$ прибутку, а поліровані – $(50+N)$ \$. Припускаючи, що як і раніше 250 годин на тиждень відведене під виробництво і $(150+N)$ під обробку, визначте скільки і яких дверей «Бук» повинен зробити самостійно, і скільки заготовок закупити для виготовлення стандартних і полірованих дверей?
- Г. Як зміниться оптимальний план, отриманий при виконанні попереднього пункту, якщо правильно розподілити час між власним виробництвом і обробкою дверей? Яким буде правильний розподіл у цьому випадку?

Звіт по контрольній роботі повинен бути наданий студентом у вигляді пояснювальної записки (формат А4) з поясненням усіх виконуваних дій і приведенням результатів (див. приклад вище) і на електронному носії одним файлом, виконаним в середовищі Excel. Файл розв'язку повинен містити чотири аркуші, відповідно числу поставлених питань.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Основи наукових досліджень. Конспект лекцій для студентів за напрямом підготовки 6.050301 Гірництво зі спеціалізацією «Охорона праці в гірничому виробництві». О.Л. Кавера – Донецьк: ДонНТУ, 2010. – 56 с.
2. Основы научно-технического творчества молодёжи / К.Ф. Сапицкий, И.Ф. Ярембаш, В.Ф. Андрушко и др.; Под ред. Б.Т.Пономаренко. – К.: УМК ВО, 1993. – 184 с.
3. Основы научных исследований: Учеб. для техн. вузов / В.И. Крутов, И.М. Грушко, В.В. Попов – М.: Высш. шк., – 1989. – 400 с.
4. Основы научных исследований: горное дело : учебное пособие для вузов / Е.Г. Баранов, В.А. Бунько, О.В. Колоколов ; Е.Г. Баранов, В.А. Бунько, О.В. Колоколов и др. – К.; Донецк: Вища школа, 1984. – 173 с.
5. Теория инженерного эксперимента: Учеб. пособие / Г.М.Тимошенко, П.Ф. Зима. – К.: УМК ВО, – 1991. – 124 с.
6. Білушак Г.І., Чабанюк Я.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Практикум. – Львів. – 2001. – 418 с.
7. Фаддеев М.А. Элементарная обработка результатов эксперимента / Изд-во: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. – 2002. – 108 с.
8. Гайдышев И. Анализ и обработка данных. Специальный справочник – СПб: Питер. – 2001. – 752 с.
9. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке – Мир. – 1980. – 610 с.
- 10.Н.А. Спиринов, В.В. Лавров. Методы планирования и обработки результатов инженерного эксперимента. – Екатеринбург. – 2004, – 257 с.
- 11.Методы исследований и организация эксперимента / Под ред. К.П. Власова. – Харьков: Издательство Гуманитарный центр. – 2002. – 255с.
- 12.Єгоршин О.О., Лісовий М.В. Математичне планування польових дослідів та статистична обробка експериментальних даних. Харків. – 2005. – 194 с.
- 13.Пинчук С.И. Организация эксперимента при моделировании и оптимизации технических систем: Учебное пособие. – Днепропетровск: ООО Независимая издательская организация "Дива". – 2008. – с. 248
- 14.D. Rasch, J. Pilz, R. Verdooren, A. Gebhardt Optimal experimental design with R. ISBN-13: 978-1-4398-1698-1 (eBook - PDF)
- 15.Петров В. Алгоритм решения изобретательских задач. Учебное пособие. Тель-Авив. – 1999. – 256 с.
- 16.Петров В. История развития системы стандартов. Информационные материалы. Ред. 1-я. Тель-Авив. – 2003 – 126 с.

ЗМІСТ:

1 Математична обробка статистичних даних	3
2 Поняття про регресійний та кореляційний аналіз	5
3 Планування експерименту.....	8
4 Лінійна і параболічна парна регресія	12
5 Алгоритм розв'язання винахідницьких задач (АРВЗ)	14
6 Лінійне програмування. Розв'язання задач оптимізації.....	20
Рекомендована література.....	30

