

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ, НАУКИ,
МОЛОДІ І СПОРТУ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ І
ЗАВДАННЯ ДО КУРСОВОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ
МАТЕМАТИЧНІ
МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ
В ГІРНИЧОМУ
ВИРОБНИЦТВІ**

**для студентів зі спеціалізацією
«Управління гірничими підприємствами» (УГП).**

Розглянуто на засіданні кафедри
"Управління виробництвом", прото-
кол №7
від 23.02.2011 р.

Затверджено на засіданні навчально-
видавничої ради ДонНТУ,
протокол № 2
від 21.03.2011 р.

Донецьк 2011

Методичні рекомендації й завдання для курсової роботи з дисципліни «Математичні методи і моделі в гірничому виробництві» для студентів зі спеціалізацією УГП / автори. Шаповал С.Н., Овсянніков В.П.– Донецьк: ДонНТУ, 2011. –69 с.

Представлені рекомендації й алгоритм виконання курсової роботи з дисципліни «Математичні методи й моделі в гірничому виробництві». Описаний хід виконання роботи й методи застосування ПЕВМ при її виконанні. Приведені варіанти задач до курсової роботи.

Учбово-методичні рекомендації можуть бути використані студентами всіх форм навчання при виконанні курсової роботи.

Автори:

проф. к.т.н. Шаповал С.Н.

доц. к.т.н. Овсянніков В.П.

Рецензент:

доц. к.т.н. Скаженік В.Б.

Відповідальний за випуск:

проф. д.е.н. Мартякова О.В.

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

1.1 Ціль і задачі курсової роботи

Курсова робота виконується на базі теоретичних знань отриманих студентами при вивченні дисципліни «Математичні методи та моделі в гірничому виробництві».

Ціль і задачі курсової роботи - практичне застосування студентами знань по розробці математичних моделей задач, що виникають у гірничому виробництві, і використання розроблених методів і алгоритмів оптимізації для їхнього розв'язання.

1.2 Тематика курсової роботи

Курсова робота охоплює два методи математичного програмування: лінійне програмування та метод невизначених множників Лагранжа, як один зі способів розв'язання певних задач нелінійного програмування.

Вибір цих методів обумовлений їхньою детальною розробленістю й чіткістю алгоритмів розв'язання задач, а також можливістю застосування в гірничому виробництві.

1.3 Організація виконання курсової роботи

Задачі на курсову роботу, оформлене на спеціальному бланку, видається студентові керівником-консультантом. У завданні повинен бути зазначений установлений керівником-консультантом строк виконання курсової роботи.

Курсова робота виконується кожним студентом самостійно під керівництвом викладача (керівника-консультанта) в аудиторії згідно з розкладом.

Пояснювальна записка до курсової роботи повинна бути оформлена відповідно до вимоги стандарту ДСТУ3008-95.

Бланк задачі на курсову роботу повинен бути прикладений до пояснювальної записки. Курсова робота без підписаного викладачем задачі до захисту не допускається.

Оцінка за курсову роботу встановлюється за результатами захисту в комісії, призначеної завідувачем кафедри.

1.4. Зміст курсової роботи

Курсова робота складається з пояснювальної записки обсягом до 25 сторінок і додатків.

Пояснювальна записка включає: реферат, зміст, введення, розділи основної частини, висновки, перелік використаної літератури і додатки.

У рефераті коротко описуються мета і задачі курсової роботи, зміст виконаної роботи і отримані результати. Перед текстом реферату вказуються кількості сторінок, малюнків і таблиць у пояснювальній записці, а після основного тексту записуються ключові слова. Обсяг реферату – 1 сторінка. Реферат оформляється згідно з вимогами стандарту ДСТУ3008-95.

У змісті вказуються найменування складових частин пояснювальної записки (введення, розділи основної частини, висновки, перелік літературних джерел, додатки) і сторінки на яких вони розміщені. Зміст оформляється згідно з вимогами стандарту ДСТУ3008-95.

У введенні висвітлюється роль математичних методів і оптимізації виробничих параметрів при плануванні техніко-економічних показників гірничих підприємств.

Додаткові обмеження

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Тут x_j – змінні моделі (параметри, які оптимізуються);

$j=1, 2, \dots, n$ – індекс змінної;

n – кількість змінних;

c_j, a_{ij}, b_i – постійні моделі (постійні коефіцієнти);

$i=1, 2, \dots, m$ – індекс основних обмежень;

m – кількість основних обмежень.

Наведену вище математичну модель можна назвати задачею лінійного програмування, оскільки в результаті її розв'язання визначається план (програма) досягнення екстремума цільової функції.

Задачу лінійного програмування можна сформулювати так: визначити значення x_j при яких цільова функція (1) досягне екстремального (максимального або мінімального) значення та будуть задоволятися обмеження, обумовлені умовами (2) і (3).

Вид цільової функції (1) і системи обмежень (2) залежить від змісту задачі, яка розв'язується. Умови, обумовлені додатковими обмеженнями (3) означають, що змінні моделі (параметри, які оптимізуються) не повинні бути негативними.

Задачу лінійного програмування можна також представити в загальному виді в такий спосіб.

Цільова функція

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr}. \quad (4)$$

Обмеження

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \text{ или } \geq b_i, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

2.1.2 Найбільш відповідальним моментом при розв'язанні задач математичного програмування є розробка їх математичних моделей. Це повною мірою стосується й задач лінійного програмування. Як приклад запишемо математичну модель задачі лінійного програмування за умовами задачі №1.

Задача №1

На шахті розробляються 2 вугільні пласти. При видобутку вугілля з першого пласта видається на поверхню $\alpha_1\%$ породи від маси добутого там вугілля, а при видобутку вугілля із другого пласта - $\alpha_2\%$ породи. Пропускна здатність породного комплексу на шахті не перевищує $A_{\text{п}}$ тис. т породи в рік.

З першого пласта надходить вугілля з виходом великих фракцій (більш 6 мм.) $\beta_1\%$, а із другого - $\beta_2\%$ від маси вугілля, що там добувається. Виходячи з наявного кола споживачів, річна маса великих фракцій вугілля повинна становити не менш $D_{\text{к}}$ тис. т.

Якби роботи велися тільки по першому пласта, то виробничі можливості основних технологічних ланок дозволяють добувати D_1 тис. т вугілля в рік, а якби тільки по другому пласта – то D_2 тис. т вугілля в рік.

Потрібно знайти такі річні обсяги видобутку вугілля із пластів, при яких шахта мала б максимальний видобуток і одночасно задовольнялися б усі зазначені умови.

Запишемо математичну модель даної задачі. Для цього позначимо річний видобуток з вугілля з першого пласта через x_1 тис. т, а із другого – через x_2 тис. т.

Математична модель даної задачі лінійного програмування має такий вигляд.

Цільова функція

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max. \quad (6)$$

Основні обмеження

$$\frac{\alpha_1}{100} x_1 + \frac{\alpha_2}{100} x_2 \leq A_{\Pi}, \quad (7)$$

$$\frac{\beta_1}{100} x_1 + \frac{\beta_2}{100} x_2 \geq D_K, \quad (8)$$

$$x_1 \leq D_1, \quad (9)$$

$$x_2 \leq D_2. \quad (10)$$

Додаткові обмеження

$$x_1 \geq 0, \quad (11)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (12)$$

Цільова функція (6) вимагає, щоб річний видобуток вугілля із шахти був максимально можливий.

Основне обмеження (7) вимагає, щоб обсяг породи, що видається із шахти не перевищував A_{Π} тис. т. за рік.

Основне обмеження (8) вимагає, щоб вихід великих фракцій вугілля (більш 6 мм) був не менше D_K тис. т. за рік.

Обмеження (9) і (10) говорять про те, що видобуток з першого й другого пластів не може перевищувати відповідно величин D_1 і D_2 тис. т вугілля за рік.

Додаткові обмеження (11) і (12) говорять про те, що видобуток вугілля з першого й другого пластів не може бути негативним.

2.2 Розв'язання задач лінійного програмування графічним способом

2.2.1 В курсовій роботі в таблиці 1 за даними таблиць 1 і 2 «Методичних рекомендацій...» приводяться найменування, умовні позначки, одиниці виміру й чисельні значення всіх показників (вихідних даних) необхідних для розв'язання призначеного варіанта задачі №1.

Використовуючи чисельні значення показників α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , D_K , D_1 і A_n , які приведені в таблиці 1 курсової роботи, математична модель (6)÷(12) задачі №1 лінійного програмування приводиться до чисельного виду, придатного для графічного розв'язання.

2.2.2 Графічне розв'язання задачі №1 виконується на комп'ютері або «вручну» на мал. 1 на аркуші паперу формату A_4 . При розв'язанні задачі «вручну» необхідно використовувати папір з міліметровою сіткою.

В обох випадках на мал. 1 у системі координат x_1Ox_2 креслиться область припустимих значень змінних x_1 і x_2 (багатогранник розв'язання) на базі систем обмежень математичної моделі, представленої в чисельному виді в пункті 2.2.1.

Потім визначаються:

- оптимальні значення $x_{1\text{опт}}$ і $x_{2\text{опт}}$ змінних x_1 і x_2 (оптимальні річні обсяги вугілля з першого й другого пластів) в одній з вершин багатогранника розв'язання на мал. 1.
- максимальне значення цільової функції при оптимальних значеннях змінних $x_{1\text{опт}}$ і $x_{2\text{опт}}$ тобто – максимальний річний видобуток вугілля із шахти.

Таблиця 1 - Чисельні значення показників α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , D_K , D_1 і D_2 однакові для всіх студентів

Найменування показника	Умовні позначки показників	Одиниці виміру показників	Чисельні значення показників
1. Видача породи з першого пласта від маси вугілля, що там добувається	α_1	%	80
2. Видача породи із другого пласта від маси вугілля, що там добувається	α_2	%	90
3. Вихід великих фракцій вугілля з першого пласта від маси вугілля, що там добувається	β_1	%	60
4. Вихід великих фракцій вугілля із другого пласта від маси вугілля, що там добувається	β_2	%	70
5. Мінімально необхідна річна маса великих фракцій вугілля по шахті	D_K	тис. т	650
6. Максимально можливий річний видобуток вугілля з першого пласта	D_1	тис. т	950
7. Максимально можливий річний видобуток вугілля із другого пласта	D_2	тис. т	600

Таблиця 2 Чисельні значення показника «Річна пропускна здатність породного комплексу на шахті» $A_{\text{п}}$, тис. т по варіантах

№ варіантів	Річна пропускна здатність породного комплексу на шахті $A_{\text{п}}$, тис. т
I	II
1	1200
2	1190
3	1180
4	1170
5	1160
6	1150
7	1140
8	1130
9	1120
10	1110

Продовження таблиці 2

I	II
11	1000
12	1090
13	1080
14	1070
15	1060
16	1050
17	1040
18	1030
19	1020
20	1010
21	1000
22	990
23	980
24	970
25	960

2.2.3 Перевіряється виконання умов, зазначених в обмеженнях математичної моделі, представленої в чисельному виді в пункті 2.2.1.

2.2.4 Визначається причина, по якій обмежується обсяг річного видобутку вугілля із шахти.

2.3 Розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом

2.3.1 Графічний спосіб розв'язання задач лінійного програмування досить простий, однак його можна використовувати тільки при наявності двох змінних, що суттєво обмежує його застосування для розв'язання реальних задач. Для розв'язання задач лінійного програмування з будь-якою кількістю змінних застосовується спеціальний аналітичний метод, який називається симплекс-методом.

Симплекс-метод являє собою алгоритм розв'язання задач лінійного програмування матричним способом на базі методу модифікованих Жорданових виключень. Чіткість цього алгоритму дозволила розробити пакет програм для розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом на комп'ютері.

Для розв'язання задач лінійного програмування симплекс-методом необхідно її математичну модель привести до стандартного (канонічного) виду.

При приведенні задачі лінійного програмування до стандартного виду необхідно передбачити наступне:

а) цільову функцію задачі необхідно позначити символом Z , а основні обмеження в напрямку зверху вниз символами $U_1, U_2, \dots, U_i, \dots, U_m$;

б) цільова функція задачі повинна максимізуватися;

в) усі основні обмеження задачі u_i повинні бути виду $u_i \geq 0$.

Якщо цільова функція задачі лінійного програмування мінімізується, то для приведення її до стандартного виду необхідно всі її доданки помножити на -1 , а потім знаходити максимум цієї цільової функції.

Для приведення систем основних обмежень до стандартного виду необхідно виконати наступні перетворення.

У всіх основних обмеженнях y_i постійні величини (вільні члени) b_i необхідно перенести в ліву сторону обмежень, тобто привести обмеження до виду $y_i \geq 0$ або $y_i \leq 0$, Обмеження виду $y_i \leq 0$ необхідно помножити на -1 . У такий спосіб усі обмеження будуть приведені до виду $y_i \geq 0$.

Приведена до стандартного виду задача лінійного програмування дає вихідну інформацію для її розв'язання «вручну». Вихідні дані представляються у вигляді матриці, що має $n+1$ стовпців і $m+1$ рядків. Потім розв'язується задача симплекс-методом у два етапи:

- визначається опорне розв'язання, тобто найгірше з можливих;
- визначається оптимальне розв'язання, тобто найкраще з можливих.

При розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом на комп'ютері приводити її до стандартного виду немає необхідності, тому що це здійснюється по спеціально розробленій програмі. Крім того, при розв'язанні задачі лінійного програмування симплекс-методом на комп'ютері символи цільової функції й обмежень, а також умовні позначки змінних і постійних величин математичної моделі задачі можуть бути довільними.

2.3.2 Розв'язується задача №1 лінійного програмування симплекс-методом на комп'ютері на базі її математичної моделі представленої в пункті 2.2.1.

У роботі представляються результати розв'язання цієї задачі на комп'ютері:

- оптимальні значення $x_{1\text{опт}}$ і $x_{2\text{опт}}$ змінних x_1 і x_2 ;

- максимальне значення цільової функції $Z_{\max}$ при оптимальних значеннях змінних $x_{1\text{опт}}$ і $x_{2\text{опт}}$.

Робиться висновок про те, що отримані однакові результати при розв'язанні задачі №1 графічним способом і симплекс-методом на комп'ютері.

Роздруківка вихідних даних і результатів розв'язання задачі №1 на комп'ютері представляється як додаток 1 до курсової роботи.

2.3.3 Розв'язати на комп'ютері задачу №2 лінійного програмування симплекс-методом, яку неможливо розв'язати графічним способом, через наявність трьох змінних.

Задача №2.

Шахта поточного року має можливість експортувати (продавати за кордон), вугілля в три країни по трьом контрактам у кількості Q_e тис. тонн: у Білорусію (1^й контракт), у Молдавію (2^й контракт) і в Болгарію (3^й контракт).

Максимально можливі кількості вугілля, які можна експортувати цього року по першому, другому й третьому контрактам не повинні перевищувати відповідно $Q_{e1\max}$, $Q_{e2\max}$, $Q_{e3\max}$, тис. т.

Необхідно призначену для експорту кількість вугілля Q_e тис. т розподілити по трьом контрактам так, щоб шахта одержала максимальний річний економічний ефект від експортної діяльності F_e , тис. грн., що полягає в максимальному прирості річного валового прибутку від експортної діяльності.

Запишемо в загальному виді математичну модель цієї задачі. Для цього позначимо річний обсяг експорту вугілля по першому, другому й третьому контрактам відповідно через Q_{e1} , Q_{e2} , Q_{e3} , тис. т.

Ці величини є змінними у даній задачі, тобто параметрами, які оптимізуються.

Цільова функція математичної моделі даної задачі згідно [3] має вигляд

$$F_e = f_{e1}Q_{e1} + f_{e2}Q_{e2} + f_{e3}Q_{e3}, \rightarrow \max, \quad (13)$$

де F_e - економічний ефект від експортної діяльності (приріст валового прибутку від експорту вугілля) тис. грн. за рік;

f_{e1} f_{e2} f_{e3} - економічні ефективності відповідно першого, другого й третього контрактів, величини яких визначають прирости валового прибутку від експорту однієї тонни вугілля по відповідних контрактах, грн./т.

Значення f_{e1} f_{e2} f_{e3} є коефіцієнтами лінійної цільової функції (13). Економічний зміст цільової функції (13) – одержання максимального економічного ефекту F_e , тобто максимального приросту валового прибутку від експортної діяльності в тис. грн. за рік.

Економічну ефективність кожного $j^{го}$ контракту ($j=1,2,3$), тобто величину приросту валовому прибутку від експорту однієї тонни вугілля по кожному $j^{му}$ контракту f_{ej} , грн./т можна визначити по формулі

$$f_{ej} = \Pi_{kj} - \Pi' - \Delta C_{Ej}, \quad (14)$$

де Π_{kj} - контрактна ціна вугілля в гривневому еквіваленті по $j^{му}$ контракту ($j=1,2,3$), грн./т;

Π' – ціна реалізованого на внутрішньому ринку вугілля без урахування податку на додану вартість (ПДВ), грн./т, яка визначається по формулі:

$$\Pi' = \frac{\Pi}{1 + \alpha}, \quad (15)$$

C – ціна реалізованого на внутрішньому ринку вугілля з урахуванням податку на додану вартість (ПДВ), грн./т;

α - ставка податку на додану вартість (ставка ПДВ) у частках одиниці;

ΔC_{ej} – різниця між середніми експортними витратами по j^{my} контракту ($j=1,2,3$) і середніми витратами реалізації вугілля на внутрішньому ринку грн./т, яка має вираз

$$\Delta C_{ej} = C_{ej} - C_v, \quad (16)$$

C_{ej} - середні експортні витрати по j^{my} контракту ($j=1,2,3$) грн./т;

C_v – середні витратами реалізації вугілля на внутрішньому ринку грн./т.

Обмеження математичної моделі даної задачі мають вигляд

$$Q_{e1} + Q_{e2} + Q_{e3} = Q_e, \quad (17)$$

$$Q_{e1} \leq Q_{e1max}, \quad (18)$$

$$Q_{e2} \leq Q_{e2max}, \quad (19)$$

$$Q_{e3} \leq Q_{e3max}, \quad (20)$$

$$Q_{e1} \geq 0, Q_{e2} \geq 0, Q_{e3} \geq 0. \quad (21)$$

У курсовій роботі в таблиці 2 за даними таблиць 3 і 4 «Методичних рекомендацій.....» приводяться найменування, умовні позначки, одиниці виміру й чисельні значення всіх показників (вихідних даних), необхідних для розв'язання призначеного варіанта задачі №2.

Таблиця 3 Чисельні значення показників однакові для всіх студентів.

Найменування показників	Умовні позначки показників	Одиниці виміру показників	Чисельні значення показників
1	2	3	4
1. Контрактна ціна вугілля в гривневому еквіваленті по першому контракту	C_{K1}	грн./т	454
2. Контрактна ціна вугілля в гривневому еквіваленті по другому контракту	C_{K2}	грн./т	452
3. Контрактна ціна вугілля в гривневому еквіваленті по третьому контракту	C_{K3}	грн./т	455
4. Ціна реалізованого на внутрішньому ринку вугілля з урахуванням податку на додану вартість (ПДВ)	C	грн./т	450
5. Ставка податку на додану вартість (ставка ПДВ)	α	частка одиниці	0,2
6. Середні витрати реалізації вугілля на внутрішньому ринку	C_v	грн./т	40
7. Середні експортні витрати по першому контракту	C_{e1}	грн./т	85
8. Середні експортні витрати по другому контракту	C_{e2}	грн./т	80
9. Середні експортні витрати по третьому контракту	C_{e3}	грн./т	90
10. Максимально можлива кількість вугілля, яку можна експортувати цього року по першому контракту	Q_{e1max}	тис. т	150
11. Максимально можлива кількість вугілля, яку можна експортувати цього року по другому контракту	Q_{e2max}	тис. т	120
12. Максимально можлива кількість вугілля, яку можна експортувати цього року по третьому контракту	Q_{e3max}	тис. т	200

Таблиця 4 – Чисельні значення показника «Кількість призначеного для експорту вугілля» Q_e , тис. тонн по варіантах

№ варіантів	Чисельні значення показника «Кількість призначеного для експорту вугілля» Q_e , тис. тонн
I	II
1	200
2	210
3	220
4	230
5	240
6	250
7	260

Продовження таблиці 4

I	II
8	270
9	280
10	290
11	300
12	310
13	320
14	330
15	340
16	350
17	360
18	370
19	380
20	390
21	400
22	410
23	420
24	430
25	440

Математична модель задачі, яка складається із цільової функції (13) і обмежень (17) ÷ (21), у курсовій роботі представляється в чисельному виді. Для цього використовуються формули (13) ÷ (20), а також дані таблиці 2 курсової роботи.

У курсовій роботі представляються результати розв'язання даної задачі на комп'ютері:

- оптимальні значення змінних, тобто оптимальні обсяги експорту вугілля по трьом контрактам $Q_{e1\text{опт}}$, $Q_{e2\text{опт}}$, $Q_{e3\text{опт}}$, тис. т за рік;

- максимальний економічний ефект, тобто максимальний приріст валового прибутку від експорту вугілля F_{emax} у тис. грн. за рік.

Роздруківка вихідних даних і результатів розв'язання задачі №2 на комп'ютері представляється як додаток 2 до курсової роботи.

2.3.4 Визначається величина річного валового прибутку $ВП_r$ тис. грн. зазначеної в задачі №2 шахти з урахуванням експортної діяльності по формулі

$$ВП_r = ВП_v + F_{\text{emax}}, \quad (22)$$

де $ВП_v$ – валовий прибуток шахти, отриманий при реалізації всього обсягу видобутку вугілля на внутрішньому ринку, тис. грн., величину якого можна встановити по формулі

$$ВП_v = (\Pi' - C_{\text{пр}} - C_v) D_r, \quad (23)$$

де $C_{\text{пр}} = 330$ – середні виробничі витрати по шахті, грн./т;

$D_r = 1500$ – річний обсяг видобутку вугілля із шахти, тис. т.

2.3.5 Розв'язується задача №2 лінійного програмування симплекс-методом на комп'ютері за умови, що середні експортні витрати по кожному $j^{\text{му}}$ контракту C_{ej} ($j=1,2,3$) грн./т збільшилися на 10%, тобто стали рівними $1,1 C_{ej}$ ($j=1,2,3$) грн./т при незмінності інших вихідних даних.

Це означає, що різниця між середніми експортними витратами по кожному $j^{\text{му}}$ контракту й середніми витратами реалізації вугілля на внутрішньому ринку ΔC_{ej} ($j=1,2,3$) грн./т замість формули (16) визначатиметься по формулі

$$\Delta C_{ej} = 1,1 C_{ej} - C_v. \quad (24)$$

Отримане по формулі (24) значення ΔC_{ej} ($j=1,2,3$) використовується у формулі (14) для визначення величин f_{ej} ($j=1,2,3$), які є коефіцієнтами цільової функції (13) задачі №2.

У курсовій роботі в чисельному виді представляється математична модель, задачі №2, з урахуванням змін, визначених в пункті 2.3.5.

Представляються також результати розв'язання симплекс-методом на комп'ютері зміненої математичної моделі цієї задачі:

- оптимальні значення змінних, тобто оптимальні обсяги експорту вугілля по кожному із трьох контрактів Q_{e1opt} , Q_{e2opt} , Q_{e3opt} , тис. т за рік;

- максимальний економічний ефект, тобто максимальний приріст валового прибутку від експорту вугілля F_{emax} у тис. грн. за рік.

Роздруківка вихідних даних і результатів розв'язання задачі на комп'ютері представляється як додаток 3 до курсової роботи.

2.3.6 Визначається величина річного валового прибутку $ВП_r$, тис. грн., зазначеної в задачі №2 шахти з урахуванням експортної діяльності при збільшенні середніх експортних витрат по кожному $j^{му}$ контракту на 10% по формулах (22) і (23).

2.3.7 Робиться висновок про зменшення максимального економічного ефекту (максимального приросту валового прибутку від експорту вугілля) а також – валового прибутку по шахті в цілому при збільшенні середніх експортних витрат.

$i = 1, 2, \dots, m$ - індекс основних обмежень;

m - кількість основних обмежень;

$f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_n$ - види функцій змінних $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$.

Задача нелінійного програмування може бути вирішена методом невизначених множників Лагранжа, якщо:

- цільова функція або хоча б одне з обмежень є нелінійною функцією змінних;
- основні обмеження являють собою рівності;
- число обмежень m менше або дорівнює числу змінних n , тобто $(m \leq n)$.

3.1.2 Розв'язання задачі нелінійного програмування методом невизначених множників Лагранжа є встановлення оптимальних значень змінних x_j , тобто таких, при яких має місце екстремум (максимум або мінімум) цільової функції (25) і задовольняються умови обмежень (26) і (27).

Для розв'язання задачі нелінійного програмування методом невизначених множників Лагранжа необхідно скласти функцію Лагранжа L від $n+m$ змінних, яка має вид

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), \quad (28)$$

де λ_i невизначений множник Лагранжа, що виступає в ролі змінної.

Далі функція Лагранжа L досліджується на екстремум як звичайна функція, тобто за допомогою похідних по змінним x_j , і невизначеним множникам Лагранжа λ_i

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

3.2 Розв'язання задач нелінійного програмування методом невизначених множників Лагранжа

3.2.1 Розв'яжемо в загальному виді задачу №3 нелінійного програмування методом невизначених множників Лагранжа.

Задача №3.

На шахті для ведення гірничих робіт по новому пласта планується проведення n послідовно розташованих гірничих виробок.

При збільшенні площі поперечного перерізу окремо взятої гірничої виробки будуть збільшуватися витрати на її проведення, а депресія цієї виробки (тиск заданого кількості повітря, що рухається по виробці) буде зменшуватися.

Необхідно встановити такі площі поперечних перерізів кожної з n послідовно розташованих гірничих виробок при яких сума витрат на їхнє проведення буде мінімальною при заданій депресії ланцюга цих виробок.

Цільова функція й основне обмеження цієї задачі запишуться в наступному виді.

Цільова функція

$$Z_{\Sigma} = Z_1 + \dots + Z_j + \dots + Z_n \rightarrow \min. \quad (30)$$

Основне обмеження

$$h_1 + \dots + h_j + \dots + h_n = h_3. \quad (31)$$

Тут Z_{Σ} - сума витрат на проведення ланцюга гірничих виробок, грн.;

Z_j – витрати на проведення j^i гірничої виробки, грн.;

$j = 1, 2, \dots, n$ – індекс гірничої виробки;

n – кількість гірничих виробок у ланцюзі;

h_j – депресія j^i гірничої виробки, даПа;

h_z – задана депресія ланцюга гірничих виробок, даПа.

Величина Z_j , грн. визначається формулою

$$Z_j = k_j F_j l_j, \quad (32)$$

де k_j – вартість проведення 1 м^3 j^i гірничої виробки, грн./ м^3 ;

F_j – площа поперечного перерізу j^i гірничої виробки, м^2 ;

l_j – довжина j^i гірничої виробки, м.

Депресія j^i гірничої виробки h_j , даПа, згідно [4], визначається по формулі

$$h_j = \frac{\alpha_j P_j l_j Q_j^2}{F_j^3}, \quad (33)$$

де α_j – коефіцієнт аеродинамічного опору j^i гірничої виробки, даПа·с²/м²;

P_j – периметр поперечного перерізу j^i гірничої виробки, м;

Q_j – кількість повітря, що проходить через j^y гірничу виробку, м³/с.

Периметр поперечного перерізу j^i гірничої виробки P_j , м згідно [4] визначається формулою

$$P_j = c_j \sqrt{F}, \quad (34)$$

де c_j – коефіцієнт, що характеризує форму поперечного перерізу j^i гірничої виробки (для аркової форми $c_j = 3,8$, для трапецевидної форми $c_j = 4,16$, для круглої форми $c_j = 3,54$).

Формула (33) з урахуванням (34) матиме вид

$$h_j = \frac{\alpha_j C_j l_j Q_j^2}{F_j^{2.5}}. \quad (35)$$

Тепер можна записати математичну модель задачі. Цільова функція (30) з урахуванням (32) являє собою формулу

$$Z_{\Sigma} = k_1 F_1 l_1 + \dots + k_j F_j l_j + \dots + k_n F_n l_n \rightarrow \min. \quad (36)$$

Основне обмеження (31) з урахуванням (35) являє собою рівняння

$$\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2.5} + \dots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2.5} + \dots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2.5} - h_3 = 0. \quad (37)$$

Додаткові обмеження

$$F_1 \geq 0, \dots, F_j \geq 0, \dots, F_n \geq 0. \quad (38)$$

Математична модель, представлена формулами (36), (37) і (38), є задачею нелінійного програмування, яку можна розв'язати методом невизначених множників Лагранжа оскільки:

- основне обмеження (37) являє собою нелінійну функцію змінних F_j ;
- основне обмеження (37) являє собою рівність;
- кількість основних обмежень ($m=1$) менше кількості змінних n , якщо розглядати ланцюг, що складається з 2^x і більш виробок або дорівнює кількості змінних, якщо розглядати окремо взяті виробки.

Функція Лагранжа (28) матиме вид

$$L = k_1 F_1 l_1 + \dots + k_j F_j l_j + \dots + k_n F_n l_n + \lambda (\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2.5} + \dots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2.5} + \dots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2.5} - h_3). \quad (39)$$

Після визначення похідних функції Лагранжа L по F_j і λ прирівнювання їх нулю одержимо наступну систему рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial F_1} = k_1 l_1 - 2.5 \lambda \alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-3.5} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_j} = k_j l_j - 2.5 \lambda \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-3.5} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_n} = k_n l_n - 2.5 \lambda \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-3.5} = 0, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2.5} + \dots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2.5} + \dots \\ &\dots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2.5} - h_3 = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

З рівняння (41) виразимо F_j через λ

$$F_j^{-3.5} = \frac{k_j l_j}{2.5 \lambda \alpha_j c_j l_j Q_j^2}, \text{ або } \frac{1}{F_j^{3.5}} = \frac{k_j}{2.5 \lambda \alpha_j c_j Q_j^2}, \text{ звідки}$$

$$F_j = \sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_j c_j Q_j^2}{k_j}} \quad (44)$$

Рівняння (43) з урахуванням (44) матиме вид

$$\begin{aligned} &\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 \left(\sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_1 c_1 Q_1^2}{k_1}} \right)^{-2.5} + \dots \\ &+ \alpha_j c_j l_j Q_j^2 \left(\sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_j c_j Q_j^2}{k_j}} \right)^{-2.5} + \dots \\ &+ \alpha_n c_n l_n Q_n^2 \left(\sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_n c_n Q_n^2}{k_n}} \right)^{-2.5} - h_3 = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

або

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 \sqrt[3.5]{k_1^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}} \sqrt[3.5]{(\alpha_1 c_1 Q_1^2)^{2.5}}} + \dots \\ & + \frac{\alpha_j c_j l_j Q_j^2 \sqrt[3.5]{k_j^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}} \sqrt[3.5]{(\alpha_j c_j Q_j^2)^{2.5}}} + \dots \\ & + \frac{\alpha_n c_n l_n Q_n^2 \sqrt[3.5]{k_n^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}} \sqrt[3.5]{(\alpha_n c_n Q_n^2)^{2.5}}} - h_3 = 0, \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} & \frac{l_1 \sqrt[3.5]{\alpha_1 c_1 Q_1^2 k_1^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} + \dots \\ & + \frac{l_j \sqrt[3.5]{\alpha_j c_j Q_j^2 k_j^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} + \dots \\ & + \frac{l_n \sqrt[3.5]{\alpha_n c_n Q_n^2 k_n^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} - h_3 = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Позначимо у формулі (46)

$$\beta_j = l_j \sqrt[3.5]{\alpha_j c_j Q_j^2 k_j^{2.5}}, \quad (47)$$

де β_j – вентиляційно-вартісна характеристика $j^{\text{ї}}$ ($j=1,2,\dots,n$) гірничої виробки.

Тоді формула (46) матиме вид

$$\frac{\beta_1}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} + \dots + \frac{\beta_j}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} + \dots + \frac{\beta_n}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} = h_3$$

або

$$\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} = h_3, \quad \sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}} = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3}, \quad (2.5\lambda)^{\frac{2.5}{3.5}} = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3},$$

$$2.5\lambda = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{\frac{2.5}{3.5}} = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4},$$

$$\lambda = \frac{1}{2.5} \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4} = 0.4 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4}. \quad (48)$$

Формула (44) з урахуванням (48) матиме вид

$$F_j = F_{\text{опт}j} = \sqrt[3.5]{\frac{2.5\alpha_j c_j Q_j^2}{k_j} 0.4 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4}}. \quad (49)$$

По формулі (49) з урахуванням (47) можна визначити оптимальну площу поперечного перерізу кожної j -ї виробки $F_{\text{опт}j}$, м^2 ($j = 1, 2, \dots, n$) ланцюга з n виробок або окремо взятої виробки за умовою вентиляції. Отже, формула (49) з урахуванням (47) і є розв'язанням задачі №3 у загальному виді.

3.2.2. Розв'язується конкретна задача №4 визначення оптимальних площ поперечних перерізів ланцюга гірничих виробок за умовою вентиляції методом невизначених множників Лагранжа.

Задача №4

На шахті для ведення гірничих робіт по новому пласта планується проведення двох гірничих виробок: квершлагоу (перша виробка) і магістрального штреку (друга виробка).

Визначити оптимальні площі поперечних перерізів першої $F_{\text{опт1}}$, м^2 і другої $F_{\text{опт2}}$, м^2 гірничої виробки за умовою вентиляції по формулі (49) з урахуванням (47) для призначеного варіанта вихідних даних.

У курсовій роботі в таблиці 3 за даними таблиць 5 і 6 «Методичних рекомендацій.....» приводяться найменування, умовні позначки, одиниці виміру й чисельні значення всіх показників (вихідних даних), необхідних для розв'язання призначеного варіанта задачі №4.

На підставі наведених у таблиці 3 курсової роботи вихідних даних по формулі (49) з урахуванням (47) визначити оптимальні площі поперечних перерізів першої $F_{\text{опт1}}$, м^2 і другої $F_{\text{опт2}}$, м^2 гірничої виробки за умовою вентиляції.

3.2.3 По формулі (37) перевіряється виконання зазначеної в основному обмеженні умови й підтверджується правильність розв'язання задачі.

3.2.4 По формулі (36) визначається мінімальне значення цільової функції (мінімальні сумарні витрати на проведення двох гірничих виробок) при оптимальних площах їх поперечних перерізів за умовою вентиляції.

Таблиця 5 - Чисельні значення показників однакові для всіх студентів

Найменування показників	Умовні позначки показників	Одиниці виміру показників	Чисельні значення показників
1	2	3	4
1 Кількість послідовно розташованих гірничих виробок у ланцюзі	N	виробок	2
2 Коефіцієнт аеродинамічного опору першої й другої гірничої виробки	α	даПа·с ² /м ² ;	0,0018
3 Коефіцієнт, що характеризує форму поперечного перерізу першої й другої гірничої виробки	C		3,8
4 Кількість повітря, яка буде проходити через першу і другу гірничу виробку	Q	м ³ /с.	80
5 Довжина першої гірничої виробки	l_1	м	500
6 Довжина другої гірничої виробки	l_2	м	1200
7 Вартість проведення 1м ³ першої гірничої виробки	k_1	грн./м ³	300
8 Вартість проведення 1м ³ другої гірничої виробки	k_2	грн./м ³	260

3.2.5 Установлюється реально необхідні площі поперечних перерізів першої $F_{\text{опт1}}$, м² і другої $F_{\text{опт2}}$, м² гірничої виробки з умови

$$F_{pi} = \max(F_{\text{оптj}}, F_T), \quad (50)$$

$$j=1,2$$

де $F_T=13.8$ м² - технологічно необхідна площа поперечного перерізу першої й другої гірничої виробки за умовою розміщення засобів підземного транспорту.

Таблиця 6 – Чисельні значення показника «Задана депресія ланцюга гірничих виробок» h_3 , даПа по варіантах.

№ № варіанта	Чисельні значення показника h_3 , даПа
I	II
1	130
2	128
3	126
4	124
5	122
6	120
7	118
8	116
9	114

Продовження таблиці 6

I	II
10	112
11	110
12	108
13	106
14	104
15	102
16	100
17	98
18	96
19	94
20	92
21	90
22	88
23	84
24	84
25	82

Пояснюється причина, по якій реально необхідна площа поперечного перерізу j^i гірничої виробки F_{pi} ($j = 1, 2$) визначається за умовою (50).

Якщо $F_{pi} = F_T$, що має місце при $F_{optj} < F_T$, то це значить, що за умовою розміщення засобів підземного транспорту потрібна більша площа поперечного перерізу j^i гірничої виробки, ніж за умовою вен-

тиляції, тобто в цьому випадку підземний транспорт є «вузьким місцем».

Якщо $F_{pi} = F_{optj}$, що має місце при $F_{optj} > F_T$, то це значить, що за умовою вентиляції потрібна більша площа поперечного перерізу j -ї гірничої виробки, ніж за умовою розміщення засобів підземного транспорту, тобто в цьому випадку вентиляція є «вузьким місцем».

3.2.6 Якщо «вузьким місцем» для однієї або для двох гірничих виробок є підземний транспорт ($F_{optj} < F_T$), то встановлюється мінімально необхідні сумарні витрати на проведення гірничих виробок $З'_\Sigma$, грн. по формулі (37) цільової функції при реально необхідних площах їх поперечних перерізів F_{pi} .

Потім визначається збільшення сумарних витрат на проведення гірничих виробок $\Delta З_\Sigma$, грн., необхідних на ліквідацію «вузького місця» за умовою «підземний транспорт» по формулі

$$\Delta З_\Sigma = З'_\Sigma - З_\Sigma, \quad (51)$$

де $З_\Sigma$ - сумарні витрати на проведення гірничих виробок при оптимальних площах їх поперечного перерізу за умовою вентиляції, установлені в пункті 3.2.4, грн.

3.2.7 По формулі (49) з урахуванням (47) визначаються оптимальні площі поперечних перерізів першої F_{opt1} , m^2 і другої F_{opt2} , m^2 гірничої виробки за умовою вентиляції, якщо кількість повітря, яке переходить через ці виробки збільшиться до величини $Q = 90 \text{ м}^3/\text{с}$ при незмінних інших вихідних даних.

3.2.8 Виконати зазначені в пунктах 3.2.3 і 3.2.4 розрахунки при $Q = 90 \text{ м}^3/\text{с}$ при незмінних інших вихідних даних.

3.2.9 Робиться висновок про те, що при збільшенні кількості повітря, яке проходить по гірничим виробкам збільшуються оптимальні площі їх поперечних перерізів і мінімальні витрати на їхнє проведення.

4. ЗМІСТ РОЗДІЛУ «ВИСНОВКИ»

У розділі «ВИСНОВКИ» узагальнюються особливості застосовуваних у курсовій роботі математичних методів для розв'язання оптимізаційних задач, а саме:

- особливостей математичних моделей задач лінійного програмування;
- відзначається випадок, коли задачу лінійного програмування можна розв'язати графічним способом;
- відзначається універсальність симплекс-методу, як алгоритму розв'язання задач лінійного програмування;
- виділяються особливості математичних моделей задач нелінійного програмування;
- розглядається можливість використання методу невизначених множників Лагранжа для розв'язання задач нелінійного програмування;
- розкривається сутність методу невизначених множників Лагранжа для розв'язання задач нелінійного програмування.

5 ЛІТЕРАТУРА

- 1) Вагнер Г. Основы исследования операций. В 3-х т. - М.: Мир, 1973¹. <http://www.twirpx.com/file/60748/>
- 2) Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах М.: Высш. шк. , 1986 г. — 319 с, ил. <http://www.twirpx.com/file/2617/>²
- 3) С.Н. Шаповал, Т.О. Негрей Экономическая оценка экспорта товара. Монография. – Донецк. ДонНТУ, 2008 – 106с.
- 4) Руководство по проектированию вентиляции угольных шахт. – К: Основа, 1994, -311с.

¹ Подробно изложены основные концепции исследования операций и рассмотрены методы оптимизации управляющих решений с помощью аппарата линейного программирования.

² Пособие написано в соответствии с программой курса «Математические методы исследования операций». Рассматриваются задачи линейного, нелинейного и динамического программирования. В начале каждого параграфа приводятся определения, формулы, а также методические указания, необходимые для решения задач; даются подробные решения некоторых задач. В конце параграфов имеются задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы. Задачи линейного программирования. Специальные задачи линейного программирования (транспортная задача; задачи целочисленного, параметрического, дробно-линейного, блочного программирования; задачи теории игр). Задачи нелинейного программирования (метод множителей Лагранжа, выпуклое программирование, градиентные методы). Задачи динамического программирования

**6 МЕТОДИЧЕСКИЕ
РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К
КУРСОВОЙ РАБОТЕ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ
В ГОРНОМ
ПРОИЗВОДСТВЕ**

**для студентов со специализацией
«Управление горным предприятием» (УГП).**

(русскоязычный текст)

1 . ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1 Цель и задачи курсовой работы

Курсовая работа выполняется на базе теоретических знаний полученных студентами при изучении дисциплины «Математические методы и модели в горном производстве».

Цель и задачи курсовой работы - практическое применение студентами знаний по составлению математических моделей задач, возникающих в горном производстве, и использование разработанных методов и алгоритмов оптимизации для их решения.

1.2 Тематика курсовой работы

Курсовая работа охватывает два метода математического программирования: линейное программирование и метод неопределенных множителей Лагранжа, как один из способов решения определенных задач нелинейного программирования.

Выбор этих методов обусловлен их детальной разработанностью и четкостью алгоритмов решения задач, а также возможностью применения в горном производстве.

1.3 Организация выполнения курсовой работы

Задание на курсовую работу, оформленное на специальном бланке, выдается студенту руководителем-консультантом. В задании должен быть указан установленный руководителем-консультантом срок выполнения курсовой работы.

Курсовая работа выполняется каждым студентом самостоятельно под руководством преподавателя (руководителя-консультанта) в аудитории согласно расписанию.

Пояснительная записка к курсовой работе должна быть оформлена в соответствии с требованием стандарта ДСТУ3008-95.

Бланк задания на курсовую работу должен быть приложен к пояснительной записке. Курсовая работа без подписанного преподавателем задания к защите не принимается.

Оценка за курсовую работу устанавливается по результатам защиты в комиссии, назначенной заведующим кафедрой.

1.4. Содержание курсовой работы

Курсовая работа состоит из пояснительной записки объёмом до 25 страниц и приложений.

Пояснительная записка включает: реферат, содержание, введение, разделы основной части, выводы, перечень использованной литературы и приложений.

В реферате кратко описываются цель и задачи курсовой работы, содержание выполненной работы и полученные результаты. Перед текстом реферата указываются количества страниц, рисунков и таблиц в пояснительной записке, а после основного текста записываются ключевые слова. Объем реферата – 1 страница. Реферат оформляется согласно требованиям стандарта ДСТУ3008-95.

В содержании указываются наименования составных частей пояснительной записки (введение, разделы основной части, выводы, перечень литературных источников, приложения) и страницы на которых они размещены. Содержание оформляется согласно требованиям стандарта ДСТУ3008-95.

Во введении освещается роль математических методов и оптимизации производственных параметров при планировании технико-экономических показателей горных предприятий.

В перечне литературных источников используемая литература нумеруется в порядке появления ссылок на нее в пояснительной записке.

2 СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

2.1.1. Метод линейного программирования представляет собой алгоритм решения оптимизационных задач, математические модели которых представлены линейными целевыми функциями (в виде функций некоторых переменных в первой степени), а ограничения - в виде линейных равенств или неравенств.

Целевая функция

Основные ограничения

38

Дополнительные ограничения

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (3)$$

Здесь x_j – переменные модели (оптимизируемые параметры);

$j=1, 2, \dots, n$ – индекс переменной;

n – количество переменных;

c_j, a_{ij}, b_i – постоянные модели (постоянные коэффициенты);

$i=1, 2, \dots, m$ – индекс основных ограничений;

m – количество основных ограничений.

Приведенную выше математическую модель можно назвать задачей линейного программирования, поскольку в результате ее решения определяется план (программа) достижения экстремума целевой функции.

Задачу линейного программирования можно сформулировать так: определить значения x_j при которых целевая функция (1) примет экстремальное (максимальное или минимальное) значение и будут удовлетворяться ограничения, определяемые условиями (2) и (3).

Вид целевой функции (1) и системы ограничений (2) зависит от смысла решаемой задачи. Условия, определяемые дополнительными ограничениями (3) означают, что оптимизируемые переменные не должны быть отрицательными.

Задачу линейного программирования можно также представить в общем виде следующим образом.

Целевая функция

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{extr}. \quad (4)$$

Ограничения

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \text{ или } \geq b_i, x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

2.1.2 Наиболее ответственным моментом при решении задач математического программирования является составление их математических моделей. Это в полной мере относится и к задачам линейного программирования. В качестве примера составим математическую модель задачи линейного программирования по условиям задачи №1.

Задача №1

На шахте разрабатываются 2 угольных пласта. При добыче угля из первого пласта выдаётся на поверхность $\alpha_1\%$ породы от массы добытого там угля, а при добыче угля из второго пласта - $\alpha_2\%$ породы. Пропускная способность породного комплекса на шахте не превышает A_n тыс. т породы в год.

Из первого пласта поступает уголь с выходом крупных фракций (более 6 мм.) $\beta_1\%$, а из второго - $\beta_2\%$ от массы добываемого угля. Исходя из имеющегося круга потребителей, годовая масса крупных фракций угля должна составлять не менее D_k тыс. т.

Если бы работы велись только по первому пласту, то производственные возможности основных технологических звеньев позволяют добывать D_1 тыс. т угля в год, а если бы только по второму пласту – то D_2 тыс. т угля в год.

Требуется найти такие годовые объёмы добычи угля из пластов, при которых шахта имела бы максимальную добычу и одновременно удовлетворялись бы все оговоренные условия.

Запишем математическую модель данной задачи. Для этого обозначим годовую добычу из первого пласта через x_1 тыс. т, а из второго – через x_2 тыс. т.

Математическая модель данной задачи линейного программирования имеет следующий вид.

Целевая функция

$$x_1 + x_2 \rightarrow \max. \quad (6)$$

Основные ограничения

$$\frac{\alpha_1}{100} x_1 + \frac{\alpha_2}{100} x_2 \leq A_{\Pi}, \quad (7)$$

$$\frac{\beta_1}{100} x_1 + \frac{\beta_2}{100} x_2 \geq D_K, \quad (8)$$

$$x_1 \leq D_1, \quad (9)$$

$$x_2 \leq D_2. \quad (10)$$

Дополнительные ограничения

$$x_1 \geq 0, \quad (11)$$

$$x_2 \geq 0. \quad (12)$$

Целевая функция (6) требует, чтобы годовая добыча угля из шахты была максимально возможной.

Основное ограничение (7) требует, чтобы объём породы, выдаваемый из шахты, не превышал A_{Π} тыс. т. за год.

Основное ограничение (8) требует, чтобы выход крупных фракций угля (более 6 мм) был не меньше D_K тыс. т. за год.

Ограничения (9) и (10) говорят о том, что добыча из первого и второго пластов не может превышать соответственно величин D_1 и D_2 тыс. т угля за год.

Дополнительные ограничения (11) и (12) говорят о том, что добыча угля из первого и второго пластов не может быть отрицательной.

2.2 Решение задачи линейного программирования графическим способом

2.2.1 В курсовой работе в таблице 1 по данным таблиц 1 и 2 «Методических рекомендаций...» приводятся наименования, условные обозначения, единицы измерения и численные значения всех показателей (исходных данных) необходимых для решения назначенного варианта задачи №1.

Используя численные значения показателей α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , D_k , D_1 и A_n , приведенные в таблице 1 курсовой работы, математическая модель (6)÷(12) задачи №1 линейного программирования приводится к численному виду, пригодному для графического решения.

2.2.2 Графическое решение задачи №1 выполняется на компьютере или «вручную» на рис. 1 на листе бумаги формата А₄. При решении задачи «вручную» необходимо использовать бумагу с миллиметровой сеткой.

В обоих случаях на рис. 1 в системе координат x_1Ox_2 чертится область допустимых значений переменных x_1 и x_2 (многогранник решений) на базе систем ограничений математической модели, представленной в численном виде в пункте 2.2.1.

Затем определяются:

- оптимальные значения $x_{1\text{опт}}$ и $x_{2\text{опт}}$ переменных x_1 и x_2 (оптимальные годовые объёмы угля из первого и второго пластов) в одной из вершин многогранника решений на рис 1.

- максимальное значение целевой функции при оптимальных значениях переменных $x_{1\text{опт}}$ и $x_{2\text{опт}}$ т.е. – максимальная годовая добыча угля из шахты.

Таблица 1 - Численные значения показателей α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , D_K , D_1 и D_2 одинаковые для всех студентов

Наименования показателя	Условные обозначения показателей	Единицы измерения показателей	Численные значения показателей
1. Выдача породы из первого пласта от массы добываемого угля	α_1	%	80
2. Выдача породы из второго пласта от массы добываемого угля	α_2	%	90
3. Поступление крупных фракций угля из первого пласта от массы добываемого там угля	β_1	%	60
4. Поступление крупных фракций угля из второго пласта от массы добываемого там угля	β_2	%	70
5. Минимально необходимая годовая масса крупных фракций угля по шахте	D_K	тыс. т	650
6. Максимально возможная годовая добыча угля из первого пласта	D_1	тыс. т	950
7. Максимально возможная годовая добыча угля из второго пласта	D_2	тыс. т	600

Таблица 2 Численные значения показателя «Годовая пропускная способность породного комплекса на шахте»

$A_{\text{п}}$, тыс. т по вариантам

№ вариантов	Годовая пропускная способность породного комплекса на шахте $A_{\text{п}}$, тыс. т
I	II
1	1200
2	1190
3	1180
4	1170
5	1160
6	1150
7	1140
8	1130
9	1120
10	1110

Продолжение таблицы 2

I	II
11	1000
2	1090
13	1080
14	1070
15	1060
16	1050
17	1040
18	1030
19	1020
20	1010
21	1000
22	990
23	980
24	970
25	960

2.2.3 Проверяется выполнение условий, указанных в ограничениях математической модели, представленной в численном виде в пункте 2.2.1.

2.2.4 Определяется причина, по которой ограничивается объём годовой добычи угля из шахты.

2.3 Решение задач линейного программирования симплекс-методом

2.3.1 Графический способ решения задач линейного программирования весьма прост, однако его можно использовать только при наличии двух переменных, что существенно ограничивает его применение для решения реальных задач. Для решения задач линейного программирования с любым количеством переменных применяется специальный аналитический метод, называемый симплекс-методом.

Симплекс-метод представляет собой алгоритм решения задач линейного программирования матричным способом на базе метода модифицированных Жордановых исключений. Четкость этого алгоритма позволила разработать пакеты программ для решения задач линейного программирования симплекс-методом на компьютере.

Для решения задач линейного программирования симплекс-методом необходимо её математическую модель привести к стандартному (каноническому) виду.

При приведении задачи линейного программирования к стандартному виду необходимо предусмотреть следующее:

а) целевую функцию задачи необходимо обозначить символом Z , а основные ограничения в направлении сверху вниз символами $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_m$;

б) целевая функция задачи должна максимизироваться;

в) все основные ограничения задачи y_i должны быть вида $y_i \geq 0$.

Если целевая функция задачи линейного программирования минимизируется, то для приведения её к стандартному виду необходимо

все её слагаемые умножить на -1 , а затем находить максимум этой целевой функции.

Для приведения систем основных ограничений к стандартному виду необходимо выполнить следующие преобразования.

Во всех основных ограничениях y_i постоянные величины (свободные члены) b_i необходимо перенести в левую сторону ограничений, то есть привести ограничения к виду $y_i \geq 0$ или $y_i \leq 0$. Ограничения вида $y_i \leq 0$ необходимо умножить на -1 . Таким образом все ограничения будут приведены к виду $y_i \geq 0$.

Приведенная к стандартному виду задача линейного программирования даёт исходную информацию для её решения «вручную». Исходные данные представляются в виде матрицы, имеющей $n+1$ столбец и $m+1$ строк. Затем решается задача симплекс-методом в два этапа:

- находится опорное решение, то есть наихудшее из возможных;
- находится оптимальное решение, то есть наилучшее из возможных.

При решении задачи линейного программирования симплекс-методом на компьютере приводить её к стандартному виду нет необходимости, так как это осуществляется по специально разработанной программе. Кроме того, при решении задачи линейного программирования симплекс-методом на компьютере символы целевой функции и ограничений, а также условные обозначения переменных и постоянных величин математической модели задачи могут быть произвольными.

2.3.2 Решается задача №1 линейного программирования симплекс-методом на компьютере на базе её математической модели представленной в пункте 2.2.1.

В работе представляются результаты решения этой задачи на компьютере:

- оптимальные значения $x_{1\text{опт}}$ и $x_{2\text{опт}}$ переменных x_1 и x_2 ;
- максимальное значения целевой функции Z_{max} при оптимальных значениях переменных $x_{1\text{опт}}$ и $x_{2\text{опт}}$.

Делается вывод о том, что получены одинаковые результаты при решении задачи №1 графическим способом и симплекс-методом на компьютере.

Распечатка исходных данных и результатов решения задачи №1 на компьютере представляется как приложение 1 к курсовой работе.

2.3.3 Решить на компьютере задачу №2 линейного программирования симплекс-методом, которую невозможно решить графическим способом, из-за наличия трёх переменных.

Задача №2.

Шахта в текущем году имеет возможность экспортировать (продавать за границу) добываемый уголь в три страны по трём контрактам в количестве Q_3 тыс. тонн: в Белоруссию (1^й контракт), в Молдавию (2^й контракт) и в Болгарию (3^й контракт).

Максимально возможные количества угля, которые можно экспортировать в текущем году по первому, второму и третьему контрактам не должны превышать соответственно $Q_{31\text{max}}$, $Q_{32\text{max}}$, $Q_{33\text{max}}$, тыс. т.

Необходимо предназначенное для экспорта количества угля Q_3 тыс. т распределить по трем контрактам так, чтобы шахта получила

максимальный годовой экономический эффект от экспортной деятельности $F_э$, тыс. грн., заключающийся в максимальном приросте годовой валовой прибыли от экспортной деятельности.

Запишем в общем виде математическую модель этой задачи. Для этого обозначим годовой объём экспорта угля по первому, второму и третьему контрактам соответственно через $Q_{э1}$, $Q_{э2}$, $Q_{э3}$, тыс. т. Эти величины являются переменными (искомыми) в данной задаче.

Целевая функция математической модели данной задачи согласно [3] имеет вид

$$F_э = f_{э1}Q_{э1} + f_{э2}Q_{э2} + f_{э3}Q_{э3}, \rightarrow \max, \quad (13)$$

где $F_э$ - экономический эффект от экспортной деятельности (прирост валовой прибыли от экспорта угля) тыс. грн. за год;

$f_{э1}$ $f_{э2}$ $f_{э3}$ - экономические эффективности соответственно первого, второго и третьего контрактов, определяющие величины прироста валовой прибыли от экспорта одной тонны угля по соответствующим контрактам, грн./т.

Значения $f_{э1}$ $f_{э2}$ $f_{э3}$ являются коэффициентами линейной целевой функции (13). Экономический смысл целевой функции (13) – получение максимального экономического эффекта $F_э$, то есть максимального прироста валовой прибыли от экспортной деятельности в тыс. грн. за год.

Экономическую эффективность каждого $j^{го}$ контракта ($j=1,2,3$), то есть величину прироста валовой прибыли от экспорта одной тонны угля по каждому $j^{му}$ контракту $f_{эj}$, грн./т можно определить по формуле

$$f_{эj} = Ц_{Кj} - Ц' - \Delta C_{эj}, \quad (14)$$

где Π_{kj} - контрактная цена угля в гривневом эквиваленте по $j^{му}$ контракту ($j=1,2,3$), грн./т;

Π' – цена реализуемого на внутреннем рынке угля без учета налога на добавленную стоимость (НДС), грн./т, определяемая из выражения

$$\Pi' = \frac{\Pi}{1 + \alpha}, \quad (15)$$

Π – цена реализуемого на внутреннем рынке угля с учетом налога на добавленную стоимость (НДС), грн./т;

α - ставка налога на добавленную стоимость (ставка НДС) в долях единицы;

$\Delta C_{эj}$ – разница между средними экспортными издержками по $j^{му}$ контракту ($j=1,2,3$) и средними издержками реализации угля на внутреннем рынке грн./т, определяемая по формуле

$$\Delta C_{эj} = C_{эj} - C_{в}, \quad (16)$$

$C_{эj}$ - средние экспортные издержки по $j^{му}$ контракту ($j=1,2,3$) грн./т;

$C_{в}$ – средние издержками реализации угля на внутреннем рынке грн./т.

Ограничения математической модели данной задачи имеют вид

$$Q_{э1} + Q_{э2} + Q_{э3} = Q_{э}, \quad (17)$$

$$Q_{э1} \leq Q_{э1max}, \quad (18)$$

$$Q_{э2} \leq Q_{э2max}, \quad (19)$$

$$Q_{э3} \leq Q_{э3max}, \quad (20)$$

$$Q_{э1} \geq 0, Q_{э2} \geq 0, Q_{э3} \geq 0. \quad (21)$$

В курсовой работе в таблице 2 по данным таблиц 3 и 4 «Методических рекомендаций.....» приводятся наименования,

Таблица 3 Численные значения показателей одинаковые для всех студентов.

Наименования показателей	Условные обозначения показателей	Единицы измерения показателей	Численные значения показателей
1. Контрактная цена угля в гривневом эквиваленте по первому контракту	C_{K1}	грн./т	454
2. Контрактная цена угля в гривневом эквиваленте по второму контракту	C_{K2}	грн./т	452
3. Контрактная цена угля в гривневом эквиваленте по третьему контракту	C_{K3}	грн./т	455
4. Цена реализуемого на внутреннем рынке угля с учетом налога на добавленную стоимость (НДС)	C	грн./т	450
5. Ставка налога на добавленную стоимость (ставка НДС)	α	доля единицы	0,2
6. Средние издержками реализации угля на внутреннем рынке	C_B	грн./т	40
7. Средние экспортные издержки по первому контракту	$C_{\varepsilon 1}$	грн./т	85
8. Средние экспортные издержки по второму контракту	$C_{\varepsilon 2}$	грн./т	80
9. Средние экспортные издержки по третьему контракту	$C_{\varepsilon 3}$	грн./т	90
10. Максимально возможное количество угля, которое можно экспортировать в текущем году по первому контракту	$Q_{\varepsilon 1 \max}$	тыс. т	150
11. Максимально возможное количество угля, которое можно экспортировать в текущем году по второму контракту	$Q_{\varepsilon 2 \max}$	тыс. т	120
12. Максимально возможное количество угля, которое можно экспортировать в текущем году по третьему контракту	$Q_{\varepsilon 3 \max}$	тыс. т	200

Таблица 4 – Численные значения показателя «Количество предназначенного для экспорта угля» Q_3 , тыс. тонн по вариантам

№ вариантов	Численные значения показателя «Количество предназначенного для экспорта угля» Q_3 , тыс. тонн
I	II
1	200
2	210
3	220
4	230
5	240
6	250
7	260

Продолжение таблицы 4

I	II
8	270
9	280
10	290
11	300
12	310
13	320
14	330
15	340
16	350
17	360
18	370
19	380
20	390
21	400
22	410
23	420
24	430
25	440

условные обозначения, единицы измерения и численные значения всех показателей (исходных данных), необходимых для решения назначенного варианта задачи №2.

Математическая модель задачи, состоящая из целевой функции (13) и ограничений (17)÷(21), в курсовой работе представляется в

численном виде. Для этого используются выражения (13)÷(20), а также данные таблицы 2 курсовой работы.

В курсовой работе представляются результаты решения данной задачи на компьютере:

- оптимальные значения переменных, то есть оптимальные объёмы экспорта угля по трём контрактам $Q_{э1\text{опт}}$, $Q_{э2\text{опт}}$, $Q_{э3\text{опт}}$, тыс. т за год;

- максимальный экономический эффект, то есть максимальный прирост валовой прибыли от экспорта угля $F_{э\text{max}}$ в тыс. грн. за год.

Распечатка исходных данных и результатов решения задачи на компьютере представляется как приложение 2 к курсовой работе.

2.3.4 Определяется величина годовой валовой прибыли $ВП_{г}$ тыс. грн. указанной в задаче №2 шахты с учетом экспортной деятельности по формуле

$$ВП_{г} = ВП_{в} + F_{э\text{max}}, \quad (22)$$

где $ВП_{в}$ – валовая прибыль шахты, полученная при реализации всего объёма добычи угля на внутреннем рынке, тыс. грн., величину которой можно установить из выражения

$$ВП_{в} = (Ц' - C_{пр} - C_{в})D_{г}, \quad (23)$$

где $C_{пр} = 330$ – средние производственные издержки по шахте, грн./т;

$D_{г} = 1500$ – годовой объём добычи угля из шахты, тыс. т.

2.3.5 Решается задача №2 линейного программирования симплекс-методом на компьютере при условии, что средние экспортные издержки по каждому $j^{\text{му}}$ контракту $C_{эj}$ ($j=1,2,3$) грн./т увеличились на 10%, то есть стали равными $1,1 C_{эj}$ ($j=1,2,3$) грн./т при неизменности остальных исходных данных.

Это означает, что разница между средними экспортными издержками по каждому $j^{\text{му}}$ контракту и средними издержками реализа-

ции угля на внутреннем рынке $\Delta C_{эj}$ ($j=1,2,3$) грн./т вместо формулы (16) определяется из выражения

$$\Delta C_{эj} = 1,1C_{эj} - C_{в}. \quad (24)$$

Полученное из выражения (24) значение $\Delta C_{эj}$ ($j=1,2,3$) используется в формуле (14) для определения величин $f_{эj}$ ($j=1,2,3$), которые являются коэффициентами целевой функции (13) задачи №2.

В курсовой работе в численном виде представляется изменившаяся математическая модель задачи №2, состоящая из целевой функции и ограничений.

Представляются также результаты решения симплекс-методом на компьютере изменившейся математической модели этой задачи:

- оптимальные значения переменных, то есть оптимальные объёмы экспорта угля по каждому из трёх контрактов $Q_{э1\text{опт}}$, $Q_{э2\text{опт}}$, $Q_{э3\text{опт}}$, тыс. т за год;

- максимальный экономический эффект, то есть максимальный прирост валовой прибыли от экспорта угля $F_{э\text{max}}$ в тыс. грн. за год.

Распечатка исходных данных и результатов решения задачи на компьютере представляется как приложение 3 к курсовой работе.

2.3.6 Определяется величина годовой валовой прибыли $ВП_{в}$, тыс. грн., указанной в задаче №2 шахты с учетом экспортной деятельности при увеличении средних экспортных издержек по каждому $j^{\text{му}}$ контракту на 10% по формулам (22) и (23).

2.3.7 Делается вывод об уменьшении максимального экономического эффекта (максимального прироста валовой прибыли от экспорта угля) а также – валовой прибыли по шахте в целом при увеличении средних экспортных издержек.

3. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА»

3.1 Сущность математических моделей задач нелинейного программирования, решаемых методом неопределенных множителей Лагранжа

3.1.1 Задача нелинейного программирования имеет место, если целевая функция или хотя бы одно из ограничений является нелинейной функцией переменных.

Метод неопределенных множителей Лагранжа является одним из способов решения задач нелинейного программирования.

Задача нелинейного программирования, решаемая методом неопределенных множителей Лагранжа согласно [2] может быть записана следующим образом.

Целевая функция

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow extr. \quad (25)$$

Основные ограничения

[illegible]

Дополнительные ограничения

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_i \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (27)$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ - переменные;

$j = 1, 2, \dots, n$ - индекс переменных;

n - количество переменных;

$i = 1, 2, \dots, m$ - индекс основных ограничений;

m - количество основных ограничений;

$f, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_n$ - виды функций переменных

$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$.

Задача нелинейного программирования может быть решена методом неопределенных множителей Лагранжа, если:

- целевая функция или хотя бы одно из ограничений является нелинейной функцией переменных;
- основные ограничения представляют собой равенства;
- число ограничений m меньше или равно числу переменных n , т.е. ($m \leq n$).

3.1.2 Решением задачи нелинейного программирования методом неопределенных множителей Лагранжа является установление оптимальных значений переменных x_j , то есть таких, при которых имеет место экстремум (максимум или минимум) целевой функции (25) и удовлетворяются условия ограничений (26) и (27).

Для решения задачи нелинейного программирования методом неопределенных множителей Лагранжа необходимо составить функцию Лагранжа L от $n+m$ переменных.

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), \quad (28)$$

где λ_i неопределенный множитель Лагранжа, выступающий в роли переменной.

Далее функция Лагранжа L исследуется на экстремум как обычная функция, то есть с помощью частных производных по переменным x_j , и неопределённым множителям Лагранжа λ_i

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0; \dots, \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

3.2 Решение задач нелинейного программирования методом неопределённых множителей Лагранжа

3.2.1 Решим в общем виде задачу №3 нелинейного программирования методом неопределённых множителей Лагранжа.

Задача №3.

На шахте для ведения горных работ по новому пласту планируется проведение n последовательно расположенных горных выработок.

При увеличении площади поперечного сечения отдельно взятой горной выработки будут увеличиваться затраты на её проведение, а депрессия этой выработки (давление движущегося по выработке заданного количества воздуха) будет уменьшаться.

Необходимо установить такие площади поперечных сечений каждой из n последовательно расположенных горных выработок при которых сумма затрат на их проведение будет минимальной при заданной депрессии цепи этих выработок.

Целевая функция и основное ограничение этой задачи запишутся в следующем виде.

Целевая функция

$$Z_{\Sigma} = Z_1 + \dots + Z_j + \dots + Z_n \rightarrow \min. \quad (30)$$

Основное ограничение

$$h_1 + \dots + h_j + \dots + h_n = h_3. \quad (31)$$

Здесь 3_Σ - сумма затрат на проведение цепи горных выработок, грн.;

3_j – затраты на проведение $j^{\text{й}}$ горной выработки, грн.;

$j = 1, 2, \dots, n$ - индекс горной выработки;

n - количество горных выработок в цепи;

h_j – депрессия $j^{\text{й}}$ горной выработки, даПа;

h_3 – заданная депрессия цепи горных выработок, даПа.

Величина 3_j , грн. определяется из выражения

$$3_j = k_j F_j l_j, \quad (32)$$

где k_j – стоимость проведения 1 м^3 $j^{\text{й}}$ горной выработки, грн./м³;

F_j – площадь поперечного сечения $j^{\text{й}}$ горной выработки, м²;

l_j – длина $j^{\text{й}}$ горной выработки, м.

Депрессия $j^{\text{й}}$ горной выработки h_j , даПа, согласно [4], определяется по формуле

$$h_j = \frac{\alpha_j P_j l_j Q_j^2}{F_j^3}, \quad (33)$$

где α_j – коэффициент аэродинамического сопротивления $j^{\text{й}}$ горной выработки, даПа·с²/м²;

P_j – периметр поперечного сечения $j^{\text{й}}$ горной выработки, м;

Q_j – количество воздуха, проходящего через $j^{\text{ю}}$ горную выработку, м³/с.

Периметр поперечного сечения $j^{\text{й}}$ горной выработки P_j , м согласно [4] определяется из выражения

$$P_j = c_j \sqrt{F}, \quad (34)$$

где c_j – коэффициент, характеризующий форму поперечного сечения j -й горной выработки (для арочной формы $c_j = 3,8$, для трапецевидной формы $c_j = 4,16$, для круглой формы $c_j = 3,54$).

Формула (33) с учетом (34) примет вид

$$h_j = \frac{\alpha_j C_j l_j Q_j^2}{F_j^{2.5}}. \quad (35)$$

Теперь можно записать математическую модель задачи. Целевая функция (30) с учетом (32) представляет собой выражение

$$Z_{\Sigma} = k_1 F_1 l_1 + \dots + k_j F_j l_j + \dots + k_n F_n l_n \rightarrow \min. \quad (36)$$

Основное ограничение (31) с учетом (35) представляет собой уравнение

$$\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2,5} + \dots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2,5} + \dots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2,5} - h_{3.} = 0. \quad (37)$$

Дополнительные ограничения

$$F_1 \geq 0, \dots, F_j \geq 0, \dots, F_n \geq 0. \quad (38)$$

Математическая модель, представленная выражениями (36), (37) и (38), является задачей нелинейного программирования, решаемой методом неоперенных множителей Лагранжа поскольку:

-- основное ограничения (37) представляют собой нелинейную функцию переменных F_j ;

- основное ограничения (37) представляют собой равенство;

- количество основных ограничений ($m=1$) меньше количества переменных n , если рассматривать цепь, состоящую из 2^x и более выработок или равно количеству переменных, если рассматривать отдельно взятую выработку.

Функция Лагранжа (28) примет вид

$$L = k_1 F_1 l_1 + \dots + k_j F_j l_j + \dots + k_n F_n l_n + \lambda (\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2,5} + \dots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2,5} + \dots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2,5} - h_3). \quad (39)$$

После определения частных производных функции Лагранжа L по F_j и λ и приравнивания их нулю получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial F_1} = k_1 l_1 - 2.5 \lambda \alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-3.5} = 0, \quad (40)$$

$$\dots \dots \dots \frac{\partial L}{\partial F_j} = k_j l_j - 2.5 \lambda \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-3.5} = 0, \quad (41)$$

$$\dots \dots \dots \frac{\partial L}{\partial F_n} = k_n l_n - 2.5 \lambda \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-3.5} = 0, \quad (42)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 F_1^{-2.5} + \dots + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 F_j^{-2.5} + \dots + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 F_n^{-2.5} - h_3 = 0. \quad (43)$$

Из уравнения (41) выразим F_j через λ

$$F_j^{-3.5} = \frac{k_j l_j}{2.5 \lambda \alpha_j c_j l_j Q_j^2}, \text{ или } \frac{1}{F_j^{3.5}} = \frac{k_j}{2.5 \lambda \alpha_j c_j Q_j^2}, \text{ откуда}$$

$$F_j = \sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_j c_j Q_j^2}{k_j}} \quad (44)$$

Уравнение (43) с учетом (44) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 \left(\sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_1 c_1 Q_1^2}{k_1}} \right)^{-2.5} + \dots \\
 & + \alpha_j c_j l_j Q_j^2 \left(\sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_j c_j Q_j^2}{k_j}} \right)^{-2.5} + \dots \\
 & + \alpha_n c_n l_n Q_n^2 \left(\sqrt[3.5]{\frac{2.5 \lambda \alpha_n c_n Q_n^2}{k_n}} \right)^{-2.5} - h_3 = 0
 \end{aligned} \tag{45}$$

или

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha_1 c_1 l_1 Q_1^2 \sqrt[3.5]{k_1^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5 \lambda)^{2.5}} \sqrt[3.5]{(\alpha_1 c_1 Q_1^2)^{2.5}}} + \dots \\
 & + \frac{\alpha_j c_j l_j Q_j^2 \sqrt[3.5]{k_j^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5 \lambda)^{2.5}} \sqrt[3.5]{(\alpha_j c_j Q_j^2)^{2.5}}} + \dots \\
 & + \frac{\alpha_n c_n l_n Q_n^2 \sqrt[3.5]{k_n^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5 \lambda)^{2.5}} \sqrt[3.5]{(\alpha_n c_n Q_n^2)^{2.5}}} - h_3 = 0,
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 & \frac{l_1 \sqrt[3.5]{\alpha_1 c_1 Q_1^2 k_1^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5 \lambda)^{2.5}}} + \dots \\
 & + \frac{l_j \sqrt[3.5]{\alpha_j c_j Q_j^2 k_j^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5 \lambda)^{2.5}}} + \dots \\
 & + \frac{l_n \sqrt[3.5]{\alpha_n c_n Q_n^2 k_n^{2.5}}}{\sqrt[3.5]{(2.5 \lambda)^{2.5}}} - h_3 = 0 .
 \end{aligned} \tag{46}$$

Обозначим в выражении (46)

$$\beta_j = l_j \sqrt[3.5]{\alpha_j c_j Q_j^2 k_j^{2.5}}, \quad (47)$$

где β_j – вентиляционно-стоимостная характеристика $j^{\text{й}}$ ($j=1,2,\dots,n$) горной выработки.

Тогда выражение (46) примет вид

$$\frac{\beta_1}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} + \dots + \frac{\beta_j}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} + \dots + \frac{\beta_n}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} = h_3$$

или

$$\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{\sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}}} = h_3, \quad \sqrt[3.5]{(2.5\lambda)^{2.5}} = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3}, \quad (2.5\lambda)^{\frac{2.5}{3.5}} = \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3},$$

$$2.5\lambda = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{\frac{2.5}{3.5}} = \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4},$$

$$\lambda = \frac{1}{2.5} \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4} = 0.4 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4}. \quad (48)$$

Выражение (44) с учетом (48) примет вид

$$F_j = F_{\text{опт}j} = \sqrt[3.5]{\frac{2.5\alpha_j c_j Q_j^2}{k_j} 0.4 \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j}{h_3} \right)^{1.4}}. \quad (49)$$

Из выражения (49) с учетом (47) можно определить оптимальную площадь поперечного сечения каждой j -й выработки $F_{\text{опт}j}$, м^2 ($j = 1, 2, \dots, n$) цепи из n выработок или отдельно взятой выработки по условию вентиляции. Следовательно, выражения (49) с учетом (47) и является решением задачи №3 в общем виде.

3.2.2. Решается конкретная задача №4 определения оптимальных площадей поперечных сечений цепи горных выработок по условию вентиляции методом неопределенных множителей Лагранжа.

Задача №4

На шахте для ведения горных работ по новому пласту планируется проведение двух горных выработок: квершлага (первая выработка) и магистрального штрека (вторая выработка).

Определить оптимальные площади поперечных сечений первой $F_{\text{опт}1}$, м^2 и второй $F_{\text{опт}2}$, м^2 горной выработки по условию вентиляции по формуле (49) с учетом (47) для назначенного варианта исходных данных.

В курсовой работе в таблице 3 по данным таблиц 5 и 6 «Методических рекомендаций.....» приводятся наименования, условные обозначения, единицы измерения и численные значения всех показателей (исходных данных), необходимых для решения назначенного варианта задачи №4.

На основании приведенных в таблице 3 курсовой работы исходных данных по формуле (49) с учетом (47) определить оптимальные площади поперечных сечений первой $F_{\text{опт}1}$, м^2 и второй $F_{\text{опт}2}$, м^2 горной выработки по условию вентиляции.

Таблица 5 - Численные значения показателей одинаковые для всех студентов

Наименования показателей	Условные обозначения показателей	Единицы измерения показателей	Численные значения показателей
1	2	3	4
1 Количество последовательных горных выработок в цепи	N	выработок	2
2 Коэффициент аэродинамического сопротивления первой и второй горной выработки	α	даПа·с ² /м ² ;	0,0018
3 Коэффициент, характеризующий форму поперечного сечения первой и второй горной выработки	C		3,8
4 Количество воздуха, которое будет проходить через первую и вторую горную выработку	Q	м ³ /с.	80
5 Длина первой горной выработки	l_1	м	500
6 Длина второй горной выработки	l_2	м	1200
7 Стоимость проведения 1м ³ первой горной выработки	k_1	грн./м ³	300
8 Стоимость проведения 1м ³ второй горной выработки	k_2	грн./м ³	260

Таблица 6 – Численные значения показателя «Заданная депрессия цепи горных выработок» h_3 , даПа по вариантам.

№ № варианта	Численные значения показателя h_3 , даПа
I	II
1	130
2	128
3	126
4	124
5	122
6	120
7	118
8	116
9	114

Продолжение таблицы 6

I	II
10	112
11	110
12	108
13	106
14	104
15	102
16	100
17	98
18	96
19	94
20	92
21	90
22	88
23	84
24	84
25	82

3.2.3 По формуле (37) проверяется выполнение указанного в основном ограничении условия и подтверждается правильность решения задачи.

3.2.4 По формуле (36) определяется минимальное значение целевой функции (минимальные суммарные затраты на проведение двух горных выработок) при оптимальных площадях их поперечных сечений по условию вентиляции.

3.2.5 Устанавливаются реально необходимые площади поперечных сечений первой $F_{\text{опт}1}$, м^2 и второй $F_{\text{опт}2}$, м^2 горной выработки из

условия
$$F_{pi} = \max_{j=1,2}(F_{\text{опт}j}, F_T), \quad (50)$$

где $F_T=13.8 \text{ м}^2$ -технологически необходимая площадь поперечного сечения первой и второй горной выработки по условию размещения средств подземного транспорта.

Объясняется причина, по которой реально необходимая площадь поперечного сечения $j^{\text{й}}$ горной выработки F_{pi} ($j = 1,2$) принимается по условию (50).

Если $F_{pi} = F_T$, что имеет место при $F_{\text{опт}j} < F_T$, то это значит, что по условию размещения средств подземного транспорта требуется большая площадь поперечного сечения $j^{\text{й}}$ горной выработки, чем по условию вентиляции, то есть в этом случае подземный транспорт является «узким местом».

Если $F_{pi} = F_{\text{опт}j}$, что имеет место при $F_{\text{опт}j} > F_T$, то это значит, что по условию вентиляции требуется большая площадь поперечного сечения $j^{\text{й}}$ горной выработки, чем, по условию размещения средств

подземного транспорта, то есть в этом случае вентиляция является «узким местом».

3.2.6 Если «узким местом» для одной или для двух горных выработок является подземный транспорт ($F_{\text{оптj}} < F_T$), то устанавливаются минимально необходимые суммарные затраты на проведение горных выработок $3'_\Sigma$, грн. из выражения (37) целевой функции при реально необходимых площадях их поперечных сечений F_{pi} .

Затем определяется увеличение суммарных затрат на проведение горных выработок $\Delta 3_\Sigma$, грн., необходимых на ликвидацию «узкого места» по условию «подземный транспорт» из выражения

$$\Delta 3_\Sigma = 3'_\Sigma - 3_\Sigma, \quad (51)$$

где 3_Σ - суммарные затраты на проведение горных выработок при оптимальных площадях их поперечного сечения по условию вентиляции, установленные в пункте 3.2.4, грн.

3.2.7 По формуле (49) с учетом (47) определяются оптимальные площади поперечных сечений первой $F_{\text{опт1}}$, м^2 и второй $F_{\text{опт2}}$, м^2 горных выработок по условию вентиляции, если количество проходящего через эти выработки воздуха увеличится до величины $Q' = 90 \text{ м}^3/\text{с}$ при неизменных остальных исходных данных.

3.2.8 Выполнить указанные в пунктах 3.2.3 и 3.2.4 расчеты при $Q' = 90 \text{ м}^3/\text{с}$ при неизменных остальных исходных данных.

3.2.9 Делается вывод о том, что при увеличении количества проходящего по горным выработкам воздуха увеличиваются оптимальные площади их поперечных сечений и минимальные затраты на их проведение.

4. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛА «ВЫВОДЫ»

В разделе «ВЫВОДЫ» обобщаются особенности применяемых в курсовой работе математических методов для решения оптимизационных задач, а именно:

- особенностей математических моделей линейного программирования;
- отмечается случай, когда задачу линейного программирования можно решить графическим способом;
- отмечается универсальность симплекс-метода как алгоритма решения задач линейного программирования;
- выделяются особенности математических моделей нелинейного программирования;
- рассматривается возможность использования метода неопределённых множителей Лагранжа для решения задач нелинейного программирования;
- раскрывается сущность метода неопределённых множителей Лагранжа для решения задач нелинейного программирования.

Литература

1. Вагнер Г. Основы исследования операций. В 3-х т. - М.: Мир, 1973³. <http://www.twirpx.com/file/60748/>
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах М.: Высш. шк. , 1986 г. — 319 с, ил.
<http://www.twirpx.com/file/2617/>⁴
3. С.Н. Шаповал, Т.О. Негрей Экономическая оценка экспорта товара. Монография. – Донецк. ДонНТУ, 2008 – 106с.
4. Руководство по проектированию вентиляции угольных шахт. – К: Основа, 1994, -311с.

³ Подробно изложены основные концепции исследования операций и рассмотрены методы оптимизации управляющих решений с помощью аппарата линейного программирования.

⁴ Пособие написано в соответствии с программой курса «Математические методы исследования операций». Рассматриваются задачи линейного, нелинейного и динамического программирования. В начале каждого параграфа приводятся определения, формулы, а также методические указания, необходимые для решения задач; даются подробные решения некоторых задач. В конце параграфов имеются задачи для самостоятельного решения, к которым даны ответы. Задачи линейного программирования. Специальные задачи линейного программирования (транспортная задача; задачи целочисленного, параметрического, дробно-линейного, блочного программирования; задачи теории игр). Задачи нелинейного программирования (метод множителей Лагранжа, выпуклое программирование, градиентные методы). Задачи динамического программирования

ЗМІСТ (СОДЕРЖАНИЕ)

1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	3
1.1.Ціль і задачі курсової роботи	3
1.2.Тематика курсової роботи	3
1.3.Організація виконання курсової роботи	3
1.4.Зміст курсової роботи	4
2. ЗМІСТ РОЗДІЛУ «РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»	5
2.1.Сутність математичних моделей задач лінійного програмування	5
2.2.Розв'язання задач лінійного програмування графічним способом	9
2.3.Розв'язання задач лінійного програмування симплекс методом	12
3. ЗМІСТ РОЗДІЛУ «РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДОМ НЕВИЗНАЧЕНИХ МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА»	21
3.1.Сутність математичних моделей задач нелінійного програмування, які розв'язуються методом невизначених множників Лагранжа	21
3.2.Розв'язання задач нелінійного програмування методом невизначених множників Лагранжа	23
4. ЗМІСТ РОЗДІЛУ «ВИСНОВКИ»	33
5. ЛІТЕРАТУРА	34
6. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ И ЗАДАНИЯ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ГОРНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ для студентов со специализацией «Управление горным предприятием» (УГП). (рускоязычный текст).	35