

3. Шахтный подъем: Научно-производственное издание / Бежок В.Р., Дворников В.И., Манец И.Г., Пристром В.А.; общ.ред. Б.А. Грядущий, В.А. Корсун. – Донецк: ООО «Юго-Восток, ЛТД», 2007. – 624с. – ISBN 978-966-374-221-2.

4. В.Сидоренко, Е. Молоковская. Журнал «Технополис» Выпуск 3(47) Возможные перегрузки головных канатов в системе многоканатного подъема.

5. «Современные проблемы эксплуатации шахтных подъемных установок» Мошкин А.М., аспирант, Иркутский государственный технический университет, г.Иркутск / Электронный ресурс. Способ доступа: URL: http://mining.istu.edu/files/article/44_moshkin.pdf.

Надійшла до редколегії 11.12.2009

У статті розглянуто метод контролю за розподіленням зусиль між головними канатами багатоканатного під'ємного пристрою за допомогою вимірювання частоти поперечних коливань та реалізація цього методу за допомогою системи збору й передавання інформації, що використовує сучасні телекомунікаційні технології. У статті наведений детальний опис та функції кожного елемента, що входить до складу запропонованої системи.

Ключові слова: головний канат, сучасні засоби зв'язку, шахта, обладнання для підйому, частота

In the article the author considers the method of control distribution efforts between head ropes of multiwire-rope lifting setting. The given method is based on measurings frequencies of transversal vibrations. This method realization is presented with the help of collection and information system. In the article a detailed description of each element functions has been given.

Key words: head rope, modern communication means, mine, lifting setting, frequency

УДК 517

ЕХИЛЕВСКИЙ С.Г. (д-р техн.наук, проф. ПГУ)

ПЯТКИН Д.В. (канд.техн.наук, доцент, ПГУ)

ГОЛУБЕВА О.В. (канд.техн.наук, доцент, ПГУ)

ГУРЬБЕВА Н.А. (канд.техн.наук, доцент, ПГУ)

ПОТАПОВ В.Г. (канд.техн.наук, доцент, ДонНТУ)

МАЛЕВАННЫЙ Ю.А. (инженер ДонНТУ)

ТЮРИН Е.А. (инженер ДонНТУ)

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ И РАЗМЕРОВ ПОРИСТОЙ ГРАНУЛЫ НА СКОРОСТЬ ВНУТРЕННЕЙ ДИФФУЗИИ

Методами математической физики исследовано проникновение броуновских частиц вглубь сферических гранул поглотителя. Показано, что скорость процесса обратно пропорциональна квадрату радиуса. Выполнен сопоставительный анализ полученных зависимостей с имеющими место в плоском случае. Рассмотрены и соответствующим образом интерпретированы различные предельные ситуации.

Ключевые слова: гранулы, диффузия, сорбция, концентрация.

Как правило, лимитирующей стадией сорбции является внутренняя диффузия. Поэтому изучение факторов, влияющих на скорость этого процесса весьма актуально. Очевидно, в первую очередь, представляют интерес гранулы симметричной формы, когда частицы примеси преодолевают пути с одинаковыми сопротивлениями диффузии. В этом смысле двум предельным ситуациям отвечают сферические и плоские гранулы. Рассмотрим вначале первую.

В сферическом слое радиуса r и толщины dr в момент времени t находится

$$d_r N(r, t) = W(r, t) dV = W(r, t) 4\pi r^2 dr$$

частиц примеси, где d_r - их концентрация, dV - объем слоя. За время dt их количество изменится на

$$d_r N(r, t + dt) - d_r N(r, t) \approx d_t (d_r N(r, t)) dt = \frac{\partial}{\partial t} (d_r N(r, t)) dt = \frac{\partial W(r, t)}{\partial t} 4\pi r^2 dr dt \quad (1)$$

частиц. Это изменение обусловлено тем, что за время dt в слой втекает

$$d_t N(r, t) = 4\pi r^2 q(r, t) dt = -4\pi r^2 \kappa \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} dt$$

частиц (здесь $q(r, t)$ - плотность их потока, κ - положительная феноменологическая постоянная, определяемая коэффициентом диффузии и пористостью гранул), а вытекает $d_t N(r + dr, t)$. То есть, за время dt количество частиц в слое увеличивается на

$$d_t N(r, t) - d_t N(r + dr, t) \approx -d_r (d_t N(r, t)) dr = -\frac{\partial}{\partial r} (d_t N(r, t)) dr = \frac{\partial}{\partial r} \left(4\pi r^2 \kappa \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} dt \right) dr \quad (2)$$

штук. Приравняв правые части (1), (2), запишем условие баланса частиц в дифференциальной форме

$$\frac{\partial W(r, t)}{\partial t} = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Уравнение (3) дополним начальным и граничным условиями

$$W(r, 0) = 0, \quad W(R, t) = W_0, \quad (4)$$

означающими, что в начальный момент гранула не загрязнена и подвергается извне постоянному концентрационному напору, где R - радиус гранулы. Кроме того, в силу симметрии

$$\left. \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (5)$$

Заметим, что справа в (3) возникла радиальная часть оператора Лапласа. Имея в виду фигурирующий в скобках множитель r^2 и формулу для производной частного, осуществим замену неизвестной функции

$$W(r, t) = \frac{1}{r} H(r, t), \quad (6)$$

Это приведет к резким упрощениям

$$W'_r = \frac{H'_r r - H}{r^2}, \quad (r^2 W'_r)'_r = H'_r + r H''_{rr} - H'_r = r H'' ,$$

и позволит после подстановки полученного выражения в (3) формально свести задачу к плоской

$$H'_t = \kappa H''_{rr}. \quad (7)$$

Уравнение (7) отличается от записанного в декартовых координатах, лишь заменой x на r . Для новой неизвестной условия (4) примут вид

$$H(r,0) = 0, \quad H(R,t) = RW_0. \quad (8)$$

Кроме того из (6) следует

$$H(0,t) = 0. \quad (9)$$

Имея в виду граничное условие (8) решение задачи (7) – (9) будем искать в виде

$$H(r,t) = rW_0 + h(r,t), \quad (10)$$

Тогда

$$h'_t = \kappa h''_{rr}, \quad (11)$$

причем для новой неизвестной h выполняются уже нулевые граничные условия

$$h(0,t) = h(R,t) = 0, \quad (12)$$

удобные для получения спектра. При этом начальное условие (8) примет вид

$$h(r,0) = -rW_0. \quad (13)$$

Решать задачу (11) – (13) будем методом разделения переменных Фурье:

$$h(r,t) = f(r)g(t). \quad (14)$$

Подставив (14) в (11), получим

$$f(r)g'(t) = \kappa f''(r)g(t),$$

или

$$\frac{1}{\kappa} \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{f''(r)}{f(r)} = const. \quad (15)$$

С учетом (13), временной асимптотики

$$h(r, \infty) = 0$$

и необратимости процесса диффузии, имеем

$$h(r,t) < 0, \quad h'(r,t) > 0,$$

откуда

$$\frac{h'_t}{h} = \frac{g'(t)f(r)}{g(t)f(r)} = \frac{g'(t)}{g(t)} < 0.$$

Следовательно, фигурирующая в (15) константа отрицательна:

$$const = -\lambda^2,$$

и имеют место уравнения

$$g'(t) = -\lambda^2 \kappa g(t), \quad f''(r) + \lambda^2 f(r) = 0.$$

Отсюда

$$g(t) = g(0)e^{-\lambda^2 \kappa t}, \quad f(r) = c_1 \sin \lambda r + c_2 \cos \lambda r, \quad (16)$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные. Поскольку $g(t) \neq 0$ с учетом (14) и граничных условий (12) из (16) следует

$$f(0) = c_2 = 0, \quad f(R) = c_1 \sin \lambda R = 0.$$

Для нетривиального решения, последнее возможно, если

$$\lambda = \frac{k\pi}{R} \equiv \lambda_k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (17)$$

Каждому k (см. (14), (16)) отвечает свое частное решение уравнения (11)

$$h_k(r, t) = b_k \sin \lambda_k r \cdot e^{-\lambda_k^2 \kappa t},$$

где b_k - некоторый числовой коэффициент. В силу линейности уравнения, (11) его общим решением является сумма

$$h(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \lambda_k r \cdot e^{-\lambda_k^2 \kappa t}. \quad (18)$$

Числа

$$B_k = b_k - b_{-k}$$

могут быть найдены с помощью начального условия (13)

$$h(r, 0) = -rW_0 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \lambda_k r,$$

как коэффициенты Фурье разложения функции $-rW_0$ на промежутке $[0, R)$ по синусам

$$B_k = -\frac{2W_0}{R} \int_0^R r \sin \lambda_k r dr. \quad (19)$$

Подставив в (19) выражение (17) для λ_k и выполнив интегрирование по частям, получим

$$B_k = \frac{2W_0 R (-1)^k}{\pi k}. \quad (20)$$

Формулы (6), (10), (17) – (20) описывают проникновение примеси внутрь гранулы

$$W(r, t) = W_0 + \frac{2W_0 R}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin\left(\frac{k\pi r}{R}\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{R}\right)^2 t}. \quad (21)$$

Для построения соответствующих графиков удобно ввести приведенные концентрацию, радиус и обезразмеренное время соответственно

$$\omega = \frac{W}{W_0}, \quad \omega \in [0, 1], \quad (22)$$

$$\zeta = \frac{r}{R}, \quad \zeta \in [0, 1], \quad (23)$$

$$\tau = \frac{\kappa \pi^2 t}{R^2}, \quad \tau \in [0, \infty]. \quad (24)$$

В итоге вместо (21) получим

$$\omega(\zeta, \tau) = 1 + \frac{2}{\pi \zeta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(k\pi \zeta) e^{-k^2 \tau}. \quad (25)$$

Результаты расчетов, выполненных по формуле (25), представлены на рис. 1. Видно, что вначале примесь проникает в поверхностные слои и затем постепенно диффундирует вглубь гранулы. При $\tau = 7$ этот процесс практически завершен. Построенные кривые позволяют убедиться, что условие (5), полученное из независимых соображений и никак не использованное при получении (25), автоматически выполняется.

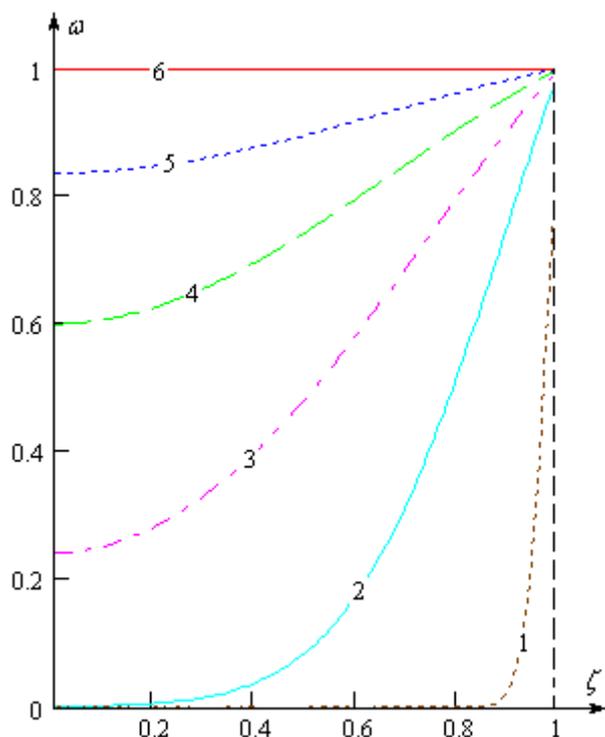


Рис. 1. Эволюция концентрации частиц примеси внутри пористой гранулы:
1) $\tau=0.01$; 2) $\tau=0.3$; 3) $\tau=0.9$; 4) $\tau=1.6$; 5) $\tau=2.5$; 6) $\tau=7$.

Для сравнения, диффузия внутри плоской гранулы толщиной $2l$ описывается рядом [1]

$$\omega(\xi, \tau) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \frac{1}{2}} \cos\left(\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)\xi\right) e^{-\frac{R^2}{l^2}\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \tau} \quad (26)$$

где ξ - безразмерная (приведенная) координата, связанная с отсчитываемой от середины гранулы реальной координатой $x \in [0, l]$ соотношением

$$\xi = \frac{x}{l}. \quad (27)$$

Обозначение различных функций (25), (26) одной буквой не вызовет путаницы, так как они имеют различный список аргументов. Непосредственное сопоставление зависимостей (25), (26) невозможно, так как при данном dr объем сферического слоя зависит от его радиуса, а слой толщиной dx имеет равный объем при любом значении координаты. Поэтому для сравнения скорости диффузии внутри различных гранул будем использовать среднее интегральное значение концентрации $\bar{W}(t)$. В результате для плоского случая получим

$$\bar{W}_n(t) = \frac{1}{V} \iiint_V W(x, t) dV = \frac{W_0}{V} \iiint_V \omega(x, t) dV = \frac{W_0 S}{V} \int_{-l}^l \omega(x, t) dx. \quad (28)$$

Используя четность $\omega(x, t)$ и связь площади гранулы S с ее объемом V

$$\frac{S}{V} = \frac{1}{2l},$$

выполним в (28) дальнейшие преобразования

$$\bar{W}_n(t) = \frac{W_0}{l} \int_0^l \omega(x, t) dx = W_0 \int_0^1 \omega(\xi, t) d\xi. \quad (29)$$

Аналогично для сферической гранулы получим

$$\bar{W}_c(t) = \frac{W_0}{V} \iiint_V \omega(r, t) dV = \frac{W_0 4\pi}{V} \int_0^R \omega(r, t) r^2 dr = \frac{W_0 4\pi R^3}{V} \int_0^1 \omega(\zeta, t) \zeta^2 d\zeta = 3W_0 \int_0^1 \omega(\zeta, t) \zeta^2 d\zeta, \quad (30)$$

где использована замена переменной (23) и связь объема сферической гранулы с ее радиусом $V = 4\pi R^3/3$. Подставив (25), (26) соответственно в (30), (29) и выполнив интегрирование, получим для среднего интегрального значения приведенной концентрации $\bar{\omega}(\tau) = \bar{W}(\tau)/W_0$ следующие выражения

$$\bar{\omega}_c(\tau) = 1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} e^{-k^2\tau}, \quad (31)$$

$$\bar{\omega}_n(\tau) = 1 - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1/2)^2} e^{-\frac{R^2}{l^2} \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \tau}. \quad (32)$$

Из них при $\tau = 0$ с учетом известных сумм

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2},$$

получим $\bar{\omega}_c(0) = \bar{\omega}_n(0) = 0$, как и должно быть.

Результаты численных расчетов, выполненных для случая $R = l$ по формулам (32), (31) в графической форме представлены на рис. 2 а. Видно, что сферическая гранула заполняется быстрее, так как при равной площади поверхности

$$4\pi R^2 = 2S \quad (33)$$

ей, при $R = l$, отвечает вдвое меньший объем

$$4\pi R^3/3 < S2l = 4\pi R^3.$$

И наоборот, при равенстве объемов гранул

$$4\pi R^3/3 = S2l,$$

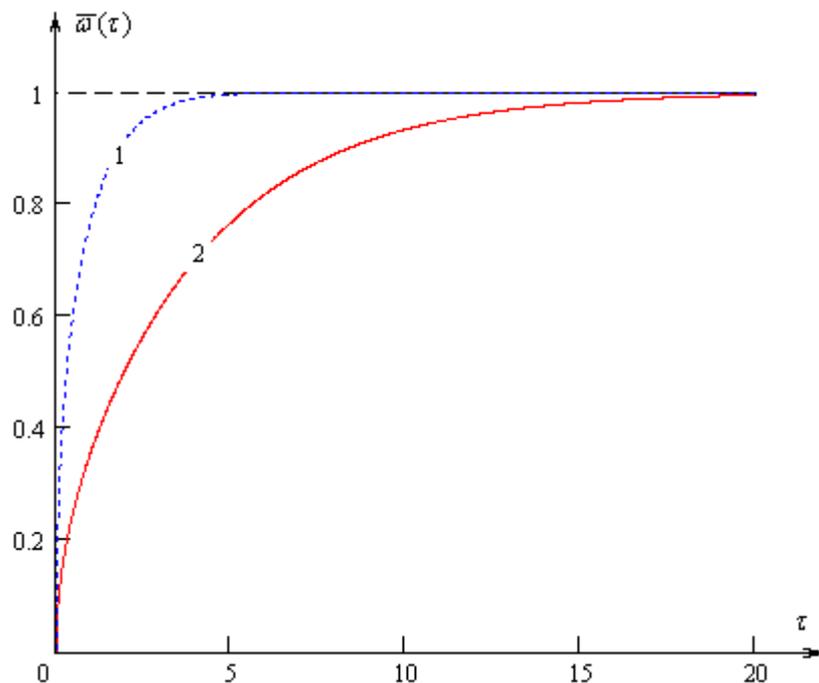


Рис. 2а. Эволюция среднего значения приведенной концентрации примеси при $R=l$ в сферических (кривая 1) и плоских (кривая 2) гранулах сорбента

из (33) следует $R = 3l$, что после подстановки в (32) приводит к равенству производных

$$\bar{w}_c(0)' = \bar{w}_n(0)'$$

(рис. 2 б). Так и должно быть, ибо при малых временах, пока глубина проникновения в сферическую гранулу не велика, ее поверхностный слой может считаться плоским, что при равных площадях поверхностей и объемах плоской и сферической гранул приводит к одинаковым значениям среднеинтегральных концентраций. В дальнейшем кривые расходятся, ибо проникновение в середину сферической гранулы происходит через меньшую (убывающую как r^2) поверхность, в то время, как в плоском случае эта поверхность не зависит от x , то есть не уменьшается по мере заполнения поверхностных слоев. По этой причине при $R = 3l$ плоская гранула заполняется быстрее, чем сферическая.

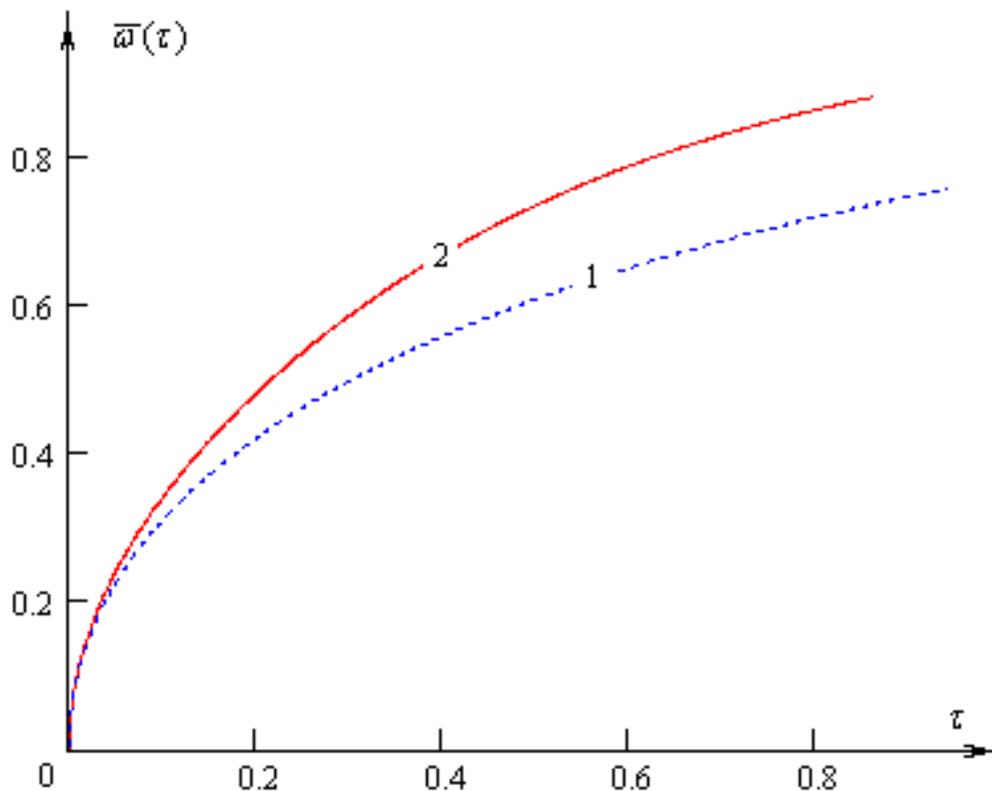


Рис. 26. Эволюция среднего значения приведенной концентрации примеси при $R = 3l$ в сферических (кривая 1) и плоских (кривая 2) гранулах сорбента

Таким образом, полученные зависимости не противоречат друг другу и допускают разумную интерпретацию.

Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

Надійшла до редколегії 11.12.2009

Методами математичної фізики досліджено проникнення броунівських часток вглиб сферичних гранул поглинача. Показано, що швидкість процесу обернено пропорційна квадрату радіусу. Виконано порівняльний аналіз отриманих за-Вісім з мають місце в плоскому випадку. Розглянуто і відповідним про-разом інтерпретовані різні граничні ситуації.

Ключові слова: гранули, дифузія, сорбція, концентрація.

The methods of mathematical physics is studied Brownian particles penetrate deep into spherical granules sink. It is shown that the process speed is inversely proportional to the square of the radius. Completed a comparative analysis of the dependence of having a place in the plane case. Considered and appropriate for once-interpreted in various limiting situations.

Keywords: pellets, diffusion, sorption, concentration.