УДК 519.622

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ КОЛЛОКАЦИОННЫХ БЛОЧНЫХ МЕТОДОВ

Дмитриева О.А., Фельдман Л.П.
Донецкий национальный технический университет

Работа посвящена вопросам вывода расчетных схем обобщенных коллокационных блочных методов решения задачи Коши и доказательству их устойчивости. Полученные расчетные формулы интегрирования на шаге эквивалентны неявным стадийным методам, но обладают меньшей вычислительной сложностью, легко распараллеливаются и являются весьма эффективными при решении жестких уравнений.

Введение

Рассмотренные в [1-2] два типа коллокационных блочных методов: одношаговый и многошаговый, позволяют построить обобщенный подход к генерации коллокационных методов. При этом тип генерируемого блочного метода будет определяться количеством используемых опорных точек, или размерностью опорного блока. Если в расчетной схеме для вычислений приближенных значений в следующем блоке используется только значение в последней точке предшествующего блока, будем говорить об одношаговом коллокационном блочном методе. Если используются все или несколько значений в точках предшествующего блока – многошаговом коллокационном блочном методе.

5

1 Разработка обобщенных коллокационных блочных методов

Рассмотрим вычислительные схемы для блоков, содержащих s узлов, при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах. В случае многошагового блочного метода начальный блок будет содержать точки сетки, в которых заданы стартовые значения приближенного решения, необходимые для продолжения расчета. Уравнения многошаговых разностных методов для блока из s точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах, с учетом введенных выше обозначений можно записать в виде:

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=1-m}^{k} a_{i,j}u_{n,j} = \sum_{j=1-m}^{k} b_{i,j}f_{n,j}\ ,\ i = 1,2,\ldots,k,\quad n = 1,2,\ldots\ . \tag{1}$$

Формулы (1) определяют m-шаговый s-точечный разностный метод. В нем множество точек $T_n^s = \{t_{n,1}, t_{n,2}, \ldots, t_{n,s}\}$, в которых по формулам (1) определяются приближенные значения решения. Множество $T_{n-1}^m = \{t_{n,1-m}, t_{n,2-m}, \ldots, t_{n,0}\}$ содержит точки, приближенное значение решения в которых было вычислено на предыдущем этапе. Для одношаговых методов, представляющих частный случай (1) если $m = 1$, разностные уравнения имеют вид

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=0}^{k} a_{i,j}u_{n,j} = \sum_{j=0}^{k} b_{i,j}f_{n,j}\ ,\ i = 1,2,\ldots,s,\quad n = 1,2,\ldots\ . \tag{2}$$

Формулы (2) определяют одношаговый s-точечный разностный метод. Обозначим матрицы коэффициентов системы уравнений (1) через

$A = \{a_{i,j}\}$; $B = \{b_{i,j}\}$; $i = 1,2,\ldots,s$; $j = -(m-1),-(m-2),\ldots,s$.

Разобьем каждую из матриц на две части

$A_1 = \{a_{i,j}\}$; $B_1 = \{b_{i,j}\}$; $i = 1,2,\ldots,s$; $j = -(m-1),-(m-2),\ldots,0$;

$A_2 = \{a_{i,j}\}$; $B_2 = \{b_{i,j}\}$; $i = 1,2,\ldots,s$; $j = 1,2,\ldots,s$.

Введем соответствующие вектора

$U_n = \{u_{n,j}\}$, $j = -(m-1),-(m-2),\ldots,0$;

$V_{n+1} = \{u_{n+1,j}\}$, $n = 1,2,\ldots$ $j = 1,2,\ldots,s$;

$F_n = \{f_{n,j}\}$, $j = -(m-1),-(m-2),\ldots,0$;

$F_{n+1} = \{f_{n+1,j}\}$, $n = 1,2,\ldots$ $j = 1,2,\ldots,s$.

В векторной форме уравнение (1) будет иметь вид

$$A_1U_n + A_2V_{n+1} = \tau(B_1F_n + B_2F_{n+1}),\quad n = 1,2,\ldots \qquad (3)$$

Чтобы система однородных разностных уравнений, соответствующая (3) была линейно независима, потребуем, чтобы матрица

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \ldots & a_{s,s} \end{bmatrix}$$ -

была невырожденной, и разрешим ее относительно V_{n+1}

$$V_{n+1} = QU_n + \tau(DF_n + GF_{n+1}), \qquad (4)$$

где $Q = -A_2^{-1}A_1$, $D = A_2^{-1}B_1$, $G = A_2^{-1}B_2$.

Задав стартовые значения, полученные, например, с помощью явных формул Рунге – Кутта

$$U_0 = \{u_{0,j}\},\quad j = 0, 1, \ldots, m-1,$$

необходимо на каждом последующем этапе решить систему нелинейных уравнений (4), определив последовательно вектора V_1, V_2, … .

2 Генерация коэффициентов расчетных схем обобщенных коллокационных блочных методов

Представление общих блочных разностных многошаговых многоточечных уравнений в виде (4) будем называть канонической формой их записи. Получим коэффициенты уравнений, позволяющие представлять общие многошаговые многоточечные методы (1) в канонической форме (4). Каждое i-ое разностное уравнение

$$u_{n,i} = \sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j}u_{n,j} + \tau\left(\sum_{j=1-m}^{0} d_{i,j}f_{n,j} + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}f_{n,j}\right),\quad i = 1,2,\ldots,s \qquad (5)$$

содержит $2m+s$ неизвестных коэффициентов $q_{i,j}$, $d_{i,j}$, $j = -(m-1), -(m-2), \ldots, 0$ и $g_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Для их определения следует использовать $2m+s$ уравнений условий аппроксимации. Выражения для невязок на решении $x(t)$ исходного дифференциального уравнения имеют вид

$$r_{n,i} = \frac{1}{\tau}\left(-x_{n,i} + \sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j}x_{n,j}\right) + \sum_{j=1-m}^{0} d_{i,j}x'_{n,j} + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j}x'_{n,j}\ , \qquad (6)$$

где $x_{n,j} = x(t_n + j\tau)$, $x_{n-1,m} = x_{n,0}$, $x'_{n,j} = x'(t_n + j\tau) = f(t_n + j\tau)$, $x'_{n-1,m} = x'_{n,0}$.

Для i*-го* уравнения потребуем его аппроксимации в точке $t_{n,0}$

$x_{n,j} = x(t_{n,0} + j\tau)$, $x'_{n,j} = x'(t_{n,0} + j\tau) = f(t_{n,0} + j\tau, x_{n,j})$,

Раскладывая $x(t_{n,0} \pm j\tau)$ и $x'(t_{n,0} \pm j\tau)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $t_{n,0}$, подставляя эти разложения в (6), группируя члены с одинаковыми степенями по τ и приравнивая нулю коэффициенты при τ^l, получим систему уравнений

$$\sum_{j=1-m}^{0} q_{i,j} = 1,\ i = 1,2,\dots,s;$$
$$\sum_{j=1-m}^{0} \left(jq_{i,j} + d_{i,j}\right) + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j} = i; \qquad (7)$$
$$\sum_{j=1-m}^{0} \left(q_{i,j} \frac{j^l}{l} + g_{i,j} j^{l-1} \right) + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j} j^{l-1} = \frac{i^l}{l},\ l = 2,3,\dots,p.$$

Поскольку каждое i-ое разностное уравнение (5) содержит $2m+s$ неизвестных коэффициентов, то максимальный порядок аппроксимации рассматриваемого m-шагового s-точечного разностного метода равен

$$p = 2m + s - 1. \qquad (8)$$

Каноническая форма одношаговых многоточечных уравнений будет иметь соответственно вид

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau\left(d_{i,0} f_{n,0} + \sum_{j=1}^{s} g_{i,j} f_{n,j} \right),\ i = 1,2,\dots,s\ . \qquad (9)$$

Коэффициенты разностных уравнений (5) и (9) можно определить, решая систему (7) для общих многошаговых блочных методов, учитывая их частный вид, или интегро-интерполяционным методом. Для этого построим интерполяционный многочлен $L_{m+s-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующими им значениями сеточной функции $u_{n,j}$, $j = -(m-1), -(m-2), \dots, s$. Найдем производные полученного интерполяционного многочлена в узлах сетки $t_{n,i}$, $i = 1,2,\dots,s$. Приравняв их соответствующим значениям правой части дифференциального уравнения, получим разностные уравнения для блока. Наивысший порядок аппроксимации многошаговых разностных методов дифференцирования, рассматриваемых как частный вид общих многошаговых методов в соответствии с системой (7) равен $O(\tau^{2m+s-1})$.

Используя изложенный выше подход, можно сформировать каноническую систему уравнений для любых значений параметров m и s.

3 Устойчивость обобщенных коллокационных блочных методов

Задача Коши для однородного уравнения, соответствующего (1) состоит в отыскании сеточной функции $V_{n+1} = \{u_{n+j}, j = 1,2,\dots,s\}$, удовлетворяющей при всех n ≥ 0 уравнению

$V_{n+1} = QU_n$ (10)

при $U_n = \{u_{n-j}, j = 0,1,\dots m-1)$ и принимающей при $n = 0$ заданные начальные значения $U_0 = \{u_j, j = 0,1,\dots,m-1\}$.

Обозначим элементы матрицы $Q = \{q_{i,j}, i = 1,2,\dots,s, j = 1,\dots,m\}$. Для доказательства устойчивости преобразуем уравнения (10) к эквивалентной системе. Пусть $m > s$, тогда эта система будет иметь вид:

$$\begin{aligned} &u_{n,-m+s+1} = u_{n,-m+s+1}, \dots, u_{n,0} = u_{n,0}, \\ &u_{n+1} = q_{1,1}u_{n,-m+s+1} + q_{1,2}u_{n,-m+s+2} + \dots + q_{1,s}u_{n,0}; \\ &\dots \\ &u_{n+s} = q_{s,1}u_{n,-m+s+1} + q_{s,2}u_{n,-m+s+2} + \dots + q_{s,s}u_{n,0}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Представим ее в векторной форме:

$$W_{n+1} = \widetilde{Q} W_n,\ n = 0,1,2,\dots, \qquad (12)$$

где

$W_n = \{u_{n,1-m}, u_{n,2-m}, ..., u_{n,0}\}$

$W_{n+1} = \{u_{n,s-m+1}, u_{n,s-m+2}, ..., u_{n,s}\}$

$W_0 = U_0 = \{u_{0,1}, u_{0,2}, ..., u_{0,m}\}$

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ q_{1,1} & q_{1,2} & & & ... & & & q_{1,m} \\ ... & ... & & & ... & & & ... \\ q_{s,1} & q_{s,2} & & & ... & & & q_{s,m} \end{pmatrix} \tag{13}$$

В матрице (13) размерности $m \times m$ последние s строк совпадают с матрицей Q, а первые $m–s$ соответствуют первой строке уравнений в (3.58). Для случая $m < s$, в векторной записи (11) следует положить

$$\begin{aligned} &W_n = \{u_{n,1-s}, u_{n,2-s}, ..., u_{n,0}\}; \\ &W_{n+1} = \{u_{n,1}, u_{n,2}, ..., u_{n,s}\}; \\ &W_0 = U_0 = \{0, ..., 0, u_{0,1}, u_{0,2}, ..., u_{0,m}\}; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,1-m} & q_{1,2-m} & q_{1,0} \\ 0 & 0 & q_{2,1-m} & q_{2,2-m} & q_{2,0} \\ & & & & \\ 0 & 0 & q_{s,1-m} & q_{s,2-m} & q_{s,0} \end{pmatrix} \tag{15}$$

В матрице (15), размерности $s \times s$, элементы первых $m–s$ столбцов равны нулю, а последние m совпадают с матрицей Q.

Устойчивость или неустойчивость уравнения (12) по начальным данным определяется расположением корней характеристического уравнения матрицы $\widetilde{Q}$. Будем считать, что условие корней выполнено для матрицы $\widetilde{Q}$, если все корни ее характеристического уравнения лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе круга нет кратных корней. Используем следующее определение устойчивости блочных многошаговых разностных методов. Уравнение (12) устойчиво по начальным данным, если существует постоянная M не зависящая от n и такая, что при любых начальных данных $W_0=\{u_{0,j}, j = 1,2,…,m\}$ для его решения выполняется оценка

$$\|W_n\| \le M\|W_0\|,\ n = 1,2,… \tag{16}$$

Тем самым устойчивость означает равномерную по n ограниченность решения задачи Коши. Это определение равносильно требованию равномерной ограниченности матрицы $\widetilde{Q}^n$ при всех $n > 0$ [4]. Запишем (12) в виде:

$$W_{n+1} = \widetilde{Q}^n W_0,\ \ n = 0,1,2,...$$

Для доказательства условий устойчивости по начальным данным уравнения (12) используем следующие утверждения [3]:

Лемма 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует норма вектора $\|\circ\|_*$ такая, что для подчиненной нормы матрицы справедливо неравенство

$$\|A\|_* \le \rho(A) + \varepsilon.$$

Лемма 2. Если все корни характеристического уравнения матрицы A лежат внутри или на границе единичного круга комплексной плоскости, причем на границе круга нет кратных корней, то существует норма вектора $\|\circ\|_*$ такая, что для подчиненной нормы матрицы А справедливо неравенство $\|A\|_* \le 1$.

Доказанная в [1] теорема обобщается на коллокационные блочные методы в следующей формулировке

Теорема 1. Условие корней необходимо и достаточно для устойчивости уравнения (12) по начальным данным.

Полученная оценка

$$\|W_n\|_C \le \|S^{-1}\|_C^{-1} \|S\|_C^{-1} \|W_0\|_C$$

показывает, что существует постоянная $M = \|S^{-1}\|_C^{-1} \|S\|_C^{-1}$, не зависящая от n, т.е. условие устойчивости по начальным данным (16) выполняется.

Выводы

Обобщенные коллокационные блочные методы, рассмотренные в работе, существенно расширяют класс разностных методов решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены расчетные схемы для общих m-шаговых s-точечных блочных методов, определен порядок их точности. Кроме того, предлагаемый подход позволяет генерировать расчетные схемы заданного порядка точности, основываясь на фиксированном количестве опорных или расчетных точек. Определены условия устойчивости по Далквисту и доказана сходимость устойчивых по начальным данным обобщенных m-шаговых s-точечных блочных методов к точному решению. Полученные результаты представляют возможности построения новых более эффективных параллельных алгоритмов и их реализации на современных параллельных вычислительных системах.

5

Литература

[1] Feldman L.P., Nazarova I.A., Dmitrieva O.A., Mikhaylova T.V. Embedded block parallel methods for initial Cauchy problem numerical solution// Proceedings of Donetsk National Technical University. №1, 2010, pp.12-17.

[2] Дмитриева О.А. Параллельное моделирование жестких систем на основе диагонализации полной матрицы.//Искусственный интеллект, 2011, № 4, С. 46-53.

[3] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.: Наука, 1989.- 432с.

[4] Хайрер Э., Нёрсет С., Ваннер. Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: - Мир, 1990.-512с.