МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ І ФІЗИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу «Фізика. Частина І» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання

ЛУЦЬК 2024

УДК 53

Конспект лекцій з курсу «Фізика. Частина І» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Власенко М.М. - Луцьк, ДонНТУ, 2024 р. – 187 с.

Конспект лекцій написаний у відповідності з робочою програмою навчальної дисципліни «Фізика. Частина І», затвердженою на кафедрі Вищої математики і фізики ДонНТУ для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання. У конспекті викладені фізичні основи механіки, молекулярної фізики і термодинаміки, принципів і понять електричних та магнітних явищ.

Укладач Микола Власенко, доц., к.т.н., доц. каф. ВМФ

Рецензент Людмила Сергієнко, доц., к.п.н., доц. каф. ВМФ

Відповідальна за випуск Юлія Новікова, доц., к.ф.-м.н., зав. каф. ВМФ

Затверджено НМВ ДонНТУ,
протокол № 7 від 27 лютого 2024 р.

Розглянуто на засіданні кафедри ВМФ,
протокол № 1 від 31 січня 2024 р.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 4
ТЕМА 1. Кінематика поступального і обертального руху 5
ТЕМА 2. Динаміка поступального руху 13
ТЕМА 3. Динаміка обертального руху 19
ТЕМА 4. Робота, потужність, енергія 26
ТЕМА 5. Закони збереження в механіці 34
ТЕМА 6. Елементи спеціальної теорії відносності 40
ТЕМА 7. Основи молекулярно-кінетичної теорії 48
ТЕМА 8. Статистичні розподіли 53
ТЕМА 9. Фізичні основи термодинаміки 63
ТЕМА 10. Закони термодинаміки 68
ТЕМА 11. Зведена кількість тепла. Ентропія 77
ТЕМА 12. Реальні гази 87
ТЕМА 13. Явища перенесення 92
ТЕМА 14. Електричне поле у вакуумі 98
ТЕМА 15. Розрахунок електростатичних полів 108
ТЕМА 16. Електричне поле в діелектриках 113
ТЕМА 17. Провідники в електричному полі. 120
ТЕМА 18. Постійний електричний струм 127
ТЕМА 19. Розгалужені кола. Правила Кірхгофа 136
ТЕМА 20. Магнітне поле у вакуумі 141
ТЕМА 21. Приклади розрахунку магнітних полів. 147
ТЕМА 22. Силова дія магнітного поля 154
ТЕМА 23. Магнітне поле в речовині 165
ТЕМА 24. Електромагнітна індукція 173
ЛІТЕРАТУРА 187

ПЕРЕДМОВА

В останні часи у вищих навчальних закладах вивчення курсу фізики скоротилося з чотирьох до двох семестрів, однак програма з фізики залишилась незмінною. Це потребує нових підходів до її викладання і нових навчальних посібників, які б ураховували ці зміни. Ті підручники з фізики, які можна знайти на просторах інтернету, як правило, об’ємні за розміром і мають свою логіку подання матеріалу. При самостійній роботі це викликає значні труднощі для студентів. Тому виникла потреба створити конспект лекцій, який відповідав би навчальній програмі даної дисципліни, був компактним за розміром і не обтяженим занадто математичними формулами.

Даний курс лекцій охоплює в скороченому викладенні практично весь матеріал першої частини фізики, починаючи з механіки і закінчуючи електромагнетизмом. При цьому максимально приділено увагу формулюванню фізичних законів, розкриттю змісту фізичних категорій, поясненню суті фізичних явищ. Все це сприятиме якісному засвоєнню студентами матеріалу дисципліни фізика. При підготовці конспекту лекцій були використані матеріали виданих за останні роки в Україні підручників [1-4].

Тема 1

Кінематика поступального і обертального руху

Кінематикою називається розділ механіки, в якому вивчається механічний рух тіл в часі без урахування взаємодії тіл одного з одним, або з силовими полями.

Механічний рух полягає в зміні положення тіла з часом відносно інших тіл або частин одного і того ж тіла.

Для вивчення механічного руху потрібна ***система відліку*** – *тіло відліку*, відносно якого розглядається переміщення даного тіла, і пов'язані з тілом відліку *система координат* і *годинник*.

Фундаментальними поняттями механіки є поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла.

Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, деформаціями якого можна знехтувати в умовах даної задачі.

Основний принцип механіки полягає в положенні, що будь-який механічний рух можна розкласти на два види рухів – ***поступальний*** і ***обертальний***.

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається при русі паралельною своєму початковому напряму, тобто не повертається.

Обертальним називають такий рух твердого тіла, коли будь-якої миті всі його точки рухаються по колах із центрами на одній нерухомій прямій – осі обертання.

Лінія, яку описує в просторі точка, що рухається, називається ***траєкторією***. Залежно від виду траєкторії рух поділяють на *прямолінійний* і *криволінійний*.

Траєкторія руху матеріальної точки задається *рівняннями руху*:

у векторній формі $\vec{r} = \vec{r}(t)$;

у скалярній формі $\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \\ z = f(t) \end{cases}$.

Довжина траєкторії точки являє собою величину пройденого *шляху* S. Шлях $S(t)$ - скалярна величина.

Поряд з величиною пройденого шляху, *переміщення* точки характеризується напрямком, у якому вона рухається. У відмінність від шляху переміщення є векторною величиною (див. рис. 1.1).

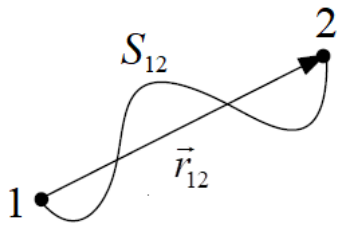


Рисунок 1.1 – Шлях і переміщення матеріальної точки

Щоб в позначеннях було видно напрямок переміщення, першим індексом вказується початкова точка переміщення, другим – кінцева. Якщо поміняти індекси місцями, це буде означати, що змінюється напрямок руху.

Положення точки в просторі може бути задане радіус - вектором:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (1.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори напрямів (орти); x, y, z — координати точки.

Вектор переміщення - різниця радіус-векторів, що характеризують кінцеве і початкове положення точки, яка рухається протягом певного проміжку часу.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (1.2)$$

Для характеристики руху тіла в механіці вводиться поняття *швидкості.* Нехай у момент часу t тіло знаходилося в точці 1, положення якої задається радіус-вектором $\vec{r}$. За час Δt воно здійснило переміщення $\Delta\vec{r}$ і опинилося в точці 2 (рис. 1.2).

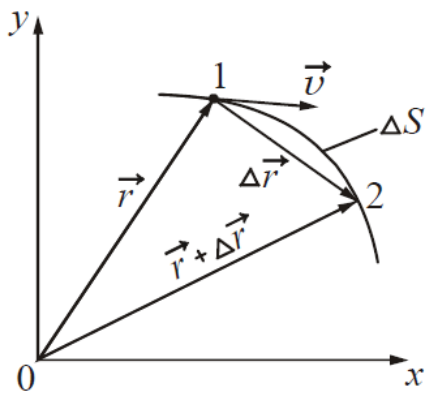


Рисунок 1.2 – До виведення швидкості тіла

Швидкість тіла визначається як границя відношення переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt, за який воно відбулося, за умови, що Δt наближається до нуля:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \qquad (1.3)$$

Швидкість ($\vec{v}$) – векторна фізична величина, яка характеризує швидкість зміни положення тіла в просторі і дорівнює першій похідній радіус-вектора за часом.

Вектор швидкості завжди спрямований за дотичною до траєкторії у напрямі руху. Модуль швидкості v визначається як похідна шляху за часом:

$$v = \frac{dS}{dt}, \qquad (1.4)$$

З (1.4) випливає, що шлях S, який пройдений за елементарно малий час dt визначатиметься таким чином:

$$dS = v(t)dt.$$

Шлях, який пройдений тілом за кінцевий проміжок часу від t_1 до t_2, знаходиться інтегруванням:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt\,. \qquad (1.5)$$

Цей шлях дорівнює площі заштрихованої криволінійної трапеції (рис. 1.3). Якщо напрям вектора швидкості не змінюється, то рух називається прямолінійним.

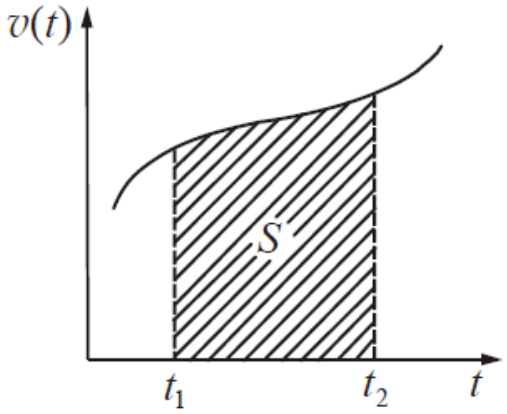


Рисунок 1.3 – До визначення шляху, пройденого тілом

Якщо модуль швидкості не змінюється з часом, то рух називається рівномірним.

При рівномірному русі швидкість тіла залишається сталою:

$$v = \frac{S}{t} = \text{const.} \qquad (1.6)$$

Якщо тіло рухається нерівномірно, то величина, яка дорівнює відношенню пройденого шляху ΔS до проміжку часу Δt, протягом якого шлях був пройдений, називається *середньою швидкістю* за цей проміжок часу:

$$<v> = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \qquad (1.7)$$

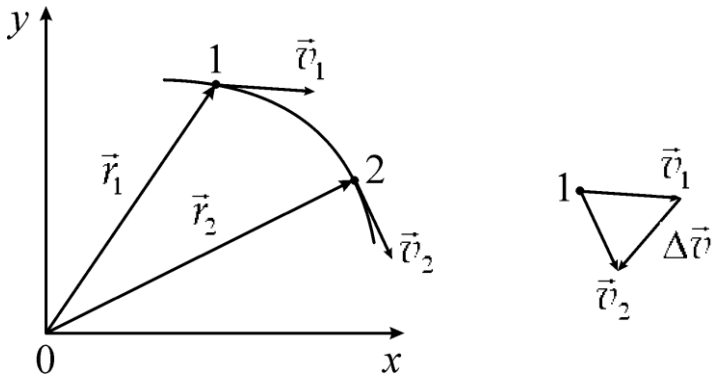
Одиниця виміру швидкості – м/с.

Щоб характеризувати зміну швидкості тіла з часом, використовується величина, яка називається *прискоренням*.

Нехай у момент часу t тіло із швидкістю $\vec{v}_1$ знаходилося в точці 1. Через деякий час Δt воно перемістилося в точку 2, при цьому його швидкість буде дорівнювати $\vec{v}_2$ (рис. 1.4 *а*). Приріст вектора швидкості дорівнює $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 1.4 *б*).

Щоб охарактеризувати швидкість зміни швидкості, використовується величина:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}.$$



а) *б*)

Рисунок 1.4 – До визначення прискорення

Беручи до уваги (1.3), можна записати:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (1.8)$$

Прискорення ($\vec{a}$) – це векторна фізична величина, яка характеризує швидкість зміни вектора швидкості і дорівнює похідній вектора швидкості за часом.

Прискорення спрямоване за вектором приросту швидкості $\Delta\vec{v}$.

При прямолінійному русі напрям швидкості залишається сталим, тому вектор прискорення $\vec{a}$ або співпадає за напрямом з вектором швидкості, або протилежний йому. Якщо модуль прискорення при цьому не змінюється з часом, то в першому випадку рух буде рівноприскореним, у другому – рівносповільненим. Швидкість руху у будь-який момент часу визначатиметься співвідношенням:

$$v = v_0 \pm at \qquad (1.9)$$

де v_0 – початкова швидкість тіла, тобто швидкість у момент часу t = 0. Знак «плюс» відповідає рівноприскореному руху, знак «мінус» – рівносповільненому.

Інтегруючи функцію (1.9) в межах від 0 до довільного моменту часу t, отримаємо формулу для розрахунку пройденого шляху:

$$S = \int_0^t (v_0 \pm at)dt = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (1.10)$$

Якщо швидкість змінюється з часом довільним чином, то величина, що дорівнює відношенню зміни швидкості Δv до проміжку часу Δt, протягом якого змінювалася швидкість, називається *середнім прискоренням* за цей проміжок часу

$$< a >= \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad (1.11)$$

При криволінійному русі вектор швидкості $\vec{v}$ змінює свій напрям, а також може змінюватись і його величина, тобто модуль.

У цьому випадку вектор прискорення $\vec{a}$ розкладають на дві складові. Одна з них $\vec{a}_\tau$ – дотична до траєкторії, друга $\vec{a}_n$ – перпендикулярна цій дотичній (рис. 1.5). Складова $\vec{a}_\tau$ називається *тангенціальним (дотичним) прискоренням*, а складова $\vec{a}_n$ – *нормальним (доцентровим) прискоренням*. З рис. 1.5 виходить, що

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \qquad (1.12)$$

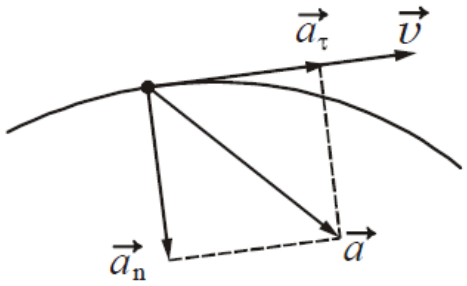


Рисунок 1.5 – Зв'язок повного $\vec{a}$, нормального $\vec{a}_n$ і тангенціального $\vec{a}_\tau$ прискорень

Модуль повного прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \qquad (1.13)$$

Тангенціальне прискорення характеризує швидкість зміни величини швидкості і дорівнює першій похідній модуля швидкості за часом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \qquad (1.14)$$

Нормальне (доцентрове) прискорення характеризує швидкість зміни напряму

швидкості і спрямоване за радіусом до центру кривини траєкторії. Модуль нормального прискорення визначається формулою:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \qquad (1.15)$$

де R – радіус кривини в даній точці траєкторії.

Рух точки по колу є складовою частиною обертального руху. Поряд з вектором переміщення в цьому випадку зручно розглядати *вектор елементарного повороту тіла* $d\vec{\varphi}$ (або кутове переміщення). Вектор $d\vec{\varphi}$ має бути спрямованим уздовж осі обертання так, щоб з його кінця було видно рух тіла проти напрямку руху годинникової стрілки (*правило правого гвинта*) рис. 1.6. Напрямок вектора повороту тіла пов'язується з напрямом обертання, тобто, $d\vec{\varphi}$ є не істинним вектором, а псевдовектором. Вимірюється кут повороту в радіанах.

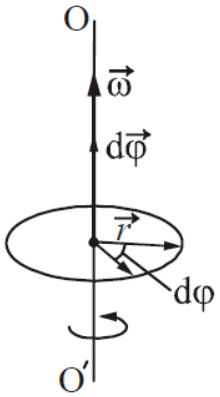


Рисунок 1.6 – Зв'язок між кутовими характеристиками обертального руху

Для характеристики швидкості і напряму обертання служить кутова швидкість. ***Кутовою швидкістю*** називають вектор $\vec{\omega}$, величина якого дорівнює першій похідній від кута повороту за часом

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.16)$$

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ спрямована уздовж осі обертання у напрямку, що визначається за правилом правого гвинта, та є псевдовектором. Одиниця виміру кутової швидкості - радіан у секунду (рад/с).

Аксіальні вектори $d\vec{\varphi}$ і $\vec{\omega}$ не мають певних точок докладання, вони можуть відкладатися з будь-якої точки осі обертання.

Обертання з постійною за величиною кутовою швидкістю ω зветься *рівномірним*. Час, за який точка, що рівномірно обертається, робить повний оберт, тобто повертається на кут 2π, називається періодом руху T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.17)$$

Частотою обертання називається величина, яка дорівнює числу обертів, що здійснює тіло за одиницю часу:

$$n = \frac{N}{t} = \frac{1}{T} \qquad (1.18)$$

де N – число обертів, що здійснюються тілом за час t; T – період обертання.

Для характеристики швидкості зміни вектора кутової швидкості при нерівномірному обертанні вводиться вектор кутового прискорення. ***Кутове прискорення*** - це похідна за часом від вектора кутової швидкості (відповідно друга похідна за часом від кута повороту)

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \qquad (1.19)$$

Одиниця виміру кутового прискорення - рад/с^2.

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі, то вектор $\vec{\varepsilon}$ спрямований в тому ж напрямку, що і $\vec{\omega}$, при прискореному обертанні $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0\right)$, і в протилежному - при уповільненому обертанні $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0\right)$.

Кінематичне рівняння рівноприскореного обертання (ε = const)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (1.20)$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість; t - час

Кутова швидкість тіла при рівноприскореному обертанні

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t \qquad (1.21)$$

Зв’язок між лінійними і кутовими величинами, що характеризують обертання твердого тіла, виражається такими формулами:

- ✓ шлях, пройдений довільною точкою тіла по дузі кола радіусом R, при повороті тіла на кут φ

$$S = \varphi R; \qquad (1.22)$$

- ✓ лінійна швидкість точки

$$v = \omega R; \qquad (1.23)$$

- ✓ тангенціальне прискорення точки

$$a_\tau = \varepsilon R \qquad (1.24)$$

- ✓ нормальне прискорення точки

$$a_n = \omega^2 R. \qquad (1.25)$$

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 2

Динаміка поступального руху

Динаміка – розділ механіки, у якому вивчають рух тіл з урахуванням взаємодії їх одне з одним або з силовими полями.

Основними поняттями динаміки є:

1. ***Маса*** (m) тіла - скалярна фізична величина, що є мірою інертних і гравітаційних властивостей тіла. Може служити мірою енерговмісту. [m] = кг.

Основні властивості маси:

- ✓ - маса в класичній механіці не залежить від швидкості руху;
- ✓ - маса є величиною адитивною, тобто маса системи тіл дорівнює сумі мас тіл, що входять до системи;
- ✓ - маса замкнутої системи залишається величиною сталою, тобто виконується закон збереження маси.

2. ***Імпульс тіла*** ($\vec{p}$) – векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси тіла на його швидкість.

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (2.1)$$

Напрям вектору імпульсу тіла співпадає з напрямом вектору швидкості.

3. ***Сила*** ($\vec{F}$) – векторна фізична величина, що є мірою механічної дії на тіло інших тіл або полів. Сила характеризується модулем (числовим значенням), напрямом і точкою прикладання. Пряма, уздовж якої спрямована сила, називається лінією дії сили.

[F] = Н (ньютон).

Дія сили може бути статичною і динамічною. Статична дія виявляється у виникненні деформацій, динамічне – у виникненні прискорень.

Вид формули для розрахунку сили залежить від природи взаємодій.

У класичній механіці доводиться мати справу з гравітаційними і електромагнітними взаємодіями, які проявляються по-різному і тому можуть бути представлені різними конкретними силами. Ці сили прийнято виражати законами.

1. ***Гравітаційні взаємодії***. Закон всесвітнього тяжіння.

Дві матеріальні точки масами m_1 і m_2 притягуються одна до одної з силою, що прямо пропорційна масам цих тіл і обернено пропорційна квадрату відстані між ними (рис. 2.1).

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \qquad (2.2)$$

де $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравітаційна стала.

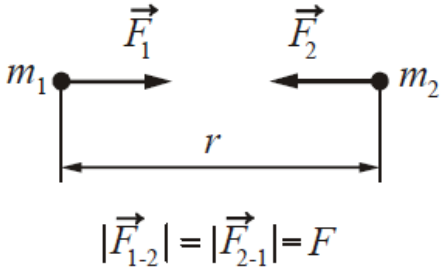


Рисунок 2.1 – Гравітаційна взаємодія

Якщо одне з взаємодіючих тіл – Земля, а тіло масою m знаходиться на поверхні Землі, то закон всесвітнього тяжіння записується у вигляді

$$F_{\text{тяж}} = mg \qquad (2.3)$$

2. ***Електромагнітні взаємодії***.

Окремими видами проявлення електромагнітних взаємодій є сили пружності і сили тертя. Для сил пружності і тертя можна отримати лише наближені, емпіричні (тобто засновані на досліді) формули.

а) *Закон Гука*.

Під дією зовнішніх сил виникають деформації (тобто зміна розмірів і форми тіл). Якщо після припинення дії сил відновлюються вихідні форма і розміри тіла, то деформація називається пружною.

Для пружних деформацій слушний закон Гука. *Сила пружності пропорційна абсолютній деформації*:

$$F_x = -kx \qquad (2.4)$$

де F_x – проекція сили пружності на вісь x; k – коефіцієнт квазіпружної сили; x – абсолютна деформація тіла.

Однорідні стрижні при розтягуванні або стисканні поводяться подібно пружині. Для них також слушний закон Гука, який прийнято формулювати таким чином: *Механічне напруження прямо пропорційне відносному подовженню*

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (2.5)$$

Механічне напруження:

$$\sigma = \frac{F_{\perp}}{S}, \qquad (2.6)$$

де $F_{\perp}$ – пружна сила, яка діє перпендикулярно площі поперечного перерізу стрижня S.

Відносне подовження:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \qquad (2.7)$$

де Δl – абсолютна деформація; l_0 – вихідна довжина тіла; E – модуль Юнґа

$$[E] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}.$$

Модуль Юнґа – це фізична величина, що характеризує пружні властивості конкретного матеріалу.

б) *Закон сухого тертя*.

Сила тертя ковзання виникає при ковзанні даного тіла по поверхні іншого:

$$F_{\text{тер}} = \mu N\,, \qquad (2.8)$$

де μ - коефіцієнт тертя ковзання, що залежить від природи й стану дотичних поверхонь; N - сила нормального тиску, що притискає тертьові поверхні одну до другої. Сила тертя спрямована по дотичній до тертьових поверхонь убік, протилежний руху даного тіла відносно іншого.

в) *Закон в'язкого тертя*.

На тіло, що рухається у в'язкому (рідкому або газоподібному) середовищі, діє сила, яка гальмує його рух. Ця сила називається силою в'язкого тертя

$$F = -rv \qquad (2.9)$$

де v – швидкість руху; r – коефіцієнт опору.

Коефіцієнт r залежить від форми і розмірів тіла, характеру його поверхні, а також від властивостей середовища. Знак «–» указує на те, що сила тертя спрямована протилежно швидкості. Наприклад, якщо кулька діаметром d падає в рідині із сталою швидкістю v, то сила опору визначається за формулою Стокса

$$F_C = 3\pi d\eta v \qquad (2.10)$$

де η – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини.

г) *Закон Архімеда.*

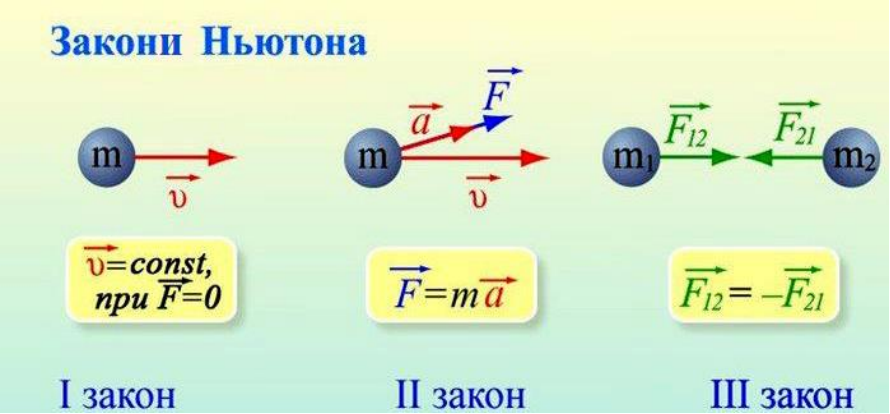
На тіло, що занурене в рідину або газ, діє підйомна сила, яка дорівнює вазі витисненої тілом рідини або газу

$$F_A = \rho g V\,, \qquad (2.11)$$

де ρ – густина рідини або газу; V – об'єм зануреної частини тіла.

Динаміка базується на трьох законах Ньютона, які слушні тільки в

інерціальних системах відліку.



Перший закон Ньютона встановлює факт існування інерціальних систем відліку і описує характер руху вільної матеріальної точки в таких системах.

Будь-яке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху якщо на нього не діють інші тіла, або якщо дії цих сил скомпенсовані.

Систему відліку, в якій виконується перший закон Ньютона, називають інерціальною. Тому, перший закон Ньютона можна сформулювати і таким чином.

Існують такі системи відліку, відносно яких тіло знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно і рівномірно, якщо на це тіло не діють інші тіла або дії цих тіл компенсуються.

Будь-яка інша система відліку, яка рухається відносно інерціальної зі сталою швидкістю, також є інерціальною.

Другий закон Ньютона. Другий закон Ньютона - основний закон динаміки поступального руху - відповідає на запитання, як змінюється механічний рух матеріальної точки (тіла) під дією прикладених до неї сил.

***Швидкість зміни імпульсу тіла дорівнює результуючій всіх сил, що діють на тіло*:**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (2.12)$$

Проведемо аналіз рівняння (2.12). Імпульс тіла дорівнює $\vec{p} = m\vec{v}$. Зробимо заміну в (2.12) і продиференціюємо добуток:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \qquad (2.13)$$

1. Якщо $\frac{dm}{dt} \neq 0$, то це рівняння описує рух тіла зі змінною масою. Рівняння (2.13) можна застосовувати не тільки в тих випадках, коли маса змінюється в часі (наприклад, при польоті ракети), але і при релятивістській зміні маси.

2. Якщо маса тіла залишається сталою $m = \text{const}$, тобто $\frac{dm}{dt} = 0$, то рівняння (2.13) матиме наступний вигляд:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m} \qquad (2.14)$$

Прискорення, яке отримує матеріальна точка (тіло), пропорційне силі, що його викликає, збігається з нею за напрямом й обернено пропорційне масі матеріальної точки (тіла).

3. Якщо $\vec{F} = \text{const}$, то, помноживши обидві частини рівняння (2.12) на *dt*, отримаємо:

$$\vec{F}dt = d\vec{p}.$$

Проінтегруємо отримане рівняння

$$\vec{F}\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p},$$

або

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}. \qquad (2.15)$$

Величина, яка дорівнює добутку сили на час дії цієї сили $\vec{F}\Delta t$, називається *імпульсом сили*. Таким чином:

Імпульс сили дорівнює зміні імпульсу тіла.

На підставі другого закону Ньютона можна зробити висновок, що зміни швидкостей матеріальних точок або тіл відбуваються не миттєво, а протягом кінцевих проміжків часу.

Третій закон Ньютона.

Усяка дія матеріальних точок (тіл) однієї на одну має характер взаємодії; сили з якими діють одна на одну матеріальні точки, завжди рівні за модулем, протилежно спрямовані й діють уздовж прямої, що з'єднує ці точки.

Ці сили прикладені до різних матеріальних точок (тіл), завжди діють парами і є силами однієї природи.

Третій закон Ньютона дозволяє перейти від динаміки окремої матеріальної точки до динаміки довільної системи матеріальних точок, оскільки дозволяє звести будь-яку взаємодію до сил парної взаємодії між матеріальними точками.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 3
Динаміка обертального руху

Якщо тверде тіло обертається, то всі його точки рухаються по концентричних колах, центри яких лежать на одній прямій. Усі ці точки рухаються з різними лінійними швидкостями, а однаковою у них буде кутова швидкість $\vec{\omega}$. Тому необхідно ввести ряд нових фізичних величин – *момент інерції, момент імпульсу, момент сили*, які характеризують обертальний рух.

Момент інерції тіла - міра інертності твердих тіл при обертальному русі.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називається скалярна фізична величина, яка дорівнює добутку маси m_i на квадрат відстані r_i до цієї осі:

$$J_i = m_i r_i^2, \qquad (3.1)$$

Момент інерції системи матеріальних точок буде дорівнювати сумі моментів інерції окремих точок.

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 . \qquad (3.2)$$

У разі суцільного абсолютно твердого тіла ця сума зводиться до інтегралу

$$J = \int_V r^2 \rho dV \qquad (3.3)$$

де ρ – густина тіла; V – об'єм тіла.

Одиниця виміру моменту інерції - кг·м^2.

Момент інерції – величина адитивна: момент інерції тіла відносно деякої осі дорівнює сумі моментів інерції частин тіла відносно тієї ж осі.

Момент інерції визначається формою і розмірами тіл. Значення моментів інерції для деяких тіл (тіла вважаються однорідними, m – маса тіл) наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 - Моменти інерції тіл правильної геометричної форми

Тіло	Вісь, відносно якої визначається момент інерції	Формула моменту інерції
Однорідний тонкий стрижень довжиною l	Проходить через центр маси стрижня перпендикулярно стрижню	$J = \frac{1}{12} ml^2$
	Проходить через кінець стрижня перпендикулярно стрижню	$J = \frac{1}{3} ml^2$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R	Проходить через центр перпендикулярно площини підстави	$J = mR^2$
Круглий однорідний диск (циліндр) радіусом R	Проходить через центр перпендикулярно площини підстави	$J = \frac{mR^2}{2}$
Однорідна куля радіусом R	Проходить через центр кулі	$J = \frac{2}{5} mR^2$
Товстостінний циліндр з внутрішнім радіусом R_1 і зовнішнім R_2	Проходить через центр перпендикулярно площини підстави	$J = \frac{1}{2} m(R_2^2 - R_1^2)$

Якщо відомий момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр мас, то момент інерції відносно будь-якої іншої паралельної осі визначається *теоремою Штейнера*: ***момент інерції тіла J відносно довільної осі дорівнює сумі моменту інерції J_0 відносно осі, що проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла на квадрат відстані d між цими осями***

$$J = J_0 + md^2 . \qquad (3.4)$$

Момент сили. Для характеристики зовнішньої механічної дії на тіло, що приводить до зміни обертального руху тіла, вводять поняття моменту сили. *Моментом сили* $\vec{M}$ *відносно точки О називається векторна величина, що дорівнює векторному добутку радіус-вектора* $\vec{r}$ *, проведеного з точки О в точку прикладення сили, на силу* $\vec{F}$ *(рис. 3.1)*:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] \tag{3.5}$$

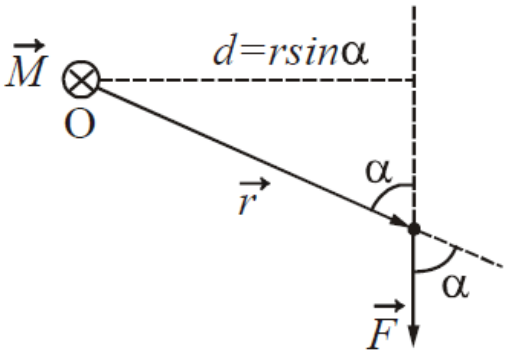


Рисунок 3.1 – До визначення моменту сили

Модуль моменту сили визначається співвідношенням:

$$M = rF\sin\alpha \tag{3.6}$$

Одиниця виміру моменту сили - Н·м.

Величина $d = r\sin\alpha$ називається *плечем сили*. Плече сили – це довжина перпендикуляра, опущеного з точки О на лінію дії сили (рис. 3.1).

Вектор $\vec{M}$ спрямований перпендикулярно до площини, в якій лежать перемножені вектори, причому так, що напрям обертання, обумовленого силою, і напрям вектору $\vec{M}$ утворюють правогвинтову систему.

Моментом сили відносно нерухомої осі z називається скалярна величина M_z, що дорівнює проекції на цю вісь вектору моменту сили, знайденого відносно довільної точки О даної осі *z* (рис. 3.2). Ця скалярна фізична величина дорівнює добутку модуля сили на плече сили:

$$M_z = F \cdot d, \tag{3.7}$$

де $d = r\sin\alpha$ – плече сили.

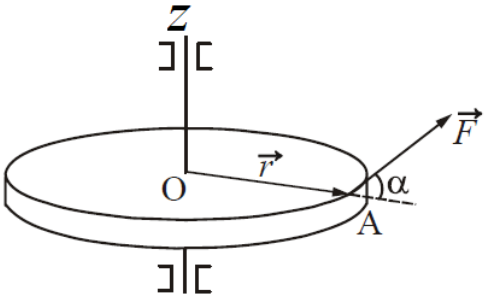


Рисунок 3.2 – До виведення проекції моменту сили на вісь *z*

Момент пари сил. Дві рівні за модулем і протилежно спрямовані сили, які не діють уздовж однієї прямої, називаються парою сил. Відстань *d* між прямими, уздовж яких діють сили, називається плечем пари (рис. 3.3). Модуль моменту пари сил дорівнює добутку модуля сили на плече пари

$$M = rF\sin\alpha = Fd\,. \qquad (3.8)$$

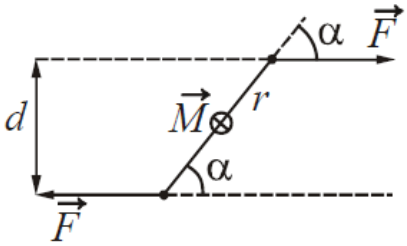


Рисунок 3.3 – Момент пари сил

Вектор моменту пари сил $\vec{M}$ перпендикулярний до площини, в якій лежать сили.

Моментом імпульсу $\vec{L}$ матеріальної точки відносно точки обертання О називається векторна фізична величина, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектору $\vec{r}$, проведеного з точки О в місце знаходження матеріальної точки, на вектор її імпульсу $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \times \vec{p}\right] \qquad (3.9)$$

Модуль моменту імпульсу матеріальної точки:

$$L = rp\sin\alpha \qquad (3.10)$$

Одиниця виміру моменту імпульсу – кг·м^2/с.

Вектор $\vec{L}$ спрямований перпендикулярно до площини, в якій лежать перемножуванні вектори. Якщо дивитися з кінця вектору $\vec{L}$, то найкоротший поворот від $\vec{r}$ до $\vec{p}$ відбувається проти годинникової стрілки (рис. 3.4).

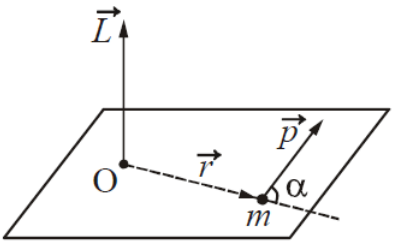


Рисунок 3.4 – До визначення моменту імпульсу

Якщо матеріальна точка рухається по колу радіусу r, то модуль моменту імпульсу відносно центру кола дорівнює

$$L = mrv, \tag{3.11}$$

оскільки кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{r}$ дорівнює $\alpha = 90°$.

Момент імпульсу ($\vec{L}_z$) тіла відносно осі z буде дорівнювати сумі проекцій моментів імпульсів окремих точок на цю вісь:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{iz}\,. \tag{3.12}$$

Розглянемо однорідне тверде тіло (для простоти зображення обраний диск), що обертається навколо нерухомої осі z. Виділимо в ньому елементарний об'єм масою m_i (рис. 3.5).

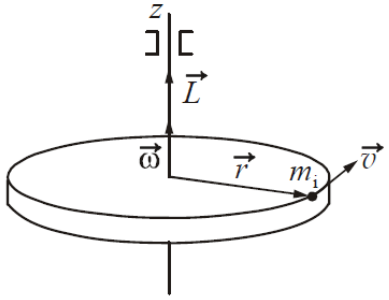


Рисунок 3.5 – До визначення моменту імпульсу тіла

У відповідності до (3.11) момент імпульсу матеріальної точки:

$$L_i = m_i r_i v_i\,.$$

Лінійна швидкість v_i пов'язана з кутовою швидкістю ω співвідношенням

$$v_i = \omega r_i$$

Зробивши заміну, отримаємо

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 m_i \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \omega J_z \qquad (3.13)$$

Оскільки вектор $\vec{\omega}$ спрямований по осі обертання, то вектор $\vec{L}$ також буде спрямований по осі обертання. Тоді формулу (3.13) можна переписати у векторному вигляді

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \qquad (3.14)$$

Основне рівняння динаміки обертального руху. Продиференціюємо за часом рівняння (3.9), яке записане для матеріальної точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r} \times \vec{p}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right],$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}, \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Виконавши заміну, отримаємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{v} \times m\vec{v}\right] + \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$

Векторний добуток двох колінеарних векторів дорівнює нулю, тобто $\left[\vec{v} \times m\vec{v}\right] = 0$.

Векторний добуток $\left[\vec{r} \times \vec{F}\right] = \vec{M}$. Таким чином:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (3.15)$$

Швидкість зміни моменту імпульсу матеріальної точки дорівнює сумарному моменту сил, які діють на точку.

Рівняння (3.15) називають ще рівнянням моментів.

Тверде тіло є системою матеріальних точок. На них діють як внутрішні,

так і зовнішні сили. Для кожної з цих точок можна записати рівність

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_{i\,\text{внутр.}} + \vec{M}_{i\,\text{зовн.}},$$

де $\vec{M}_{i\,\text{внутр.}}$ - момент внутрішніх сил;

$\vec{M}_{i\,\text{зовн.}}$ - момент зовнішніх сил.

Для твердого тіла:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i\,\text{внутр.}} + \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i\,\text{зовн.}}$$

$\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \vec{L}$ - момент імпульсу тіла.

З третього закону Ньютона випливає, що сумарний момент внутрішніх сил дорівнює нулю. Отже

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_{i\,\text{зовн.}} \qquad (3.16)$$

Швидкість зміни моменту імпульсу тіла дорівнює сумарному моменту зовнішніх сил, які діють на тіло.

Отриманий вираз називається *основним рівнянням динаміки обертального руху*. Спроектуємо рівняння (3.16) на вісь *z*. Тоді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z,$$

$$L_z = J_z\omega.$$

Якщо $J_z = \text{const}$, то можна записати

$$J_z\frac{d\omega}{dt} = J_z\varepsilon = M_z.$$

Вектори $\vec{M}$ і $\vec{\varepsilon}$ спрямовані уздовж осі обертання, тому, опустивши індекси, це рівняння можна переписати у векторному вигляді

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}. \qquad (3.17)$$

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 4

Робота, потужність, енергія

Робота. Роботою A, яку здійснює постійна сила $\vec{F}$, називається фізична величина, що дорівнює добутку модулів сили і переміщення Δr, помноженому на косинус кута α між векторами сили і переміщення

$$A = F\Delta r\cos\alpha \qquad (4.1)$$

де α – кут між напрямками векторів сили і переміщення.

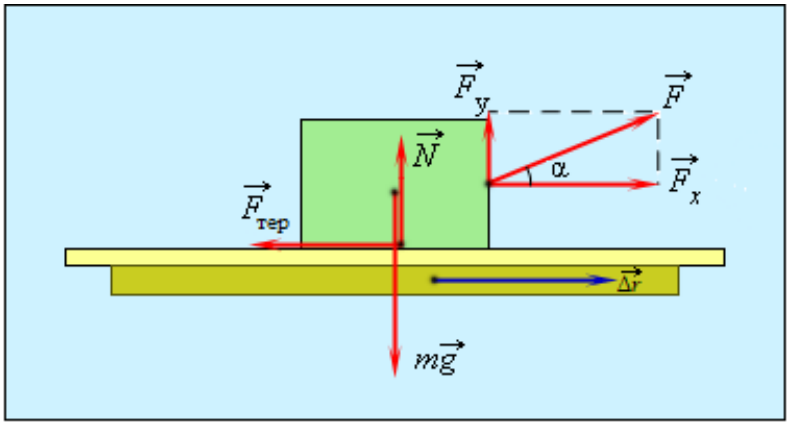


Рисунок 4.1 – До визначення механічної роботи

Робота є скалярною величиною. Вона може бути як позитивною ($0 \le \alpha < 90°$), так і негативною ($90° < \alpha \le 180°$). При $\alpha = 90°$ робота, що здійснюються силою $\vec{F}$, дорівнює нулю.

У системі СІ робота вимірюється в джоулях (Дж). Джоуль дорівнює роботі, яку здійснює сила в 1Н на переміщенні 1м у напрямку дії сили: 1Дж = 1Н·1м.

Робота, що здійснюється змінною силою,

$$A = \int_L \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \int_L F(\vec{r})\cos\alpha\,d\vec{r} \qquad (4.2)$$

де інтегрування ведеться вздовж траєкторії, що позначається L.

Графічно робота визначається площею криволінійної фігури під графіком $F_x(x)$ (рис. 4.2).

Прикладом сили, модуль якої залежить від координати, може служити сила

пружності пружини, що підкоряється закону Гука. Для того, щоб розтягнути пружину, до неї потрібно прикласти зовнішню силу, модуль якої пропорційний подовженню пружини.

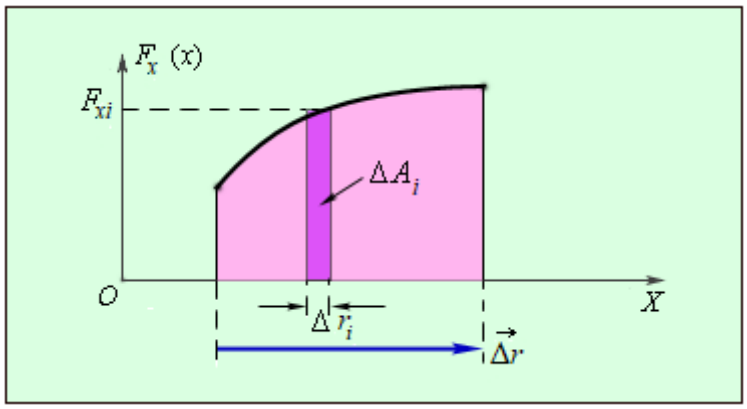


Рисунок 4.2 - Графічне визначення роботи

Потужність (N) – скалярна фізична величина, яка характеризує швидкість виконання роботи і кількісно дорівнює роботі, виконаній за одиницю часу:

$$N = \frac{\delta A}{dt} \qquad (4.3)$$

Одиниця виміру потужності – ват (Вт). 1Вт - потужність, при якій за час 1с виконується робота 1Дж: 1Вт = 1Дж/с.

Формула (4.3) дає значення миттєвої потужності. Підставивши в (4.3) $\delta A = \vec{F}d\vec{r}$, отримаємо:

$$N = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \qquad (4.4)$$

Миттєва потужність дорівнює скалярному добутку сили на швидкість тіла.

Якщо робота виконується за час t, то середня потужність:

$$\langle N \rangle = \frac{A}{t}. \qquad (4.5)$$

Ефективність роботи пристроїв прийнято характеризувати коефіцієнтом корисної дії (ККД):

$$\eta = \frac{A_к}{A_{вик}} \cdot 100\% \qquad (4.6)$$

де $A_к$ – корисна робота;

$A_{вик}$ – робота, що виконана.

Робота і потужність при обертальному русі.

Розглянемо обертання твердого тіла відносно нерухомої осі під час дії сили, яка спрямована по дотичній до кола. Елементарна робота, що виконується при повороті на кут $d\varphi$

$$\delta A = FdS\cos\alpha.$$

Сила $\vec{F}$ і переміщення $d\vec{S}$ паралельні (рис. 4.3), тобто $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$.

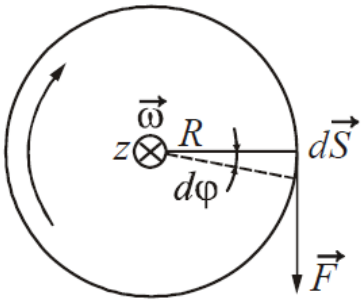


Рисунок 4.3 – До визначення роботи при обертальному русі

$$dS = Rd\varphi.$$

Тоді

$$\delta A = FRd\varphi.$$

Добуток FR дає момент сили відносно осі обертання: $FR = M$. Остаточно отримаємо:

$$\delta A = Md\varphi, \qquad (4.7)$$

$$A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi. \qquad (4.8)$$

Якщо M = const, то

$$A = M\varphi \qquad (4.9)$$

Розділивши роботу на час dt, за який тіло обернулося на кут $d\varphi$, отримаємо потужність, що розвивається силою F:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M\omega, \qquad (4.10)$$

де ω – кутова швидкість.

Енергія.

Енергія – це єдина міра всіх форм руху матерії і типів взаємодії матеріальних об'єктів. Поняття енергії зв'язує воєдино всі явища природи. Відповідно до різних форм руху матерії розглядають різні види енергії: механічну, внутрішню, електромагнітну, ядерну.

Механічна енергія буває двох видів: *кінетична і потенціальна*.

Кінетична енергія. Нехай на матеріальну точку масою m діє сила $\vec{F}$. Знайдемо роботу цієї сили за час, протягом якого швидкість точки змінюється від v_1 до v_2. Елементарна робота сили $\vec{F}$ на переміщенні $d\vec{r}$

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r}\,.$$

За другим законом Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Прийнявши, що m = const, $d\vec{p} = md\vec{v}$ зробимо заміну. У результаті отримаємо:

$$\delta A = \frac{d\vec{p}\cdot d\vec{r}}{dt} = m\vec{v}d\vec{v}.$$

Проінтегруємо отриманий вираз з урахуванням того, що скалярний добуток $\vec{v}d\vec{v} = vdv$.

$$A = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v}d\vec{v} = m\int_{v_1}^{v_2} vdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (4.11)$$

Величину $\frac{mv^2}{2}$ позначимо через $W_к$ і назвемо кінетичною енергією.

$$W_к = \frac{mv^2}{2} \qquad (4.12)$$

Кінетична енергія матеріальної точки або тіла є мірою їх механічного руху, яка залежить від швидкості їх руху в даній інерційній системі відліку.

Таким чином, *зміна кінетичної енергії тіла дорівнює роботі всіх сил, які*

діють на тіло (Теорема про зміну кінетичної енергії):

$$A = \Delta W_к = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (4.13)$$

Енергію, яку має тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі, називають кінетичною енергією обертального руху цього тіла. Ця енергія складається з кінетичних енергій матеріальних точок, які входять до складу тіла:

$$W_к^{об} = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 .$$

$\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = J$ - момент інерції твердого тіла відносно оси обертання.

Кінетична енергія обертального руху тіла

$$W_к^{об} = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (4.14)$$

Для обертального руху також слушна теорема про зміну кінетичної енергії:

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}. \qquad (4.15)$$

При плоскому русі тіло бере участь в двох рухах: поступальному і обертальному. У цьому випадку повна кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій поступального руху тіла із швидкістю центра мас і обертального руху тіла навколо осі, що проходить через його центр мас. Ця енергія розраховується за формулою:

$$W_к = W_к^{пост} + W_к^{об} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (4.16)$$

де v – швидкість поступального руху центру мас;

ω – кутова швидкість навколо осі, що проходить через центр мас.

Потенціальна енергія - це та частина механічної енергії системи, яка залежить від взаємного розташування тіл або частин тіла, а також від природи сил, які діють між тілами.

Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії, а визначається лише кінцевим і початковим положенням тіла, називають *консервативними*, а їх поля – *потенціальними*. Консервативними силами є гравітаційні, пружні, кулонівські.

Сили, робота яких залежить від форми траєкторії, називають *неконсервативними* або дисипативними, а їх поля – *непотенціальними*. Неконсервативними силами є сили сухого і в'язкого тертя, сили опору, сили вихрового електричного поля і т.д.).

Потенціальна енергія тіла в даній точці - скалярна величина, що дорівнює роботі, яку здійснюють консервативні сили при переміщенні тіла з цієї точки в точку, прийняту за нуль відліку потенціальної енергії. Знак потенціальної енергії та її абсолютна величина залежать від вибору нульового рівня. Якщо тіло переходить з точки 1 у точку 2, то робота сил поля дорівнює різниці значень потенціальної енергії у цих точках

$$A = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} \tag{4.17}$$

Потенційна енергія тіла $W_{\text{п}}$ і сила $\vec{F}$, що діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням

$$\vec{F} = -\text{grad}W_{\text{п}} \tag{4.18}$$

або

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial z}\vec{k}\right) \tag{4.19}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - одиничні вектори (орти). В окремому випадку, коли поле сил має сферичну симетрію (як, наприклад, гравітаційне поле),

$$F = -\frac{\partial W_{\text{п}}}{\partial r} \tag{4.20}$$

Для прикладу отримаємо формулу потенціальної енергії гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок (або тіл) масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r одна від одної.

Сила взаємного тяжіння двох тіл

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (4.21)$$

тоді прирощення потенціальної енергії при зміні відстані між тілами від r_1 до r_2 буде дорівнювати

$$\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п}2} - W_{\text{п}1} = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G\frac{m_1 m_2}{r_1} - G\frac{m_1 m_2}{r_2}. \qquad (4.22)$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок масами m_1 і m_2, що знаходяться на відстані r одна від одної

$$W_{\text{п}} = -G\frac{m_1 m_2}{r} + \text{const}. \qquad (4.23)$$

Якщо потенціальну енергію нескінченно віддалених одна від одної матеріальних точок прийняти рівною нулю, то $\text{const} = 0$.

Потенціальна енергія тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння

$$W_{\text{п}} = mgh, \qquad (4.24)$$

де h – висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий.

Ця формула слушна за умови $h << R$, де R – радіус Землі.

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла (стиснутої або розтягнутої пружини)

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}, \qquad (4.25)$$

де k – жорсткість тіла або пружини, x – абсолютна деформація.

Графік залежності потенціальної енергії від координат називається *потенціальною кривою*. Розглянемо одну з можливих потенціальних кривих для двох матеріальних точок (рис. 4.4). Одна з цих точок знаходиться на початку координат, а друга переміщується уздовж напряму r.

Якщо при русі матеріальної точки її потенціальна енергія різко зростає, то говорять про існування *потенціального бар'єру*, про висоту бар'єру, його ширину, нахил стінок і т.п.

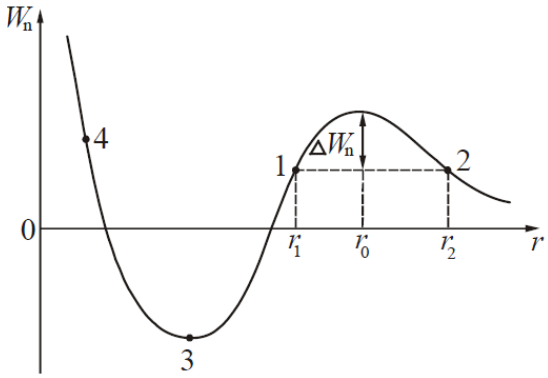
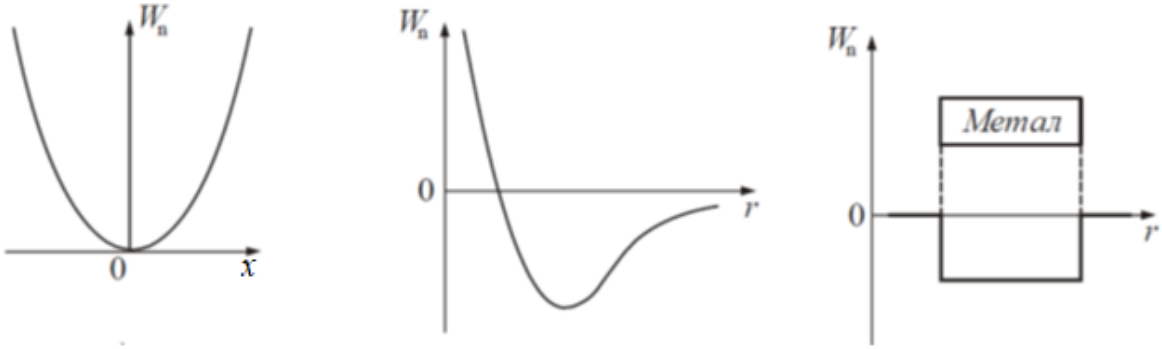


Рисунок 4.4 – Крива потенціальної енергії

Наприклад, для точки, що знаходиться в положенні 1 з координатою r_1 висота бар'єру $\Delta W_п$, а ширина бар'єру $r_2 - r_1$. Якщо потенціальна енергія зростає на шляху точки як в одному напрямку, так і у зворотному осі r, то говорять, що точка знаходиться у *потенціальній ямі*.

На рис. 4.4 - це ділянка 4-3-1. Форму і глибину потенціальної ями визначає вид залежності потенціальної енергії від координат. Наведемо приклади потенціальних кривих.



а) *б*) *в*)

Рисунок 4.5 – Види потенціальних кривих

На рис. 4.5 *а* зображена потенціальна крива матеріальної точки, що здійснює коливання на пружині. Її потенціальна енергія

$$W_п = \frac{kx^2}{2}.$$

Як видно з рисунка, матеріальна точка знаходиться в потенціальній ямі з симетричними стінками.

На рис. 4.5 *б* зображена потенціальна крива взаємодії двох молекул реального газу. Особливістю кривої є її асиметрія: один край крутий, а інший - пологий.

Крива на рис. 4.5 *в* відображає потенціальну енергію вільних електронів у металі і за його межами. Вільні електрони в металі знаходяться в потенціальній ямі. Стінки ями майже вертикальні. Це означає, що електрична сила, яка діє на електрони на межі металу з вакуумом дуже велика. Гладке горизонтальне дно ями означає, що на вільні електрони усередині металу сила не діє.

Аналіз потенціальних кривих взаємодії частинок у твердому тілі дозволяє встановити характер і межі їхнього руху, пояснити причини теплового розширення і т.п. Розгляд потенціальних кривих вільних електронів в металах дозволяє зрозуміти і пояснити такі явища, як термоелектронна емісія, виникнення контактної різниці потенціалів та ін.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 5

Закони збереження в механіці

Закон збереження імпульсу. Розглянемо систему, яка складається з кількох тіл (наприклад, трьох – див. рис. 5.1). Сили, які діють на тіла системи, поділимо на внутрішні і зовнішні. *Внутрішні* – це сили, що діють між тілами системи; ми будемо позначати їх $\vec{f}_{ij}$ (i, j – номери тіл системи). *Зовнішні* – це сили, які діють з боку тіл, що не входять до даної системи; ми будемо позначати їх $\vec{F}_k$.

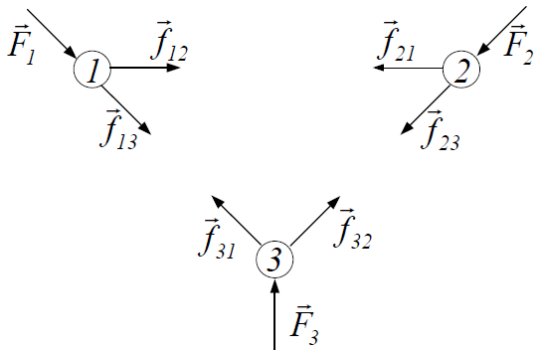


Рисунок 5.1 – Система з трьох тіл

Із третього закону Ньютона

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}; \qquad \vec{f}_{13} = -\vec{f}_{31}; \qquad \vec{f}_{23} = -\vec{f}_{32}$$

Тобто сили взаємодії попарно рівні і протилежно спрямовані. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного тіла:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1;$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2;$$
$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3.$$

Складемо ці рівняння. Внутрішні сили взаємно компенсуються і, в результаті, отримаємо рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

або

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{F}. \qquad (5.1)$$

де $\vec{p}_{\text{сист}}$ - повний імпульс системи тіл, $\vec{F}$ – векторна сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему. Якщо зовнішні сили не діють на систему, то така система називається *замкненою*. Для замкненої системи

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0,$$

звідки

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \text{const}.$$

Тобто, ***імпульс замкненої системи тіл з часом не змінюється***. Це твердження і є законом збереження імпульсу. Для замкненої системи

$$\vec{p}_{\text{сист}} = m\vec{v}_{\text{с}} = \text{const}.$$

де $\vec{v}_{\text{с}}$ – швидкість центра мас системи.

Тоді

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}_{\text{с}} = m\vec{a}_{\text{с}} = 0,$$

де $\vec{a}_{\text{с}}$ – прискорення центра мас.

Тобто, для замкненої системи $\vec{a}_{\text{с}} = 0$. У замкненій системі тіл центр мас системи або рухається рівномірно і прямолінійно, або залишається нерухомим (обидва ці стани об'єднуються умовою $\vec{a}_{\text{с}} = 0$).

Закон збереження моменту імпульсу. Основне рівняння динаміки обертального руху, записане у вигляді

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M},$$

може бути застосовано як до тіла, момент інерції якого змінюється під час руху, так і до системи тіл, що обертаються навколо даної нерухомої осі.

Якщо на тверде тіло не діють зовнішні сили або їх рівнодіюча не створює обертального моменту відносно осі обертання, то $M = 0$. У даному випадку змінення моменту імпульсу $dL = d(J\omega)$ дорівнює нулю. Звідси випливає закон збереження моменту імпульсу.

Якщо на тіло не діють зовнішні сили або діють так, що результуючий момент цих сил відносно осі обертання дорівнює нулю, то момент імпульсу тіла відносно цієї осі зберігається.

$$J\vec{\omega} = \text{const}. \qquad (5.2)$$

З (5.2) випливає, що кутова швидкість тіла у цьому випадку обернено пропорційна його моменту інерції.

Рівнянню (5.2) можна надати наступного вигляду:

$$J_1\vec{\omega}_1 = J_1'\vec{\omega}_1'. \qquad (5.3)$$

Закон збереження моменту імпульсу можна записати для системи тіл. Якщо система тіл, які обертаються відносно деякої осі, замкнена, то момент зовнішніх сил відносно цієї осі дорівнює нулю: $M = 0$. У цьому випадку змінення моменту імпульсу системи також буде дорівнювати нулю. Це означає, що момент імпульсу системи тіл залишається незмінним. Ми отримали закон

збереження моменту імпульсу для системи тіл.

Момент імпульсу замкненої системи тіл залишається незмінним.

$$\vec{L} = \text{const}. \qquad (5.4)$$

Співвідношення (5.4) означає, що в замкненій системі сума моментів імпульсів всіх тіл системи в будь-які два моменти часу однакова:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J_1'\omega_1' + J_2'\omega_2'. \qquad (5.5)$$

де J і J' – моменти інерції тіл в довільні моменти часу t і t', ω і ω' – відповідні їм кутові швидкості.

Закон збереження моменту імпульсу можна застосовувати і для незамкнених систем, якщо алгебрична сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання дорівнює нулю.

Закон збереження механічної енергії. Матеріальна точка може одночасно мати і кінетичну, і потенціальну енергію. Сума кінетичної і потенціальної енергій точки називається її повною механічною енергією W.

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} \qquad (5.6)$$

Розглянемо систему, яка складається з N матеріальних точок, що взаємодіють одна з одною. Сили взаємодії між точками вважатимемо консервативними. Система також знаходиться під впливом зовнішніх сил, як консервативних, так і неконсервативних. Визначимо роботу, що виконується цими силами.

Сумарна робота всіх сил за теоремою про зміну кінетичної енергії:

$$A = W_{\text{к}_2} - W_{\text{к}_1}$$

З іншого боку, робота A дорівнює сумі робіт, виконаних зовнішніми консервативними і неконсервативними силами, а також внутрішніми консервативними:

$$A = A_{\text{конс}}^{\text{зовн}} + A_{\text{конс}}^{\text{внутр}} + A_{\text{неконс}}^{\text{зовн}}.$$

Робота внутрішніх консервативних сил дорівнює зменшенню взаємної

потенціальної енергії тіл:

$$A_{\text{конс}}^{\text{внутр}} = -\left(W_{\text{п}_2} - W_{\text{п}_1}\right).$$

Якщо система замкнена, то $A_{\text{конс}}^{\text{зовн}} = 0$, $A_{\text{неконс}}^{\text{зовн}} = 0$. У цьому випадку:

$$-\left(W_{\text{п}_2} - W_{\text{п}_1}\right) = W_{\text{к}_2} - W_{\text{к}_1}$$

Згрупуємо члени рівняння таким чином:

$$W_{\text{к}_1} + W_{\text{п}_1} = W_{\text{к}_2} + W_{\text{п}_2}.$$

Це означає, що для будь-яких двох станів:

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const.} \qquad (5.7)$$

Ми прийшли до закону збереження механічної енергії.

Повна механічна енергія замкненої системи матеріальних точок (тіл), між якими діють тільки консервативні сили, зберігається, тобто не змінюється з часом.

Дія неконсервативних сил (наприклад, сил тертя) зменшує механічну енергію системи. Такий процес називається *дисипацією* енергії («дисипація» означає «розсіяння»). Сили, що приводять до дисипації енергії, називаються дисипативними. При дисипації енергії механічна енергія системи перетворюється в інші види енергії (наприклад, у внутрішню енергію). Перетворення йде відповідно до загального закону природи - закону збереження енергії.

Закон збереження енергії застосовується до всіх без виключення процесів в природі. Його можна сформулювати таким чином.

Повна енергія ізольованої системи завжди залишається незмінною, енергія лише переходить з однієї форми в іншу.

Зіткнення тіл. Граничними, ідеалізованими видами зіткнень є абсолютно непружний і абсолютно пружний удари. *Абсолютно непружним* називається удар, при якому потенціальна енергія пружної деформації не виникає; кінетична енергія тіл частково або повністю переходить у внутрішню. Після удару тіла рухаються з однаковою швидкістю (тобто як одне тіло) або перебувають у

спокої. При такому ударі виконується тільки закон збереження імпульсу. Механічна енергія не зберігається - вона частково або повністю переходить у внутрішню.

Абсолютно пружним називається удар, при якому повна механічна енергія тіл зберігається. Спочатку кінетична енергія частково або повністю переходить в потенціальну енергію пружної деформації. Потім тіла повертаються до первинної форми, відштовхуючи одне одного. У результаті потенціальна енергія знову переходить в кінетичну і тіла розлітаються. При такому ударі виконуються і закон збереження механічної енергії, і закон збереження імпульсу.

Розглянемо *центральний удар* двох однорідних куль. Удар називається центральним, якщо кулі до удару рухаються уздовж прямої, що проходить через їх центри (рис. 5.2).

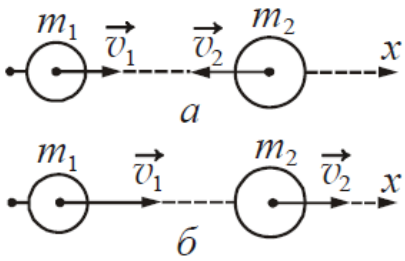


Рисунок 5.2 – Варіанти центрального удару

Припустимо, що кулі рухаються поступально (тобто не обертаючись), і що вони утворюють замкнену систему. Позначимо маси куль через m_1 і m_2, швидкості куль до удару $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, після удару $\vec{u}_1$ і $\vec{u}_2$.

1. *Абсолютно непружний удар*. За законом збереження імпульсу:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}, \qquad (5.8)$$

де $\vec{u}$ - загальна швидкість куль після удару.

Звідси

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5.9)$$

Для чисельних розрахунків всі вектори необхідно спроектувати на вісь x (рис. 5.2).

2. *Абсолютно пружний удар*. Запишемо закон збереження імпульсу і закон збереження механічної енергії:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \qquad (5.10)$$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \qquad (5.11)$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знайдемо швидкості куль після удару.

$$\vec{u}_1 = \frac{2m_2\vec{v}_2 + (m_1 - m_2)\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \qquad (5.12)$$

$$\vec{u}_2 = \frac{2m_1\vec{v}_1 + (m_2 - m_1)\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (5.13)$$

Щоб виконати розрахунки, необхідно спроектувати вектори швидкостей на вісь x (рис. 5.2). Якщо при розрахунку якась проекція швидкості виявиться від'ємною, то це означає, що вектор цієї швидкості спрямований убік, протилежний напряму осі x.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 6

Елементи спеціальної теорії відносності

Теорія відносності - це фізична теорія, яка розглядає просторово-часові закономірності, слушні для будь-яких фізичних процесів.

Спеціальна теорія відносності вивчає властивості простору і часу в інерціальних системах відліку за відсутністю полів тяжіння. Спеціальну теорію відносності також називають релятивістською теорією.

Для розв'язання задач, пов'язаних із переходом від однієї системи відліку до іншої, у класичній нерелятивістській фізиці застосовується *принцип відносності Галілея*: *у всіх інерційних системах відліку закони класичної механіки мають один і той же вигляд*.

Розглянемо дві інерціальні системи відліку. На рис. 6.1 представлені: К(xyz) – нерухома система координат і К′($x'y'z'$) – рухома система координат.

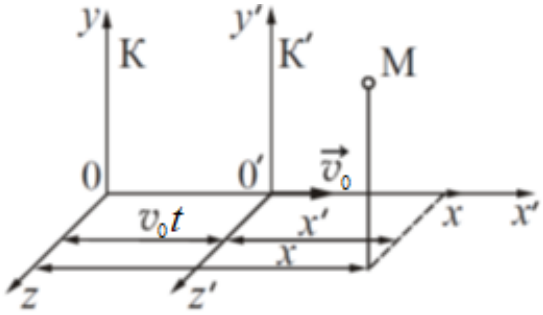


Рисунок 6.1 - Рухома і нерухома системи відліку

Система К′ рухається відносно К зі сталою швидкістю v у напрямі осі x. Координати точки М в системі К і К′ будуть зв'язані співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t' & \qquad x' &= x - v_0 t \\ y &= y' & \qquad y' &= y \\ z &= z' & \qquad z' &= z \\ t &= t' & \qquad t' &= t \end{aligned} \tag{6.1}$$

Сукупність цих рівнянь називається *перетвореннями Галілея*. Рівність $t = t'$ означає, що час в обох системах протікає однаково.

Таким чином, перетворення Галілея дозволяють визначити координати в одній інерціальній системі відліку за відомими координатами в іншій інерціальній системі відліку.

Продиференціюємо перше з рівнянь (6.1) за часом, врахувавши, що $t = t'$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v_0,$$

$\frac{dx}{dt} = v_x$ - швидкість точки М уздовж осі x в системі К;

$\frac{dx'}{dt'} = v'_x$ - швидкість точки М уздовж осі x' в системі К′.

Отже:

$$v_x = v'_x + v_0. \tag{6.2}$$

Аналогічні рівняння можна було б отримати для v_y і v_z. Рівняння (6.2) в цьому випадку можна записати у векторному вигляді:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_0 \qquad (6.3)$$

Рівняння (6.3) є законом додавання швидкостей у класичної механіці. Продиференціюємо за часом (6.3) і отримаємо рівність:

$$\vec{a} = \vec{a}' \qquad (6.4)$$

(v_0 = const, dv_0/dt = 0).

Таким чином, прискорення точки відносно систем К і К′ однакові. Маса тіла при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої не міняється, отже

$$m\vec{a} = m'\vec{a}', \text{ або } \vec{F} = \vec{F}'. \qquad (6.5)$$

Системи К і К′ були взяті довільно. Тому отриманий результат означає наступне:

1. Закони механіки однаково формулюються у всіх інерціальних системах відліку.

2. Усі механічні явища у всіх інерціальних системах відліку протікають однаково за однакових початкових умов.

Ці твердження називаються принципом відносності Галілея. З принципу відносності випливає, що ніякими механічними дослідами, проведеними всередині інерціальної системи відліку, неможливо встановити, перебуває система у стані спокою чи рухається прямолінійно і рівномірно.

Величини, які мають одне і те ж числове значення у всіх системах відліку, називаються *інваріантними* (invariantis – те, що не змінюється). У перетвореннях Галілея інваріантними величинами є маса, прискорення, сила, час. Неінваріантні: швидкість, імпульс, кінетична енергія.

Постулати спеціальної теорії відносності. В основі спеціальної теорії відносності лежать два постулати: принцип відносності Ейнштейна і принцип сталості швидкості світла. Принцип відносності Ейнштейна є поширенням механічного принципу Галілея на всі без виключення фізичні явища.

1. У будь-яких інерціальних системах відліку всі фізичні явища (механічні, оптичні, теплові і т.д.) протікають однаково (за однакових умов). Це означає, що

рівняння, які виражають закони природи, інваріантні відносно до перетворень координат і часу при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої.

2. Швидкість світла у вакуумі однакова в усіх інерціальних системах відліку, вона не залежить від швидкості руху джерела і приймача світла і є граничним значенням швидкості передачі сигналу.

$$c = 2.998 \cdot 10^8 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Перетворення Лоренца. Перетворення, які задовольняють постулатам Ейнштейна, називаються перетвореннями Лоренца. Якщо система К′ рухається відносно системи К із швидкістю v_0, спрямованої уздовж осі x (рис. 6.1). то ці перетворення мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + v_0 x'/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - v_0 x/c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \end{cases} \qquad (6.6)$$

Проаналізуємо перетворення Лоренца.

1. Якщо $v << c$, то $\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \approx 1$.

Перетворення Лоренца при цьому перейдуть в перетворення Галілея. Це означає, що виконується принцип відповідності. Принцип відповідності полягає в тому, що всяка нова теорія містить в собі стару теорію як граничний випадок.

2. Припустимо, що $v > c$. При цьому $1 - v_0^2/c^2 < 0$.

Це означає, що перетворення не мають сенсу. Звідси випливає, що рух з швидкістю $v > c$ неможливий.

3. З перетворень Лоренца видно, що часові і просторові координати взаємозв’язані.

Використовуючи перетворення Лоренца. можна отримати релятивістський закон додавання швидкостей:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} v'} \qquad (6.7)$$

Якщо v і v' багато менші від швидкості світла, то

$$v = v' + v_0$$

Це означає, що рівняння (6.7) переходить в класичний закон додавання швидкостей.

З перетворень Лоренца випливає тісний зв'язок між просторовими і часовими координатами: *не тільки просторові координати залежать від часу, але і час залежить від просторових координат, а також від швидкості руху системи відліку*.

Якщо позначити через l_0 довжину відрізка (розміщеного паралельно OX) відносно системи відліку K′, в якій він є нерухомим (власна довжина відрізка), то довжина того ж відрізка відносно системи K, в якій він рухається із швидкістю v, дорівнює

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (6.8)$$

Проміжок часу між двома подіями також залежить від вибору системи відліку. Якщо τ_0 проміжок часу між двома подіями, які відбулися в одній точці системи K′ (годинник відносно цієї системи нерухомий), а τ - проміжок часу між тими ж подіями відносно системи K (годинник відносно цієї системи рухається зі швидкістю v), то з перетворень Лоренца випливає, що

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (6.9)$$

Час τ_0 називають власним часом.

Згідно з формулою (6.8), довжина стрижня в будь-якій іншій системі відліку, відносно якої він рухається, менша за власну довжину. Але в різних системах відліку, які рухаються з різними сталими швидкостями, довжина цього

стержня теж різна. А звідси зрозуміло, що релятивістська зміна довжини тіла в напрямку його руху не викликана ніякими його деформаціями.

Сповільнення часу в рухомій системі відліку, як видно з формули (6.9), дає змогу пояснити таке явище. У верхніх шарах атмосфери під дією космічного випромінювання утворюються частинки, які називаються мюонами. Досліди над мюонами, які проводились в прискорювачах елементарних частинок, показали, що час їх життя становить 10^{-8} с. Товщина шару атмосфери приблизно 300 км. Щоб пройти цей шлях із швидкістю близькою до швидкості світла, необхідно щонайменше 10^{-4} с. Той факт, що мюони були зареєстровані на рівні моря, можна пояснити тільки на основі формули (6.9). Якщо власний час життя мюона $\tau_0 \approx 10^{-8}$ с, то час його життя τ відносно Землі, яка рухається назустріч мюону зі швидкістю v близькою до швидкості світла, становитиме $0{,}7 \cdot 10^{-4}$ с.

Як бачимо, метричні розміри і проміжки часу між двома подіями в теорії відносності залежать від системи відліку. Тому для математичного відображення будь-якої події слід користуватися чотиривимірним континуумом, де роль четвертої координати відіграє час. Точку в такому просторі, яка визначає певну подію, називають світовою точкою.

Якщо одна подія визначається координатами (x_1, y_1, z_1, t_1), а друга - координатами (x_2, y_2, z_2, t_2), то величину

$$\Delta S = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (6.10)$$

називають *інтервалом* між цими подіями. Легко показати, що інтервал є інваріантом відносно перетворень Лоренца.

Отже, теорія Ейнштейна, замість відносних відстані і проміжку часу, вводить елемент абсолютний, яким є інтервал. Вона показує, що причинний зв'язок між подіями може здійснюватися лише при відповідній координації їх у просторі та часі.

Релятивістська динаміка. Основний закон динаміки

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

має залишатися інваріантним при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої. Для цього в релятивістській механіці необхідно допустити, що маса тіла залежить від швидкості:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6.11)$$

де m_0 - *маса спокою тіла*, виміряна в тій інерціальній системі відліку, відносно якої воно знаходиться у спокої. Масу m часто називають *релятивістською масою*. Із закону залежності маси m від швидкості v видно, що частинки з масою спокою $m_0 \neq 0$ не можуть рухатися зі швидкістю $v > c$, а частинки із масою спокою $m_0 = 0$ (світлові частинки - фотони) не можуть мати швидкість, відмінну від c.

Релятивістський імпульс тіла (матеріальної точки) $\vec{p}$ є нелінійною функцією швидкості:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (6.12)$$

У релятивістській механіці виконується закон збереження релятивістського імпульсу замкненої системи: *релятивістський імпульс замкненої системи матеріальних точок зберігається* -

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const}, \qquad (6.13)$$

де $\vec{p}_i$ - релятивістський імпульс i - ї точки.

Основний закон релятивістської динаміки –

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \vec{F} \qquad (6.14)$$

Його наслідком є взаємозв'язок між релятивістською масою і енергією:

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (6.15)$$

Із цього взаємозв'язку випливає *єдиний закон збереження маси й енергії замкнутої системи матеріальних точок*:

$$W = mc^2 = \text{const}. \qquad (6.16)$$

Енергія тіла у стані спокою

$$W_0 = m_0 c^2$$

називається *енергією спокою*.

Експериментальне підтвердження закону взаємозв'язку маси і енергії дають ядерні реакції. За дефектом маси у сучасній фізиці визначають енергію зв'язку ядер і енергію ядерних реакцій.

Кінетична енергія в релятивістській динаміці визначається за формулою

$$W_к = W - W_0 = m_0 c^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right). \qquad (6.17)$$

При $v << c$ з цієї формули випливає звичний із класичної механіки вираз

$$W_к = \frac{mv^2}{2}. \qquad (6.18)$$

Повна енергія частинки і її імпульс в релятивістській динаміці зв'язані співвідношеннями

$$\vec{p} = \frac{W}{c^2}\vec{v} \qquad \text{і} \qquad \frac{W^2}{c^2} - p^2 = m_0^2 c^2,$$

або

$$W = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}. \qquad (6.19)$$

Із (6.19) випливає *єдиний закон збереження маси, імпульсу і енергії*.

Спеціальна теорія відносності сформульована тільки для інерціальних систем відліку. Але строго інерціальних систем у природі не існує, і лише з певним наближенням ту чи іншу систему можна вважати інерціальною. Тому Ейнштейн поставив за мету знайти такі формулювання фізичних законів, які

справджуватимуться в усіх системах відліку. У результаті багаторічної роботи (1906-1916 р.р.) він сформулював принцип еквівалентності гравітаційних сил і сил інерції. Сили тяжіння, як і сили інерції, пропорційні масам тіл і надають їм однакового прискорення. Отже, перебіг всіх фізичних процесів однаковий в інерціальних системах, що перебувають в однорідному полі тяжіння, і в системі відліку, яка поступально рухається із сталим прискоренням поза полем тяжіння.

Принцип еквівалентності дає змогу створювати штучні локальні поля тяжіння або ж усувати їх. Прикладом може бути кабіна космічного корабля при його обертанні навколо Землі.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 7
Основи молекулярно-кінетичної теорії

Молекулярна фізика вивчає будову і властивості речовини, виходячи з молекулярно-кінетичних уявлень. За цими уявленнями будь-яке тіло (тверде, рідке або газоподібне) складається з великої кількості молекул або атомів. Цілий ряд явищ доводить, що ці частинки перебувають у хаотичному безперервному русі. Приклади цього: розширення газу в посудині, випаровування рідини, дифузія і т. п.

Молекулярно - кінетична теорія пояснює властивості тіл, які спостерігаються на досліді (тиск, температура і т. д.), як сумарний результат взаємодії молекул. При цьому, якщо в механіці вивчалася найпростіша форма руху - відносне переміщення тіл, то в молекулярній фізиці вивчається молекулярний рух, що не зводиться до механічного. Незважаючи на те, що кожна частинка рухається за законами механіки, властивості величезних зібрань молекул не можуть бути пояснені тільки найпростішими механічними закономірностями. Тому, для опису закономірностей молекулярного руху використовуються методи статистичної фізики, що описують не рух окремих молекул, а лише такі середні величини, які характеризують рух величезної

сукупності частинок. Залежно від агрегатного стану (газ, рідина, тверде тіло), речовина по-різному веде себе при зовнішніх впливах. Отже, при цьому діють міжмолекулярні сили, тобто сили взаємного притягання і відштовхування між частинками. Ці сили діють на мізерно малих відстанях близько двох – трьох діаметрів молекул і зі збільшенням відстані убувають до нуля.

Таким чином, вивчаючи властивості речовини, необхідно, крім теплового хаотичного руху, враховувати міжмолекулярні сили.

Вивчення основних уявлень молекулярної фізики проведемо на найпростішій моделі - *ідеальному газі*. *Ідеальний газ являє собою сукупність матеріальних точок, які не взаємодіють між собою і володіють лише кінетичною енергією*.

Сукупність усіх властивостей тіла буде називатися *станом тіла*. Величини, що характеризують стан тіла і змінюються під впливом зовнішніх умов, називаються *параметрами стану*. Стан даної маси ідеального газу характеризується трьома параметрами: об'ємом V ([V] = м^3), температурою T ([T] = К), і тиском p ([p] = Па).

Якщо температура в різних точках тіла неоднакова, то цьому тілу не можна приписати певну температуру. Такий стан називається *нерівноважним*. Це ж відноситься і до тиску. Якщо тіло надати самому собі і ізолювати від інших тіл, то ці параметри вирівнюються.

Стан системи, при якому всі параметри системи мають певні значення, що залишаються при зміні зовнішніх умов постійними як завгодно довго, називається *рівноважним станом*.

Параметри стану рівноважної системи залежать один від одного. Співвідношення, що встановлює залежність тиску p в системі від об'єму V і температури T, називається *рівнянням стану*.

Рівняння стану в термодинаміці одержують експериментальним шляхом, а в статистичній фізиці – виводять теоретично. У цьому полягає взаємозв'язок статистичного методу дослідження з термодинамічним.

Рівняння стану ідеального газу. Найпростішою макроскопічною системою

є ідеальний газ. Беремо до уваги, що ідеальний газ – це фізична модель. Чим більш розріджений газ, тим він ближчий за своїми властивостями до ідеального. Деякі гази, такі як повітря, азот, кисень, а особливо гелій і водень, при кімнатній температурі і атмосферному тиску дуже близькі до ідеального газу. Але, якщо ці ж гази помістити в посудину під високим тиском при низьких температурах, то їх властивості різко відрізнятимуться від властивостей ідеального газу, тобто поведінка цих газів підкорятиметься законам реальних газів.

В ідеальному газі відсутня взаємодія між молекулами, тому вони рухаються рівномірно і прямолінійно до тих пір, поки не відбудеться зіткнення між даною і якою-небудь іншою молекулою або зіткнення зі стінкою посудини. При зіткненнях молекули вважаються такими, що не деформуються. Це означає, що при зіткненнях виконуються закони збереження імпульсу і кінетичної енергії.

Таким чином, з погляду молекулярно-кінетичної теорії *ідеальний газ – це система молекул, які можна вважати матеріальними точками, що взаємодіють одна з одною тільки в процесі зіткнень*.

Експериментально встановлено, що параметри стану ідеального газу зв'язані між собою співвідношенням:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \qquad (7.1)$$

де p – тиск газу; V– об'єм газу; m – маса газу; M – молярна маса газу; T – термодинамічна температура; R = 8,31 Дж/(моль·К) – універсальна газова стала.

Рівняння (7.1) називається *рівнянням стану ідеального газу*. Помножимо і розділимо праву частину рівняння (7.1) на число Авоґадро N_A:

$$pV = \frac{m}{M} \cdot N_A \frac{R}{N_A} T. \qquad (7.2)$$

Величина $\frac{m}{M} \cdot N_A = N$ визначає кількість молекул, що містяться в масі m газу, а величина $k = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К називається сталою Больцмана. Тоді рівнянню (7.2) можна надати вигляд:

$$pV = NkT. \qquad (7.3)$$

Обидві частини цього рівняння розділимо на об'єм V. Відношення $N/V = n$ дає кількість молекул в одиниці об'єму і називається *концентрацією* молекул.

Отже

$$p = nkT. \qquad (7.4)$$

Це означає, *що тиск ідеального газу пропорційний його абсолютній температурі і концентрації молекул*.

Рівняння (7.3) і (7.4) є різними формами запису рівняння стану ідеального газу.

Якщо є декілька газів, то згідно з (7.4) тиск, що спричиняється газом, буде дорівнювати:

$$p = (n_1 + n_2 + ... + n_n)kT = n_1kT + n_2kT + ... + n_nkT \qquad (7.5)$$

Але n_1kT – це тиск p_1, який був би в посудині, якби там знаходилися тільки молекули першого газу; n_2kT – той тиск p_2, який був би за наявності в посудині тільки молекул другого газу і т.д.

Тиск, який здійснював би газ, за умови, що він один присутній в посудині в тій кількості, в якій він міститься в суміші, називається *парціальним*.

На підставі (7.5) можна записати:

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \qquad (7.6)$$

Рівняння (7.6) є законом Дальтона:

Тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків газів, що утворюють суміш.

Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів. Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії газів зв'язує макроскопічний параметр системи – тиск з характеристиками частинок. У висновку цього рівняння передбачається, що маси всіх молекул однакові, і їх швидкості однакові за модулем, а всі напрями руху молекул рівноймовірні.

Дослід показує, що газ у деякій посудині чинить тиск на її стінки. Це явище пояснюється на основі молекулярно-кінетичної теорії таким чином. Молекули,

рухаючись абсолютно безладно, ударяються по стінках посудини. Сумарний імпульс, який молекули передають за одиницю часу одиниці площі – це і є тиск, що спричиняється газом.

Для знаходження тиску треба знайти зміну імпульсу всіх молекул, які ударяються з одиницею поверхні посудини за одиницю часу. Удар молекул при цьому вважається абсолютно пружним. Ця зміна імпульсу буде дорівнювати зміні імпульсу в одному зіткненні, помноженому на число ударів, що припадають на 1 м^2 поверхні за 1 с.

У результаті розрахунку виходить рівняння наступного вигляду:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n < v^2 > . \qquad (7.7)$$

де m_0 – маса однієї молекули; n – концентрація молекул; $< v^2 >$ - середня квадратична швидкість молекул.

Поняття середнього квадрата швидкості вводиться у зв'язку з тим, що реально всі частинки мають різні швидкості. Він визначається таким чином:

$$< v^2 > = \frac{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_N^2}{N} . \qquad (7.8)$$

де N – число молекул.

Рівняння (7.7) називається основним рівнянням молекулярно-кінетичної теорії газів.

Величина $< \varepsilon > = \frac{m_0 < v^2 >}{2}$ є середньою кінетичною енергією теплового руху однієї молекули. З урахуванням цього, рівняння (7.7) можна переписати у вигляді:

$$p = \frac{2}{3} n < \varepsilon > . \qquad (7.9)$$

Тиск, який створює ідеальний газ, дорівнює двом третім середньої кінетичної енергії поступального теплового руху всіх молекул, що містяться в одиниці об'єму.

Молекулярно-кінетичне тлумачення термодинамічної температури.

Прирівняємо ліві частини рівнянь (7.9) і (7.4)

$$\frac{2}{3}n<\varepsilon>=nkT,$$

і виразимо середню енергію теплового руху молекули:

$$<\varepsilon>=\frac{3}{2}kT. \qquad (7.10)$$

Звідси випливає дуже важливий висновок: термодинамічна температура – це величина, пропорційна середній кінетичній енергії поступального руху молекул ідеального газу.

Цей висновок слушний не тільки для газів, але і для речовини в будь-якому стані. З (7.10) випливає, що середня енергія $<\varepsilon>$ залежить тільки від температури і не залежить від маси молекули. З (7.10) також випливає, що якщо $<\varepsilon> = 0$, то $T = 0$. Температура, при якій припиняється тепловий рух частинок речовини, називається абсолютним нулем.

Звернемо особливу увагу на те, що при $T = 0$ припиняється тільки тепловий рух. Інші форми руху, що мають квантову природу, матимуть місце і за умов абсолютного нуля.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 8
Статистичні розподіли

Розподіл молекул ідеального газу за швидкостями. У результаті багаторазових зіткнень швидкість кожної молекули у газі змінюється за модулем і напрямком. Однак через хаотичність руху молекул всі напрямки руху є рівноймовірними, тобто в будь-якому напрямку в середньому рухається однакова кількість молекул.

Згідно з молекулярно-кінетичною теорією, як би не змінювалися швидкості молекул при зіткненнях, середня швидкість молекул в газі, що

знаходиться в стані рівноваги при T = const залишається постійною.

Це пояснюється тим, що в газі, що знаходиться в стані рівноваги, встановлюється деякий стаціонарний розподіл молекул за швидкостями який не змінюється з часом і який підпорядковується цілком певному статистичному закону. Цей закон теоретично виведений Максвеллом.

При виведенні закону розподілу молекул за швидкостями Максвелл припускав:

1. газ складається з дуже великого числа тотожних молекул;

2. молекули перебувають у стані хаотичного теплового руху при однаковій температурі;

3. силові поля на газ не діють.

Хаотичні (безладні) зіткнення призводять до того, що частина молекул одержує надмірну кінетичну енергію за рахунок інших молекул, що втратили частину енергії. Завдяки цьому рівність чисельних значень швидкостей порушується і в газі з'являється деяка кількість молекул, що мають великі швидкості, і деяка кількість молекул з середніми і малими швидкостями. Іншими словами, виникає розподіл молекул за модулями швидкостей. Цей розподіл характеризується середнім числом молекул, що мають швидкість, близьку до даної.

Зміна швидкості молекул відбувається випадково. Може трапитися, що якась молекула при зіткненнях завжди одержує енергію, і в результаті її енергія стане більше середнього значення $<\varepsilon>$. Але можна стверджувати, що дуже великі значення енергії в порівнянні з середнім значенням спостерігаються дуже рідко. Також практично виключено, що в результаті зіткнень енергія молекули стане рівною нулю. Отже, дуже малі й дуже великі швидкості в порівнянні зі середнім значенням швидкості малоймовірні. З цього випливає, що швидкості молекул групуються поблизу деякого найбільш ймовірного значення.

Припустимо, що газ займає об'єм V, а число частинок в ньому N. Визначимо число молекул, що мають швидкості, які лежать в деякому інтервалі швидкостей dv поблизу заданої швидкості v (рис. 8.1). Позначимо dN_v число

молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$. Відношення dN_v/N дасть частину молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v до $v+dv$. Це відношення розділимо на ширину інтервалу dv. Величину $\frac{dN_v}{Ndv}$ позначимо через $f(v)$:

$$\frac{dN_v}{Ndv} = f(v). \qquad (8.1)$$

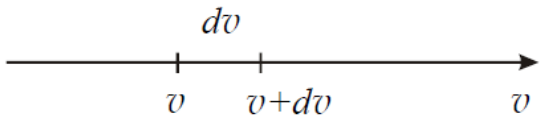


Рисунок 8.1 – До пояснення розподілу молекул за швидкостями

Визначена таким чином функція $f(v)$ характеризує розподіл молекул за швидкостями і називається *функцією розподілу*. З вигляду функції $f(v)$ можна знайти число молекул ΔN_v з сукупності даних молекул N, швидкості яких потрапляють у середину інтервалу швидкостей від v до $v+\Delta v$.

Відношення

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)dv \qquad (8.2)$$

дає ймовірність того, що швидкість молекули матиме значення в межах даного інтервалу швидкостей dv.

Функція $f(v)$ повинна задовольняти умові нормування, тобто повинна виконуватися умова:

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1 \qquad (8.3)$$

Застосовуючи методи теорії ймовірностей, Максвелл знайшов функцію $f(v)$, тобто закон про розподіл молекул ідеального газу за швидкостями

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right). \qquad (8.4)$$

де m_0 – маса молекули.

Вираз (8.4) називається *функцією розподілу Максвелла*.

З (8.4) випливає, що вид розподілу молекул за швидкостями залежить від природи газу (маси молекули) і температури T. Тиск і об'єм не впливають на розподіл молекул за швидкостями.

Схематичний графік функції розподілу Максвелла подано на рис. 8.2. Проведемо аналіз графіка.

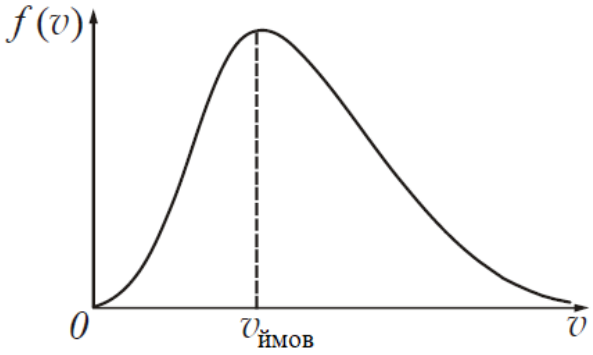


Рисунок 8.2 – функція розподілу Максвелла

1. При швидкостях, що наближаються до нуля ($v \to 0$) і до нескінченності ($v \to \infty$) функція розподілу також наближається до нуля. Це означає, що дуже великі і дуже малі швидкості молекул малоймовірні.

2. Швидкість $v_{\text{ймов}}$, що відповідає максимуму функції розподілу, буде найбільш імовірною. Це означає, що основна частина молекул має швидкості близькі до найбільш імовірних. Якщо продиференціювати (8.4) за швидкістю v і прирівняти отриманий вираз до нуля, можна отримати формулу для розрахунку найбільш імовірної швидкості:

$$v_{\text{ймов}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \qquad (8.5)$$

де k – стала Больцмана; m_0 – маса молекули.

3. Відповідно до умови нормування (8.3) площа, що обмежена кривою $f(v)$ і віссю абсцисс, дорівнює одиниці.

4. Крива розподілу має асиметричний характер. Це означає, що частина молекул, які мають швидкості більші, ніж найбільш імовірна, більша від частини

молекул, що мають швидкості менші, ніж найбільш імовірна.

5. Вид кривої залежить від температури і природи газу. На рис. 8.3 наведена функція розподілу для одного і того ж газу, що знаходиться при різних температурах. При нагріванні максимум кривої знижується і зміщується вправо, оскільки часина «швидких молекул» зростає, а частина «повільних» – зменшується. Площа під обома кривими залишається сталою і рівною одиниці.

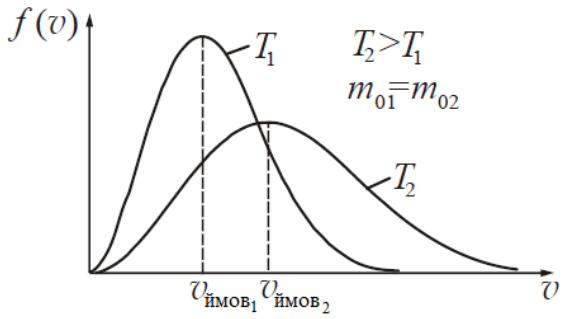


Рисунок 8.3 – Вплив температури на розподіл молекул за швидкостями

Приклад функції розподілу для різних газів при однаковій температурі подано на рис. 8.4.

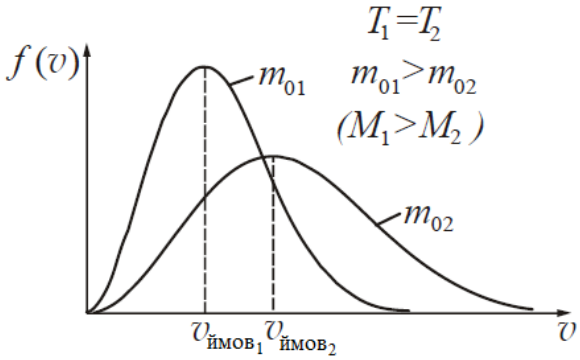


Рисунок 8.4 - Вплив маси молекул на розподіл за швидкостями

Слід звернути увагу, що встановлений Максвеллом закон розподілу молекул за швидкостями і наслідки, що випливають з нього, слушні тільки для газу, що знаходиться в рівноважному стані. Закон Максвелла – статистичний, застосовувати його можна тільки для великої кількості частинок. За умов малої кількості частинок можуть спостерігатися значні відхилення (флуктуації) від прогнозів статистики.

Середні швидкості. Користуючись функцією розподілу Максвелла $f(v)$ можна знайти ряд середніх величин, що характеризують стан молекул.

1. *Середня арифметична швидкість* - сума швидкостей всіх молекул, поділена на число молекул:

$$<v>=\frac{v_1+v_2+...+v_N}{N}. \qquad (8.6)$$

Розрахунок з використанням розподілу Максвелла дає наступну формулу для розрахунку середньої арифметичної швидкості:

$$<v>=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}. \qquad (8.7)$$

2. Середня квадратична швидкість, що визначає середню кінетичну енергію молекул, за визначенням є рівною:

$$<v_{\text{кв}}>=\sqrt{\frac{v_1^2+v_2^2+...+v_N^2}{N}}. \qquad (8.8)$$

Розрахунок з використанням розподілу Максвелла дає наступний результат:

$$<v_{\text{кв}}>=\sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \qquad (8.9)$$

Якщо врахувати, що маса однієї молекули дорівнює $m_0=\frac{M}{N_A}$, де M - молярна маса; N_A - стала Авоґадро, а також те, що $kN_A = R$, то вирази для найбільш імовірної, середньої арифметичної і середньої квадратичної швидкостей можна переписати таким чином:

$$v_{\text{ймов}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}, \qquad (8.10)$$

$$<v>=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad (8.11)$$

$$<v_{\text{кв}}>=\sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (8.12)$$

Порівнюючи (8.10), (8.11) і (8.12), можна помітити, що $v_{\text{ймов}}$, $<v>$, $<v_{\text{кв}}>$ однаково залежать від температури газу і молярної маси, і відрізняються тільки множником. Їх відношення виглядає так:

$$v_{\text{ймов}} : <v> : <v_{\text{кв}}> = 1{,}00:1{,}13:1{,}22.$$

Експериментальна перевірка закону розподілу Максвелла. Перше експериментальне визначення швидкостей молекул було зроблено О. Штерном у 1920 році. Установка складалась з двох коаксіальних циліндрів, уздовж осі яких натягалася платинова нитка, вкрита сріблом (рис. 8.5). При нагріванні нитки електричним струмом, з її поверхні випаровувалися атоми срібла, які після цього рухалися в радіальному напрямі. Внутрішній циліндр мав вузьку подовжню щілину, через яку проходив назовні вузький пучок атомів. Повітря з установки було видалено для того, щоб атоми срібла не стикалися з молекулами повітря. Досягнувши поверхні зовнішнього циліндра, атоми срібла осідали на ньому, утворюючи вузьку смужку

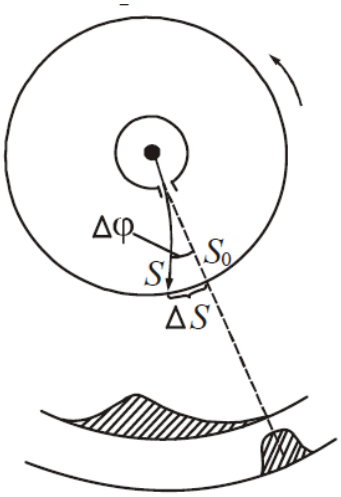


Рисунок 8.5 – Схема досліду Штерна

Якщо привести установку в обертання, то слід, залишений пучком, зміститься по поверхні циліндра на деяку величину ΔS. Це відбудеться тому, що за час, поки атоми срібла пролітають крізь щілину між циліндрами, установка встигне обернутися на деякий кут $\Delta\varphi$. У результаті проти пучка виявиться інша ділянка зовнішнього циліндра, зміщена відносно внутрішнього сліду S_0 на

величину ΔS. Якщо виміряти зсув сліду ΔS і швидкість обертання установки, можна розрахувати швидкість атомів v. Досліджуючи профіль сліду, можна було скласти зразкове уявлення про розподіл атомів за швидкостями.

Результати експерименту Штерна підтвердили правильність оцінки середньої швидкості атомів, що випливає з розподілу Максвелла. Про характер самого розподілу цей дослід зміг дати лише наближені уявлення.

Ідеальний газ в однорідному полі тяжіння. Молекули будь-якого газу завжди знаходяться в полі тяжіння Землі. На розподіл молекул атмосферного повітря впливають два чинники: тепловий рух молекул і земне тяжіння. Якби не було теплового руху, то всі молекули впали б на Землю; якби не було тяжіння, то молекули розсіялися б по всьому Всесвіту.

Сумісні дії теплового руху і земного тяжіння приводять до такого стану атмосфери, при якому концентрація молекул і тиск газу убувають із зростанням висоти над Землею.

Барометрична формула. При виведенні основного рівняння МКТ газів і максвеллівського розподілу молекул за швидкостями передбачалося, що на молекули газу зовнішні сили не діють, тому молекули рівномірно розподілені за об’ємом.

Однак молекули будь-якого газу знаходяться в потенційному полі тяжіння Землі. Тяжіння, з одного боку, і тепловий рух молекул - з іншого, призводять до деякого стаціонарного стану газу, при якому тиск газу з висотою убуває.

Виведемо закон зміни тиску з висотою, припускаючи, що
1) поле тяжіння однорідне, 2) температура постійна і 3)маса всіх молекул однакова.

При зростанні висоти на невелику величину dh (рис. 8.6) тиск зменшується на малу величину $dp = -\rho g dh$, де ρ – густина газу, $\rho = m_0 n$, m_0 – маса молекули.

Зручно виразити густину газу через макропараметри - температуру і тиск. Для цього скористаємося формулою $p = nkT$, тоді $\rho = \frac{m_0 p}{kT}$, а $dp = -\frac{m_0 pg}{kT} dh$.

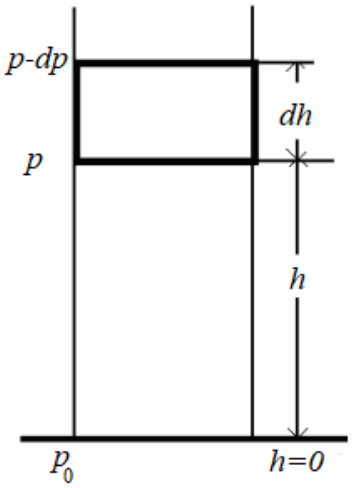


Рисунок 8.6 - Зміна тиску газу в залежності від висоти

Розділимо змінні величини у останній формулі, тобто $\frac{dp}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} dh.$ Інтегруючи, одержуємо: $\ln p = -\frac{m_0 g}{kT} h + \ln C,$ де C - постійна інтегрування, яку знаходимо з умови: при $h = 0$ і $C = p_0$. Тоді $\ln p - \ln p_0 = -\frac{m_0 gh}{kT}$ або $\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{m_0 gh}{kT}.$ Після потенціювання одержимо *барометричну формулу*

$$p = p_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}. \qquad (8.13)$$

Враховуючи, що маса молекули може бути виражена через молярну масу і число Авогадро $m_0 = \frac{M}{N_A}$, а $N_A k = R,$ показник експоненти можна записати через молярну масу і універсальну газову сталу:

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \qquad (8.14)$$

З (8.14) випливає, що тиск зменшується з висотою тим швидше, чим більше молярна маса M газу і чим нижче температура. На рис. 8.7 подані дві криві, які описані рівнянням (8.14). Їх можна розглядати, як відповідні різним M (при однаковій температурі T, або як відповідні різним T при однаковій молярній масі M.

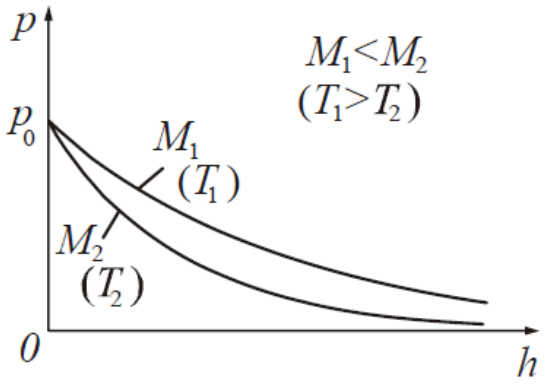


Рисунок 8.7 – Залежність тиску газу від висоти

Так як при постійній температурі $p \sim n$, то можна отримати співвідношення для *розподілу Больцмана*:

$$n = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}.$$

Чисельник показника експоненти являє собою потенціальну енергію частинки, що знаходиться в полі сили тяжіння, а знаменник пропорційний теплової енергії. Розподіл Больцмана слушний, якщо частинка перебуває в будь-якому потенціальному полі, тому можна позначити потенціальну енергію частинки через $\varepsilon_{\text{п}}(x)$. Тоді розподіл Больцмана буде мати вигляд

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_{\text{п}}(h)}{kT}}. \qquad (8.15)$$

При великій кількості частинок n і нескінченно малому інтервалі енергій $d\varepsilon_{\text{п}}$ частина частинок $\Delta n/n$, потенціальна енергія яких лежить в інтервалі $d\varepsilon_{\text{п}}$ поблизу потенціальної енергії $\varepsilon_{\text{п}}$, має сенс ймовірності того, що будь-яка частинка може мати потенціальну енергію в зазначеному інтервалі поблизу заданого значення потенціальної енергії.

Больцман довів, що розподіл (8.15) слушний не тільки у разі потенціального поля сил земного тяжіння, але і в будь-якому потенціальному полі сил для сукупності будь-яких однакових частинок, що знаходяться в стані хаотичного теплового руху. Відповідно до цього розподіл (8.15) називають розподілом Больцмана.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 9

Фізичні основи термодинаміки

Виникнення термодинаміки пов’язують із необхідністю розробки теоретичних основ роботи теплових машин із метою найефективнішого перетворення теплової енергії в роботу. Тепер термодинаміка вийшла далеко за рамки свого початкового змісту і є всебічно розробленою системою знань, якій під силу розв’язання найрізноманітніших теоретичних і практичних завдань, що стосуються вивчення термодинамічних властивостей речовини.

Термодинаміка - наука про найбільш загальні властивості макроскопічних фізичних систем, що знаходяться в стані термодинамічної рівноваги, та про процеси переходу між цими станами.

Предметом термодинаміки є вивчення властивостей речовини і різноманітних фізичних явищ, зумовлених тепловим рухом у макроскопічних системах поблизу стану рівноваги в них, без аналізу мікроскопічної будови тіл системи. Система, що складається з макроскопічних тіл і полів, які можуть взаємодіяти між собою і зовнішнім середовищем (обмінюватися енергією і речовиною), називається *термодинамічною системою*. Обмін енергією відбувається у вигляді роботи та теплоти.

Стан системи характеризують параметрами стану (тиском p, об’ємом V, температурою T і т.д.). Стан, в якому всі параметри мають певні значення, які не змінюються з часом, називається *рівноважним*. Приклади рівноважних станів: стан води і льоду при 0°С, якщо вони знаходяться у термостаті; стан газу в закритій посудині при незмінній температурі навколишнього середовища та ін.

Стан системи називається *нерівноважним*, якщо він без жодної дії ззовні довільно змінюється з часом. У нерівноважному стані всім або деяким параметрам не можна приписати певні значення. Наприклад, газу в циліндрі з поршнем при швидкому стисненні не можна приписати певного тиску, оскільки він виявляється різним в різних частинах циліндра.

Система, що знаходиться в нерівноважному стані і надана собі самій,

поступово переходить в рівноважний стан.

Термодинамічний процес – це перехід системи з одного стану в інший. Процес, що складається з послідовності рівноважних станів, називають рівноважним. *Рівноважний процес* – це фізична модель. Процеси будуть рівноважними, якщо вони протікають нескінченно повільно і при цьому зовнішні дії змінюються безперервно, без стрибків. У подальшому розглядатимуться тільки рівноважні стани і рівноважні процеси. Виняток становитимуть явища перенесення.

Рівноважний процес, який допускає можливість повернення системи в первинний стан через ту ж саму послідовність проміжних станів, що і в прямому процесі, називається *зворотним*. При цьому в навколишніх тілах не повинно відбуватися ніяких змін.

Рівноважність – це найважливіша ознака зворотного процесу. Зворотний процес – це процес, що теж протікає нескінченно довго.

Процес називається *незворотним*, якщо після його завершення систему не можна повернути в початковий стан так, щоб в навколишніх тілах не залишилося будь-яких змін. Основними ознаками незворотних процесів є нерівноважність і одностороння спрямованість, тобто незворотний процес у зворотному напрямі довільно протікати не може. У зворотному напрямі незворотний процес протікає тільки у супроводі процесів, що залишають в навколишніх тілах зміни.

Всі реальні процеси незворотні. Незворотні змішування рідин і газів, передача тепла від нагрітого тіла до холодного, дифузія та інші.

Робота, яку здійснює система при зміні об'єму. Розглянемо газ у циліндрі під поршнем. Припустимо, що газ почав повільно розширятися і перемістив поршень на відстань dx (рис. 9.1). *Елементарна робота*, що виконана газом під час переміщенні поршня на величину dx дорівнює:

$$\delta A = Fdx,$$

де F – сила, з якою газ тисне на поршень. Замінимо силу добутком тиску p на площу S поршня, отримаємо:

$$\delta A = pSdx.$$

Добуток Sdx є зміною об’єму dV. Тому

$$\delta A = pdV. \qquad (9.1)$$

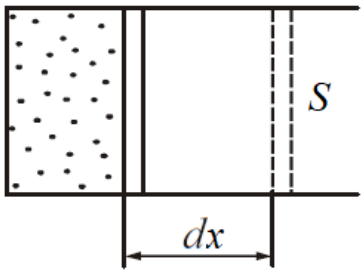


Рисунок 9.1 – До виведення формули роботи при розширенні газу

Якщо газ розширюється, то $dV > 0$. Робота в цьому випадку буде позитивною.

Якщо газ стискається, то $dV < 0$. Робота буде від’ємною.

Якщо тиск газу при зміні об’єму не залишається сталим, то робота, яка виконана при зміні об’єму від V_1 до V_2 обчислюється інтегруванням:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 p(V)dV. \qquad (9.2)$$

Процес зміни об’єму можна представити на діаграмі p-V. Елементарній роботі $\delta A = pdV$ відповідає площа вузької заштрихованої смужки (рис. 9.2).

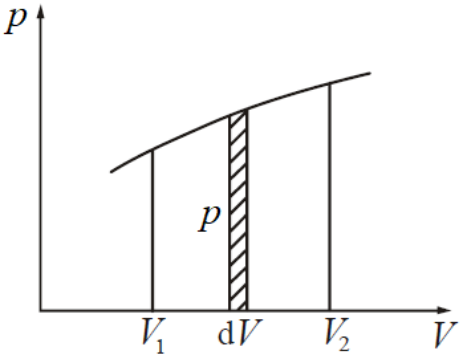


Рисунок 9.2 – До пояснення геометричного сенсу роботи

Площа фігури, що обмежена віссю V, кривою $p = f(V)$ і ординатами при V_1 і V_2, кількісно дорівнює роботі, яка виконана газом при зміні його об’єму від V_1 до V_2.

Внутрішня енергія термодинамічної системи. Внутрішня енергія (U) тіла визначається як енергія цього тіла за вирахуванням кінетичної енергії тіла як цілого і потенціальної енергії цього тіла в різноманітних силових полях. Отже, внутрішня енергія складається з:

1) кінетичної енергії хаотичного руху молекул;

2) потенціальної енергії взаємодії між молекулами;

3) внутрішньо-молекулярної енергії (тобто енергії електронних оболонок атомів і внутрішньоядерної енергії).

Внутрішня енергія є функцією стану системи. Це означає, що енергія в даному стані має властиве цьому стану значення. Тому, приріст внутрішньої енергії під час переходу системи з одного стану в інший є завжди рівним різниці значень внутрішньої енергії в кінцевому і початковому станах і не залежить від процесу, за яким здійснюється перехід.

Кількість ступенів вільності. Кількістю ступенів вільності (i) механічної системи називається кількість незалежних величин, за допомогою яких може бути задано положення системи в просторі.

1. Одноатомні молекули (He, Ne, Ar і т.д.). $i = 3$.

Положення одноатомної молекули задається трьома просторовими координатами (x, y, z). Ступені вільності одноатомної молекули називають поступальними ступенями вільності.

2. Двоатомні молекули з жорстким зв'язком (H_2, O_2, N_2 та ін.). $i = 5$.

Така молекула, окрім трьох ступенів вільності поступального руху, має ще два ступені вільності обертального руху навколо взаємно перпендикулярних осей симетрії. Обертання навколо третьої осі, що проходить через центри мас двох атомів, не змінює положення молекули у просторі. Отже, для двоатомної молекули $i = 3 + 2 = 5$ (3 – поступальні ступені вільності; 2 – обертальні ступені вільності).

3. Якщо кількість атомів у молекулі з жорстким зв'язком три і більше трьох (NH_3, CH_4), то число ступенів вільності $i = 3 + 3 = 6$ (3 – поступальні ступені вільності; 3– обертальні ступені вільності).

Закон рівного розподілу енергії хаотичного руху молекул за ступенями вільності. При будь-якій кількості ступенів вільності молекули, три з них – поступальні, причому жодна з них не має переваг перед іншими. Середня кінетична енергія поступального руху молекули згідно з формулою (7.10)

$$<\varepsilon>=\frac{3}{2}kT.$$

Оскільки поступальних ступенів вільності три, то на один ступінь вільності доводиться енергія

$$\varepsilon=\frac{1}{2}kT. \qquad (9.3)$$

На кожен ступінь вільності (поступальний, обертальний) руху частинок системи припадає однакова кінетична енергія, що дорівнює в середньому $\frac{1}{2}kT$.

Це твердження називається *законом рівного розподілу енергії* хаотичного руху молекул за ступенями вільності.

Якщо атоми в молекулі зв'язані пружним зв'язком, то окрім поступального і обертального рухів, система може виконувати коливальний рух. Коливальний рух пов'язаний з наявністю у системи не тільки кінетичної, але й потенціальної енергії. У теорії коливань доводиться, що середні значення кінетичної і потенціальної енергій такої системи однакові. Звідси випливає, що на коливальний рух доводиться дві половинки kT – одна у вигляді кінетичної енергії, інша – у вигляді потенціальної.

Із закону рівного розподілу енергії хаотичного руху молекул за ступенями вільності випливає, що середня кінетична енергія молекули визначається формулою:

$$<\varepsilon>=\frac{i}{2}kT. \qquad (9.4)$$

де $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} + 2i_{\text{колив}}$.

Внутрішня енергія ідеального газу. Молекули ідеального газу не взаємодіють одна з одною, тому його внутрішня енергія складається з кінетичних енергій окремих молекул:

$$U = < \varepsilon > N, \qquad (9.5)$$

де N – число молекул, $< \varepsilon >$ – середня кінетична енергія однієї молекули.

Кількість молекул визначається виразом:

$$N = \frac{m}{M} N_A, \qquad (9.6)$$

де N_A – число Авоґадро.

Замінивши в (9.5) енергію молекули за формулою (9.4) і кількість молекул за формулою (9.6), отримаємо:

$$U = \frac{i}{2} kT \frac{m}{M} N_A. \qquad (9.7)$$

Добуток сталої Больцмана на число Авоґадро дає універсальну газову сталу: $kN_A = R$. Тоді

$$U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT. \qquad (9.8)$$

З (9.8) випливає, що внутрішня енергія ідеального газу не залежить від тиску і об’єму, а визначається природою газу і його температурою. На практиці важливо знати зміну внутрішньої енергії.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 10

Закони термодинаміки

Перший закон термодинаміки. Розглянемо термодинамічну систему, для якої механічна енергія не змінюється, а змінюється лише її внутрішня енергія. Внутрішня енергія системи може змінюватися в результаті різних процесів, наприклад, здійснення над системою роботи або надання їй теплоти. Так, якщо опускати поршень у циліндр, в якому знаходиться газ, то у результаті стиснення газу його температура підвищується, тобто тим самим змінюється (збільшується) внутрішня енергія газу. З іншого боку, температуру газу і його внутрішню енергію можна збільшити за рахунок надання йому деякої кількості теплоти - енергії, переданої системі зовнішніми тілами шляхом теплообміну (процес

обміну внутрішніми енергіями при контакті тіл з різними температурами).

Таким чином, можна говорити про дві форми передачі енергії від одних тіл до інших: про *роботу* і *теплоту*. Енергія механічного руху може перетворюватися в енергію теплового руху, і навпаки.

У цих перетвореннях виконується закон збереження і перетворення енергії; стосовно до термодинамічних процесів цим законом і є перший закон термодинаміки, встановлений в результаті узагальнення багаточисельних дослідних даних.

Припустимо, що деяка система (газ, розташований у циліндрі під поршнем), маючи внутрішню енергію U_1, отримала деяку кількість теплоти Q і, перейшовши у новий стан, що характеризується внутрішньою енергією U_2, здійснила роботу A над зовнішнім середовищем, тобто проти зовнішніх сил.

Кількість теплоти вважається позитивною, коли вона підводиться до системи, а робота - позитивною, коли система здійснює її проти зовнішніх сил.

Дослід показує, що відповідно до закону збереження енергії при будь-якому способі переходу системи з першого стану в другий зміна внутрішньої енергії $\Delta U = U_2 - U_1$ буде однаковою і дорівнювати різниці між кількістю теплоти Q, яка отримана системою і роботою A, яка виконується системою проти зовнішніх сил:

$$Q = \Delta U + A \qquad (10.1)$$

Рівняння (10.1) виражає перший закон термодинаміки: *теплота, що надається системі, витрачається на зміну її внутрішньої енергії і на здійснення нею роботи проти зовнішніх сил*. Вираз (10.1) у диференціальній формі буде мати вигляд

$$\delta Q = dU + \delta A \qquad (10.2)$$

де dU - нескінченно мала зміна внутрішній енергії системи;

δA - елементарна робота;

δQ - нескінченно мала кількість теплоти.

Як вже указувалося, внутрішня енергія є функцією стану, тому можна говорити про її запас у кожному стані. Це означає, що dU є повним

диференціалом. Отже, інтеграл

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1$$

не залежить від шляху, за яким здійснюється інтегрування. Тут U_1 – внутрішня енергія в стані 1, U_2 – внутрішня енергія в стані 2.

Тепло Q і робота A не є функціями стану, тобто не можна говорити про запас тепла або роботи, яку має тіло в різних станах. Це означає, що δQ і δA не є повними диференціалами. Інтеграли

$$\int_1^2 \delta Q = Q_{12} \qquad \text{і} \qquad \int_1^2 \delta A = A_{12}$$

залежать від шляху, за яким виконувалося інтегрування, тобто Q і A є функціями процесу. A_{12} – це робота, що виконана системою під час процесу 1-2; Q_{12} – кількість тепла, що отримана системою під час того ж процесу.

Якщо система періодично повертається у вихідний стан, то зміна її внутрішньої енергії $\Delta U = 0$. Тоді, згідно з першим законом термодинаміки, $A = Q$.

Іншими словами, *неможливий вічний двигун першого роду, тобто такий періодично діючий двигун, який здійснював би роботу в більшій кількості, ніж одержана ним ззовні енергія*.

Теплоємність. Теплоємність тіла – скалярна фізична величина, що дорівнює кількості тепла, яке потрібно надати тілу, щоб нагріти його на один кельвін:

$$C_{\text{тіла}} = \frac{\delta Q}{dT}. \qquad (10.3)$$

$[C_{\text{тіла}}]$ = Дж/К.

Питома теплоємність – скалярна фізична величина, що дорівнює кількості тепла, яке потрібно надати 1 кг речовини, щоб нагріти його на один кельвін:

$$c = \frac{\delta Q}{mdT}. \qquad (10.4)$$

[c] = Дж/(кг·К).

Молярна теплоємність – скалярна фізична величина, що дорівнює кількості тепла, яке потрібно надати одному молю речовини, щоб нагріти його на один кельвін:

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT}. \qquad (10.5)$$

[C] = Дж/(моль·К).

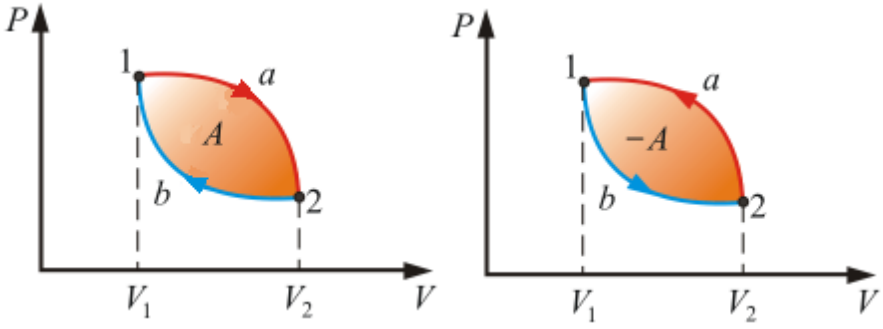
Питома і молярна теплоємності зв'язані співвідношенням:

$$c = \frac{C}{M}, \qquad (10.6)$$

де M – молярна маса.

Теплоємність газів залежить від умов, за яких проводилось нагрівання тіла. Якщо нагрівання проводилось за умовою сталого об'єму, то теплоємність називається теплоємністю при сталому об'ємі і позначається C_V. Якщо нагрівання проводилося за умовою сталого тиску, то теплоємність називається теплоємністю при сталому тиску і позначається C_p.

Круговий процес (цикл). Круговим процесом (або циклом) називається процес, при якому система, пройшовши через ряд станів, повертається у вихідний стан. На діаграмі процесів цикл зображується у вигляді замкнутої кривої (рис. 10.1).



а) б)

Рисунок 10.1 - Круговий процес: а – прямий цикл; б – зворотній цикл

Робота, що здійснюються газом за цикл, визначається площею, яка охоплюється замкнутою кривою.

Якщо за цикл здійснюється позитивна робота

$$A = \oint pdV > 0$$

(цикл протікає за годинниковою стрілкою), то він називається *прямим* (рис. 10.1а), якщо за цикл здійснюється негативна робота

$$A = \oint pdV < 0$$

(цикл протікає проти годинникової стрілки), то він називається *зворотнім* (рис. 10.1б).

Прямий цикл використовується в теплових двигунах - періодично діючих установках, які здійснюють роботу за рахунок одержання ззовні теплоти. Зворотній цикл використовується в холодильних машинах - періодично діючих установках, в яких за рахунок роботи зовнішніх сил теплота переноситься до тіла з більш високою температурою.

У результаті кругового процесу система повертається в початковий стан і, отже, повна зміна внутрішньої енергії газу дорівнює нулю. Тому перший закон термодинаміки для кругового процесу

$$Q = \Delta U + A = A$$

тобто робота, що здійснюються за цикл, дорівнює кількості отриманої ззовні теплоти. Проте в результаті кругового процесу система може теплоту як отримувати, так і віддавати, тому $Q = Q_1 - Q_2$, де Q_1 - кількість теплоти, отриманої системою, Q_2 - кількість теплоти, відданої системою.

Чим повніше теплова машина перетворює тепло Q_1, що одержується ззовні, в корисну роботу A, тим вона вигідніша. Тому теплову машину прийнято характеризувати коефіцієнтом корисної дії (ККД). ККД дорівнює відношенню виконаної за один цикл роботи A до одержуваного від нагрівача за цикл кількості тепла Q_1:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \qquad (10.7)$$

Термічний процес називається *оборотним*, якщо він може відбуватися як

у прямому, так і в зворотному напрямку. Причому, якщо такий процес відбувається спочатку в прямому, а потім у зворотному напрямку і система повертається в початковий стан, то в навколишньому середовищі і в цій системі не відбувається ніяких змін.

Всякий процес, що не задовольняє цим умовам, є *незворотнім*. Будь-який рівноважний процес є оборотним. Оборотність рівноважного процесу, що відбувається в системі, випливає з того, що її будь проміжний стан є стан термодинамічної рівноваги; для нього "байдуже", йде процес у прямому чи зворотному напрямку. Реальні процеси супроводжуються дисипацією енергії (через тертя, теплопровідності і т.д.).

Оборотні процеси - це ідеалізація реальних процесів. Їх розгляд важливо з двох причин:

- ✓ багато процесів у природі і техніці практично оборотні;
- ✓ оборотні процеси є найбільш економічними.

Вони мають максимальний термічний коефіцієнт корисної дії, що дозволяє вказати шляхи підвищення ККД реальних теплових двигунів.

Теплова машина – це періодично діючий двигун, що виконує роботу за рахунок одержуваного ззовні тепла.

Принципова схема теплового двигуна подана на рис. 10.2.

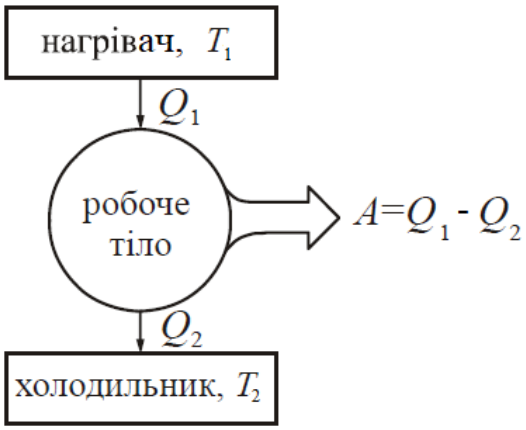


Рисунок 10.2 – Схема теплового двигуна

Робочим тілом називається термодинамічна система, що здійснює циклічний процес і що обмінюється енергією з іншими тілами. Звичайно таким

робочим тілом є газ.

Спочатку газ приводять в контакт з нагрівачем, тобто тілом, температура якого T_1 є вищою за температуру газу. Газ отримує від нагрівача тепло Q_1 і розширюється від об'єму V_1 до об'єму V_2. Потім газ треба стиснути до об'єму V_1, тобто повернути його в початковий стан. Для цього його приводять в контакт з холодильником, тобто тілом, температура якого T_2 нижча за температуру газу. При цьому газ віддає холодильнику тепло Q_2.

Виконана робота

$$A = Q_1 - Q_2.$$

Цикл Карно – це оборотний цикл, що складається з двох ізотерм і двох адіабат. Нагадуємо, що ізотермічний процес – це процес, що відбувається при сталій температурі, а адіабатний – це процес, що відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. Цей цикл вперше введений в обіг французьким інженером Саді Карно. Якщо робочим тілом є ідеальний газ, то цикл Карно має вигляд, зображений на рис. 10.3.

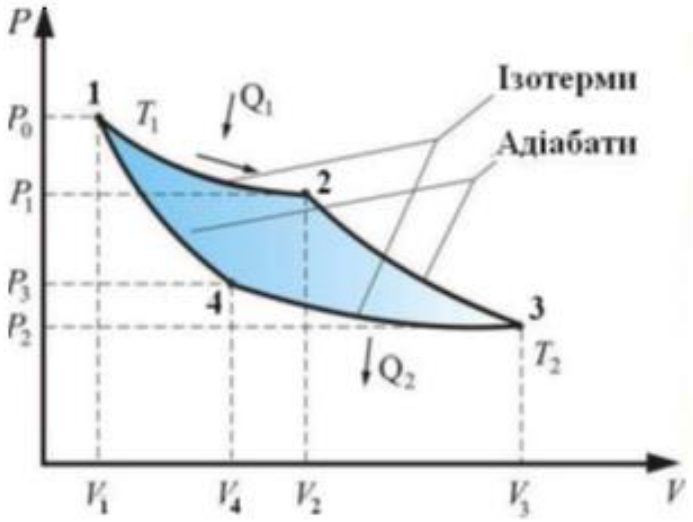


Рисунок 10.3 – Цикл Карно

У процесі 1–2 газ знаходиться в тепловому контакті і рівновазі з нагрівачем. Температура нагрівача T_1. Від нагрівача газ отримує тепло Q_1 ($Q_1>0$). Температура нагрівача при цьому не зміниться. У процесі 2–3 газ теплоізолюється, і робота з його розширення відбувається за рахунок зміни

внутрішньої енергії. У процесі 3–4 газ приводиться в контакт з холодильником (теплоприймачем), температура якого T_2 не змінюється ($T_2 < T_1$). При цьому газ стискається і передає холодильнику тепло Q_2.

У процесі 4–1 газ знову теплоізолюється і стискається до вихідного стану.

ККД циклу Карно визначається таким чином:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2}. \qquad (10.8)$$

З (10.8) випливає, що *коефіцієнт корисної дії всіх оборотних машин, які працюють при одних і тих же температурах нагрівача і холодильника, однаковий і визначається тільки температурами нагрівача та холодильника, і не залежить від природи робочого тіла*.

Це твердження називається теоремою Карно. З (10.8) випливає, що для збільшення ККД теплової машини необхідно збільшувати температуру нагрівача і зменшувати температуру холодильника.

ККД необоротної машини завжди менше ніж ККД оборотної машини, що працює з тим же нагрівачем і холодильником.

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \le \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (10.9)$$

Знак рівності відноситься до оборотних машин, знак нерівності – до необоротних.

ККД оборотної машини є найбільшим зі всіх можливих за даних умов. Але здійснити реально такий цикл неможливо. По-перше, всі процеси в такій машині повинні протікати нескінченно довго, а по-друге, в реальних машинах є незворотні втрати тепла.

Другий закон термодинаміки. Другий закон термодинаміки визначає можливі напрями процесів перетворення енергії з одного виду в інший. Так саме як і перший закон, він має декілька формулювань.

Неможливий процес, єдиним кінцевим результатом якого була б передача тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого.

Це не означає, що другий закон взагалі забороняє перехід тепла від тіла, менш нагрітого, до тіла, більш нагрітого. Такий перехід можливий, але він не буде єдиним результатом процесу. Це означає, що одночасно відбудуться зміни в навколишніх тілах, оскільки для здійснення цього переходу над системою повинна бути виконана робота.

Неможливий такий процес, єдиним кінцевим результатом якого було б відняття від якогось тіла деякої кількості теплоти і перетворення цієї теплоти повністю в роботу.

Розглянемо, наприклад, розширення газу при сталій температурі. З першого закону термодинаміки $Q = \Delta U + A$. Температура газу не змінюється, отже $\Delta T = 0$. Із співвідношення (9.8) випливає, що зміна внутрішньої енергії $\Delta U = 0$. Тобто все отримане тепло перейшло в роботу: $Q = A$. Але отримання тепла і перетворення його в роботу не єдиний кінцевий результат процесу. Крім того, в результаті ізотермічного процесу відбувається зміна об'єму газу.

Періодично діючий двигун, що заснований на першому законі термодинаміки і виконує роботу за рахунок тепла від одного джерела (наприклад, внутрішньої енергії великих водоймищ), називається *вічним двигуном другого роду*. Наступне формулювання другого закону термодинаміки стверджує неможливість створення такого двигуна.

Неможливий вічний двигун другого роду, тобто двигун що діє періодично, який одержував би теплоту від одного резервуара і перетворював би її повністю в роботу.

З другого закону термодинаміки випливає нерівноцінність роботи і теплоти як двох форм передачі енергії. Перехід енергії впорядкованого руху тіла як цілого в хаотичний рух його частинок є необоротним процесом (під час руху тіла під дією сили тертя його кінетична енергія переходить у внутрішню). Перехід неврегульованого руху частинок тіла у впорядкований рух тіла як цілого вимагає, щоб одночасно відбувався який-небудь компенсаційний процес.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4].

Тема 11

Зведена кількість тепла. Ентропія

Щоб визначити можливі напрями процесів, необхідно ввести фізичну величину, яка кількісно характеризувала б цю можливість. Досліджуючи перетворення тепла в роботу, Клаузіус ввів таку термодинамічну функцію і назвав її *ентропія*. У перекладі з грецької це слово означає «односторонній напрям».

Для з'ясування фізичного змісту цього поняття розглядають відношення теплоти Q, отриманої тілом в ізотермічному процесі, до температури T тіл які віддають тепло. Це відношення називається *зведеною кількістю теплоти*.

Зведена кількість теплоти, що надається тілу на нескінченно малій ділянці процесу, дорівнює $\frac{\delta Q}{T}$.

Теоретичний аналіз показує, що зведена кількість теплоти, яка надається тілу в будь-якому оборотному круговому процесі, дорівнює нулю

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0 \qquad (11.1)$$

З рівності нулю інтеграла (11.1), взятого по замкненому контуру, випливає, що підінтегральний вираз $\frac{\delta Q}{T}$ є повним диференціалом деякої функції, яка визначається тільки станом системи і не залежить від шляху, яким система прийшла в цей стан.

Таким чином,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS \qquad (11.2)$$

Функція стану, диференціалом якої є $\frac{\delta Q}{T}$ називається *ентропією* і позначається S.

З формули (11.1) випливає, що для оборотних процесів зміна ентропії дорівнює нулю:

$$\Delta S = 0 \qquad (11.3)$$

При цьому ентропія системи, що здійснює незворотний цикл, зростає:

$$\Delta S > 0 \qquad (11.4)$$

Вирази (11.3) і (11.4) відносяться тільки до замкнених систем, якщо ж система обмінюється теплотою із зовнішнім середовищем, то її ентропія може поводитися як завгодно. Співвідношення (11.3) і (11.4) можна представити у вигляді *нерівності Клаузіуса*:

$$\Delta S \geq 0 \qquad (11.5)$$

тобто *ентропія замкненої системи може або зростати* (*при необоротних процесах*), *або залишатися постійною* (*при оборотних процесах*).

Якщо система здійснює рівноважний перехід зі стану 1 у стан 2, то, згідно (11.2), зміна ентропії

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU + pdV}{T} \qquad (11.6)$$

де підінтегральний вираз і межі інтегрування визначаються через величини, що характеризують досліджуваний процес. Фізичний зміст має не сама ентропія, а різниця ентропій.

Ентропія є величиною *адитивною*. Це означає, що ентропія системи дорівнює сумі ентропії окремих її частин.

Клаузіусом були сформульовані наступні властивості ентропії ізольованої (замкненої) системи:

1. Ентропія замкненої системи залишається сталою, якщо в системі протікає оборотний процес.

$$\Delta S_{\text{обор}} = 0$$

2. Ентропія замкненої системи зростає, якщо в системі протікає необоротний процес.

$$\Delta S_{\text{необор}} > 0$$

Дані властивості є статистичним формулюванням другого закону термодинаміки. Їх можна узагальнити: *Ентропія ізольованої системи при будь-*

яких процесах, що відбуваються в ній, не убуває.

$$\Delta S \geq 0$$

Знак «=» відноситься до оборотного процесу, знак «>» – до необоротного.

Л. Больцман дав статистичне тлумачення поняття «ентропія». З одного боку, ентропія ізольованої системи не може убувати. З іншого боку, система, що надається самій собі, переходитиме з менш імовірних станів у більш імовірні. Потрапивши в більш імовірний стан, система знаходитиметься в ньому необмежено довго.

Таким чином, ентропія і ймовірність поводяться однаково: вони можуть довільно або зростати, або залишатися незмінними. Больцман показав, що ентропія і ймовірність стану системи зв'язані таким чином:

$$S = k \ln W \qquad (11.7)$$

де k – стала Больцмана; W – термодинамічна ймовірність стану системи.

Термодинамічна ймовірність (W) – число мікроскопічних станів системи, якими реалізується даний макроскопічний стан.

Щоб зрозуміти сенс величини W, розглянемо наступні приклади (рис. 11.1). Нехай у посудині є тільки чотири молекули. Розіб'ємо подумки посудину на дві рівні частини - ліву й праву. Внаслідок руху молекул розподіл їх між обома частинами посудини буде мінятися. Розглянемо стани, що відрізняються один від одного числом молекул у лівій і правій частинах посудини. Пронумеруємо молекули й підрахуємо число способів, якими може бути реалізований кожний макростан.

З 16 можливих розподілів молекул між половинами посудини шість відповідають однаковій кількості молекул праворуч і ліворуч, вісім - станам, при яких в одній з половин посудини перебуває одна молекула, а в іншій - три, і тільки двома способами можуть бути отримані стани, при яких усі молекули збираються в одній з половин посудини.

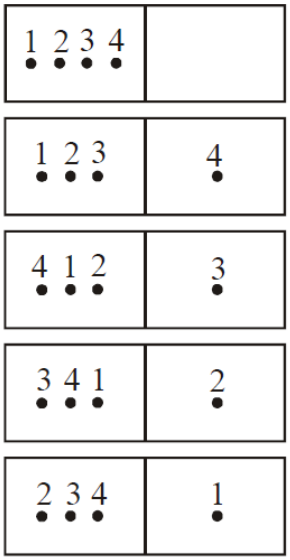


Рисунок 11.1 – Способи реалізації макростанів системи

Кожна молекула з рівною ймовірністю може перебувати як у лівій, так і в правій половині посудини. Тому кожен з 16 розподілів молекул здійснюється однаково часто. Отже, число способів реалізації даного стану визначає ймовірність цього стану.

Термодинамічна ймовірність W служить мірою безладдя, тобто кількісно визначає ступінь неврегульованості системи. Усі природні процеси – це перехід від порядку до безладдя, яке пов’язане з тепловим рухом частинок. Це означає, що система довільно прагне в стан з більшою термодинамічною ймовірністю. Отже, права частина формули (11.7) описує світ атомів, поведінка яких визначає механізми, що відбуваються в системі змін.

Термодинамічні процеси, що відбуваються в системі зі сталою масою при будь-якому одному сталому параметрі, називаються *ізопроцесами*.

Ізохорний процес відбувається за *сталим об’ємом*, тобто V = const і m = const (рис. 11.2). Він описується законом Шарля:

$$\frac{p}{T} = \text{const} \qquad (11.8)$$

Для двох станів рівняння (11.8) запишеться у вигляді:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

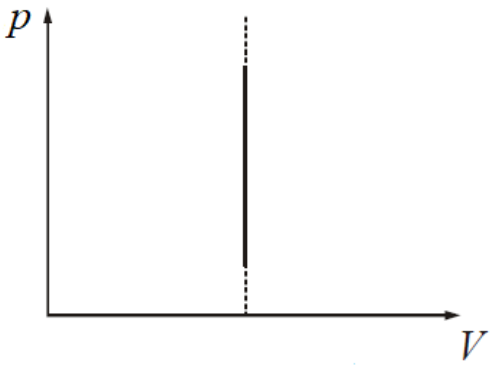


Рисунок 11.2 – Графік ізохорного процесу

Перший закон термодинаміки для ізохорного процесу

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Оскільки V = const, то $dV = 0$ і елементарна робота $\delta A = pdV = 0$. Отже,

$$\delta Q = dU. \qquad (11.9)$$

Для кінцевих величин

$$Q = \Delta U. \qquad (11.10)$$

Кількість тепла, що надана системі, йде на збільшення внутрішньої енергії.

Знайдемо молярну теплоємність за умови V = const.

$$C_V = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{dU}{\nu dT} = \frac{\frac{i}{2}\nu R dT}{\nu dT} = \frac{i}{2}R. \qquad (11.11)$$

Обчислимо зміну ентропії.

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{dU}{T} = \int_1^2 \frac{\frac{i}{2}\nu R dT}{T} = \frac{i}{2}\nu R \ln\frac{T_2}{T_1}.$$

Остаточно

$$\Delta S = \frac{i}{2}\nu R \ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{i}{2}\nu R \ln\frac{p_2}{p_1}. \qquad (11.12)$$

Ізобарний процес відбувається за *сталого тиску*, тобто p = const і m = const (рис. 11.3). Описується законом Гей-Люссака:

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \qquad (11.13)$$

Для двох станів рівняння (11.13) запишеться у вигляді

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

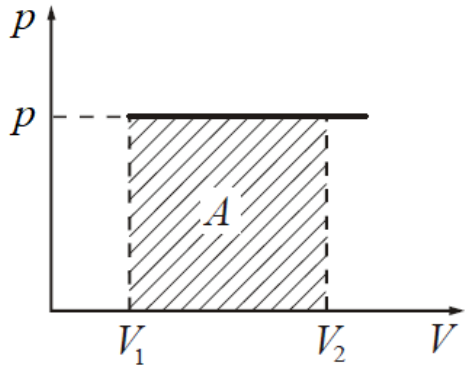


Рисунок 11.3 – Графік ізобарного процесу

Запишемо перший закон термодинаміки для ізобарного процесу:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Для кінцевих величин

$$Q = \Delta U + A. \qquad (11.14)$$

Кількість тепла, що надана системі, йде на збільшення внутрішньої енергії і виконання системою роботи над зовнішніми тілами.

Знайдемо роботу, яка виконується системою при ізобарному процесі.

$$A = \int_1^2 pdV = p(V_2 - V_1). \qquad (11.15)$$

Робота чисельно дорівнює площі заштрихованого прямокутника (рис.11.3).

Знайдемо молярну теплоємність за умови p = const.

$$C_p = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{dU + \delta A}{\nu dT} = \frac{\nu C_V dT}{\nu dT} + \frac{pdV}{\nu dT}.$$

Далі використовуємо рівняння стану ідеального газу. При p = const:

$$pdV = \nu RdT.$$

Зробивши заміну і провівши скорочення, отримаємо:

$$C_p = C_V + R. \qquad (11.16)$$

Отриманий вираз називають *рівнянням Майєра*. Виразимо молярну теплоємність за сталого тиску через кількість ступенів вільності. Для цього замінимо в (11.16) C_V за формулою (11.11) і отримаємо:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \qquad (11.17)$$

Обчислимо зміну ентропії:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\nu C_p dT}{T} = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Остаточно:

$$\Delta S = \nu C_p \ln \frac{T_2}{T_1} = \nu C_p \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (11.18)$$

Ізотермічний процес відбувається за сталої температури, тобто T = const і m = const (рис. 11.4). Описується законом Бойля – Маріотта:

$$pV = \text{const}. \qquad (11.19)$$

Для двох станів рівняння (11.19) запишеться у вигляді

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

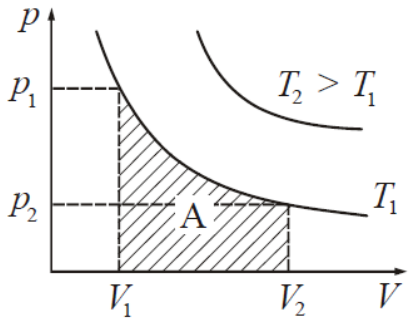


Рисунок 11.4 – Графіки ізотермічних процесів

Сформулюємо перший закон термодинаміки для ізотермічного процесу:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Оскільки T = const, то dT = 0. Зміна внутрішньої енергії $dU = \nu C_V dT = 0$.

Отже

$$\delta Q = \delta A.$$

Для кінцевих величин:

$$Q = A. \qquad (11.20)$$

Кількість тепла, що надана системі, йде на здійснення системою роботи над зовнішніми тілами.

Знайдемо роботу, яка виконується системою при ізотермічному процесі:

$$A = \int_1^2 pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Остаточно:

$$A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (11.21)$$

Знайдемо молярну теплоємність за умови T = const:

$$C_T = \frac{\delta Q}{\nu dT} \to \infty. \qquad (11.22)$$

Це означає, що поняття теплоємності за умов ізотермічного процесу сенсу не має.

Розрахуємо зміну ентропії:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 \delta Q = \frac{Q_{12}}{T}.$$

Оскільки $Q = A$, то

$$\Delta S = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (11.23)$$

Адіабатним називається *процес, що відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем*. Це означає, що $\delta Q = 0$, тобто $Q = 0$. Адіабатний процес описується наступним рівнянням:

$$pV^\gamma = \text{const}. \qquad (11.24)$$

Для двох станів воно записується в наступному вигляді:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \qquad (11.25)$$

Співвідношення (11.24) називається рівнянням Пуассона.

Літерою γ позначають величину, що називають *показником адіабати*. Показник адіабати дорівнює відношенню молярної теплоємності за сталим тиском до молярної теплоємності за сталим об'ємом:

$$\frac{C_p}{C_V} = \gamma. \qquad (11.26)$$

Показник адіабати можна розраховувати через кількість ступенів вільності:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \qquad (11.27)$$

Можна перейти до рівняння адіабати в змінних T і V. Для цього треба замінити тиск p в (11.24), виразити його з рівняння стану ідеального газу. У результаті вийде наступне рівняння (сталі ν і R увійшли до константи):

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \qquad (11.28)$$

Для двох станів:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}.$$

Порівняльні діаграми ізотерми і адіабати наведені на рис. 11.5.

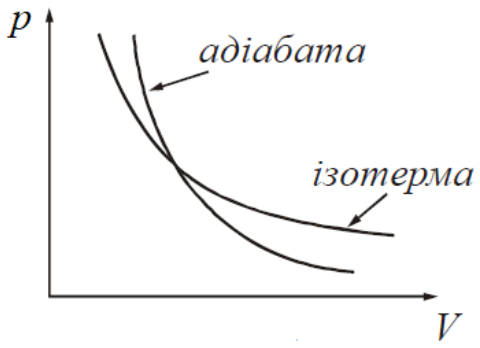


Рисунок 11.5 – Графіки адіабати та ізотерми

Кількість тепла, яким обмінюється тіло із зовнішнім середовищем, буде тим менше, чим швидше протікає процес. Отже, близькими до адіабатного, можуть бути процесі, що протікають достатньо швидко.

Перший закон для адіабатного процесу матиме вигляд:

$$dU + \delta A = 0, \qquad \text{або} \qquad \delta A = -dU.$$

Для кінцевих величин:

$$A = -\Delta U. \qquad (11.29)$$

При адіабатному процесі робота виконується за рахунок спаду внутрішньої енергії.

Якщо $dV > 0$, то $dU < 0$ і газ охолоджується.

Якщо $dV < 0$, то $dU > 0$ і газ нагрівається.

Молярна теплоємність газу при адіабатному процесі дорівнює нулю:

$$C_{\text{ад}} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = 0, \qquad \text{оскільки} \qquad \delta Q = 0.$$

Знайдемо роботу, що виконується газом при адіабатному процесі:

$$\delta A = -dU, \qquad dU = \nu C_V dT.$$

Остаточно:

$$A = -\int_{T_1}^{T_2} \nu C_V dT = -\nu C_V (T_2 - T_1) = \nu C_V (T_1 - T_2). \qquad (11.30)$$

Зробивши заміну з використанням рівняння стану ідеального газу, отримаємо ще одну формулу для розрахунку роботи:

$$A = \frac{C_V}{R}(p_1 V_1 - p_2 V_2). \qquad (11.31)$$

Визначимо зміну ентропії:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = 0,$$

оскільки $\delta Q = 0$.

Якщо $\Delta S = 0$, то $S = \text{const}$ (для оборотного процесу). Оскільки значення ентропії S для оборотного адіабатного процесу залишається сталим, то його також називають *ізоентропійним*.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4].

Тема 12

Реальні гази

Модель ідеального газу, що використовується в МКТ газів, дозволяє описувати поведінку розріджених реальних газів при достатньо високих температурах і низьких тисках. При виведенні рівняння стану ідеального газу розмірами молекул та їх взаємодією одної з одною нехтують. Підвищення тиску призводить до зменшення середньої відстані між молекулами, тому необхідно враховувати об’єм молекул і взаємодію між ними.

У 1 м^3 газу при нормальних умовах знаходиться $2{,}68 \cdot 10^{25}$ молекул, що займають об’єм приблизно 10^{-4} м^3 (радіус молекули приблизно 10^{-10} м), яким в порівнянні з об'ємом газу можна знехтувати.

При тиску 500 МПа об’єм молекул вже складе половину всього об’єму газу. Доведено, що при високих тисках і низьких температурах зазначена модель ідеального газу непридатна.

Для реальних газів необхідно враховувати розміри молекул і їх взаємодію однієї з одною, тому модель ідеального газу й рівняння стану $pV = \frac{m}{M} RT$, що описує ідеальний газ, для реальних газів не може бути використана.

Враховуючи власний об’єм молекул і сили міжмолекулярної взаємодії, Ван - дер - Ваальс вивів рівняння стану реального газу.

У рівняння стану ідеального газу введено дві поправки.

• Урахування власного об’єму молекул.

Наявність сил відштовхування, які протидіють проникненню в зайнятий молекулою об’єм інших молекул, зводиться до того, що фактичний вільний об’єм, в якому можуть рухатися молекули реального газу, буде не Vm , а $Vm - b$, де b – поправка, що враховує об’єм, займаний самими молекулами.

• Урахування притягання молекул.

Дія сил притягання між молекулами газу призводить до появи додаткового тиску на газ, який називається внутрішнім тиском.

За обчисленнями Ван-дер-Ваальса, внутрішній тиск обернено пропорційний квадрату молярного об'єму

$$p' = \frac{a}{V_m^2} \qquad (12.1)$$

де a - стала Ван-дер-Ваальса, що характеризує сили міжмолекулярного притягнення; V_m - молярний об'єм.

Тиск, чинений на стінки реальним газом, менше, ніж у випадку ідеального газу, на величину p'.

Вводячи ці поправки, одержимо рівняння Ван-дер-Ваальса (*рівняння стану реальних газів*):

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right) = \frac{m}{M}RT, \qquad (12.2)$$

де поправки a і b - сталі для кожного газу величини, що визначаються дослідним шляхом. Записуються рівняння Ван-дер-Ваальса для двох відомих з досліду станів газу і вирішуються відносно a і b.

Поправка $\frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}$ характеризує добавку до зовнішнього тиску, яка обумовлена взаємодією між молекулами. Через притягання молекул одна до одної газ немов би стискає сам себе. Якби взаємодія між молекулами припинилася, то для того, щоб утримати газ в межах того ж об'єму, знадобилося б збільшити зовнішній тиск на величину, яка дорівнює цій поправці.

Поправка $\frac{m}{M}b$ характеризує ту частину об'єму, яка неприступна для руху молекул, оскільки молекули мають власні розміри. Можна показати, що ця поправка дорівнює збільшеному учетверо об'єму молекул, що містяться в даному об'ємі V.

На рис. 12.1 наведені ізотерми реального газу, що підпорядковуються рівнянню Ван-дер-Ваальса при різних температурах: $T' < T'' < T_{кр} < T'''$.

При температурі T' і тиску в межах від p_1' до p_2' рівняння (12.2) має три

дійсних корені: V_1', V_2' і V_3'. При підвищенні температури (порівняйте ізотерми T' і T'') відмінність між коренями зменшується. При деякій температурі $T_{кр}$ всі три точки, відповідні розв'язку рівняння (12.2), зливаються в одну точку *K*. Точка *K* називається *критичною*. Відповідні критичній точці температура $T_{кр}$, тиск $p_{кр}$, об'єм $V_{кр}$ називаються критичними параметрами.

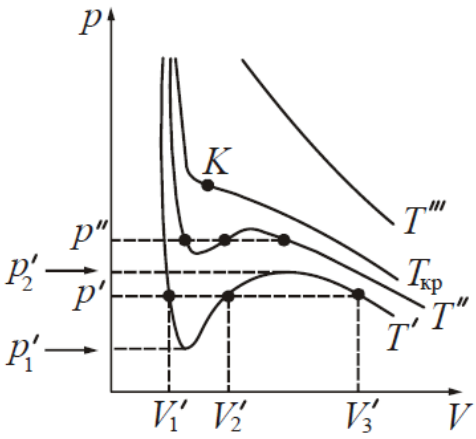


Рисунок 12.1 – Ізотерми Ван-дер-Ваальса

За відомими сталими Ван-дер-Ваальса *a* і *b* можна розрахувати значення критичних параметрів:

$$T_{кр} = \frac{8}{27}\frac{a}{bR} \qquad (12.3)$$

$$p_{кр} = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2} \qquad (12.4)$$

$$V_{кр} = 3b \qquad (12.5)$$

Ізотерма, що знімається при $T_{кр}$, називається критичною ізотермою.

При виведенні рівняння Ван-дер-Ваальса зроблений цілий ряд спрощень, тому воно також вельми наближене, хоча і краще (особливо для несильно стиснутих газів) узгоджується з дослідом, ніж рівняння стану ідеального газу.

Рівняння Ван-дер-Ваальса не єдине рівняння, що описує реальні гази. Існують й інші рівняння, деякі з них навіть точніше описують реальні гази, але не розглядаються через їх складність.

Перші експериментальні ізотерми були отримані Т. Ендрюсом. Він досліджував залежність об’єму одного моля вуглекислого газу від тиску. У результаті експерименту була отримана крива, зображена на рис. 12.2.

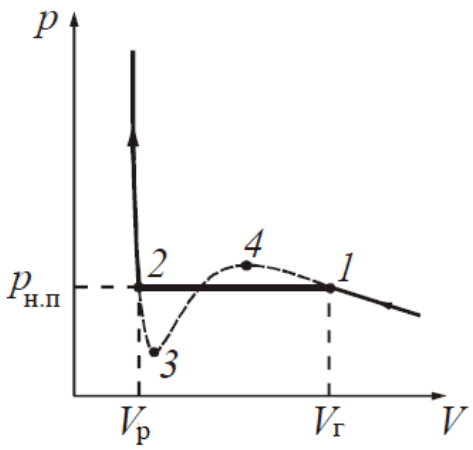


Рисунок 12.2 – Експериментальна ізотерма вуглекислого газу

Спочатку зі зменшенням об’єму тиск газу зростає, що відповідає рівнянню Ван-дер-Ваальса. Починаючи з об’єму $V_г$, ізотерма перестає відповідати рівнянню (12.2). Тиск перестає зростати зі зменшенням об’єму (горизонтальна ділянка ізотерми). Сама речовина при цьому перестає бути однорідною: частина газу конденсується в рідину. Інакше кажучи, речовина розшаровується на *дві фази*: рідку і газоподібну. Фазою в термодинаміці називають частину системи, що має однаковий хімічний склад і знаходиться в одному стані.

Зі зменшенням тиску все більша частина речовини переходить в рідку фазу. Тиск при цьому не змінюється і дорівнює $p_{н.п}$. При досягненні об’єму $V_р$ конденсація закінчується. Подальше зменшення об’єму приводить до різкого зростання тиску. Хід ізотерми на цій ділянці відповідає рівнянню (12.2). Речовина на цій ділянці буде однорідною, але це вже не газ, а рідина.

Зіставлення експериментальної ізотерми з ізотермою Ван-дер-Ваальса показує, що вони добре співпадають на ділянках, які відповідають однофазним станам речовини і не співпадають на ділянці двофазного стану.

У станах, відповідних до горизонтальної ділянки ізотерми, спостерігається рівновага між рідкою і газоподібною фазами речовини. Газ (пара), що знаходиться в рівновазі зі своєю рідиною, називається *насиченою парою*. Тиск

$p_{н.п}$, при якому існує рівновага за даної температури, називається тиском насиченої пари. $V_г$ – це об'єм, що займає газ, $V_р$ – це об'єм, що займає рідина.

На рис. 12.3 приведені експериментальні ізотерми для декількох температур. З підвищенням температури горизонтальні ділянки зменшуються. Це означає, що зменшується різниця між об'ємами $V_г$ і $V_р$. При критичній температурі $T_{кр}$ горизонтальна ділянка стягується в точку. Це означає, що зникає будь-яка відмінність між рідиною і парою. При температурі, вищій за критичну, поняття насиченої пари втрачає значення.

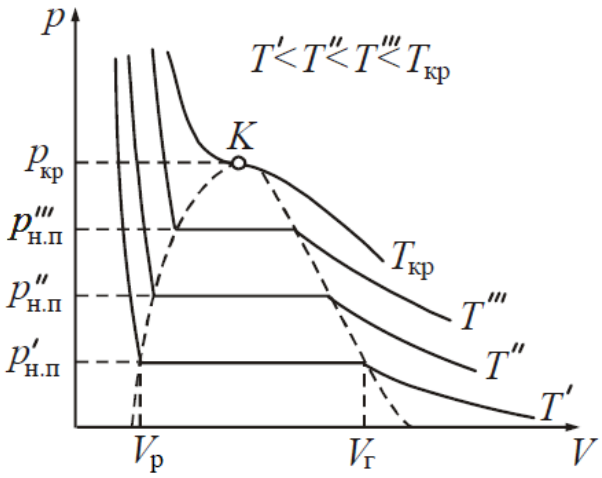


Рисунок 12.3 – Система ізотерм реального газу

Якщо з'єднати крайні точки горизонтальних ділянок ізотерми, то вийде крива, яка поділяє діаграму pV на три частини (рис.12.4). Ліва частина (р) кривої відповідає *рідкому* стану, права частина (п) – *пароподібному*. Область під кривою (р-п) відповідає двофазному стану "*рідина – пара*". Будь-який стан в області (п) відрізняється від решти газоподібних станів тим, що при ізотермічному стисненні речовина, що знаходиться в цьому стані, зріджується. Якщо речовина знаходиться в одному із станів при температурі, вищій за критичну, вона не може бути зрідженою ніяким стисненням (область г). Відзначимо, що розділення газоподібного стану на газ і пару не є загальноприйнятним.

Звернемося ще раз до рис. 12.2. Хвилеподібна ділянка ізотерми Ван-дер-Ваальса більш точно описує перехід речовини з газоподібного стану в рідкий, ніж горизонтальні ділянки експериментальних ізотерм. Стани, відповідні

ділянкам 2-3 і 1-4, можуть реалізуватися, але тільки за певних умов, оскільки вони є нестійкими (метастабільними). Ділянка 1-4 відповідає стану *пересиченої пари*, що виникає при повільному ізотермічному стисненні через відсутність центрів конденсації. Якщо такі центри (порошинки, іони) вводяться в пересичену пару, то відбувається швидка конденсація.

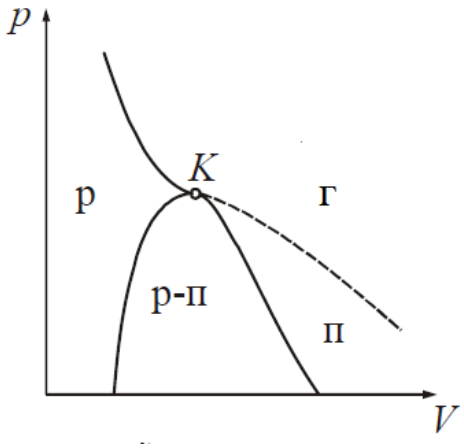


Рисунок 12.4 – Області існування фазових складових реального газу

Ділянка 2-3 відповідає перегрітій рідині, яку можна отримати, якщо затримати початок кипіння в точці 2. На ділянці 3-4 зі зростанням тиску зростає об’єм. Такі стани речовини неможливі.

Таким чином, рівняння Ван-дер-Ваальса описує не тільки газоподібний стан речовини, але і процес переходу в рідкий стан, і процес стиснення рідини.

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4]

Тема 13
Явища перенесення

Будь-який нерівноважний стан газу завжди пов’язаний з порушенням повної хаотичності руху і максвеллівського розподілу молекул за швидкостями. Основною особливістю нерівноважних станів є прагнення газу мимоволі переходити до рівноважного стану. Це обумовлено хаотичним тепловим рухом молекул з безперервними зіткненнями їх одна з одною, що і призводить до постійного перемішування молекул, зміни їх швидкостей та енергії. Це

призводить до виникнення процесів, які об'єднують загальною назвою *явища перенесення*. До явищ перенесення належать: теплопровідність (обумовлена перенесенням енергії у вигляді тепла), дифузія (обумовлена перенесенням маси) і внутрішнє тертя або в'язкість (обумовлена перенесенням імпульсу).

Середня довжина вільного пробігу молекул. Мінімальна відстань d, на яку зближуються при зіткненні центри молекул, називають ефективним діаметром молекули (рис. 13.1). Площа круга радіусом d називається *ефективним перерізом молекули*:

$$\sigma = \pi d^2$$

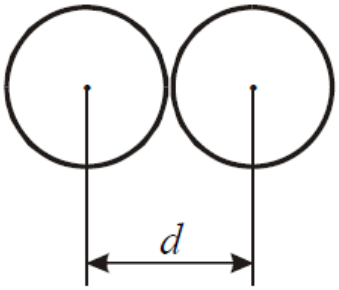


Рисунок 13.1 – До визначення ефективного діаметру молекул

Припустимо, що всі молекули нерухомі, а одна з них рухається з середньою арифметичною швидкістю $\langle v \rangle$. Під час руху молекула стикається зі всіма молекулами газу, центри яких знаходяться від траєкторії руху її центру на відстанях менших або рівних d. За одиницю часу дана молекула зіткнеться зі всіма молекулами, центри яких лежать усередині циліндра довжиною $l = \langle v \rangle \cdot t$ і радіусом d (рис. 13.2).

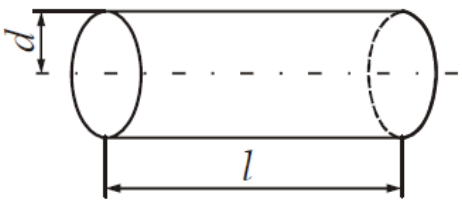


Рисунок 13.2 – Об'єм, в якому знаходяться молекули, здатні зіткнутися

Нехай n – концентрація молекул, тобто кількість молекул в одиниці об'єму. Об'єм виділеного циліндра $V = \pi d^2 \langle v \rangle$, оскільки молекула за секунду (t = 1 с)

пролітає відстань, яка дорівнює її середній швидкості. Число зіткнень за одну секунду буде дорівнювати кількості молекул у циліндрі, тобто

$$<z>=\pi d^2<v>n$$

Якщо врахувати, що всі молекули рухаються, і що розподіл молекул за швидкостями підкоряється розподілу Максвелла, то з'явиться додатковий множник $\sqrt{2}$, тобто

$$<z>=\sqrt{2}\pi d^2<v>n \qquad (13.1)$$

Відстань, яку молекула пролітає за час вільного пробігу від одного зіткнення до наступного, називається *довжиною вільного пробігу*. Довжина вільного пробігу є випадковою величиною, що підпорядковується закону ймовірності. Тому вводиться *середня довжина вільного пробігу* $<\lambda>$ – середня відстань, яку проходить молекула між двома послідовними зіткненнями.

$$<\lambda>=\frac{<v>}{<z>}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \qquad (13.2)$$

Теплопровідність газів. У тому випадку коли в одній області газу середня кінетична енергія молекул більше, ніж в іншій, то з плином часу внаслідок постійних зіткнень молекул відбувається процес вирівнювання середніх кінетичних енергій молекул, тобто іншими словами, вирівнювання температур.

Якщо шари газу мають різну температуру, то в газі виникає перенесення тепла від більш нагрітого шару до менш нагрітого, тобто має місце явище теплопровідності.

Експериментально встановлено, що в цьому випадку теплопровідність газу визначається формулою Фур'є

$$\delta Q=-\chi\frac{dT}{dx}dS_{\perp}dt, \qquad (13.3)$$

де δQ – кількість тепла, що переноситься за час dt через поверхню площею $dS_{\perp}$, розташовану перпендикулярно напряму перенесення тепла; $\frac{dT}{dx}$ – градієнт температури; χ – коефіцієнт теплопровідності.

Знак «мінус» показує, що перенесення тепла відбувається у напрямі зменшення температури.

Із закону Фур'є (13.3) випливає вираз для коефіцієнта теплопровідності:

$$\chi = -\frac{\delta Q}{\frac{dT}{dx} dS_{\perp} dt}. \qquad (13.4)$$

Одиниця вимірювання коефіцієнта теплопровідності в СІ

$$[\chi] = \frac{\text{Дж}}{\frac{\text{К}}{\text{м}} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

Коефіцієнт теплопровідності (χ) характеризує здатність речовини проводити тепло і показує, яка кількість тепла переноситься через одиничну площу за одиницю часу при градієнті температури, що дорівнює одиниці.

У кінетичній теорії газів показано, що коефіцієнт теплопровідності газів можна розраховувати за формулою:

$$\chi = \frac{1}{3} <\lambda><v>\rho c_V, \qquad (13.5)$$

де $<\lambda>$ – середня довжина вільного пробігу молекул; $<v>$ – середня арифметична швидкість; ρ – густина газу; c_V – питома теплоємність при сталому об'ємі.

Гази є найгіршими провідниками тепла. Коефіцієнт теплопровідності газів залежить від температури. З підвищенням температури він зростає.

Дифузія в газах. Якщо в різних частинах системи є різні гази, то тепловий рух перемішує їх до тих пір, поки всюди не утворюється однорідна суміш молекул, в якій парціальний тиск і густина кожного газу будуть однаковими у всьому об'ємі. Цей процес називається дифузією газів.

Дифузія в газі – процес перемішування молекул, що супроводжується перенесенням маси з місць з більшою концентрацією даних молекул в місця з меншою концентрацією цих молекул.

У суміші газів дифузія викликається відмінністю в густині окремих газів в різних частинах об'ємів суміші. У хімічно чистому газі при сталій температурі дифузія виникає внаслідок неоднакової густини в різних частинах об'єму газу і

полягає в перенесенні маси газу з місць з більшою густиною в місця з меншою густиною.

У хімічно однорідному газі перенесення речовини при дифузії підпорядковується закону Фіка (1855 р.)

$$dm = -D\frac{d\rho}{dx}dS_{\perp}dt, \qquad (13.6)$$

де dm – маса речовини, що дифундує за час dt через площину $dS_{\perp}$, розташованої перпендикулярно напряму перенесення речовини;

$\frac{d\rho}{dx}$ – градієнт густини – величина, що показує, на скільки відрізняється густина двох точок, віддалених одна від одної на одиницю довжини;

D – коефіцієнт дифузії.

Знак «мінус» показує, що перенесення маси здійснюється у бік зменшення густини.

Із закону Фіка (13.6) випливає вираз:

$$D = -\frac{dm}{\frac{d\rho}{dx}dS_{\perp}dt}. \qquad (13.7)$$

Коефіцієнт дифузії (D) показує, яка маса речовини переноситься через одиничну площу за одиницю часу при градієнті густини, що дорівнює одиниці. Одиниця вимірювання коефіцієнта дифузії в СІ

$$[D] = \frac{\text{кг}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{м}}\text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

У кінетичній теорії газів доводиться, що коефіцієнт дифузії можна розраховувати за формулою:

$$D = <\lambda><v>, \qquad (13.8)$$

Коефіцієнт дифузії газів зростає з температурою пропорційно $\sqrt{T}$, а із зростанням тиску коефіцієнт дифузії зменшується.

Внутрішнє тертя (в'язкість) в газах. Якщо є шар газу, що рухається відносно решти маси з певною швидкістю, то обмін молекулами між шаром і

рештою частини газу, що рухається, супроводжується перенесенням імпульсу. Молекули, які переходять з шару, що рухається, в інші, переношують із собою надлишок імпульсу, який внаслідок зіткнень розподіляється між молекулами, що мають менші швидкості. У результаті цього перенесення, між дотичними шарами виникають сили внутрішнього тертя, що гальмують рух швидкого шару і прискорюють рух повільного.

Для явища внутрішнього тертя слушний закон Ньютона (1687 р.):

$$dp = -\eta \frac{dv}{dz} dS_{\perp} dt, \qquad (13.9)$$

де dp – імпульс, перенесений за час dt через площу $dS_{\perp}$, розташовану перпендикулярно напряму перенесення імпульсу;

$\frac{dv}{dz}$dv – градієнт швидкості;

η – коефіцієнт внутрішнього тертя (динамічна в'язкість).

Знак «мінус» показує, що перенесення імпульсу відбувається у напрямі зменшення швидкості.

Із закону Ньютона (13.9) випливає вираз:

$$\eta = -\frac{dp}{\frac{dv}{dz} dS_{\perp} dt}. \qquad (13.10)$$

Коефіцієнт внутрішнього тертя (η) показує, який імпульс переноситься через одиничну площу за одиницю часу при градієнті швидкості, що дорівнює одиниці.

Одиниця вимірювання коефіцієнта внутрішнього тертя (в'язкості) в СІ

$$[\eta] = \frac{\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{м}}{\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}} = \text{Па} \cdot \text{с}.$$

З газокінетичних уявлень можна отримати таку формулу для розрахунку коефіцієнта внутрішнього тертя:

$$\eta = \frac{1}{3} <\lambda><v> \rho. \qquad (13.11)$$

Можна показати, що коефіцієнт внутрішнього тертя газів не залежить від тиску, але збільшується із зростанням температури пропорційне $\sqrt{T}$.

Порівнюючи формули (13.5), (13.8) і (13.11), можна отримати зв'язок між коефіцієнтами перенесення:

$$\eta = D\rho, \tag{13.12}$$

$$\chi = \eta \cdot c_V = D\rho c_V. \tag{13.13}$$

Всі три розглянуті явища мають багато спільного. У всіх трьох відбувається перенесення певної величини з однієї частини речовини в іншу до тих пір, поки дана величина не розподілиться рівномірно за об'ємом. Підкреслимо, що йдеться не про рух деякої частини газу як цілого і переміщення разом з ним певної величини (макроскопічний процес), а про перенесення фізичної величини неврегульованим тепловим рухом (мікроскопічний процес).

ЛІТЕРАТУРА [1, 2, 4].

Тема 14

Електричне поле у вакуумі

Усі тіла в природі здатні електризуватися, тобто набувати електричного заряду. Наявність електричного заряду проявляється в тому, що заряджене тіло взаємодіє з іншими зарядженими тілами. Існує два види електричних зарядів, які умовно називають *позитивними* і *негативними*. Заряди одного знаку відштовхуються, різних знаків – притягуються. Взаємодія між електрично зарядженими частинками або зарядженими тілами називається *електромагнітною взаємодією*. Розділ фізики, в якому вивчають електромагнітні взаємодії, називається *електродинамікою*.

Електростатика – це розділ електродинаміки, в якому розглядаються властивості і взаємодія нерухомих в інерціальній системі відліку електрично заряджених тіл або частинок.

Електричний заряд (q) – є невід'ємною властивістю деяких елементарних

частинок (електронів, протонів та ін.), що визначає їх взаємодію із зовнішнім електромагнітним полем.

$$[q] = \text{Кл (кулон)}.$$

Властивості заряджених тіл:

1. Заряд елементарних частинок є однаковий за величиною. Його називають елементарним зарядом

$$q_e = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

2. Заряд тіла утворюється сукупністю елементарних зарядів, тому він є величиною, кратною e.

$$q = eN, \qquad N = 1, 2, 3 \ldots$$

Ця властивість називається дискретністю електричного заряду.

3. Алгебрична сума зарядів електрично ізольованої системи заряджених тіл залишається величиною сталою:

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_N = \text{const}.$$

Це твердження називається законом збереження електричного заряду.

4. Величина заряду не залежить від того, рухається заряд чи ні, тобто, заряд – величина інваріантна.

Закон Кулона. Закон, який дозволяє знайти силу взаємодії точкових зарядів, був встановлений експериментально в 1785 році Ш. Кулоном.

Точковий заряд – це заряджене тіло, розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з відстанню від цього тіла до інших заряджених тіл.

У результаті дослідів Кулон прийшов висновку:

Сила взаємодії двох нерухомих точкових зарядів пропорційна добутку цих зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між ними і залежить від середовища, в якому знаходяться ці заряди:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (14.1)$$

де $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала;

ε – відносна діелектрична проникність – електрична характеристика середовища. Для вакууму ε = 1.

Сила спрямована вздовж прямої, що з'єднує заряди (див. рис. 14.1).

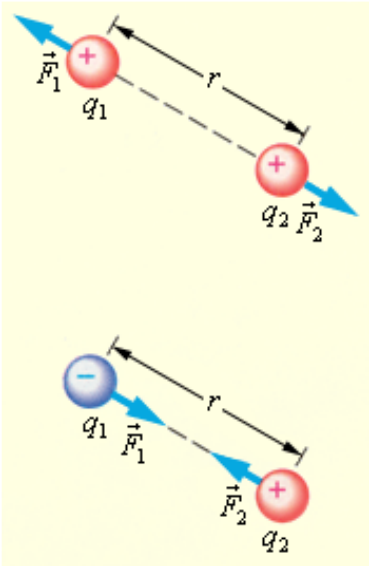


Рисунок 14.1 - Сили взаємодії електричних зарядів

Будь-яке електрично заряджене тіло створює в навколишньому просторі електричне поле. Електричне поле – це матеріальне середовище, що існує навколо заряджених тіл і проявляє себе силовою дією на заряди. Особливістю його є те, що це поле створюється електричними зарядами і зарядженими тілами, а також впливає на ці об'єкти незалежно від того, рухаються вони чи ні.

Якщо електрично заряджені тіла або частинки нерухомі в даній системі відліку, то їх взаємодія здійснюється за допомогою електростатичного поля. Електростатичне поле – це електричне поле, що не змінюється в часі.

Напруженість електричного поля. Для того, щоб знайти і дослідити електричне поле, використовують точковий позитивний заряд, який називають пробним – $q_{\text{пр}}$. Якщо брати різні за величиною пробні заряди, то і сили, які діють на ці заряди в даній точці поля, будуть різними. Проте відношення сили до величини заряду для даної точки поля для всіх пробних зарядів буде одним і тим же. Тому можна прийняти це відношення за величину, яка характеризує електричне поле. Введену таким чином характеристику називають *напруженістю електричного поля* в даній точці.

Напруженість електричного поля ($\vec{E}$) – векторна фізична величина, силова характеристика електричного поля, що кількісно дорівнює силі, яка діє на одиничний позитивний заряд, що внесений в дану точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{\text{пр}}} \qquad (14.2)$$

$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Напрям вектора напруженості співпадає з напрямом сили, що діє на позитивний заряд (рис. 14.2).

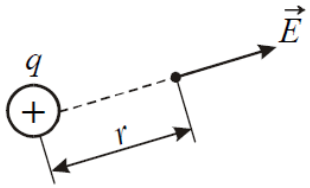


Рисунок 14.2 – До визначення напряму напруженості електричного поля

Якщо за допомогою пробного заряду досліджується електричне поле, створюване декількома зарядженими тілами, то результуюча сила виявляється рівною геометричній сумі сил, діючих на пробний заряд з боку кожного зарядженого тіла окремо. Отже, напруженість електричного поля, створюваного системою зарядів у даній точці простору, дорівнює векторній сумі напруженостей електричних полів, створюваних в тій же точці зарядами окремо.

Принцип суперпозиції (накладення) електричних полів: *напруженість $\vec{E}$ результуючого поля, створеного двома (і більше) точковими зарядами, дорівнює векторній (геометричній) сумі напруженостей полів, що складаються*:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n.$$

Якщо величина і напрям вектора напруженості поля в кожній точці простору однакові, таке поле називається *однорідним*.

Виходячи із закону Кулона, можна розрахувати напруженість електричного поля, що створюється точковим зарядом:

$$E = \frac{F}{q_{\text{пр}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (14.3)$$

На будь-який заряд q, що внесений в електричне поле, діє електрична сила

Потенціал електростатичного поля. Розглянемо електростатичне поле, що створюється нерухомим точковим зарядом q. У це поле введемо пробний заряд $q_{\text{пр}}$. У будь-якій точці поля на пробний заряд діє сила, яка відповідно до закону Кулона дорівнює:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{r^2}.$$

Заряд $q_{\text{пр}}$ переміщається під дією сил поля заряду q уздовж деякої лінії (рис. 14.3). Елементарна робота з переміщення заряду дорівнює

$$\delta A = \vec{F}d\vec{l} = Fdl\cos\alpha,$$

де $dl\cos\alpha = dr$.

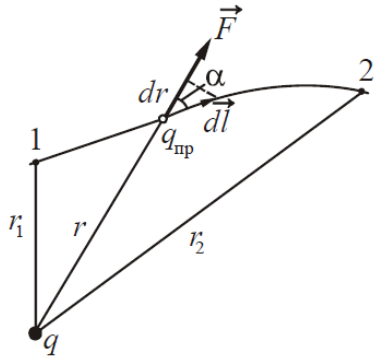


Рисунок 14.3 – До визначення роботи по переміщенню заряду в електричному полі

При переміщенні заряду з точки 1 в точку 2 виконується робота:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} Fdr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{r^2}dr = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{r_1}\right). \qquad (14.4)$$

З формули (14.4) випливає, що робота з переміщення заряду в електростатичному полі визначається тільки початковим і кінцевим положенням заряду. Отже, кулонівські сили є консервативними. Робота консервативних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії

$$A = -\left(W_{\text{п}_2} - W_{\text{п}_1}\right).$$

Тоді величину $\frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{r}$ можна назвати потенціальною енергією заряду $q_{\text{пр}}$ у полі заряду q:

$$W_{\text{п}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q \cdot q_{\text{пр}}}{r} \qquad (14.5)$$

Різні пробні заряди мають в одній і тій же точці поля різну потенціальну енергію. Проте відношення потенціальної енергії до величини пробного заряду буде одним і тим же. Цю величину називають потенціалом у даній точці поля і використовують для опису електростатичних полів.

Потенціал (φ) – скалярна фізична величина, енергетична характеристика електростатичного поля, що дорівнює потенціальній енергії, яку мав би в даній точці поля одиничний позитивний заряд:

$$\varphi = \frac{W_{\text{п}}}{q_{\text{пр}}}. \qquad (14.6)$$

$[\varphi] = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}$ (вольт).

Потенціал може бути позитивним або негативним.

Підставивши в (14.6) вираз для потенціальної енергії (14.5), отримаємо формулу для розрахунку потенціалу поля точкового заряду:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q}{r}, \qquad (14.7)$$

де q – заряд, що створює поле;

r – відстань від заряду до точки, в якій визначається потенціал.

Якщо r наближається до нескінченності ($r \to \infty$), то потенціал φ наближається до нуля. Це означає, що потенціал поля точкового заряду дорівнює нулю в нескінченно віддаленій точці.

Робота A, що виконується силами електростатичного поля при переміщенні заряду q з точки 1, потенціал якої φ_1, у точку 2 з потенціалом φ_2

дорівнює зменшенню потенціальної енергії:

$$A = -\left(W_{п_2} - W_{п_1}\right).$$

З формули (14.6) випливає, що

$$W_п = q\varphi + \text{const},$$

отже

$$A = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \qquad (14.8)$$

Величину $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ називають *різницею потенціалів*. Електричні поля прийнято пов'язувати не з абсолютними значеннями потенціалів, а з їх різницею між різними точками простору.

Таким чином

$$A = q\Delta\varphi. \qquad (14.9)$$

Потенціал нескінченно видаленої точки простору приймають за нульовий потенціал. Якщо заряд q з точки, потенціал якої φ, віддаляється на нескінченність (там, де за умовою потенціал дорівнює нулю), то робота сил поля дорівнює:

$$A_\infty = q\varphi\,.$$

Звідси випливає, що *потенціал дорівнює роботі, яка виконується силами електростатичного поля під час переміщення одиничного позитивного заряду з цієї точки поля на нескінченність*:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}.$$

На практиці за нульовий потенціал звичайно приймають потенціал Землі.

Якщо поле створюється системою зарядів, то, відповідно до принципу суперпозиції, потенціал результуючого поля дорівнює алгебричній сумі потенціалів, що створюються кожним зарядом окремо:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i. \qquad (14.10)$$

Зв'язок між напруженістю електричного поля і потенціалом. Електростатичне поле можна описати за допомогою векторної величини $\vec{E}$ або

за допомогою скалярної величини φ. Знайдемо зв'язок потенціалу з напруженістю електричного поля на прикладі електричного поля точкового заряду. Таке поле є неоднорідним, оскільки величина і напрям вектора напруженості $\vec{E}$ змінюються під час переходу з однієї точки поля в іншу. Відобразимо три еквіпотенціальні поверхні поля цього заряду з потенціалами $\varphi+d\varphi$, φ, $\varphi-d\varphi$, де $d\varphi$ – нескінченно мала зміна потенціалу (рис. 14.4). Ці поверхні знаходяться на різній відстані одна від одної.

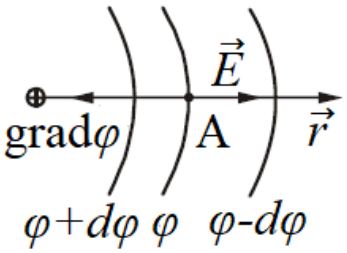


Рисунок 14.4 – До виведення зв'язку між напруженістю і потенціалом

Зміну потенціалу в заданому напрямі $\vec{r}$ характеризує похідна за напрямом $\frac{d\varphi}{dr}$. Зі зменшенням відстані від заряду потенціал поля збільшується. Це означає, що чисельне значення похідної зростатиме убік, протилежний вектору $\vec{E}$. Для того, щоб вказати напрям найшвидшого зростання потенціалу, вводять векторну величину, яка називається ґрадієнтом потенціалу.

Ґрадієнт потенціалу (позначається gradφ) – це вектор, спрямований у бік максимального зростання потенціалу і дорівнює зміні потенціалу, що припадає на одиницю довжини в цьому напрямі. Таким чином, ґрадієнт потенціалу характеризує ступінь неоднорідності поля.

Встановимо, як зв'язані напруженість електричного поля $\vec{E}$ і ґрадієнт потенціалу gradφ. Помістимо в точку А вказаного електричного поля пробний позитивний заряд $q_{\text{пр}}$. Нехай під дією поля він зміщується із точки з потенціалом φ в точку з потенціалом $\varphi-d\varphi$. При цьому виконується робота

$$\delta A = Fdr = q_{\text{пр}}Edr \qquad (14.11)$$

де dr – відстань між еквіпотенціальними поверхнями φ і $\varphi-d\varphi$.

З іншого боку

$$\delta A = -q_{\text{пр}} d\varphi \,. \qquad (14.12)$$

Прирівнюючи (14.11) і (14.12) і скорочуючи на $q_{\text{пр}}$, отримаємо:

$$-d\varphi = Edr,$$

звідки

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}. \qquad (14.13)$$

Це означає, що напруженість електричного поля дорівнює зміні потенціалу, що припадає на одиницю довжини. Формулу (14.13) можна записати у векторному вигляді

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi. \qquad (14.14)$$

Знак «–» говорить про те, що вектор напруженості спрямований у бік убування потенціалу. Формула (14.14) слушна для будь-якого електростатичного поля.

Розглянемо однорідне електричне поле. Прикладом такого поля є поле між двома різнойменно зарядженими пластинами. У кожній точці однорідного поля вектор $\vec{E}$ зберігає своє чисельне значення і напрям. У цьому випадку

$$E = \frac{U}{d}, \qquad (14.15)$$

де d – відстань між пластинами, а $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів (напруга).

Графічне зображення електростатичних полів. Графічно електростатичне поле прийнято зображати за допомогою силових ліній і еквіпотенціальних поверхонь.

Еквіпотенціальна поверхня – це геометричне місце точок електростатичного поля, потенціали яких однакові. Робота, що виконується силами електростатичного поля під час переміщення електричного заряду по одній і тій же еквіпотенціальній поверхні, дорівнює нулю.

Силова лінія (лінія напруженості) – це лінія, дотична до якої в кожній точці співпадає з напрямом вектора напруженості $\vec{E}$ (рис. 14.4).

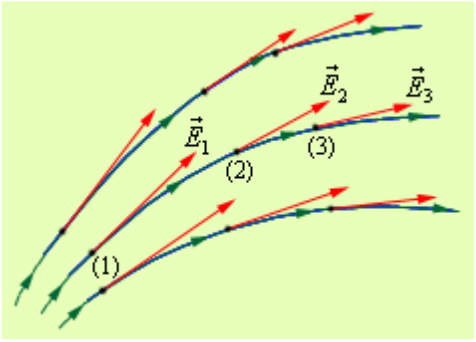


Рисунок 14.4 - Силові лінії електричного поля

Особливості силових ліній електростатичного поля:

1. Силові лінії починаються на позитивних зарядах, закінчуються на негативних або йдуть в нескінченність.
2. Силові лінії ніде не перетинаються.
3. Силові лінії перпендикулярні еквіпотенціальним поверхням.
4. За густиною силових ліній судять про величину напруженості електростатичного поля.

Еквіпотенціальні поверхні звичайно креслять так, що під час переходу від однієї еквіпотенціальної поверхні до сусідньої потенціал змінюється на одну і ту ж величину $\Delta\varphi$. Чим менша вибрана різниця потенціалів $\Delta\varphi$, тим детальніше поданий розподіл потенціалу в просторі.

Для більшої наочності креслять також силові лінії, які перпендикулярні поверхням рівного потенціалу. Там, де при постійній різниці потенціалів $\Delta\varphi$ сусідні еквіпотенціальні поверхні найбільш близько підходять одна до одної, напруженість електричного поля максимальна. Навпаки, в місцях, де відстані між ними великі, буде мала і напруженість електричного поля $\vec{E}$.

Як приклад застосування принципу суперпозиції полів на рис. 14.5 зображена картина силових ліній поля *електричного диполя* - системи з двох однакових за модулем зарядів різного знаку q і $-q$, розташованих на деякій відстані l. Напруженість поля в будь-якій точці дорівнює сумі напруженостей полів зарядів q і $-q$.

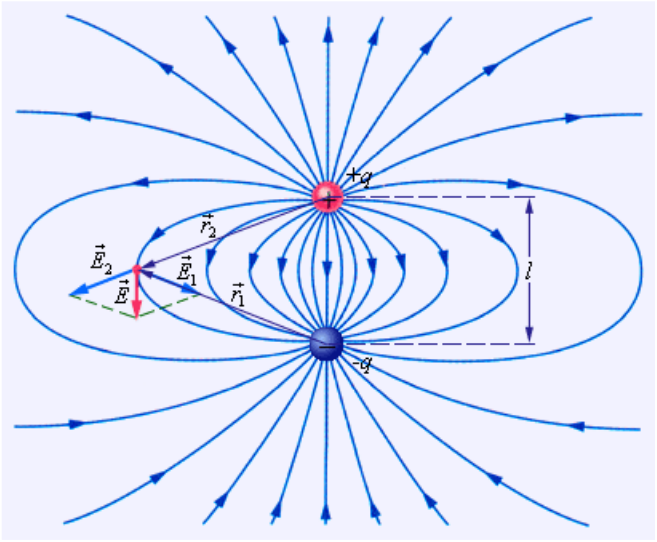


Рисунок 14.5 - Силові лінії поля електричного диполя

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 15

Розрахунок електростатичних полів

Теорема Гауса. Теорема Гауса дозволяє у ряді випадків знайти напруженість поля зарядженого макроскопічного тіла більш просто, ніж з використанням формули для напруженості поля точкового заряду і принципу суперпозиції електростатичних полів.

Введемо поняття потоку вектору напруженості електростатичного поля через довільну поверхню.

Потоком вектору напруженості електричного поля через елементарну ділянку поверхні dS називається величина

$$d\Phi = \vec{E}d\vec{S} = EdS\cos\alpha, \qquad (15.1)$$

де $d\vec{S} = dS\vec{n}$, $\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний площі dS;

α – кут між напрямом $\vec{n}$ і $\vec{E}$ (рис. 15.1).

Потік вектору напруженості Φ крізь будь-яку поверхню S дорівнює алгебричній сумі потоків напруженості крізь всі ділянки цієї поверхні.

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S}. \qquad (15.2)$$

$[\Phi] = \frac{\text{В}}{\text{м}} \cdot \text{м}^2 = \text{В}\cdot\text{м}.$

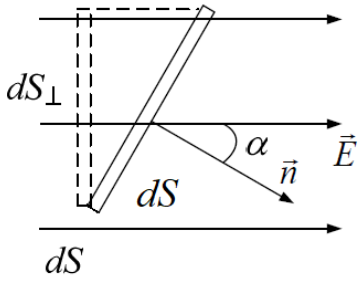


Рисунок 15.2 - До визначення елементарного потоку $d\Phi$

Згідно з теоремою Гауса для електростатичного поля:

Потік вектора напруженості електростатичного поля крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебричній сумі зарядів, які охоплюються цією поверхнею, поділеній на добуток $\varepsilon_0\varepsilon$:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \sum_{i=1}^{N} q_{\text{охоп}}. \qquad (15.3)$$

Введемо додаткову характеристику електростатичного поля

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \qquad (15.4)$$

яку називають вектором *електростатичної індукції* (*електричним зміщенням*).

У цьому випадку теорему Гауса можна записати таким чином:

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} q_{i\,\text{охоп}}. \qquad (15.5)$$

Потік вектору електричного зміщення крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебричній сумі зарядів, які охоплюються цією поверхнею.

Поле рівномірно зарядженої нескінченно довгої нитки. Припустимо, що нескінченно довга нитка заряджена рівномірно з лінійною густиною заряду τ. *Лінійною густиною заряду* називається величина, яка дорівнює заряду, що припадає на одиницю довжини. За умов рівномірного розподілу заряду:

$$\tau = \frac{q}{l} \qquad (15.6)$$

$[\tau]$ = Кл/м.

В якості поверхні, що охоплює, виберемо коаксіальний циліндр радіусу r і висоти l (рис. 15.3). З міркувань симетрії випливає, що напруженість поля в будь-якій точці повинна бути спрямованою за радіусом, перпендикулярно осі нитки (заряд вважається позитивним). Потік Φ крізь торці циліндра дорівнює нулю, оскільки лінії напруженості перпендикулярні осі. Потік крізь бічну поверхню дорівнює:

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} = E \cdot 2\pi r l.$$

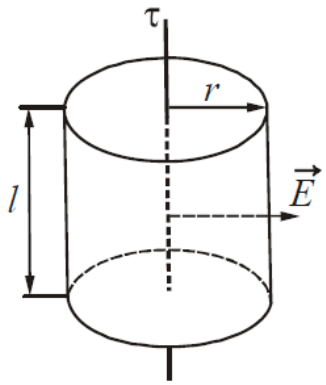


Рисунок 15.3 – До виведення напруженості електричного поля нескінченої рівномірно зарядженої нитки

За теоремою Гауса

$$E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0} q = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}.$$

Звідкіля

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}. \qquad (15.7)$$

Напруженість поля зарядженої нитки визначається лінійною густиною заряду і відстанню від нитки. Поле негативно зарядженої нитки відрізняється тільки напрямом напруженості $\vec{E}$.

Отримаємо формулу для розрахунку різниці потенціалів поля, що

створюється рівномірно зарядженою нескінченно довгою ниткою. Робота A, що виконується силами електростатичного поля при переміщенні пробного заряду $q_{\text{пр}}$ із точки 1 з потенціалом φ_1 в точку 2 з потенціалом φ_2 дорівнює

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} q_{\text{пр}} E dr = q_{\text{пр}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r} = -q_{\text{пр}} \left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_1 - \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln r_2 \right). \qquad (15.8)$$

Істотним є не саме значення потенціалу, а різниця потенціалів. Різниця потенціалів двох точок поля нитки визначається співвідношенням

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (15.9)$$

Поле рівномірно зарядженої нескінченної площини. Припустимо, що площина заряджена рівномірно з поверхневою густиною заряду σ. *Поверхневою густиною заряду* називається величина, яка дорівнює заряду, що припадає на одиницю площі. За умовою рівномірного розподілу заряду

$$\sigma = \frac{q}{S} \qquad (15.10)$$

Застосувавши теорему Гауса, можна показати, що напруженість поля рівномірно зарядженої нескінченної площини визначається таким чином:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (15.11)$$

Це означає, що на будь-яких відстанях від нескінченної площини напруженість поля однакова за величиною (рис. 15.4).

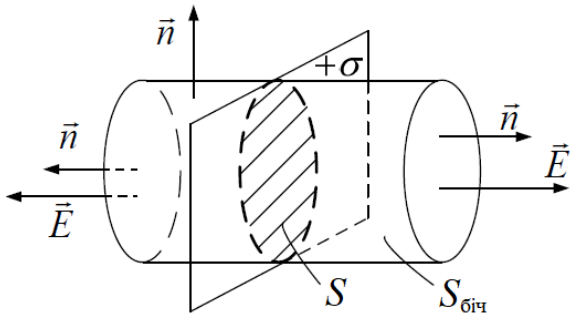


Рисунок 15.4 - До виведення напруженості електричного поля нескінченої рівномірно зарядженої площини

Дві рівномірно, з однаковою густиною σ, різнойменно заряджені

нескінченні паралельні площини утворюють однорідне електричне поле. Напруженість E поля між площинами визначається співвідношенням:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (15.12)$$

Поле рівномірно зарядженої сферичної поверхні. Поле, що створюване сферичною поверхнею радіусу R, зарядженою з постійною поверхневою густиною заряду σ, буде центрально-симетричним (рис. 15.5).

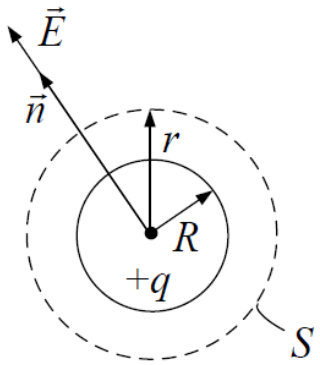


Рисунок 15.5 - До виведення напруженості електричного поля рівномірно зарядженої сферичної поверхні

Це означає, що напрям вектору $\vec{E}$ в будь-якій точці проходить через центр сфери, а величина напруженості залежить від відстані r від центру сфери. Як поверхню, що охоплює, вибирають концентричну із зарядженою сферою поверхню радіусу r. Якщо $r > R$, то всередину поверхні потрапляє увесь заряд q, що розподілений по сфері. Застосувавши теорему Гауса, можна отримати формулу для розрахунку напруженості поля рівномірно зарядженої сферичної поверхні:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \qquad (15.13)$$

Це означає, що зовні кулі напруженість убуває за таким ж законом, як у поля точкового заряду.

Сферична поверхня радіусу $r < R$ не міститиме зарядів, тому усередині сфери, зарядженої з постійною поверхневою густиною, поле відсутнє, тобто $E = 0$.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 16

Електричне поле в діелектриках

Електричний диполь. Електричним диполем називається система двох однакових за величиною різнойменних точкових зарядів $+q$ і $-q$, відстань l між якими значно менше відстані до тих точок, в яких визначається поле системи.

Пряма, що проходить через обидва заряди, називається *віссю диполя*. Вектор, направлений від негативного заряду до позитивного і рівний відстані між ними, називається *плечем диполя* $\vec{l}$ (рис. 16.1).

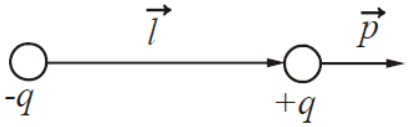


Рисунок 16.1 – До визначення електричного дипольного моменту

Вектор, який співпадає за напрямом з плечем диполя і дорівнює добутку модуля заряду $|q|$ на плече $\vec{l}$, називається електричним моментом диполя або дипольним моментом.

$$\vec{p} = |q|\vec{l} \qquad (16.1)$$

$[p]$ = Кл·м.

Припустимо, що положення довільної точки A відносно центру диполя (точка O) задається радіус- вектором $\vec{r}$. Радіус-вектор $\vec{r}$ утворює з віссю диполя кут θ (рис. 16.2). Використовуючи принцип суперпозиції полів, можна отримати формулу для розрахунку напруженості $\vec{E}$ електричного поля точкового диполя в довільній точці:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} \qquad (16.2)$$

де p – модуль дипольного моменту.

Якщо $\theta = 0$ (точка лежить на осі диполя), то

$$E_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3} \qquad (16.3)$$

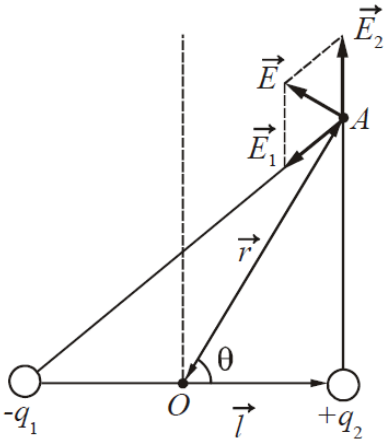


Рисунок 16.2 – Електричне поле диполя

Якщо $\theta = \pi/2$ (точка лежить на прямій, що проходить через центр диполя перпендикулярно осі диполя), то

$$E_{\perp} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} \qquad (16.4)$$

Характерним для напруженості поля диполя є те, що вона убуває з відстанню від диполя як $1/r^3$, тобто швидше, ніж напруженість поля точкового заряду (що убуває як $1/r^2$). На рис. 16.3 показані лінії напруженості $\vec{E}$ поля диполя.

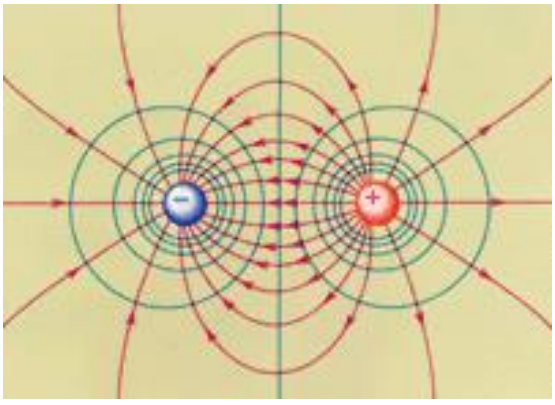


Рисунок 16.3 – Силові та еквіпотенціальні лінії поля диполя

Помістимо диполь в зовнішнє електричне поле напруженістю $\vec{E}$ (рис. 16.4). Заряди $+q$ і $-q$, що створюють диполь, опиняються під дією рівних за величиною, але протилежних за напрямом сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Модуль кожної сили $F = qE$.

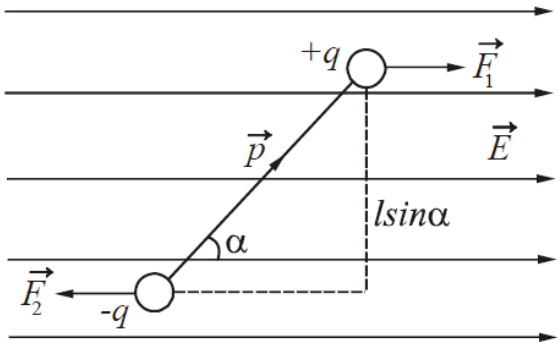


Рисунок 16.4 – Момент пари сил, що діє на диполь в електричному полі

Плече цієї пари сил дорівнює $l\sin\alpha$. Обертаючий момент сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ прагне розвернути диполь уздовж поля. Знайдемо величину моменту:

$$M = Fl\sin\alpha = qEl\sin\alpha.$$

Оскільки $ql = p$, то

$$M = pE\sin\alpha. \qquad (16.5)$$

Даний вираз можна подати у векторному вигляді:

$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}] \qquad (16.6)$$

Таким чином, поведінка диполя в електричному полі визначається його дипольним моментом.

Діелектрики в електричному полі. Діелектриками називаються речовини, які при звичайних умовах практично не проводять електричний струм. На відміну від провідників, в діелектриках (ізоляторах) немає вільних електричних зарядів. Вони складаються з нейтральних атомів або молекул. Заряджені частинки в нейтральному атомі пов’язані один з одним і не можуть переміщатися під дією електричного поля по всьому об’єму діелектрика.

Діелектрик, як і будь-яка інша речовина, складається з атомів або молекул, кожна з яких в цілому електрично нейтральна.

Якщо замінити позитивні заряди ядер молекул сумарним зарядом $+q$, який знаходиться в, так би мовити, "центрі ваги" позитивних зарядів, а заряд усіх електронів – сумарним негативним зарядом $–q$, що знаходиться в "центрі ваги" негативних зарядів, то молекули можна розглядати як електричні диполі з

електричним моментом.

Розрізняють три типи діелектриків.

1) *Діелектрики з неполярними молекулами*, симетричні молекули яких при відсутності зовнішнього поля мають нульовий дипольний момент (наприклад, H_2, N_2, O_2, CCl_4 та ін.)

2) *Діелектрики з полярними молекулами*, молекули яких внаслідок асиметрії мають ненульовий дипольний момент (наприклад H_2O, HCl, NH_3 та ін.). При відсутності зовнішнього електричного поля осі молекулярних диполів за теплового руху орієнтовані хаотично, так що на поверхні діелектрика і в будь-якому елементі об'єму електричний заряд в середньому дорівнює нулю.

3) *Іонні діелектрики* (наприклад, NaCl). Іонні кристали являють собою просторові ґрати з правильним чергуванням іонів різних знаків.

Відповідно трьом видам діелектриків розрізняють три види поляризації.

1) *Електронна* (або *деформаційна*) поляризація діелектрика з неполярними молекулами – це поява під впливом електричного поля орієнтованих вздовж поля диполів за рахунок деформації електронних оболонок, внаслідок чого виникає наведений дипольний момент у атомів або молекул діелектрика.

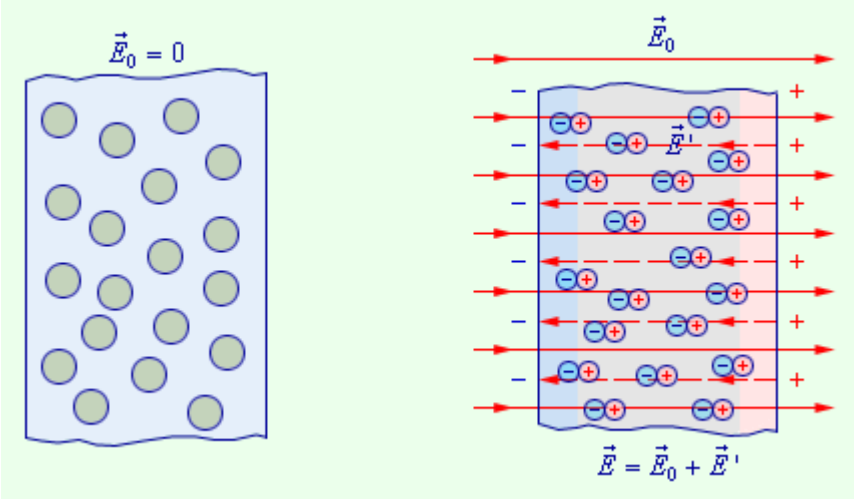


Рисунок 16.5 - Поляризація діелектрика з неполярними молекулами

2) *Орієнтаційна* (або *дипольна*) поляризація діелектрика з полярними молекулами – орієнтація наявних дипольних моментів молекул вздовж поля (ця орієнтація тим сильніша, чим більша напруженість електричного поля і чим

нижче температура).

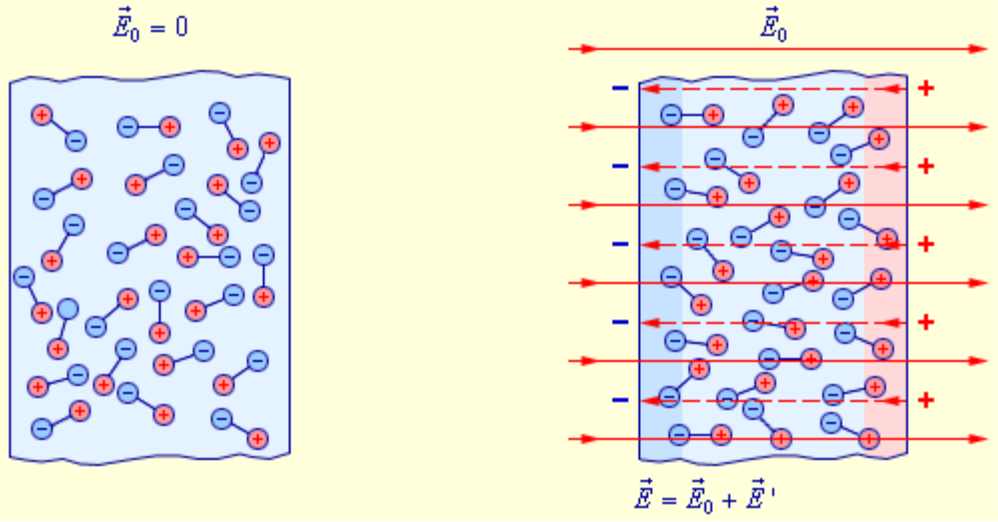


Рисунок 16.6 - Орієнтаційна поляризація діелектрика з полярними молекулами

3) *Іонна* поляризація діелектрика з іонними кристалічними ґратами – зміщення позитивних іонів уздовж поля, а негативних іонів – проти поля призводить до виникнення дипольних моментів.

Поле усередині діелектрика. При внесенні діелектрика в зовнішнє електричне поле в ньому виникає певний перерозподіл зарядів, що входять до складу атомів або молекул. У результаті такого перерозподілу на поверхні діелектричного зразка з'являються надлишкові некомпенсовані так звані *зв'язані заряди* (рис. 16.7). Всі заряджені частинки, що утворюють макроскопічні зв'язані заряди, як і раніше, входять до складу своїх атомів.

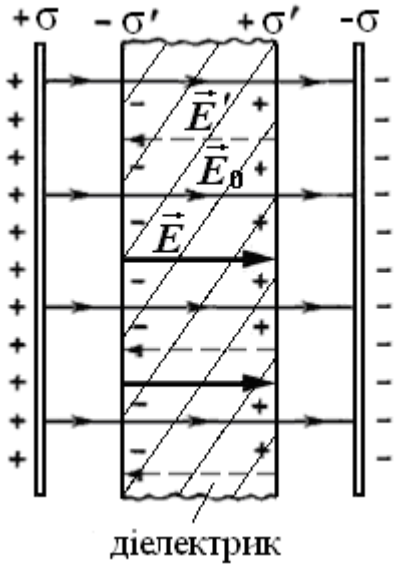


Рисунок 16.7 - Зв'язані заряди на поверхні діелектрика

Зв’язані заряди створюють електричне поле, яке всередині діелектрика направлено протилежно вектору напруженості зовнішнього поля $\vec{E}_0$. Цей процес називається *поляризацією діелектрика*. У результаті повне електричне поле всередині діелектрика виявляється за модулем менше зовнішнього поля.

Для кількісного опису поляризації діелектрика вводять векторну величину, яку називають поляризованістю.

Поляризованість ($\vec{P}_V$) – це векторна фізична величина, яка дорівнює дипольному моменту одиниці об’єму діелектрика:

$$\vec{P}_V = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i, \qquad (16.7)$$

де V – об’єм діелектрика.

$[P_V]$ = Кл·м/м^3 = Кл/м^2.

У слабких полях поляризованість ізотропних діелектриків пропорційна напруженості електричного поля:

$$\vec{P}_V = \chi\varepsilon_0\vec{E} \qquad (16.8)$$

де χ – діелектрична сприйнятливість середовища – величина, що характеризує електричні властивості діелектрика.

Діелектрична сприйнятливість χ величина безрозмірна, завжди позитивна, для більшості діелектриків її значення складає декілька одиниць.

Поле $\vec{E}'$ всередині діелектрика, створене зв’язаними зарядами, спрямоване проти зовнішнього поля $\vec{E}_0$, створюваного вільними зарядами. Результуюче поле всередині діелектрика

$$E = E_0 - \frac{P}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\chi\varepsilon_0 E}{\varepsilon_0} = E_0 - \chi E$$

Тоді напруженість результуючого поля всередині діелектрика дорівнює

$$E = \frac{E_0}{1+\chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}$$

тобто маємо зв’язок діелектричної проникності ε з діелектричною сприйнятливістю χ:

$$\varepsilon = 1 + \chi$$

Діелектрична проникність середовища – це характеристика речовини, яка показує, в скільки разів поле усередині однорідного діелектрика менше ніж у вакуумі.

Сегнетоелектрики – це діелектрики, які можуть мати спонтанні (мимовільні) поляризованості за умов відсутності зовнішнього електричного поля. Таку назву вони отримали від сегнетової солі, на якій вперше було відкрите дане явище.

Сегнетоелектрики мають ряд особливостей:

1. Відносна діелектрична проникність може досягати значень 10^3.

2. Залежність поляризованості P_V від напруженості зовнішнього електричного поля E має нелінійний характер (див. гілку 1 на рис. 16.8). Отже, діелектрична проникність залежить від напруженості зовнішнього поля.

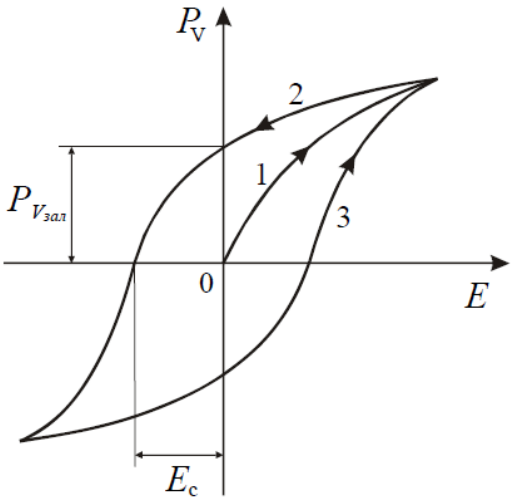


Рисунок 16.8 – Петля гістерезису сегнетоелектрика

3. У сегнетоелектриках спостерігається явище гістерезису («гістерезис» (грец.) – запізнення). При циклічних змінах поля залежність P_V від E відображається кривою, яка називається петлею гістерезису. Зі збільшенням напруженості електричного поля E вектор поляризації зростає, досягаючи насичення (крива 1, рис. 16.8). Зменшення P_V із зменшенням E відбувається за кривою 2. При $E = 0$ сегнетоелектрик зберігає залишкову поляризованість $P_{Vзал}$. Щоб поляризованість досягла нуля, треба прикласти поле зворотного напряму

$(-E_c)$. Величина E_c називається коерцитивною силою (coercitive (лат.) – утримування). Якщо E змінювати далі, то P_V буде змінюватись за кривою 3.

4. Для кожного сегнетоелектрика існує температура, при якій він втрачає свої незвичайні властивості і стає звичайним діелектриком. Ця температура називається *точкою Кюрі*. Сегнетова сіль має дві точки Кюрі: –15°С і +25°С.

Сегнетоелектриками можуть бути тільки кристалічні речовини. В кристалі виникають області, в межах кожної з яких дипольні моменти частинок паралельні один одному. Напрями поляризації різних областей різні. Області спонтанної поляризації називаються *доменами*. Під дією зовнішнього поля електричні моменти доменів повертаються як ціле, і встановлюються за напрямом поля.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 17
Провідники в електричному полі

Основна особливість провідників – наявність вільних зарядів (електронів), які беруть участь в тепловому русі і можуть переміщатися по всьому об’єму провідника. Типові провідники – метали.

У відсутності зовнішнього поля в будь-якому елементі об’єму провідника негативний заряд вільних електронів компенсується позитивним зарядом іонних ґрат. У провіднику, внесеному в електричне поле, відбувається перерозподіл вільних зарядів, у результаті чого на поверхні провідника виникають нескомпенсовані позитивні і негативні заряди (рис. 17.1). Цей процес називають *електростатичною індукцією*, а заряди, що з’явилися на поверхні провідника – індукційними зарядами.

Індукційні заряди створюють своє власне поле $\vec{E}'$, яке компенсує зовнішнє поле $\vec{E}_0$ у всьому обсязі провідника:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' = 0$$

Повне електростатичне поле всередині провідника дорівнює нулю, а потенціали у всіх точках однакові і рівні потенціалу на поверхні провідника.

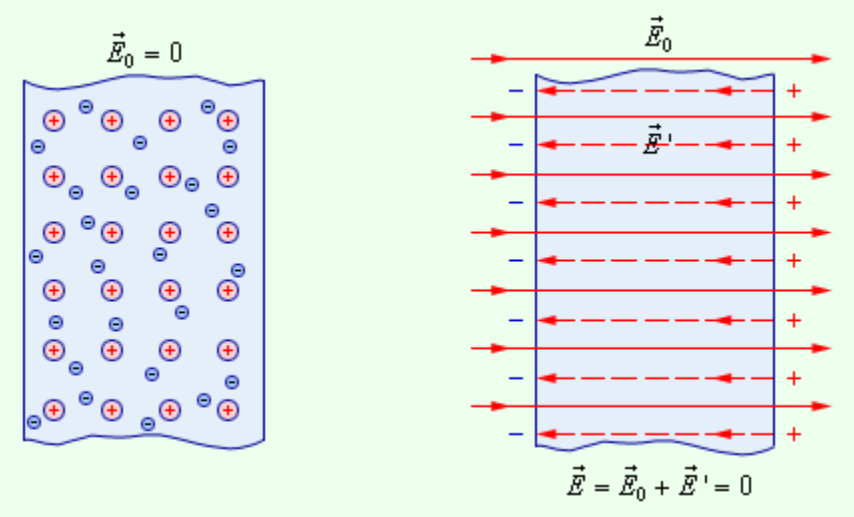


Рисунок 17.1 - Електростатична індукція

Оскільки поверхня провідника є еквіпотенціальною, силові лінії біля поверхні повинні бути перпендикулярні до неї.

Якщо всередині провідника утворити порожнину, то електричне поле усередині порожнини дорівнюватиме нулю. На цьому принципі засноване явище електростатичного захисту. Коли прилад хочуть захистити від зовнішніх полів, його оточують провідним екраном (рис.17.2). Зовнішнє поле компенсується усередині екрану індукованими зарядами, що виникають на його поверхні. Екран діє і в тому випадку, якщо він не суцільний, а виконаний у вигляді сітки.

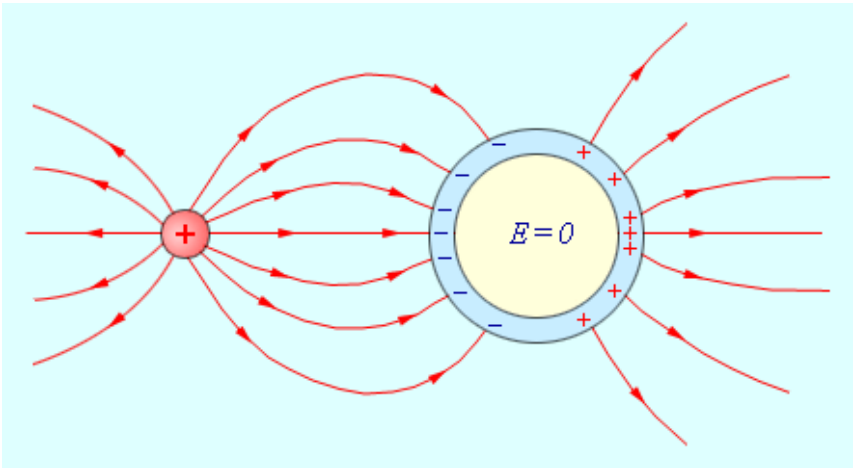


Рисунок 17.2 - Електростатичний захист. Поле в металевій порожнині дорівнює нулю

Електрична ємність відокремленого провідника. Розглянемо відокремлений провідник – провідник, віддалений від інших тіл і зарядів. З досвіду відомо, що різні провідники, будучи однаково зарядженими, мають різні потенціали.

Фізична величина C, що дорівнює відношенню заряду провідника до його потенціалу, називається *електричною ємністю цього провідника*.

$$C = \frac{dq}{d\varphi} \qquad (17.1)$$

Електрична ємність (електроємність) – це скалярна фізична величина, що характеризує здатність провідника накопичувати електричний заряд, яка дорівнює заряду, який підвищує потенціал провідника на один вольт:

$$[C] = \text{Кл/В} = \Phi \text{ (фарад)}.$$

Фарад – це дуже велика величина. Таку ємність мала б куля радіусом $9 \cdot 10^9$ м, тобто радіус якої у 1500 разів більше ніж радіус Землі.

На практиці електроємність виміряють в міліфарадах (мФ), мікрофарадах (мкФ), нанофарадах (нФ) і пікофарадах (пФ).

Електроємність залежить від форми, розмірів провідника і діелектричної проникності середовища, що оточує провідник.

Електроємність відокремленої електропровідної сфери. Якщо надати сфері радіуса R заряд q, то для відстані $r > R$, потенціал поля визначається співвідношенням:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} \qquad (17.2)$$

На поверхні сфери, тобто при $r = R$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}$$

Тоді

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R \qquad (17.3)$$

Відокремлені провідники мають невелику ємність. Наприклад, куля

розміром із Землю має електроємність 700 мкФ. На практиці необхідні пристрої, здатні накопичувати на собі («конденсувати») великі заряди. Їх називають *конденсаторами*.

Конструктивно конденсатор – це дві провідникові пластинки, які розташовані близько одна від одної і розділені діелектриком. Утворюючі конденсатор провідники називають обкладками. Одна з обкладок заряджається позитивно, інша – негативно.

Умовне позначення на схемах:

Щоб зовнішні тіла не впливали на ємність конденсатора, обкладкам надають таку форму і так їх розташовують, щоб поле було зосереджено усередині конденсатора. Цій умові відповідають:

- ✓ дві пластини, що розташовані близько одна до одної;
- ✓ два коаксіальні циліндри;
- ✓ дві концентричні сфери.

Відповідно до форми конденсатори бувають:

- ✓ плоскі;
- ✓ циліндричні;
- ✓ сферичні.

Основною характеристикою конденсатора є електроємність C. За визначенням, електроємність дорівнює відношенню заряду на конденсаторі до різниці потенціалів між обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U} \qquad (17.4)$$

де $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напруга між обкладками;

q – заряд позитивної обкладки.

Величина електроємності конденсатора визначається формою і розмірами обкладок і величиною зазору між ними, а також діелектричними властивостями середовища, що заповнює простір між обкладками.

Наведемо приклади формул розрахунку електроємності деяких видів конденсаторів.

1. Плоский конденсатор (рис. 17.3).

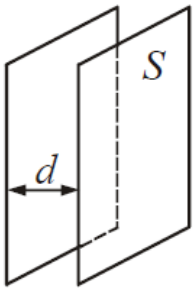


Рисунок 17.3 – Плоский конденсатор

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \qquad (17.5)$$

де S – площа однієї з обкладок;

d – відстань між обкладками;

ε – відносна діелектрична проникність середовища (діелектрика), яке знаходиться між обкладками.

2. Циліндричний конденсатор (рис. 17.4).

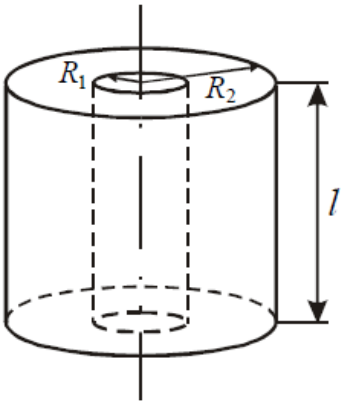


Рисунок 17.4 – Циліндричний конденсатор

Електроємність конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \qquad (17.6)$$

де l – довжина конденсатора;

R_1 і R_2 – радіуси внутрішньої і зовнішньої обкладок.

Крім електроємності кожний конденсатор характеризується граничною

напругою U_{max}, яку можна прикладати до обкладок конденсатора, не побоюючись пробою. При перевищенні цієї напруги руйнується діелектрик і конденсатор виходить з ладу.

Конденсатори можна з'єднувати в батареї різними способами.

У разі *послідовного з'єднання конденсаторів* (рис. 17.5) вони з'єднуються різнойменно зарядженими обкладками.

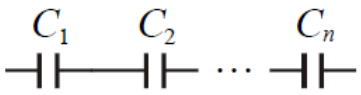


Рисунок 17.5 – Послідовне з'єднання конденсаторів

При цьому виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} q_{заг} &= q_1 = q_2 = \ldots = q_n \\ U &= U_1 + U_2 + \ldots + U_n \\ \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} \end{aligned} \qquad (17.7)$$

Результуюча ємність завжди менше мінімальної електроємності, що входить до батареї. При послідовному з'єднанні зменшується можливість пробою конденсаторів, тому що на кожному конденсаторі є лише частина загальної різниці потенціалів, що подана на всю батарею.

У разі *паралельного з'єднання конденсаторів* (рис. 17.6) з'єднуються однойменні обкладки.

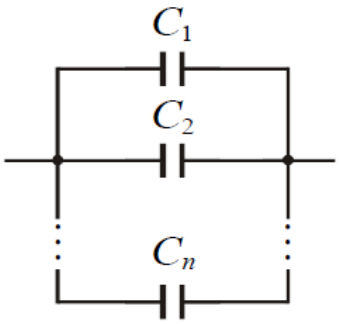


Рисунок 17.6 – Паралельне з'єднання конденсаторів

При цьому виконуються співвідношення:

$$q_{заг} = q_1 + q_2 + ... + q_n$$
$$U = U_1 = U_2 + ... = U_n \qquad (17.8)$$
$$C = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

Паралельне з'єднання конденсаторів використовують для отримання великої електроємності.

Енергія електричного поля.

1. *Енергія зарядженого відокремленого провідника*.

Нехай є відокремлений провідник. Позначимо: q – заряд провідника; C – електроємність; φ – потенціал.

Збільшимо заряд цього провідника на dq. При перенесенні заряду dq з нескінченності на відокремлений провідник потрібно виконати елементарну роботу проти сил поля

$$\delta A = \varphi dq = C\varphi d\varphi,$$

де $dq = Cd\varphi.$

Повна робота

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

За законом збереження енергії

$$A = \Delta W = W_2 - W_1$$

Враховуючи, що $W_1 = 0$ (оскільки $\varphi_1 = 0$), отримаємо енергію зарядженого відокремленого провідника:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}. \qquad (17.9)$$

2. *Енергія зарядженого конденсатора*.

Як будь-який заряджений провідник, конденсатор має енергію. Енергія зарядженого конденсатора визначається співвідношеннями:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}. \qquad (17.10)$$

Формулу для енергії поля конденсатора можна перетворити, використовуючи величини, що характеризують електричне поле.

Ємність плоского конденсатора $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$. Напруга на обкладках конденсатора пов'язана з напруженістю електричного поля співвідношенням:

$$U = Ed.$$

Підстановка у формулу (17.10) дає:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \cdot \frac{E^2 d^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V, \qquad (17.11)$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора.

Якщо поле є однорідним (що має місце в плоскому конденсаторі), то укладена в ньому енергія розподіляється в просторі з постійною густиною.

Величина, що дорівнює відношенню енергії поля до займаного об'єму, називається *об'ємною густиною енергії*.

$$w = \frac{W}{V}. \qquad (17.12)$$

Для електричного поля об'ємна густина енергії:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (17.13)$$

Формула (17.10) пов'язує енергію з ємністю конденсатора, а формула (17.13) – густину енергії з напруженістю електричного поля.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 18

Постійний електричний струм

Електричний струм. Якщо ізольований провідник помістити в електричне поле $\vec{E}$, то на вільні заряди q в провіднику буде діяти сила $\vec{F} = q\vec{E}$. У результаті в провіднику виникає короткочасне переміщення вільних зарядів. Цей процес закінчиться тоді, коли власне електричне поле зарядів, що виникли на поверхні провідника, компенсує повністю зовнішнє поле. Результуюче електростатичне поле усередині провідника дорівнюватиме нулю.

Однак в провідниках при певних умовах може виникнути безперервний

впорядкований рух вільних носіїв електричного заряду. Такий рух називається *електричним струмом*.

Для протікання струму необхідна наявність в провіднику (або в даному середовищі) заряджених частинок, які можуть переміщатися в межах всього провідника. Такі частинки називаються носіями заряду (або носіями струму). Ними можуть бути електрони, іони або макроскопічні частинки, які несуть на собі заряд, наприклад, заряджені порошинки. Струм виникає за умови, що всередині провідника існує електричне поле (рис. 18.1).

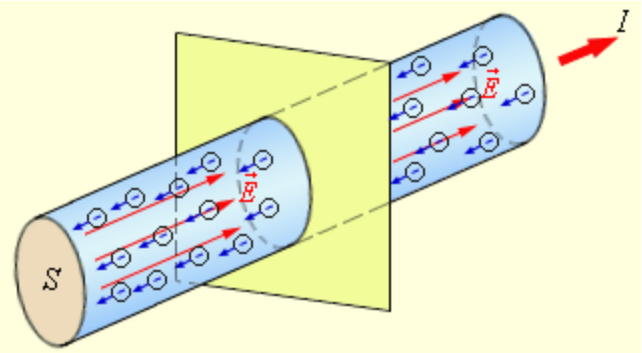


Рисунок 18.1 - Впорядкований рух електронів в металевому провіднику і струм I: S – площа поперечного перерізу провідника, $\vec{E}$ – електричне поле

Струм, що виникає в провідних середовищах, називається *струмом провідності*. Прикладом струму провідності є струм у металах. Для існування постійного електричного струму провідності необхідне виконання наступних умов.

1. Наявність вільних носіїв заряду.

2. Наявність зовнішнього електричного поля, енергія якого повинна витрачатися на впорядковане переміщення електричних зарядів.

3. Коло постійного струму провідності повинно бути замкненим.

Кількісною характеристикою електричного струму є величина струму.

Струм (I) – скалярна фізична величина, що дорівнює заряду, який переноситься через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (18.1)$$

$[I]$ = А (ампер).

За напрям струму умовно взято напрям руху позитивних зарядів. Якщо струм і його напрям не змінюються, то струм називається *постійним*. Для постійного струму

$$I = \frac{q}{t}. \qquad (18.2)$$

Іншою характеристикою струму є густина струму.

Густина струму ($\vec{j}$) – векторна фізична величина, яка дорівнює електричному заряду, що переноситься за одиницю часу через одиничну поверхню, розташовану перпендикулярно до напряму руху носіїв заряду.

$$j = \frac{dq}{dt \cdot dS_{\perp}} = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \qquad (18.3)$$

Для постійного струму

$$j = \frac{I}{S_{\perp}}, \qquad (18.4)$$

де $S_{\perp}$ – площа поперечного перерізу провідника.

За напрям вектору густини струму приймається напрям руху позитивних носіїв заряду.

$$\vec{j} = j\frac{\vec{v}}{v}, \qquad (18.5)$$

де $\vec{v}$ – швидкість руху позитивних частинок.

Якщо струм створюється носіями обох знаків, то

$$\vec{j} = q_{+}n_{+}\vec{v}_{+} + q_{-}n_{-}\vec{v}_{-} \qquad (18.6)$$

де n_{+} і n_{-} – концентрації позитивних і негативних носіїв заряду;

$\vec{v}_{+}$ і $\vec{v}_{-}$ – їх середні швидкості.

У скалярному вигляді:

$$j = q_{+}n_{+}v_{+} + q_{-}n_{-}v_{-} \qquad (18.7)$$

Знаючи вектор густини струму в кожній точці простору, можна знайти величину струму через довільний переріз S:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \qquad (18.8)$$

Електрорушійна сила. Постійний електричний струм може бути створений тільки в замкнутому колі, в якому вільні носії заряду циркулюють по замкнутих траєкторіях. Електричне поле в різних точках такого кола незмінно в часі. Для існування постійного струму необхідна наявність в електричному колі пристрою, здатного створювати і підтримувати різниці потенціалів на ділянках кола за рахунок роботи сил неелектростатичного походження.

Такі пристрої називаються *джерелами постійного струму*. Сили не електростатичного походження, що діють на вільні носії заряду з боку джерел струму, називаються *сторонніми силами*. Під дією сторонніх сил електричні заряди рухаються всередині джерела струму *проти* сил електростатичного поля, завдяки чому в замкнутому колі може підтримуватися постійний електричний струм.

При переміщенні електричних зарядів по колу постійного струму, сторонні сили, що діють всередині джерел струму, здійснюють роботу.

Фізична величина, що дорівнює відношенню роботи $A_{ст}$ сторонніх сил при переміщенні заряду q до величини цього заряду, називається *електрорушійною силою джерела* (ЕРС):

$$\varepsilon = \frac{A_{ст}}{q}. \qquad (18.9)$$

$[\varepsilon]$ = Дж/Кл = В.

Коло постійного струму можна розбити на окремі ділянки. Ті ділянки, на яких не діють сторонні сили (тобто ділянки, що не містять джерел струму), називаються *однорідними*. Ділянки, які включають джерела струму, називаються *неоднорідними*.

Напруга. При переміщенні одиничного позитивного заряду по будь-якому замкненому електричному колу роботу здійснюють як електростатичні (кулонівські), так і сторонні сили. Робота з переміщення заряду уздовж провідника в процесі протікання по ньому електричного струму виконується і

кулонівськими, і сторонніми силами. Повна робота з переміщення заряду

$$A = A_{\text{кул}} + A_{\text{ст}}. \qquad (18.10)$$

Величина, що дорівнює відношенню повної роботи, що виконана електростатичними і сторонніми силами з переміщення заряду, до величини цього заряду називається *напругою* або *спадом напруги* на даній ділянці кола.

$$U = \frac{A}{q}. \qquad (18.11)$$

Нагадаємо, що відношення

$$\frac{A_{\text{кул}}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (18.12)$$

Враховуючи (18.10), отримаємо

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon. \qquad (18.13)$$

Напруга на ділянці кола (рис. 18.2) дорівнює сумі різниці потенціалів і електрорушійної сили.

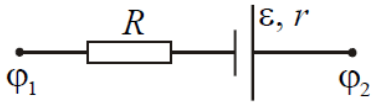


Рисунок 18.2 – Приклад неоднорідної ділянки кола

Для однорідної ділянки кола ($\varepsilon = 0$):

$$U = \varphi_1 - \varphi_2$$

тобто напруга на однорідній ділянці співпадає з різницею потенціалів на кінцях ділянки.

Закон Ома для однорідної ділянки кола. Німецький фізик Георг Ом у 1826 році експериментально встановив закон, згідно з яким *величина струму, який протікає по однорідному металевому провіднику, пропорційна напрузі на цьому провіднику*:

$$I = \frac{U}{R}. \qquad (18.14)$$

де R – електричний опір.

[R] = Ом.

Електричний опір (R) – скалярна фізична величина, що характеризує властивість провідника протидіяти пропусканню електричного струму і дорівнює відношенню напруги U на кінцях провідника до величини струму I, що протікає по ньому:

$$R = \frac{U}{I}. \qquad (18.15)$$

Опір провідників, наявність електричного струму в яких приводить до виділення тепла, називається *активним*. Опір провідника залежить від матеріалу провідника і його геометричних розмірів. Для однорідного провідника сталого перерізу опір може бути розрахований за формулою:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad (18.16)$$

де l – довжина провідника;

S – площа поперечного перерізу провідника;

ρ – питомий електричний опір.

Питомий електричний опір провідника – величина, що характеризує матеріал провідника і дорівнює опору однорідного провідника одиничної довжини і одиничної площі поперечного перерізу.

[ρ] = Ом·м.

Опір металів залежить від температури. З великим ступенем точності можна вважати, що залежність опору металів від температури є лінійною:

$$R = R_0 (1 + \alpha t), \qquad (18.17)$$

де R – опір за температури t, °С;

R_0 – опір за 0°С

α – температурний коефіцієнт опору (ТКО).

Температурний коефіцієнт характеризує температурну стабільність матеріалу і дорівнює відносній зміні опору провідника при зміні температури на 1 градус.

Для чистих металів температурний коефіцієнт опору є величиною порядку $\alpha \approx 0{,}004\ K^{-1}$. Для деяких електротехнічних сплавів (манганін, константан) α настільки малий, що ним можна нехтувати і в достатньо широкому інтервалі температур вважати опір незалежним від температури.

Величина G, яка є зворотною опору, називається *електропровідністю*:

$$G = \frac{1}{R}. \qquad (18.18)$$

$[G] = Ом^{-1} = См$ (сіменс).

При розгляді фізичної природи питомого електричного опору використовують поняття *питомої електропровідності* σ. Питома електропровідність σ пов'язана з питомим електричним опором ρ співвідношенням:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \qquad (18.19)$$

$[\sigma] = 1/(Ом \cdot м) = См/м$.

Залежність величини струму від напруги називається вольт-амперною характеристикою (ВАХ). Для металів ця залежність має лінійний характер (рис. 18.3).

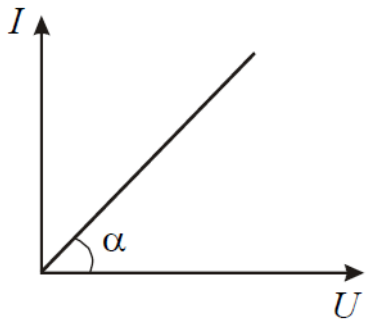


Рисунок 18.3 – Вольт-амперна характеристика металевого провідника

Послідовне з'єднання провідників. У разі послідовного з'єднання провідників кінець попереднього провідника з'єднується з початком наступного і між провідниками струм не розгалужується (рис. 18.4).

Якщо n провідників опором R_1, R_2 ..., R_n з'єднані між собою послідовно, то крізь провідники протікає однаковий струм і напруга на кінцях з'єднання

дорівнює сумі напруг на окремих провідниках.

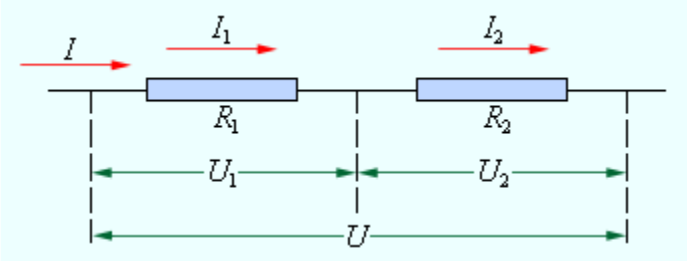


Рисунок 18.4 – Послідовне з’єднання провідників

$$\begin{aligned} I &= I_1 = I_2 = \ldots = I_n \\ U &= U_1 + U_2 + \ldots + U_n \\ R &= R_1 + R_2 + .. + R_n \end{aligned} \qquad (18.20)$$

Якщо початки провідників з’єднані в одній точці (вузлі), а кінці в іншій, то з’єднання називають паралельним (рис. 18.5).

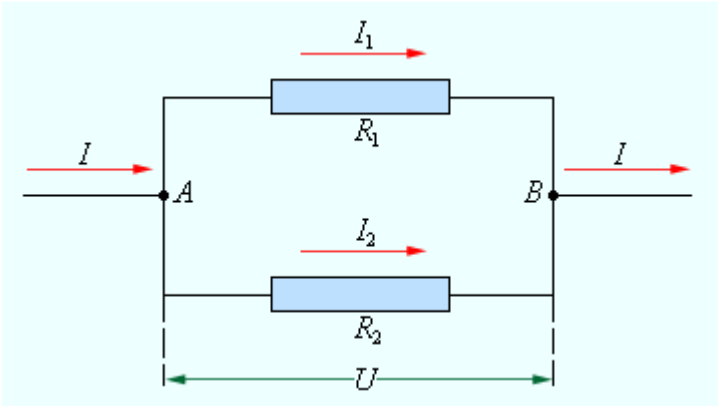


Рисунок 18.5 – Паралельне з’єднання провідників

У разі паралельного з’єднання провідників струм у нерозгалуженій частині кола дорівнює сумі струмів, що протікають у розгалужених ділянках кола, напруга на паралельно з’єднаних ділянках кола однакова.

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \ldots + I_n \\ U &= U_1 = U_2 = \ldots = U_n \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} \end{aligned} \qquad (18.21)$$

Закон Ома для неоднорідної ділянки кола. Вище було доведено (див. формулу (18.13)), що напруга між двома точками електричного кола вимірюється

роботою, яку виконують електростатичні і сторонні сили під час переміщення по колу одиничного позитивного заряду з однієї точки в іншу, тобто напруга дорівнює сумі різниці потенціалів і електрорушійної сили. Тоді

$$I = \frac{U}{R} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon}{R}, \qquad (18.22)$$

або

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon. \qquad (18.23)$$

Вираз (18.23) називається законом Ома для неоднорідної ділянки кола.

Якщо коло замкнено і містить джерело струму, ЕРС якого ε, то $\varphi_1 = \varphi_2$. Для замкненого кола закон Ома прийме вигляд:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}, \qquad (18.24)$$

де r – внутрішній опір джерела струму;

R – опір навантаження;

$R + r$ – повний опір кола.

Закон Ома в диференціальній формі. У законі Ома для ділянки кола виразимо струм через густину струму:

$$I = j \cdot S;$$

напругу на кінцях провідника – через напруженість поля:

$$U = E \cdot l;$$

опір – через геометричні розміри провідника:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Зробимо підстановку у формулу (18.14):

$$jS = \frac{El}{\rho \frac{l}{S}}.$$

Провівши скорочення, отримаємо

$$j = \frac{E}{\rho}. \qquad (18.25)$$

З урахуванням формули (18.19) вираз (18.25) можна переписати у вигляді:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \qquad (18.26)$$

Густина струму пропорційна напруженості поля в даній точці провідника. Цей вираз називається законом Ома в диференціальній формі.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 19

Розгалужені кола. Правила Кірхгофа

Розрахунок розгалужених електричних кіл постійного струму значно спрощується, якщо використовувати правила, які сформульовані Кірхгофом. Вони встановлюють співвідношення між струмами і напругами. Цих *правил два*. Перше відноситься до вузлів кола. *Вузлом* називається точка, в якій сходиться більш ніж два провідника (рис. 19.1).

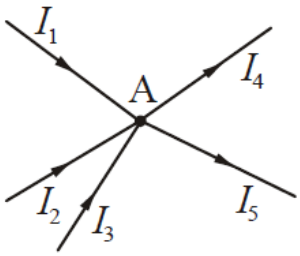


Рисунок 19.1 – Приклад вузла електричної схеми

Перше правило: алгебрична сума струмів, які сходяться у вузлі, дорівнює нулю, тобто

$$I_1 + I_2 + ... + I_N = \sum_{i=1}^{N} I_i = 0. \qquad (19.1)$$

Струми вважаються позитивними, якщо вони підходять до вузла. Струми, що відходять від вузла, вважаються негативними.

Для вузла А, зображеного на рис. 19.1, перше правило запишеться таким чином:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Друге правило: у будь-якому замкненому контурі, довільно обраному в

електричній схемі, алгебрична сума добутків струмів I_i на опори R_i відповідних ділянок цього контуру дорівнює алгебричної сумі ЕРС, які діють у даному контурі:

$$\sum_{i=1}^{N} I_i R_i = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i, \qquad (19.2)$$

де I_i – струм на i-й ділянці кола;

R_i – активний опір i-ї ділянки кола;

ε_i – ЕРС джерел струму на i-й ділянці кола;

N – число ділянок, що містять активний опір;

k – число джерел струму.

Розрахунок розгалуженого кола постійного струму проводиться в такій послідовності:

1) довільно обираються напрями струмів у всіх ділянках кола і напрями обходу контурів;

2) записуються (n – 1) незалежних рівнянь першого правила струмів, де n – число вузлів у схемі;

3) довільні замкнені контури виділяються так, щоб кожний новий контур містив, принаймні, одну ділянку кола, що не входить в раніше розглянуті контури;

4) якщо струми співпадають з обраним напрямом обходу контуру, то вони вважаються додатними. ЕРС вважаються додатними, якщо вони підвищують потенціал у напрямі обходу контуру (див. рис. 19.2).

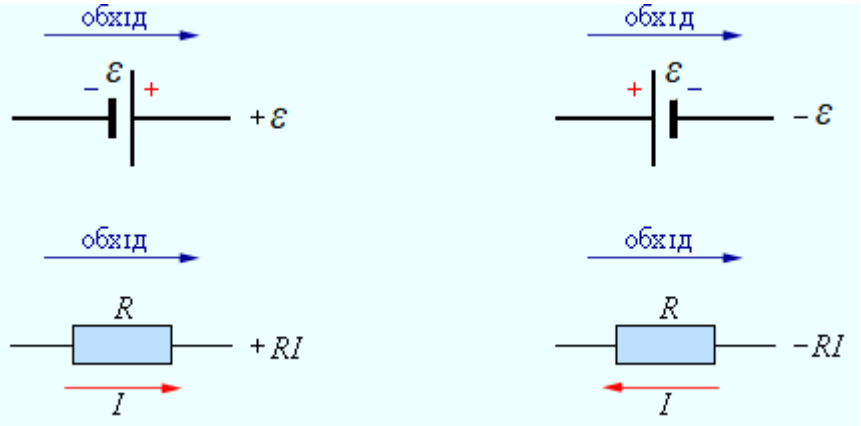


Рисунок 19.2 – Правила вибору знаків

5. Загальна кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих струмів.

6. Шляхом розв'язання отриманої системи лінійних алгебричних рівнянь знаходять невідомі електричні струми.

Наприклад, для контуру AR_1BR_2A (рис. 19.3) друге правило Кірхгофа запишеться таким чином:

$$I_1\left(R_1+r_1\right)+I_2\left(R_2+r_2\right)=\varepsilon_1-\varepsilon_2,$$

де r_i –опір i-го джерела. Контур обходили за годинниковою стрілкою.

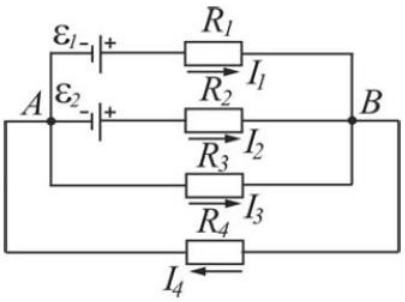


Рисунок19.3 – Приклад розгалуженої схеми

Робота і потужність струму. При впорядкованому русі заряджених частинок у провіднику електричне поле виконує роботу. Її прийнято називати *роботою струму*.

Розглянемо довільну ділянку кола постійного струму, до кінців якої прикладена напруга U. За час t через переріз провідника проходить заряд $q = It$. Це означає, що заряд It переноситься за час t з одного кінця провідника в інший. При цьому сили електростатичного поля і сторонні сили, які діють на даній ділянці, виконують роботу:

$$A = Uq = UIt. \qquad (19.3)$$

Нагадаємо, що напруга U визначається як робота, що виконана електростатичними і сторонніми силами під час переміщення одиничного позитивного заряду.

Поділивши роботу A на час t, за який вона виконується, отримаємо потужність, що розвивається струмом на даній ділянці кола:

$$P = UI \qquad (19.4)$$

У зовнішній частині кола з опором R при постійному струмі виділяється корисна потужність

$$P = I^2 R, \qquad (19.5)$$

або з урахуванням (18.24) для повного кола корисна потужність на опорі R

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{\left(R + r\right)^2}. \qquad (19.6)$$

При цьому загальна потужність джерела струму на зовнішній і внутрішній частинах електричного кола

$$P_{\text{дж}} = \varepsilon I = \frac{\varepsilon^2}{R + r}. \qquad (19.7)$$

Відношенням корисної потужності до загальної потужності джерела визначають *коефіцієнт корисної дії* (ККД) джерела струму

$$\eta = \frac{P}{P_{\text{дж}}}, \qquad \text{або} \qquad \eta = \frac{R}{R + r}, \qquad (19.8)$$

Ця потужність може витрачатися на виконання роботи даною ділянкою кола над зовнішніми тілами, на протікання хімічних реакцій, на нагрівання даної ділянки кола і т.п.

Як видно з формули (19.8), при заданих характеристиках ε і r джерела струму, корисна потужність залежить від опору R зовнішньої частини кола (опору споживача енергії електричного струму). Існує оптимальне значення опору R, при якому дане джерело струму віддає максимальну потужність споживачеві. Для визначення цього опору достатньо дослідити на максимум функцію $P(R)$, задану рівнянням (19.6). З умови максимуму $dP/dR = 0$ одержуємо

$$1 - \frac{2R}{R + r} = 0.$$

Звідси знаходимо, що $R = r$, тобто оптимальний опір навантаження даного джерела струму дорівнює внутрішньому опорові цього джерела. За цієї умови η

= 0,5.

При такому режимі роботи джерела струму половина загальної потужності буде корисною.

З формули (19.8) випливає, що джерело струму розвиває найбільшу потужність при $R = 0$ (коротке замикання). У цьому разі вся потужність виділяється всередині джерела і корисна потужність (19.6) дорівнює нулеві. Зі збільшенням R загальна потужність джерела зменшується, наближаючись до нуля при $R \to \infty$, а корисна потужність зростає, сягаючи максимуму при $R = r$, після чого також наближається до нуля при $R \to \infty$.

Якщо провідник нерухомий і в ньому не відбувається хімічних перетворень, то робота поля по переміщенню зарядів йде на зміну внутрішньої енергії провідника, тобто провідник нагрівається. При цьому виділяється кількість тепла:

$$Q = A = UIt.$$

За законом Ома $U = IR$. Зробивши заміну, одержуємо

$$Q = I^2 Rt. \qquad (19.9)$$

Цей вираз називається *законом Джоуля - Ленца*.

Якщо струм змінюється з часом, то

$$Q = \int_0^t I^2(t) R dt. \qquad (19.10)$$

Від формули (19.9), що визначає тепло, яке виділяється у всьому провіднику, можна перейти до виразу, що характеризує виділення тепла у різних місцях провідника. Оскільки

$$R = \rho \frac{l}{S}, \qquad I = jS,$$

то за час dt виділиться тепло:

$$\delta Q = I^2 R dt = \left(jS \right)^2 \rho \frac{l}{S} dt = j^2 \rho l S dt = j^2 \rho V dt, \qquad (19.11)$$

де $lS = V$ – об’єм провідника.

Розділивши (19.11) на об’єм V і на час dt, знайдемо кількість тепла $Q_{пит}$, що виділяється в одиниці об’єму за одиницю часу (питому теплову потужність):

$$Q_{пит} = j^2\rho. \qquad (19.12)$$

Формула (19.12) є диференціальною формою закону Джоуля - Ленца.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 20
Магнітне поле у вакуумі

Магнітне поле встановлене дослідним шляхом. Подібного до того, як навколо електричного заряду існує електростатичне поле, так і навколо провідника зі струмом або навколо постійного магніту виникає силове поле, яке називається *магнітним*. Назву пов’язують з орієнтацією магнітної стрілки під дією поля провідника, в якому тече струм. Важливою особливістю магнітного поля є те, що воно діє тільки на електричні заряди, які рухаються в цьому полі. Дія магнітного поля на струм різна і залежить від форми провідника, розташування провідника, напряму протікання струму. Щоб охарактеризувати магнітне поле необхідно розглянути його дію на певний струм.

У 1820 році датський фізик Х. Ерстед виявив, що магнітна стрілка, яка розташована паралельно прямолінійному провіднику, при пропусканні через нього сталого струму I прагне розвернутися перпендикулярно провіднику (рис. 20.1). При зміні напряму струму стрілка поверталася на 180°. Те ж саме відбувалося, коли стрілка переносилася вгору і розташовувалася над дротом.

У тому ж році А. Ампер встановив, що два провідники, які розташовані паралельно один одному, зазнають взаємного притягнення при пропусканні через них струму в одному напрямі і відштовхуються, якщо струми мають протилежні напрями (рис. 20.2). Сила взаємодії провідників пропорційна величині струмів і обернено пропорційна відстані між ними:

$$F \sim \frac{I_1 \cdot I_2}{d}$$

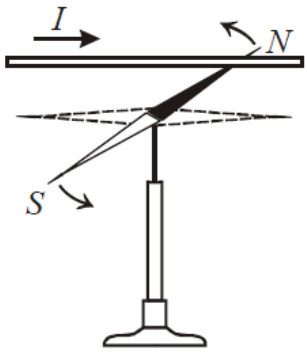


Рисунок 20.1 – Схема досліджень Ерстеда

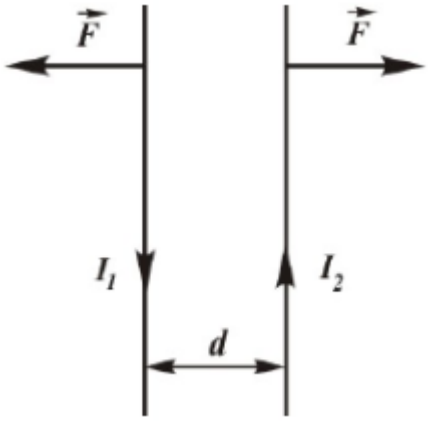


Рисунок 20.2 – Схема досліджень Ампера

Якщо провідник зі струмом помістити між полюсами підковоподібного магніту, то він або втягуватиметься, або виштовхуватиметься з нього залежно від напряму струму (рис. 20.3). Сила дії з боку магнітного поля пропорційна силі струму і довжині провідника:

$$F \sim I \cdot l$$

Таким чином, експерименти показали, що навколо провідників зі струмом і сталих магнітів існує *магнітне поле*, яке виявляється через силову дію на інші провідники зі струмом, сталі магніти, електричні заряди, що рухаються. На відміну від електричного поля магнітне поле не діє на заряд, що покоїться.

Для характеристики здатності магнітного поля виявляти силову дію на провідники зі струмом вводиться фізична величина, яка названа *вектором магнітної індукції*.

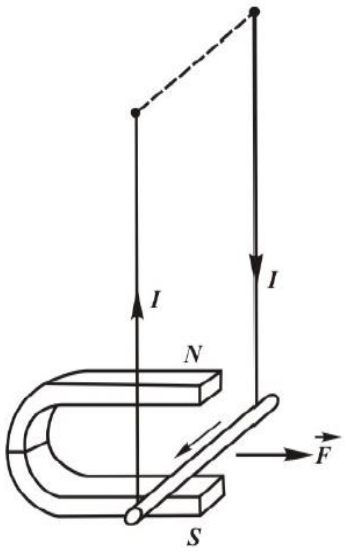


Рисунок 20.3 – Взаємодія постійного магніту з провідником зі струмом

Для дослідження магнітного поля використовується замкнутий плоский контур зі струмом, розміри якого малі порівняно з відстанню до струмів, що створюють магнітне поле. Орієнтація контуру в просторі характеризується напрямом перпендикуляра до площини контуру. В якості додатного напряму прийнято напрям пов'язаний зі струмом, правилом правого гвинта – за додатній напрям нормалі приймається напрям поступального руху гвинта, якщо він обертається в напрямі струму, що тече в рамці (рис. 20.4).

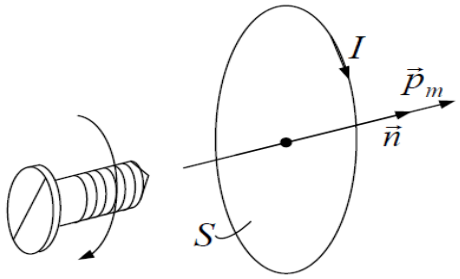


Рисунок 20.4 – До визначення магнітного моменту

Основна характеристика контуру зі струмом – *магнітний момент* $\vec{p}_m$ який визначається за формулою

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n} \qquad (20.1)$$

де I – струм у контурі; S – площа контуру, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до площини контуру.

При розміщенні контуру зі струмом у магнітному полі на нього з боку магнітного поля діє обертальний момент М, під дією якого контур обертається і займає рівноважне положення. Відношення

$$B = \frac{M_{\max}}{I \cdot S} \qquad (20.2)$$

приймають як величину, що характеризує магнітне поле, і називають індукцією магнітного поля в даній точці.

Магнітна індукція ($\vec{B}$) – це векторна фізична величина, яка є силовою характеристикою магнітного поля що дорівнює відношенню максимального обертаючого моменту $M_{\max}$, що діє на контур зі струмом в однорідному магнітному полі, до добутку струму I в контурі на його площу S.

Одиницею вимірювання магнітної індукції є тесла (Т): [В] = $\frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$.

Окрім вектору магнітної індукції для характеристики магнітного поля використовують ще величину $\vec{H}$, яку називають напруженістю магнітного поля. Магнітна індукція і напруженість пов'язані між собою співвідношенням:

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}, \qquad (20.3)$$

де μ - відносна магнітна проникність середовища;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнітна стала;

H - напруженість магнітного поля.

Магнітна проникність середовища μ - це скалярна фізична величина, яка показує, у скільки разів магнітна індукція поля в даному середовищі відрізняється від магнітної індукції поля у вакуумі. Для вакууму $\mu = 1$.

Напруженість магнітного поля $\vec{H}$ – це векторна величина, яка є кількісною характеристикою магнітного поля. Напруженість магнітного поля визначає той внесок у магнітну індукцію, який дають зовнішні джерела поля.

$$[H] = \text{А/м}.$$

Графічне зображення магнітних полів. Графічно магнітні поля можна

зображати за допомогою силових ліній магнітного поля.

Лінія, в будь-якій точці якої вектор магнітної індукції $\vec{B}$ спрямований по дотичній до неї, називається *силовою лінією магнітного поля*.

Силові лінії креслять так, щоб їх густина була пропорційна модулю вектору $\vec{B}$ у даному місці.

Лінії індукції магнітного поля в жодній точці поля не обриваються, тобто вони завжди безперервні. Вони не мають ні початку ні кінця. Цим силові лінії магнітного поля відрізняються від силових ліній електростатичного поля, які завжди починаються і закінчуються на електричних зарядах або йдуть в нескінченність. Векторне поле, що має безперервні силові лінії, називається вихровим полем. Магнітне поле – це вихрове поле.

Лінії індукції прямого провідника зі струмом є колами, що лежать в площині, перпендикулярній до провідника. Центри кіл знаходяться на осі провідника (рис. 20.5) Напрям ліній індукції магнітного поля визначається за мнемонічним *правилом буравчика*: напрям ліній індукції співпадає з напрямом ручки буравчика, який угвинчують уподовж напряму струму.

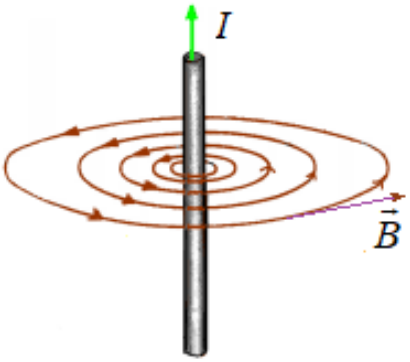


Рисунок 20.5 – Силові лінії магнітного поля прямого провідника зі струмом

Якщо у всіх точках деякої частини простору вектор магнітної індукції $\vec{B}$ не змінює свого напряму і величини, то магнітне поле в цій частині простору називається *однорідним*. У протилежному випадку магнітне поле є *неоднорідним*.

Лінії індукції поля, створюваного постійним магнітом представлені на рис. 20.6.

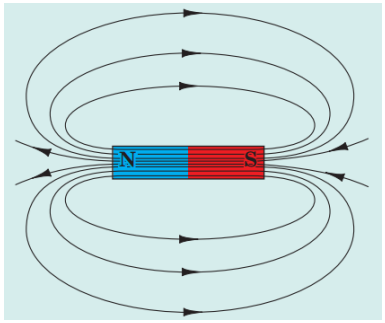


Рисунок 20.6 – Лінії індукції поля постійного магніту

Для магнітного поля, як і для електричного, слушний принцип суперпозиції: магнітна індукція системи струмів дорівнює векторній сумі магнітних індукцій, які утворюються окремими струмами, тобто

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + ... + \vec{B}_N \qquad (20.4)$$

Закон Біо - Савара – Лапласа. Щоб визначити магнітну індукцію провідника зі струмом довільної форми, потрібно знати магнітну індукцію нескінченно малої ділянки провідника, так званого елемента струму $d\vec{l}$. Тоді, розбиваючи провідник довільної форми на елементи струму і використовуючи принцип суперпозиції, можна визначити індукцію будь-якого провідника зі струмом.

Закон Біо-Савара-Лапласа (БСЛ) визначає магнітну індукцію, яка породжується елементом струму $d\vec{l}$. Елемент струму $d\vec{l}$ – це векторна величина, модуль якої дорівнює довжині нескінченно малої ділянки струму, а напрямком є напрямок струму (див. рис. 20.7).

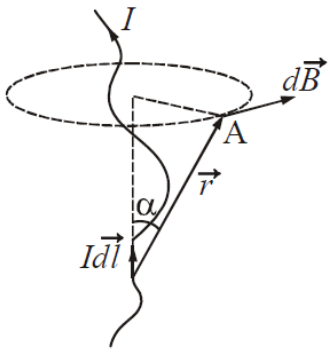


Рисунок 20.7 – До визначення індукції магнітного поля провідника зі струмом

Індукція $d\vec{B}$, яка утворюється елементом струму $d\vec{l}$, визначається законом

БСЛ

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}, \qquad (20.5)$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений з елемента струму $d\vec{l}$ у точку спостереження А. Модуль вектору $d\vec{B}$, як це випливає з (20.5), буде визначатися формулою

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl\sin\alpha}{r^2}, \qquad (20.6)$$

де α - кут між напрямами елемента струму $d\vec{l}$ і радіус-вектору $\vec{r}$, що йде від елемента струму до точки, в якій визначається індукція.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 21

Приклади розрахунку магнітних полів

Застосуємо закон БСЛ для розрахунку полів, створюваних провідниками правильної геометричної форми у вакуумі.

1. *Поле прямого струму*. Всі елементи струму прямолінійного провідника дають однаково спрямовані вектори $d\vec{B}$ (для наведеного на рис. 21.1 напряму струму вектори $d\vec{B}$ направлені перпендикулярно до площини креслення до нас). Векторне складання можна замінити скалярним:

$$B = \int_l dB = \int_l \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl\sin\alpha}{r^2}. \qquad (21.1)$$

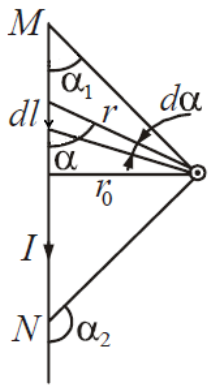


Рисунок 21.1 – До виведення магнітного поля прямого струму

Приведемо підінтегральний вираз до однієї змінної α. З рис. 21.1 випливає, що

$$r = \frac{r_0}{\sin\alpha}, \qquad dl = \frac{r\,d\alpha}{\sin\alpha} = \frac{r_0\,d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Отримані вирази підставимо у формулу (21.1):

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{r_0 \sin^3\alpha\, d\alpha}{r_0^2 \sin^2\alpha} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \sin\alpha\, d\alpha.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \qquad (21.2)$$

Кути α_1 і α_2 позначені на рис. 21.1.

Розглянемо провідник нескінченної довжини. Практично це виконується за умови $r_0 << l$. Отримаємо вираз для індукції магнітного поля, створюваного нескінченно довгим провідником. У цьому випадку можна вважати, що $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos 0 - \cos\pi) = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \cdot 2 = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}, \qquad (21.3)$$

де r_0 - відстань від провідника зі струмом до точки, в якій визначається магнітна індукція.

Аналогічну формулу можна записати для напруженості магнітного поля:

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}. \qquad (21.4)$$

2. Поле кругового струму на його осі. Знайдемо індукцію магнітного поля $\vec{B}$ у точці А, розташованій на осі кругового струму радіусу R, на відстані x від його центру (рис. 21.2).

Індукція $d\vec{B}$ поля, створеного елементом струму $Id\vec{l}$, згідно із формулою (20.6)

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Idl\sin\alpha}{r^2},$$

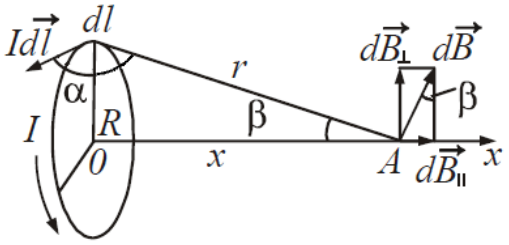


Рисунок 21.2 - До виведення магнітного поля кругового струму

Розкладемо вектор $d\vec{B}$ на дві складові: $d\vec{B}_{\parallel}$ - направлену вздовж осі *0x* і $d\vec{B}_{\perp}$ - перпендикулярну до неї. Тоді

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}_{\parallel} + \int_l d\vec{B}_{\perp}.$$

При підсумовуванні полів всіх елементів струму по довжині кола складові $d\vec{B}_{\perp}$ в сумі дадуть нуль, тобто

$$\int_l d\vec{B}_{\perp} = 0.$$

Вектори $d\vec{B}_{\parallel}$ співнаправлені, тому векторну суму замінимо скалярною:

$$B = \int_l dB_{\parallel} = \int_l dB\sin\beta.$$

З рис. 21.2 знаходимо

$$r^2 = R^2 + x^2, \qquad \sin\beta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Підставивши отримані співвідношення і враховуючи, що $\sin\alpha = 1$, маємо:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IdlR}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Інтегруючи по *dl* і враховуючи те, що $\int_l dl = l = 2\pi R$, отримаємо:

$$B = \int_l \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{IdlR}{(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu\mu_0 I 2\pi R^2}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \qquad (21.5)$$

Аналогічну формулу можна записати для напруженості магнітного поля:

$$H = \frac{IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \qquad (21.6)$$

При x =0 отримаємо вираз для розрахунку індукції в центрі кругового струму:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}. \qquad (21.7)$$

Напруженість магнітного поля в центрі кругового струму:

$$H = \frac{I}{2R}. \qquad (21.8)$$

3. Поле соленоїда кінцевої довжини. Соленоїд є дротом, закрученим на круглий циліндричний каркас. На рис. 21.3 показано переріз соленоїда. Магнітна індукція $\vec{B}$ поля соленоїда кінцевої довжини дорівнює геометричній сумі магнітних індукцій $\vec{B}_i$ полів всіх витків цього соленоїда:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_i, \qquad (21.9)$$

Усередині соленоїда напрям індукції $\vec{B}$ співпадає з напрямом осі.

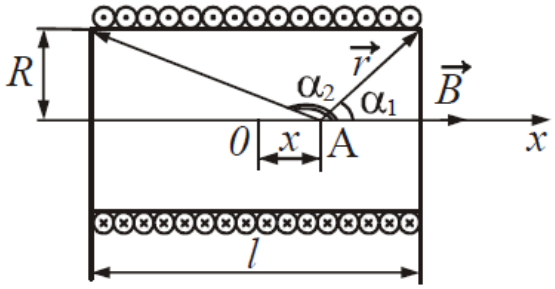


Рисунок 21.3 - До виведення магнітного поля соленоїда

Використовуючи формули (21.5) і (21.9), можна отримати формулу для розрахунку індукції магнітного поля в довільній точці А, що лежить на осі соленоїда кінцевої довжини:

$$B = \frac{\mu\mu_0 In}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right), \qquad (21.10)$$

де $n = \frac{N}{l}$ - число витків на одиницю довжини соленоїда (густина намотування);

α_1 і α_2 - кути, під якими з точки А видні кінці соленоїда (рис. 21.3).

Напруженість магнітного поля в довільній точці на осі соленоїда кінцевої довжини

$$H = \frac{In}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right). \qquad (21.11)$$

У вченні про електромагнетизм велику роль грає уявний нескінченно довгий соленоїд. Причина цього полягає в тому, що поле такого соленоїда однорідне і обмежено об'ємом соленоїда (аналогічно електричне поле нескінченного плоского конденсатора однорідне і обмежено об'ємом конденсатора). Соленоїд вважається нескінченно довгим, якщо $l >> R$. Для нескінченно довгого соленоїда $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Тоді:

$$B = \frac{\mu\mu_0 In}{2}\left(\cos 0 - \cos\pi\right) = \frac{\mu\mu_0 In}{2}\cdot 2 = \mu\mu_0 In. \qquad (21.12)$$

Відповідно, напруженість магнітного поля усередині нескінченно довгого соленоїда:

$$H = In. \qquad (21.13)$$

Магнітний потік. *Елементарним потоком вектору магнітної індукції або елементарним магнітним потоком ($d\Phi$) крізь площадку dS називається скалярна фізична величина*

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = BdS\cos\alpha, \qquad (21.14)$$

де $d\vec{S} = dS\vec{n}$, $\vec{n}$ - одиничний вектор нормалі до площадки;

α - кут між напрямом нормалі $\vec{n}$ і вектором магнітної індукції $\vec{B}$ (рис. 21.4).

$[\Phi]$ = Тл·м^2 = Вб (вебер).

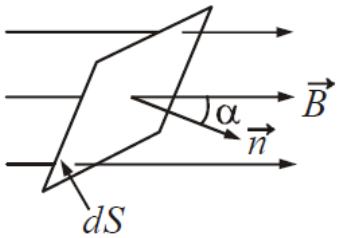


Рисунок 21.4 – До виведення елементарного магнітного потоку

Магнітний потік крізь довільну поверхню S дорівнюватиме:

$$\Phi = \int_S \vec{B}d\vec{S}. \qquad (21.15)$$

Якщо поле однорідне ($\vec{B}$ = const), а поверхня плоска, то

$$\Phi = BS\cos\alpha. \qquad (21.16)$$

Теорема Гауса для магнітного поля. Теорема Гауса для магнітного поля є узагальненням дослідних даних. Вона має таке формулювання:

Потік вектору магнітної індукції $\vec{B}$ *крізь будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю*:

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0. \qquad (21.17)$$

Теорема Гауса відображає той експериментальний факт, що лінії вектору $\vec{B}$ не мають ні початку, ні кінця. Тому число ліній вектору $\vec{B}$, що виходять з будь-якого об'єму, обмеженого *замкненою* поверхнею *S*, завжди дорівнює числу ліній, що входять в цей об'єм.

Закон (21.17) виражає також і той факт, що в природі не існують магнітні заряди, на яких починалися б або закінчувалися лінії вектору $\vec{B}$.

Циркуляція вектору магнітної індукції. Циркуляцією вектору магнітної індукції $\vec{B}$ за замкненим контуром *l* називається інтеграл вигляду:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \oint_l Bdl\cos\alpha, \qquad (21.18)$$

де *l* - замкнений контур довільної форми, $d\vec{l}$ - вектор елементарної довжини контуру, спрямований за напрямом обходу контуру, α – кут між векторами $\vec{B}$ і $d\vec{l}$.

Закон повного струму. *Циркуляція вектору магнітної індукції* $\vec{B}$ *у вакуумі за довільним замкненим контуром l дорівнює добутку магнітної сталої* μ_0 *на алгебричну суму струмів, охоплюваних цим контуром*:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k, \qquad (21.19)$$

де *N* - кількість провідників із струмом, охоплюваних контуром *l* довільної форми.

Закон слушний для провідників зі струмом будь-якої форми і будь-яких

розмірів. При обчисленні алгебричної суми струмів струм вважається позитивним, якщо його напрям пов'язаний з напрямом обходу контуру правилом правого гвинта. Струм протилежного напряму вважається від'ємним.

Закон повного струму можна записати для напруженості магнітного поля:

Циркуляція вектору напруженості магнітного поля $\vec{H}$ *за довільним замкненим контуром дорівнює алгебричній сумі струмів, охоплюваних цим контуром*:

$$\oint_l \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^{N} I_k. \qquad (21.20)$$

Закон повного струму відіграє приблизно ту ж роль, що і теорема Гауса для вектору напруженості електричного поля $\vec{E}$. Відомо, що магнітне поле визначається всіма струмами, а циркуляція вектору $\vec{B}$ тільки тими струмами, які охоплює даний контур. За наявності симетрії теорема про циркуляцію дозволяє дуже просто знаходити $\vec{B}$. Це буває в тих випадках, коли обчислення циркуляції вектору $\vec{B}$ можна звести до добутку B на довжину контуру або його частину, розумно вибравши контур. Якщо цього немає, то розрахунок доводиться проводити іншими способами, зокрема за допомогою закону БСЛ або шляхом розв'язання відповідних диференціальних рівнянь, і розрахунок стає значно складнішим.

Приклад: розрахуємо індукцію магнітного поля, створюваного нескінченно довгим прямолінійним провідником зі струмом.

Як контур виберемо коло радіусу r (рис. 21.5), що співпадає з лінією магнітної індукції (струм I йде від нас за креслення).

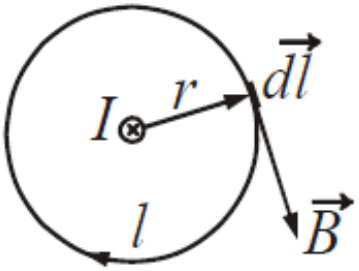


Рисунок 21.5 – До визначення магнітного поля провідника зі струмом

У даному випадку закон повного струму матиме вигляд:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \oint_l Bdl\cos\alpha = \mu_0 \sum_{k=1}^{N} I_k.$$

Кут між векторами $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ дорівнює нулю, тобто cos0 = 1. Всередині обраного контуру знаходиться струм I. Тоді:

$$\oint_l Bdl = \mu_0 I.$$

Оскільки замкнений контур обходу вибраний у вигляді кола, то для даної відстані r від дроту B = const. Після інтегрування отримаємо:

$$B2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \qquad (21.21)$$

Отриманий результат співпадає з формулою для індукції магнітного поля нескінченого прямолінійного провідника зі струмом.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 22

Силова дія магнітного поля

Закон Ампера. Узагальнивши експериментальні дані стосовно дослідження дії магнітного поля на різні провідники із струмом, Ампер встановив, що *сила $d\vec{F}$, з якою магнітне поле діє на елемент струму, дорівнює векторному добутку елемента струму $Id\vec{l}$ на магнітну індукцію $\vec{B}$.*

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}], \qquad (22.1)$$

або

$$dF = IBdl\sin\alpha \qquad (22.2)$$

де α - кут між напрямом струму і вектором магнітної індукції $\vec{B}$.

Напрям сили $d\vec{F}$ визначають за правилом векторного добутку. На практиці

частіше застосовують *правило лівої руки*: якщо розташувати долоню лівої руки так, щоб вектор магнітної індукції входив у долоню, а чотири витягнуті пальці розташувати за напрямом струму, то відставлений на 90° великий палець покаже напрям сили, що діє на провідник із струмом у магнітному полі (рис. 22.1).

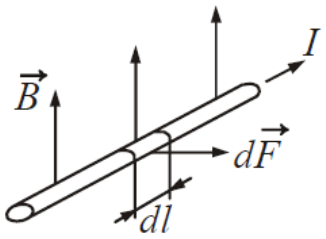


Рисунок 22.1 – До визначення напряму сили Ампера

Якщо провідник має кінцеві розміри, то

$$\vec{F} = \int_l d\vec{F} = \int_l I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]. \qquad (22.3)$$

Приклади:

1. Сила, що діє на прямолінійний провідник зі струмом в однорідному магнітному полі. Для однорідного поля $\vec{B}$ = const, тому

$$F = \int_l IB\sin\alpha dl = IBl\sin\alpha \qquad (22.4)$$

де l - довжина провідника; α - кут між напрямом струму і вектором магнітної індукції.

2. Сила взаємодії двох нескінченно довгих прямих струмів.

Розглянемо два паралельні струми I_1 і I_2, що знаходяться на відстані r один від одного (рис. 22.2).

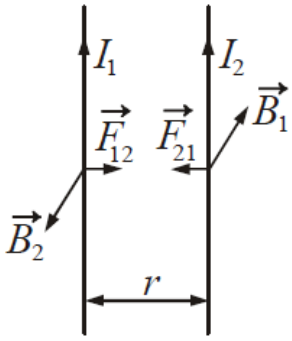


Рисунок 22.2 - Взаємодія двох нескінченних прямих струмів

Із дослідів Ампера випливає, що

- паралельні струми одного напряму притягуються;

- паралельні струми протилежних напрямів відштовхуються.

Нехай довжина кожного провідника l. Кожний з провідників зі струмом знаходиться в магнітному полі струму іншого провідника. Сила, з якою другий струм діє на перший

$$F_{12} = I_1 B_2 l \sin\alpha,$$

$$\alpha = 90°,\ \sin\alpha = 1.$$

Оскільки провідники довгі, то

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}$$

Після заміни, отримаємо

$$F_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} l. \qquad (22.5)$$

Можна показати, що сила F_{21}, з якою перший струм діє на другий, рівна і протилежна силі F_{12}, з якою другий струм діє на перший.

Сила, що діє на одиницю довжини провідника:

$$F_l = \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}. \qquad (22.6)$$

На підставі формули (22.6) дається визначення *одиниці струму* - *ампер*.

Ампер - це величина постійного струму, який під час проходження по двом паралельним прямолінійним провідникам нескінченної довжини і мізерно малого кругового перерізу, розміщених на відстані 1 м один від одного у вакуумі, взаємодіють із силою $2 \cdot 10^{-7}$ Н на кожний метр довжини провідника.

Робота, що виконується при переміщенні провідника зі струмом у магнітному полі. Розглянемо коло зі струмом, утворене нерухомими дротами і рухомим провідником завдовжки l, що ковзає по них (рис. 22.3). Коло знаходиться в однорідному магнітному полі ($\vec{B}$ = const), що спрямоване перпендикулярно до площини креслення.

За законом Ампера на провідник діє сила $F = IBl$.

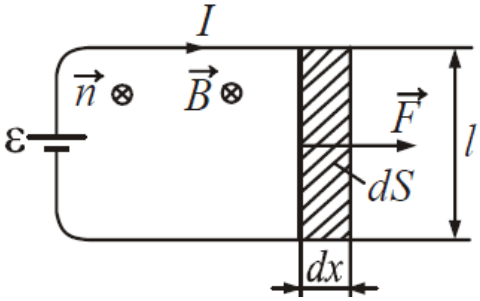


Рисунок 22.3 – До виведення роботи магнітного поля

При переміщенні провідника на відстань *dx* ця сила виконує роботу

$$\delta A = Fdx = IBldx = IBdS, \qquad (22.7)$$

де $dS = ldx$ - заштрихована площа (див. рис. 22.3).

Добуток *BdS* дає магнітний потік $d\Phi$. Якщо зробити заміну в (22.7), то отримаємо

$$\delta A = Id\Phi, \qquad (22.8)$$

де $d\Phi$ - магнітний потік через площу, яку перетинає провідник при русі.

Таким чином, робота, що виконується магнітною силою над провідником зі струмом, дорівнює добутку струму на величину магнітного потоку через поверхню, перетнуту провідником при даному русі.

$$A = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} Id\Phi. \qquad (22.9)$$

Для I = const:

$$A = I\Delta\Phi = I\cdot(\Phi_2 - \Phi_1), \qquad (22.10)$$

де $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – зміна магнітного потоку.

Магнітний момент. *Магнітним моментом* ($\vec{p}_m$) *плоского замкненого контуру зі струмом I називається векторна фізична величина, яка дорівнює добутку струму I на площу контуру S*:

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}, \qquad (22.11)$$

де $\vec{n}$ - одиничний вектор нормалі до поверхні, обмеженої цим контуром. Напрям нормалі пов’язаний з напрямом струму у контурі правилом правого гвинта. Тому

напрям вектору $\vec{p}_m$ збігається з напрямом зовнішньої нормалі до площини S, встановленої в геометричний центр площини (рис. 22.4). $[p_m]$ = А·м.

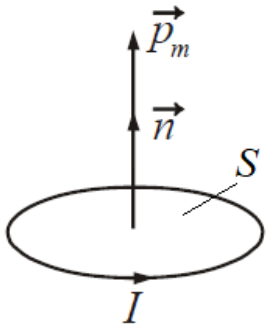


Рисунок 22.4 – До визначення магнітного моменту

Магнітний момент є дуже важливою характеристикою контуру зі струмом. Цією характеристикою визначається як поле, створюване контуром, так і поведінка контуру в зовнішньому магнітному полі.

Сила, яка діє на контур зі струмом у однорідному магнітному полі. Розглянемо, як поводиться контур зі струмом в однорідному магнітному полі ($\vec{B}$ = const). За формулою (22.1) на елемент контуру діє сила

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}].$$

Результуюча цих сил є рівною

$$\vec{F} = \oint_l I\left[d\vec{l} \cdot \vec{B}\right]. \qquad (22.12)$$

Постійні величини I і $\vec{B}$ можна винести за знак інтеграла:

$$\vec{F} = I\left(\oint_l d\vec{l}\right) \times \vec{B},$$

З курсу математики відомо, що $\oint_l d\vec{l} = 0$, тому $\vec{F} = 0$. Таким чином, результуюча сила, що діє на контур зі струмом в однорідному магнітному полі, дорівнює нулю. Це справедливо для контурів будь-якої форми при довільному розташуванні контуру відносно поля.

Обертальний момент, створюваний силами, прикладеними до контуру.

Розглянемо плоский контур, що знаходиться в однорідному магнітному полі ($\vec{B}$ = const). Нехай контур орієнтований так, що лінії магнітної індукції паралельні площині контуру (рис. 22.5).

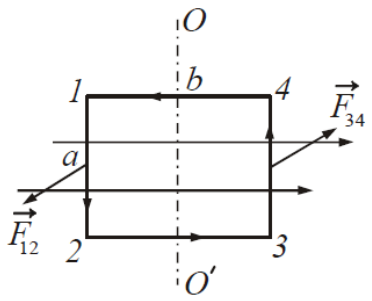


Рисунок 22.5 – Пара сил, що діють на контур

На сторони 1-2 і 3-4 контуру діють сили $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_{34}$:

$$F_{12} = F_{34} = IBa, \qquad (22.13)$$

де a – вертикальна сторона контуру.

Сили прикладені до протилежних сторін контуру, тому утворюють пару сил, момент якої дорівнює

$$M = F_{12} l. \qquad (22.14)$$

У результаті контур обертається відносно осі OO'. На рис. 22.6 показаний вигляд контуру зверху.

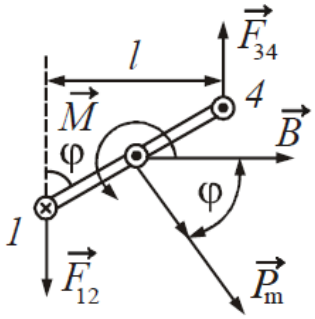


Рисунок 22.6 – Вигляд контуру зверху

З рисунка виходить, що плече пари сил

$$l = b \sin \varphi,$$

де b - горизонтальна сторона контуру; φ - кут між напрямом вектору $\vec{B}$ і

нормаллю $\vec{n}$ до контуру (рис. 22.6).

Замінивши в (22.14) F_{12} за формулою (22.13), отримаємо

$$M = IBab\sin\varphi. \qquad (22.15)$$

Добуток *ab* дає площу контуру *S*. Таким чином

$$M = IBS\sin\varphi. \qquad (22.16)$$

Вираз (22.16) можна перетворити, скориставшись поняттям магнітного моменту. Замінивши добуток *IS* через магнітний момент, отримаємо

$$M = p_m B\sin\varphi. \qquad (22.17)$$

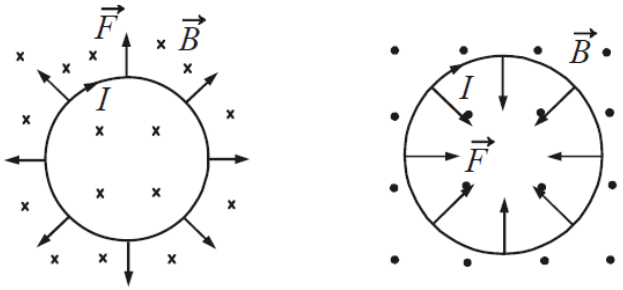
Формулу (22.17) можна записати у векторній формі:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}_m \vec{B}\right] \qquad (22.18)$$

Вектор обертального моменту $\vec{M}$ спрямований вздовж осі обертання *OO'* так, що з його кінця обертання рамки під дією пари сил видно таким, що відбувається проти годинникової стрілки (рис. 22.6).

Якщо магнітне поле спрямоване перпендикулярно до площини контуру, то вектори $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$ будуть однаково спрямовані. У цьому випадку обертальний момент $\vec{M}$ дорівнює нулю.

Сили, які діють на різні елементи контуру, або розтягуватимуть його (рис. 22.7 а), або стискатимуть (рис. 22.7 б), залежно від напряму поля і струму.



а б

Рисунок 22.7 – Розтягувальні й стискальні сили, що діють на контур

Контур зі струмом у неоднорідному магнітному полі. Розглянемо контур

зі струмом, що знаходиться в неоднорідному магнітному полі. Припустимо, що поле швидше за все змінюється у напрямі осі *0x*, яка співпадає з напрямом $\vec{B}$ в тому місці, де розташований центр контуру.

Магнітний момент $\vec{p}_m$ контуру орієнтований за полем (рис. 22.8). Оскільки $\vec{B} \neq$ const, вираз (22.12) може не бути рівним нулю. Сила $d\vec{F}$, яка діє на елемент контуру, перпендикулярна до $\vec{B}$, тобто лінії магнітної індукції в місці перетину її з $d\vec{l}$.

Результуюча сил, які прикладені до елементів контуру, спрямована у бік зростання $\vec{B}$ і, отже, втягує контур в область більш сильного поля. Якщо змінити напрям струму на протилежний ($\vec{p}_m$ буде спрямований проти $\vec{B}$), то напрями всіх $d\vec{F}$ і їх результуюча $\vec{F}$ зміняться на зворотні. За умови такої орієнтації $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$ контур виштовхуватиметься з поля.

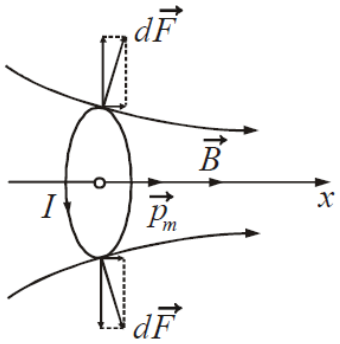


Рисунок 22.8 – Контур у неоднорідному магнітному полі

Величина сили, що втягує або виштовхує контур, визначається співвідношенням:

$$F_x = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha, \qquad (22.19)$$

де p_m - магнітний момент контуру; α - кут між векторами $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$; $\frac{\partial B}{\partial x}$ - градієнт індукції магнітного поля – величина, що характеризує степінь неоднорідності поля, який дорівнює зміні індукції, що припадає на одиницю довжини.

Таким чином, у неоднорідному магнітному полі контур не тільки стискається (розтягується), але і втягується (виштовхується) в область

неоднорідного поля.

Робота, що виконується при обертанні контуру зі струмом у постійному магнітному полі. При повороті контуру на кут $d\varphi$ виконується елементарна робота

$$\delta A = \vec{M} d\vec{\varphi} = M d\varphi. \qquad (22.20)$$

Оскільки

$$M = p_m B \sin\alpha,$$

а вектори $\vec{M}$ і $d\vec{\varphi}$ однаково спрямовані, то

$$\delta A = p_m B \sin\varphi d\varphi. \qquad (22.21)$$

Робота, що виконується при повороті контуру на кінцевий кут від φ_1 до φ_2, визначається інтегруванням:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \delta A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} p_m B \sin\varphi d\varphi = -\left(p_m B \cos\varphi_2 - p_m B \cos\varphi_1 \right). \qquad (22.22)$$

З формули (22.22) можна зробити висновок, що робота з повороту контуру визначається лише його кінцевим і початковим положеннями.

Величина $-p_m B \cos\varphi$ має назву потенціальної енергії взаємодії контуру зі струмом з магнітним полем і позначається через $W_{\text{п}}$:

$$W_{\text{п}} = -p_m B \cos\varphi. \qquad (22.23)$$

Вираз (22.23) можна записати як скалярний добуток векторів $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$:

$$W_{\text{п}} = \vec{p}_m \vec{B}. \qquad (22.24)$$

Сила Лоренца. Магнітне поле діє не тільки на провідники із струмом, але і на окремі заряджені частинки, що рухаються в магнітному полі. Сила $\vec{F}_{\text{л}}$, що діє на електричний заряд, який рухається у магнітному полі, називається силою Лоренца. Сила Лоренца розраховується за формулою:

$$\vec{F}_{\text{л}} = q\left[\vec{v} \times \vec{B} \right]. \qquad (22.25)$$

Модуль сили Лоренца дорівнює:

$$F_л = qvB\sin\alpha, \qquad (22.26)$$

де q - заряд частинки; B - індукція магнітного поля, в якому рухається частинка; v - швидкість заряду; α - кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{B}$.

Напрям сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку. На практиці можна застосовувати правило лівої руки, при цьому треба враховувати знак заряду. Для негативних частинок напрям сили змінюється на протилежний.

Взаємні розташування векторів $\vec{v}$, $\vec{B}$ і $\vec{F}_л$ для позитивного ($q > 0$) і негативного ($q < 0$) зарядів показані на рис. 22.9.

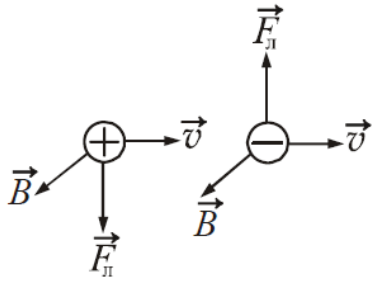


Рисунок 22.9 – До визначення напряму дії сили Лоренца

Сила Лоренца спрямована завжди перпендикулярно швидкості руху зарядженої частинки і надає їй доцентрове прискорення. Не змінюючи модуля швидкості, а лише змінюючи її напрям, сила Лоренца не виконує роботи і кінетична енергія зарядженої частинки за умов руху в магнітному полі не змінюється.

Розглянемо окремі випадки.

1. Заряджена частинка влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно лініям індукції. Під дією сили Лоренца заряджена частинка буде рухатися по колу сталого радіусу R (рис. 22.10).

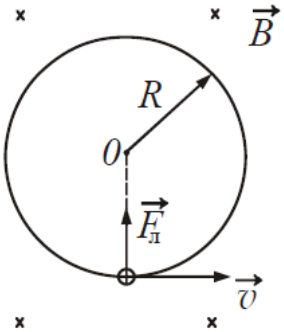


Рисунок 22.10 – Рух частинки перпендикулярно $\vec{B}$

$$F_л = qvB.$$

За другим законом Ньютона:

$$F = ma_n,$$

де m - маса частинки.

Нормальне (доцентрове) прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Прирівнявши сили, отримаємо

$$qvB = m\frac{v^2}{R}.$$

Знайдемо радіус кола

$$R = \frac{mv}{qB}. \qquad (22.27)$$

Період обертання (час одного повного оберту):

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}. \qquad (22.28)$$

2. Заряджена частинка влітає в однорідне магнітне поле під кутом α до ліній магнітної індукції.

Розкладемо швидкість $\vec{v}$ частинки на дві складові (рис. 22.11): $\vec{v}_{||}$ - паралельну вектору $\vec{B}$, і $\vec{v}_{\perp}$ - перпендикулярну вектору $\vec{B}$.

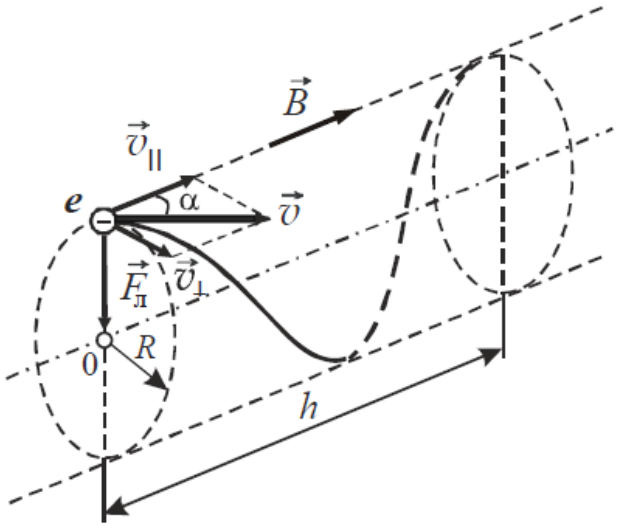


Рисунок 22.11 – Рух частинки під кутом до $\vec{B}$

Швидкість $\vec{v}_{\parallel}$ в магнітному полі не змінюється і забезпечує переміщення зарядженої частинки уздовж силової лінії. Швидкість $\vec{v}_{\perp}$ в результаті дії сили Лоренца змінюватиметься тільки за напрямом. Рух частинки можна розглядати як складання двох рухів:

- рівномірного обертання по колу зі швидкістю $\vec{v}_{\perp}$;
- рівномірного переміщення уздовж поля зі швидкістю $\vec{v}_{\parallel}$.лінії.

У результаті частинка буде рухатися по гвинтовій траєкторії. На підставі формули (22.27)

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv\sin\alpha}{qB}. \qquad (22.29)$$

Крок *h* гвинтової лінії (відстань між сусідніми витками)

$$h = v_{\parallel}T = \frac{2\pi mv\cos\alpha}{qB}. \qquad (22.30)$$

Якщо на електричний заряд, що рухається, окрім магнітного поля індукцією $\vec{B}$ діє і електричне поле напруженістю $\vec{E}$, то результуюча сила $\vec{F}$, прикладена до заряду, дорівнюватиме векторній сумі сили $\vec{F}_e = q\vec{E}$ і сили Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]. \qquad (22.31)$$

Вираз (22.31) також називають силою Лоренца, іноді – узагальненою силою Лоренца.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 23

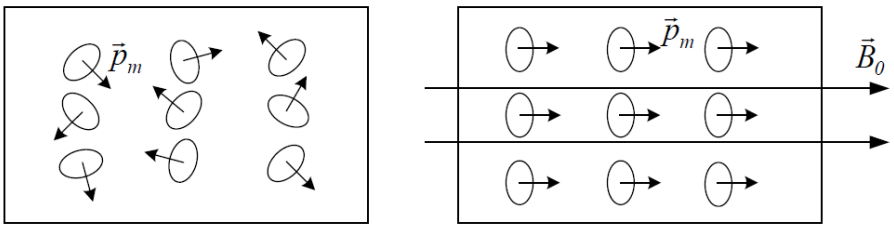
Магнітне поле в речовині

Намагнічування магнетика. Магнетик – термін, який використовується до всіх речовин при розгляді їх магнітних властивостей. Різноманітність типів магнетиків обумовлена відмінністю магнітних властивостей мікрочастинок, які

створюють речовину, а також характером взаємодії між ними.

Експерименти показують, що всі речовини є магнетиками, тобто здатні під дією магнітного поля намагнічуватися. Для пояснення намагнічування тіл А. Ампер висунув гіпотезу, згідно з якою в молекулах речовини циркулюють кругові (молекулярні) струми. Кожний такий струм має магнітний момент $\vec{p}_m$ і створює в навколишньому просторі магнітне поле. Магнітне поле намагніченого тіла складається з магнітних полів цих кругових струмів.

У ненамагніченому тілі всі елементарні магнітні моменти орієнтовані хаотично (рис. 23.1 а), тому в навколишньому просторі не спостерігається ніякого магнітного поля. Процес намагнічування тіла полягає в тому, що під впливом зовнішнього магнітного поля його елементарні магнітні моменти в більшій або меншій степені встановлюються паралельно один до одного (рис. 23.1 б). Сумарний магнітний момент магнетика стає відмінним від нуля.



а) б)

Рисунок 23.1 – Орієнтація елементарних магнітних моментів у ненамагніченій (а) і намагніченій (б) речовині

У речовині розрізняють два види струмів, що створюють магнітне поле – макроструми і мікроструми. Макрострумами називаються струми провідності. Мікрострумами (молекулярними) називаються струми, які обумовлені рухом електронів в атомах, молекулах та іонах. Магнітне поле в речовині є векторною сумою двох полів: зовнішнього магнітного поля, яке створюване макрострумами, і внутрішнього або власного магнітного поля, яке створюється мікрострумами.

Вектор магнітної індукції $\vec{B}$ магнітного поля в речовині характеризує результуюче магнітне поле і дорівнює геометричній сумі магнітних індукцій

зовнішнього $\vec{B}_0$ і внутрішнього $\vec{B}'$ магнітних полів:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' \qquad (23.1)$$

Первинним джерелом магнітного поля в магнетиках є макроструми. Їх магнітні поля є причиною намагнічування речовини, яка вміщена в зовнішнє магнітне поле.

Кількісно намагнічування характеризується вектором намагніченості.

Намагніченість ($\vec{J}$) - векторна фізична величина, яка дорівнює сумарному магнітному моменту одиниці об'єму магнетика:

$$\vec{J} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{m_i}, \qquad (23.2)$$

де V - об'єм магнетика; $\vec{p}_{m_i}$ - магнітний момент однієї молекули.

$$[J] = \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3} = \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Одиниця вимірювання намагніченості співпадає з одиницею вимірювання напруженості магнітного поля.

Класифікація магнетиків. За характером залежності намагніченості $\vec{J}$ від напруженості магнітного поля $\vec{H}$ магнетики поділяються на три групи:

- діамагнетики;
- парамагнетики;
- феромагнетики.

Намагніченість ізотропних парамагнетиків і діамагнетиків, що знаходяться в слабких магнітних полях, прямо пропорційна напруженості магнітного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \qquad (23.3)$$

де χ - магнітна сприйнятливість. Магнітна сприйнятливість залежить від фізико-хімічних властивостей середовища. Для вакууму $\chi = 0$.

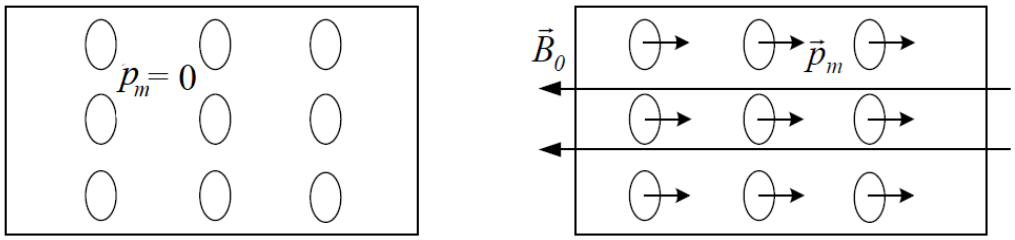
Безрозмірна величина

$$\mu = 1 + \chi \qquad (23.4)$$

називається *відносною магнітною проникністю* речовини. Вона є

характеристикою магнітних властивостей речовини. Для вакууму $\mu = 1$.

Діамагнетики – це речовини, атоми яких не мають власного магнітного моменту $p_m = 0$ (див. рис. 23.2, а). Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається виникнення наведеного індукційного магнітного моменту атома p_m, направленого протилежно зовнішньому полю $\vec{B}_0$ (див. рис. 23.2, б).



а) б)

Рисунок 23.2 – До пояснення ефекту діамагнетизму

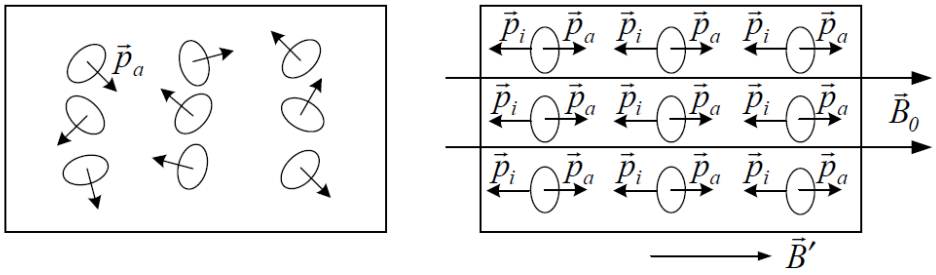
Повне поле у діамагнетику $B = B_0 - B'$, тому $B < B_0$ і $\mu < 1$. Магнітна сприйнятливість χ від'ємна: $\chi < 0$. Абсолютне значення χ знаходиться в межах $10^{-4} \div 10^{-5}$. Вектор намагніченості $\vec{J}$ діамагнетиків спрямований протилежно напряму напруженості $\vec{H}$ поля, що намагнічує. Якщо діамагнетик помістити в неоднорідне магнітне поле, то він буде виштовхуватись з поля.

Слід зауважити, що діамагнетизм властивий всім магнетикам без виключення. Це універсальна поведінка речовини у магнітному полі.

До діамагнетиків належать інертні гази, водень, силіцій, вісмут, олово, цинк, вода, кварц і багато органічних речовин.

Парамагнетики. Якщо магнітний момент атома відмінний від нуля, $p_a \neq 0$, то речовина називається парамагнетиком. Внаслідок теплового руху атомні магнітні моменти хаотично розорієнтовані і тіло в цілому не є намагніченим (див. рис. 23.3, а). Зовнішнє магнітне поле намагається встановити магнітні моменти атомів $\vec{p}_a$ вздовж вектору $\vec{B}_0$ зовнішнього поля (див. рис. 23.3, б). У результаті виникає позитивний магнітний момент, значно більший за негативний індукційний. Результуючий магнітний момент позитивний. Тому власне поле $\vec{B}$ намагніченої речовини за напрямом збігається з зовнішнім і результуюче поле у

речовині $B = B_0 + B'$, тобто більше, ніж зовнішнє B_0 і $\mu > 1$ (але не набагато). Тобто парамагнетики трохи посилюють зовнішнє поле.



а) б)

Рисунок 23.3 - До пояснення ефекту парамагнетизму

Магнітна сприйнятливість парамагнетиків позитивна: $\chi > 0$. Абсолютне значення χ знаходиться в межах $10^{-3} \div 10^{-4}$. Напрям намагніченості $\vec{J}$ парамагнетиків співпадає з напрямом напруженості $\vec{H}$ поля, що намагнічує. Парамагнетики втягуються в неоднорідне магнітне поле.

Магнітна сприйнятливість парамагнетиків залежить від температури і підпорядковується закону Кюрі:

$$\chi = \frac{C}{T}, \qquad (23.1)$$

де C – стала Кюрі; T – абсолютна температура.

До парамагнетиків належать алюміній, манган, паладій, платина, розчини залізних і нікелевих солей, кисень, повітря та ін.

Слід особливо підкреслити, що для парамагнітних і діамагнітних речовин магнітна проникність μ не залежить від напруженості зовнішнього поля, що намагнічує, тобто є сталою величиною, що характеризує дану речовину.

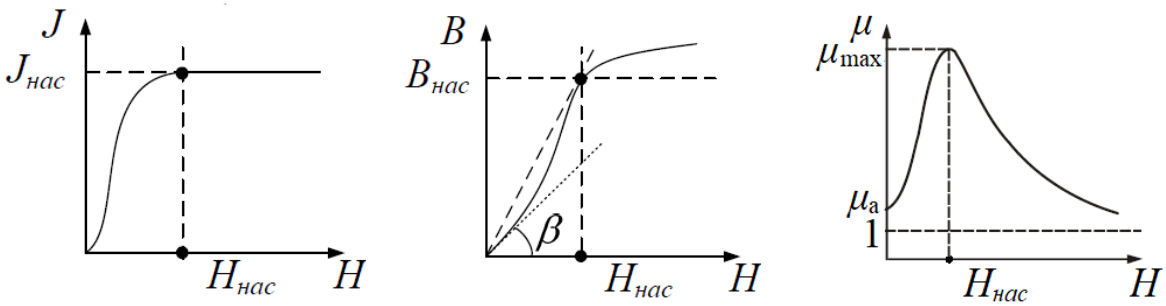
Феромагнетики. Феромагнетики це речовини, які здатні мати намагніченість у відсутності зовнішнього магнітного поля. Свою назву вони отримали від найпоширенішого елементу - заліза.

До феромагнетиків окрім заліза, належать нікель, кобальт, гадоліній, їх сплави і сполуки, деякі сплави і сполуки мангану і хрому з неферомагнітними елементами (наприклад, сплав, що містить 61% Cu, 24% Mn, 15% Al), а також сплави системи неодим-залізо-бор. Феромагнетики є сильномагнітними

речовинами. Їх намагніченість у багато разів (до 10^{10}) перевершує намагніченість діа- і парамагнетиків, що належать до категорії слабомагнітних речовин.

Намагніченість J феромагнетиків залежить від напруженості магнітного поля H. При певній напруженості намагніченість J досягає стану насичення $J_{нас}$ (див. рис. 23.4, а). Зв'язок між індукцією B і напруженістю H визначається формулою

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{J} \right). \qquad (23.2)$$



а) б) в)

Рисунок 23.4 – Залежність намагніченості (а), індукції (б) і магнітної проникності (в) феромагнетику від напруженості магнітного поля

При досягненні стану насичення

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{J}_{нас} \right)$$

де $\mu_0 \vec{J}_{нас}$ = const, і при подальшому збільшенні $\vec{H}$ індукція $\vec{B}$ змінюється дуже повільно, оскільки магнітна стала μ_0 дуже мала.

Якщо на графіку залежності B від H (він має назву *кривої намагнічення*) взяти довільну точку і провести через неї пряму, то кут її нахилу буде визначатися формулою $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{B}{H} = \mu\mu_0$. Тобто при зміні напруженості H магнітна проникність буде змінюватися так, як змінюється $\operatorname{tg}\beta$. Там, де хорда перетворюється у дотичну, магнітна проникність досягає максимального значення (див. рис. 23.4, в). Оскільки $\mu = 1 + \chi = 1 + \dfrac{J}{H}$, то при $H > H_{нас}$ $\mu = 1 + \dfrac{J_{нас}}{H}$ і при збільшенні H, μ наближається до одиниці.

Феромагнетикам властиве явище магнітного гістерезису. *Гістерезис* – явище відставання зміни B індукції магнітного поля від зміни напруженості H змінного за величиною і напрямом зовнішнього магнітного поля.

На рис. 23.5 крива *0–1* відповідає основній кривій намагнічування. Якщо довести намагнічування до насичення (точка *1*), а потім зменшувати напруженість поля, що намагнічує, то індукція B буде змінюватись не за первинною кривою *0–1*, а за кривою *1 2*. При $H = 0$ зберігається залишкова намагніченість, яка характеризується *залишковою індукцією* – B_r.

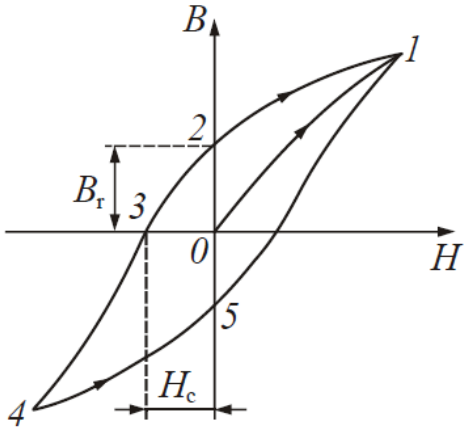


Рисунок 23.5 – Петля гістерезису феромагнетику

Індукція перетворюється в нуль лише під дією поля H_c, що має напрям, протилежний полю, що викликало намагнічування. Напруженість H_c називається *коерцитивною силою*. Збільшуючи зворотне поле, потім зменшуючи його і накладаючи знов позитивне поле, отримуємо, що індукція змінюється відповідно до кривої *1–2–3–4–5–1*, яка називається петлею гістерезису. Перемагнічування феромагнетику пов'язано зі зміною орієнтації областей спонтанної намагніченості (доменів) і вимагає здійснення роботи за рахунок енергії зовнішнього магнітного поля. Кількість теплоти, що виділилася під час перемагнічуванні, пропорційна площі петлі гістерезису. Залежно від форми і площі петлі феромагнетики поділяють на:

- магнітом'які (вузька петля гістерезису $H_c \sim 1 \div 100$ А/м);
- магнітожорсткі (широка петля гістерезису $H_c \sim 10^3 \div 10^5$ А/м).

Для виготовлення постійних магнітів використовують магнітожорсткі

феромагнетики, для осердь трансформаторів – магнітом'які.

При намагнічуванні феромагнетиків відбувається зміна їх лінійних розмірів і об'єму. Це явище називається *магнітострикцією*. Відносне подовження феромагнетиків досягає величини ~ $10^{-5} \div 10^{-2}$.

Магнітострикція використовується в гідроакустиці, в ультразвукових технологіях, акустоелектроніці та інших галузях техніки.

Перераховані вище властивості феромагнітних речовин виявляються при температурах менших точки Кюрі. Точка Кюрі (T_c) - температура, при якій феромагнетик втрачає свої феромагнітні властивості і стає парамагнетиком. Магнітна сприйнятливість при температурах $T > T_c$ підпорядковується закону Кюрі – Вейса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}, \qquad (23.3)$$

де C - стала Кюрі.

Точка Кюрі для заліза 768°С, для нікелю 365°С, для кобальту 1150°С, для сплаву пермалою – 550°С. За умов зниження температури нижче за точку Кюрі феромагнітні властивості відновлюються.

Відповідальними за магнітні властивості феромагнетиків є власні магнітні моменти електронів (їх також називають спіновими). За певних умов у кристалах виникають сили, які примушують магнітні моменти електронів шикуватися паралельно один одному. Ці сили називаються обмінними. У результаті виникають області спонтанного (мимовільного) намагнічування, які називають також *доменами*. Домени мають розміри порядку 1÷10 мкм. У межах кожного домену феромагнетик спонтанно намагнічений до насичення і має певний магнітний момент. Напрями цих моментів для різних доменів різні, тому за відсутності зовнішнього поля сумарний момент зразка дорівнює нулю і зразок в цілому представляється макроскопічно ненамагніченим.

При включенні зовнішнього магнітного поля домени, орієнтовані за полем, зростають за рахунок доменів, що орієнтовані проти поля. Таке зростання в слабких полях має оборотний характер. У більш сильних полях відбувається

одночасна переорієнтація магнітних моментів в межах всього домену. Цей процес є необоротним і служить причиною гістерезису і залишкового намагнічування.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

Тема 24

Електромагнітна індукція

Досліди Ерстеда і Ампера показали, що навкруги провідників із струмом виникає магнітне поле. М. Фарадей висунув зворотну ідею: під дією магнітного поля, що змінюється, в замкнутому провіднику повинен виникати електричний струм. Для підтвердження цієї ідеї Фарадей виконав ряд експериментів. Один з них полягав у наступному.

Якщо смуговий магніт рухати уздовж осі котушки К (рис. 24.1), то в ній з'являється струм, який реєструє гальванометр G.

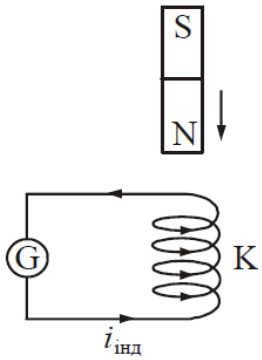


Рисунок 24.1 – Схема досліду М. Фарадея

Напрям струму залежить від того, яким полюсом був спрямований магніт до котушки і від напряму його руху. Той же результат виходив, якщо магніт залишався нерухомим, а котушку надягали на магніт або знімали з нього. Відкрите Фарадеєм явище було названо *явищем електромагнітної індукції*.

Електромагнітної індукцією називається явище виникнення електрорушійної сили в провідному контурі при будь-якій зміні магнітного потоку, що пронизує цей контур.

ЕРС, що виникає, називається електрорушійною силою електромагнітної індукції ε_i. Якщо провідник замкнений, то виникає струм, який називають *індукційним*.

Подальші експерименти показали, що ЕРС електромагнітної індукції пропорційна швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує контур:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (24.1)$$

При цьому неістотно, чим викликана зміна магнітного потоку. Це може бути деформація або переміщення контуру в зовнішньому полі, або зміна магнітного поля в часі.

Вираз (24.1) називається законом Фарадея для електромагнітної індукції. Знак « - » введений у формулу відповідно до правила Ленца. Правило Ленца:

Індукційний струм має такий напрям, що його магнітне поле протидіє зміні магнітного потоку, який викликав цей індукційний струм.

Приклад: При наближенні смугового магніту до замкненого контуру (рис. 24.2 а) в ньому наводиться індукційний струм, який створює власне магнітне поле, що перешкоджає наближенню магніту і зростанню магнітного потоку, який пронизує контур. При видаленні магніту (рис. 24.2 б) від контуру в ньому наводиться індукційний струм протилежного напряму, який перешкоджає видаленню магніту і зменшенню магнітного потоку, що пронизує контур.

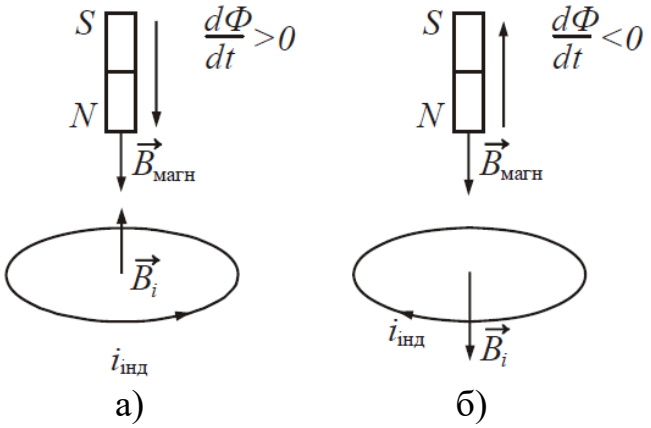


Рисунок 24.2 – До визначення напряму індукційного струму

Якщо замкнений контур складається з N послідовно з'єднаних витків (наприклад, як у соленоїді), то закон електромагнітної індукції записується таким чином:

$$\varepsilon_i = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(N\Phi)}{dt}.$$

Величину $\Psi = N\Phi$ називають повним магнітним потоком або *потокозчепленням*. З урахуванням цього:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \qquad (24.2)$$

Принцип дії генератора змінного струму. Одним з найважливіших застосувань явища електромагнітної індукції є перетворення механічної енергії в електричну.

Розглянемо рамку, що складається з N витків, яка обертається в магнітному полі ($\vec{B}$ = const) зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 24.3).

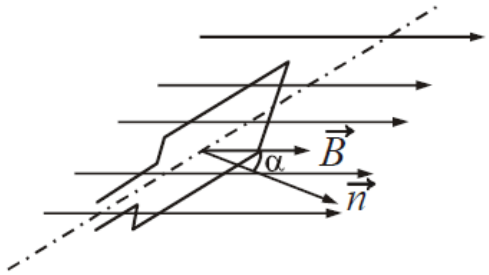


Рисунок 24.3 – Принцип дії генератора змінного струму

Повний магнітний потік, що пронизує рамку, у будь-який момент часу визначається співвідношенням:

$$\Psi = NBS\cos\alpha$$

де S - площа рамки; α - кут між векторами нормалі $\vec{n}$ і вектору магнітної індукції $\vec{B}$.

При рівномірному обертанні $\alpha = \omega t$.

Знайдемо ЕРС індукції, що виникає в рамці при її обертанні, використовуючи закон Фарадея (див. формулу 24.2):

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(NBS\cos\omega t)}{dt} = NBS\omega\sin\omega t$$

але

$$\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega t = \varepsilon_{\max}\sin\omega t, \qquad (24.3)$$

де величину $\varepsilon_{\max} = NBS\omega$ можна розглядати як амплітудне значення змінної ЕРС.

Виникнення ЕРС індукції в рамці, що обертається в магнітному полі, з'явилося основою для створення генераторів змінного струму. Якщо кінці витків приєднати до двох мідних кілець, що обертаються разом з контуром і дотичні до двох нерухомих вугільних щіток, а до щіток приєднати електричне коло, то по колу потече змінний струм i, що змінюється так само, як змінюється ЕРС ε.

За законом Ома:

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{NBS\omega}{R}\sin\omega t,$$

$$i = i_{\max}\sin\omega t, \qquad (24.4)$$

де $i_{\max} = \frac{NBS\omega}{R}$ - максимальне (амплітудне) значення струму;

i - миттєве значення струму.

Більшість приладів, що виміряють змінну напругу і змінний струм, показують не миттєві значення напруги і струму, а діючі (ефективні) значення. Діючі значення струму $I_д$ і напруги $U_д$ визначаються потужністю, що виділяється в колі змінного струму. Вони пов'язані з амплітудними значеннями струму і напруги наступними співвідношеннями:

$$I_д = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}, \qquad U_д = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}. \qquad (24.5)$$

Діючі значення напруги і струму є найважливішими електротехнічними параметрами приладів. Саме ці величини указуються в паспортах будь-яких електроустановок і приладів.

Струми Фуко. Індукційні струми, що виникають в суцільних масивних

провідниках, які знаходяться у змінних магнітних полях, називають *вихровими струмами або струмами Фуко*.

Відповідно до правила Ленца струми Фуко обирають усередині провідника такі напрями, щоб своєю дією можливо сильніше опиратися причині, яка їх викликає. Тому хороші провідники, що рухаються в сильному магнітному полі, зазнають сильного гальмування, обумовленого взаємодією струмів Фуко з магнітним полем. Це використовують для демпфування (заспокоєння) рухомих частин електровимірювальних приладів.

Теплова дія струмів Фуко використовується в індукційних печах. Така піч є котушкою, що живиться потужним високочастотним струмом. Якщо помістити всередину котушки електропровідне тіло, то в ньому виникнуть інтенсивні вихрові струми. Ці струми можуть розігріти тіло до плавлення. У такий спосіб здійснюють плавлення металів у вакуумі. Це дає можливість одержувати матеріали виключно високої чистоти.

Струми Фуко бувають і небажаними. В електричних машинах і трансформаторах вони приводять до значних втрат енергії. Тому осердя трансформаторів набирають з тонких пластин, розділених ізолюючими прошарками. Пластини розташовують так, щоб можливі напрями струмів Фуко були до них перпендикулярними.

У дротах, по яких течуть змінні струми, також виникають струми Фуко. Вони спрямовані так, що ослабляють струм усередині дроту і посилюють поблизу поверхні. В результаті швидкозмінний струм як би виштовхується на поверхню провідника. Це явище називається скін-ефектом (skin – шкіра). Через скін-ефект внутрішня частина провідників у високочастотних колах виявляється непотрібною. Тому у високочастотних колах застосовують провідники у вигляді трубок.

Самоіндукція - це явище виникнення електрорушійної сили в провідному контурі при зміні електричного струму, що йде по цьому контуру. Самоіндукція є окремим випадком електромагнітної індукції. При зміні струму в контурі змінюється потік магнітної індукції через поверхню, обмежену цим контуром. У

результаті цього в ньому збуджується ЕРС самоіндукції. При збільшенні в колі струму ЕРС самоіндукції перешкоджає його зростанню, а при зменшенні струму – його убуванню. Можна сказати, що самоіндукція подібна явищу інерції в механіці. З експерименту виходить, що величина ЕРС самоіндукції пропорційна швидкості зміни струму і величині, званою індуктивністю.

Індуктивність контуру. Електричний струм, якій протікає в провідному контурі, створює в навколишньому просторі магнітне поле. Повний магнітний потік Ψ, що пронизує контур (зчеплений з ним), буде прямо пропорційний струму:

$$\Psi = LI\,. \qquad (24.6)$$

Коефіцієнт пропорційності L між повним магнітним потоком (потокозчепленням) і струмом називається індуктивністю контуру або коефіцієнтом самоіндукції контуру.

Індуктивність (L) - це скалярна фізична величина, що характеризує магнітні властивості електричного кола і дорівнює відношенню повного магнітного потоку, зчепленого з контуром, до струму, якій протікає по контуру і створює цей потік:

$$L = \frac{\Psi}{I}. \qquad (24.7)$$

Лінійна залежність Ψ від I спостерігається тільки в тому випадку, якщо магнітна проникність μ середовища, яким оточений контур, не залежить від напруженості поля H. Це означає, що середовище повинне бути неферомагнітне. У противному разі μ складним чином залежить від струму і, отже, залежність повного магнітного потоку від струму також буде досить складна. Проте, співвідношення (24.6) поширюють і на цей випадок, вважаючи індуктивність L функцією струму I.

Зі сказаного випливає, що індуктивність залежить від геометричної форми і розмірів контуру, а також магнітних властивостей середовища, в якому він знаходиться. Якщо контур жорсткий і поблизу нього немає феромагнетиків, то індуктивність є величиною сталою.

За одиницю індуктивності в СІ приймається індуктивність такого провідника (контуру), у якому при струмі в ньому 1 А виникає зчеплений з ним повний потік Ψ, що дорівнює 1 Вб. Цю одиницю називають генрі (Гн).

$[L]$ = Вб/А = Гн.

Індуктивність можна розраховувати на основі геометрії провідника.

Приклад. Розрахунок індуктивності соленоїда.

Візьмемо соленоїд такої довжини, щоб його можна було вважати нескінченним. На практиці це означає, що $d << l$ (рис. 24.4).

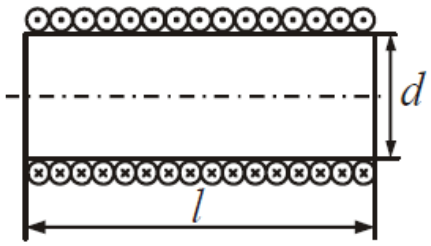


Рисунок 24.4 – Котушка соленоїду в перерізі

При протіканні по обмотці струму I усередині соленоїда збуджується однорідне магнітне поле, індукція якого

$$B = \mu\mu_0 In,$$

де $n = N/l$ - густина намотування; I - величина струму.

Повний магнітний потік, зчеплений з соленоїдом

$$\Psi = \Phi N,$$

де Φ - магнітний потік, що пронизує один виток; N - число витків соленоїда.

$$\Phi = BS,$$

де B - індукція магнітного поля; S - площа поперечного перетину соленоїда.

Записані співвідношення підставимо у формулу (24.7) і отримаємо:

$$L = \frac{\mu\mu_0 InSN}{I} = \mu\mu_0 nSN = \mu\mu_0 n^2 Sl = \mu\mu_0 n^2 V, \qquad (24.8)$$

де $lS = V$ - об’єм соленоїда.

З формули (24.8) випливає, що індуктивність соленоїда, що не має

феромагнітного осердя, пропорційна квадрату густини намотування витків.

ЕРС самоіндукції. Самоіндукція є окремим випадком явища електромагнітної індукції. Скористаємося законом Фарадея для електромагнітної індукції:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Psi}{dt}.$$

Згідно (24.6) повний магнітний потік $\Psi = LI$. Зробивши заміну, отримаємо:

$$\varepsilon_s = -\frac{d(LI)}{dt}. \qquad (24.9)$$

Якщо струм у контурі змінюється, то ЕРС самоіндукції буде дорівнювати:

$$\varepsilon_s = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right) = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dI}\frac{dI}{dt}\right) = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt}.$$

Величину $\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)$ позначимо через $L_{\text{дин}}$ і назвемо динамічною індуктивністю. У разі, коли струм змінюється

$$\varepsilon_s = -L_{\text{дин}}\frac{dI}{dt}. \qquad (24.10)$$

Якщо контур жорсткий і поблизу нього немає феромагнетиків, індуктивність L є величиною сталою і її називають статичною. В цьому випадку:

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}. \qquad (24.11)$$

оскільки похідна індуктивності за струмом за цих умов обертається в нуль.

З формул (24.10) і (24.11) випливає, що *ЕРС самоіндукції пропорційна швидкості зміни струму*. Знак « - » обумовлений правилом Ленца, згідно якому індукційний струм завжди спрямований так, щоб протидіяти причині, яка його викликає.

Співвідношення (24.11) дає можливість визначити індуктивність як коефіцієнт пропорційності між швидкістю зміни струму в контурі і ЕРС

самоіндукції, що виникає внаслідок цього. Проте, таке визначення правомірне лише у разі, коли L = const.

Струми при замиканні і розмиканні кола. При замиканні кола, що містить сталу ЕРС, струм за рахунок ЕРС самоіндукції встановлюється не миттєво, а через деякий проміжок часу. При відключенні джерела (розмиканні кола) струм не припиняється миттєво. Це пояснюється тим, що в контурі з'являється індукційний струм, який за правилом Ленца протидіє зміні струму у колі, що викликав явище самоіндукції. Індукційний струм, накладаючись на основний струм, уповільнює його зростання або перешкоджає його убуванню.

Встановимо характер зміни струму в колі, що містить індуктивність. Вважатимемо, що індуктивність не залежить від струму, тобто L = const.

а). Замикання кола.

До послідовно з'єднаних опору R і індуктивності L за допомогою перемикача $П$ може бути підключено джерело, ЕРС якого ε (рис. 24.5).

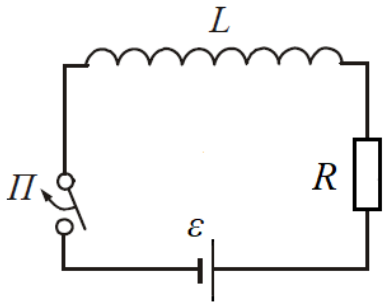


Рисунок 24.5 – До пояснення стуму замикання

Після підключення джерела ЕРС до тих пір, поки струм не досягне сталого значення I_0, в колі окрім ЕРС ε діятиме ЕРС самоіндукції ε_s. За другим правилом Кірхгофа:

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L\frac{dI}{dt}$$

Розділивши це рівняння на L, приведемо його до наступного вигляду:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L}.$$

Розв'язуючи дане лінійне неоднорідне диференціальне рівняння і

враховуючи, що у момент часу $t = 0$ струм дорівнював нулю, отримаємо:

$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (24.12)$$

Графік зростання струму наведений на рис. 24.6. З графіка видно, що чим менше індуктивність кола і більше його опір, тим швидше зростає струм.

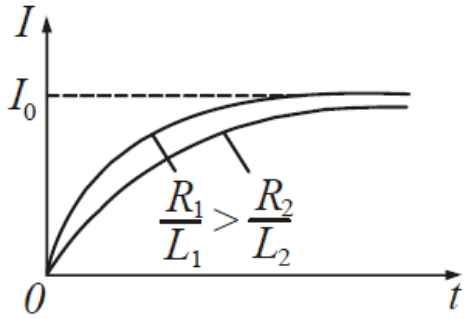


Рисунок 24.6 – Зміна струму при замиканні кола

б). Розмикання кола.

У момент часу $t = 0$ відключимо джерело перемикачем *П* (рис. 24.7).

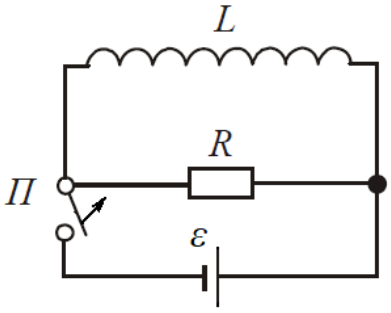


Рисунок 24.7 – До пояснення струму розмикання

Струм почне убувати, у колі виникає ЕРС самоіндукції. За другим законом Кірхгофа:

$$IR = \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}.$$

Розділимо рівняння на L, отримаємо:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0.$$

Розв’язуючи дане лінійне однорідне диференціальне рівняння і

врахувавши, що при $t = 0$ струм мав значення I_0, отримаємо:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (24.13)$$

Після відключення джерела струм у колі убуває за експоненціальним законом. Графік залежності $I = f(t)$ наведений на рис. 24.8. З графіка видно, що чим більше індуктивність і чим менше опір, тим повільніше спадає струм в колі.

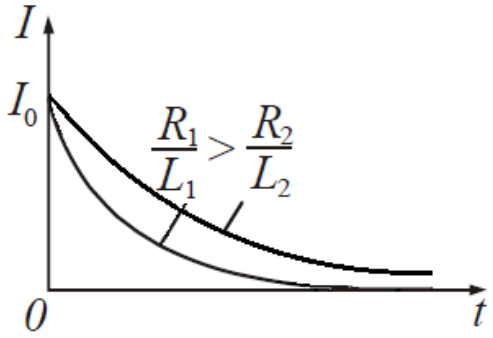


Рисунок 24.8 - Зміна струму при розмиканні кола

Взаємна індукція. Взаємною індукцією називається явище виникнення електрорушійної сили в одному з контурів при зміні струму в іншому.

Розглянемо два близько розташованих контури 1 і 2 (рис. 24.9).

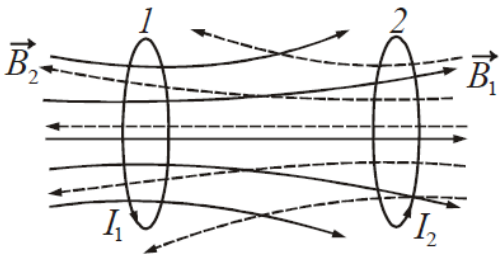


Рисунок 24.9 – Взаємний зв’язок двох контурів

У контурі 1 протікає струм I_1, який створює магнітний потік Φ_{21}, що пронизує контур 2:

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1. \qquad (24.14)$$

Коефіцієнт пропорційності L_{21} називається взаємною індуктивністю або коефіцієнтом взаємної індукції контурів 1 і 2.

Аналогічно, при протіканні в контурі 2 струму I_2 виникає магнітний потік

Φ_{12}, зчеплений з контуром 1:

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2, \tag{24.15}$$

де L_{12} – коефіцієнт взаємної індукції контурів 2 і 1.

Взаємна індуктивність – це скалярна фізична величина, що характеризує магнітний зв'язок двох або більше контурів. Взаємна індуктивність залежить від розмірів і форми контурів 1 і 2, відстані між ними, від їх взаємного розташування, а також від магнітної проникності оточуючого їх середовища. Вимірюється взаємна індуктивність в генрі.

Згідно закону електромагнітної індукції при зміні струму I_1 у контурі 2 наводиться ЕРС:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}. \tag{24.16}$$

При зміні струму I_2 в контурі 1 індукується ЕРС:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \tag{24.17}$$

Якщо контури знаходяться в неферомагнітному середовищі, то $L_{12} = L_{21}$. Тому можна не робити відмінності між L_{12} і L_{21} і просто говорити про взаємну індуктивність двох контурів.

Знайдемо взаємну індуктивність двох котушок, намотаних на загальне тороїдальне залізне осердя (рис. 24.10).

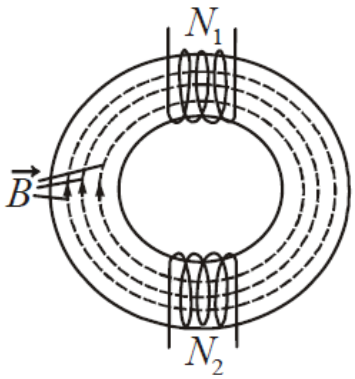


Рисунок 24.10 – До пояснення взаємної індукції

Якщо в першій котушці N_1 витків і по ній протікає струм I_1, то за законом повного струму:

$$Hl = N_1 I_1, \tag{24.18}$$

де l - довжина осердя; H - напруженість поля усередині осердя. Повний магнітний потік через другу котушку (потокозчеплення):

$$\Psi_{21} = BSN_2 = \mu\mu_0 HSN_2, \tag{24.19}$$

де S - площа поперечного перетину осердя.

З (24.18) випливає

$$H = \frac{N_1 I_1}{l}. \tag{24.20}$$

Підставимо (24.20) в (24.19) і отримаємо:

$$\Psi_{21} = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 S}{l} I_1. \tag{24.21}$$

Порівняння виразу (24.21) з формулою (24.14) дозволяє зробити висновок, що

$$L_{21} = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 S}{l}. \tag{24.22}$$

Аналогічно виглядає і формула для L_{12}. Однак не можна стверджувати, що L_{12} дорівнює L_{21}, оскільки величина μ, що входить у формули, залежить від напруженості H поля в осерді.

На явищі взаємної індукції заснована робота трансформатора, який служить для підвищення або пониження напруги змінного струму.

Енергія магнітного поля. Розглянемо коло, що зображене на рис. 24.7. При замкненому перемикачі $П$ по колу протікає струм, який створює в котушці (соленоїді) магнітне поле. Якщо розімкнути перемикач, то через опір R протікатиме спадний струм, що підтримується виникаючою в соленоїді ЕРС самоіндукції. Робота, що виконана цим струмом за час dt:

$$\delta A = \varepsilon_s I dt = -L\frac{dI}{dt} I dt = --LIdI. \tag{24.23}$$

Робота, що виконана у колі за весь час, протягом якого зникає магнітне поле:

$$A = -\int_{I}^{0} LIdI = \frac{LI^2}{2}, \qquad (24.24)$$

оскільки струм при цьому зменшується від первинного значення I до нуля.

Робота, обчислена за формулою (24.24), йде на нагрівання опору R, соленоїда і з'єднувальних дротів. Виконання роботи супроводжується зникненням магнітного поля, яке існувало в соленоїді. Оскільки ніяких інших змін не відбулося, можна зробити висновок, що магнітне поле є носієм енергії, за рахунок якої виконується робота. За законом збереження, *енергія магнітного поля*:

$$W = \frac{LI^2}{2}. \qquad (24.25)$$

Виразимо енергію магнітного поля через величини, що характеризують саме поле. Якщо соленоїд довгий, то його індуктивність дорівнює

$$L = \mu\mu_0 n^2 V.$$

Напруженість поля усередині соленоїда

$$H = nI,$$

Підставимо значення L і I у вираз (24.25) і, провівши перетворення, отримаємо:

$$W = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} V. \qquad (24.26)$$

Оскільки магнітне поле нескінченного соленоїда однорідне, то енергія розподілена за його об'ємом зі сталою густиною w.

Об'ємна густина енергії магнітного поля дорівнює відношенню енергії до об'єму:

$$w_м = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \qquad (24.27)$$

З формул (24.27) випливає, що носієм енергії є магнітне поле, яке локалізоване в просторі з об'ємною густиною w. Об'ємна густина енергії пропорційна квадрату напруженості магнітного поля.

ЛІТЕРАТУРА [1, 3, 4].

ЛІТЕРАТУРА

1. Фелінський Г.С. Загальна фізика: Підручник / Г. С. Фелінський. - Реком. ВР КНУ ім. Т. Шевченка, 2021. – 656 с.
2. Гаврилова Т.В., Єрьоміна О.Ф. Конспект лекцій з фізики. Розділ І «Механіка», Розділ ІІ «Молекулярна фізика і термодинаміка». Харків: ХНАУ, 2019. 142 с.
3. Гаврилова Т.В., Єрьоміна О.Ф. Конспект лекцій з фізики. Розділи «Електростатика. Постійний струм». Харків : ХНАУ, 2020. 51 с.
4. Петченко О.М. Конспект лекцій з курсу загальної фізики / О.М. Петченко, А.С. Сисоєв, Є.І. Назаренко, А.В Безуглий. – Х.: ХНАМГ, 2010. – 195 с.