

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
Кафедра вищої математики і фізики**

**ПРАКТИКУМ З КУРСУ
«ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЧАСТИНА 1»**

Покровськ – 2021

УДК 51(072)

Практикум з курсу «Вища математика. Частина 1» / уклад.
М.В.Румянцев, М.І.Медведєва. – Покровськ: ДонНТУ, 2021. – 88 с.

В практикумі наведені завдання для самостійних та індивідуальних робіт за основними темами курсу «Вища математика. Частина 1». Ретельно розглянуті розв’язки типових задач, а також необхідний теоретичний матеріал. Практикум складено у відповідності з програмою курсу “Вища математика. Частина 1” і може бути використаний викладачами при підготовці та проведенні практичних занять, а також для самостійної роботи студентів будь-якої форми навчання.

Укладачі: М.В.Румянцев, проф., д.е.н., М. І. Медведєва, доцент кафедри
ВМФ ДВНЗ «ДонНТУ», к.ф-м.н., доцент

Рецензент: Є. В. Лесіна, доцент кафедри АТ ДВНЗ «ДонНТУ», к.ф-м.н.,
доцент

Відповідальний за випуск: Медведєва М.І., зав. кафедрою вищої математики і фізики

Затверджено навчально-методичним відділом ДВНЗ «ДонНТУ»,
протокол № 2 від «28» вересня 2021р

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики і фізики
протокол № 7 від «03» вересня 2021р.

З М І С Т

ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ	7
Тема 1.1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	7
1.1.1. Вектори. Лінійні операції над векторами	7
1.1.2. Скалярний добуток векторів	7
Приклади розв'язування задач	9
Питання для самоперевірки	11
Вправи для самостійного розв'язування	11
Тема 1.2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ	14
1.2.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії	14
1.2.2. Рівняння прямої на площині	14
1.2.3. Кут між прямими. Взаємне розташування двох прямих	15
Приклади розв'язування задач	16
Питання для самоперевірки	19
Вправи для самостійного розв'язування	19
Тема 1.3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ	21
1.3.1. Еліпс	21
1.3.2. Гіпербола	22
1.3.3. Парабола	23
Приклади розв'язування задач	24
Питання для самоперевірки	25
Вправи до самостійного розв'язування	25
РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА	28
Тема 2.1. ЧИСЛОВІ МАТРИЦІ	28
2.1.1. Основні означення	28
2.1.2. Дії над матрицями	29
Приклади розв'язування задач	29
Питання для самоперевірки	30
Вправи для самостійного розв'язування	30
Тема 2.2. ВИЗНАЧНИКИ	31
2.2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків	31
2.2.2. Властивості визначників	32
2.2.3. Обчислення визначників n-го порядку	33
2.2.4. Обернена матриця	33
Приклади розв'язування задач	34
Питання для самоперевірки	38
Вправи для самостійного розв'язування	39
Тема 2.3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ	40
2.2.2. Дослідження сумісності систем	41
2.2.3. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь	42
Приклади розв'язування задач	43
Питання для самоперевірки	49
Вправи для самостійного розв'язування	49

РОЗДІЛ 3. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ	51
Тема 3.1. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ.....	51
3.1.1.Поняття числової послідовності. Границя послідовності	51
3.1.2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.....	51
Приклади розв'язування задач.....	52
Питання для самоперевірки.....	54
Вправи для самостійного розв'язку	54
Тема 3.3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ.....	55
3.3.1. Поняття границі функції. Односторонні границі	55
3.3.2. Типи невизначеностей та їх розкриття.....	56
Приклади розв'язування задач	57
Питання для самоперевірки.....	61
Вправи для самостійного розв'язування	61
Тема 3.4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ.....	63
3.4.1. Основні поняття.....	63
3.4.2. Розриви функції	64
Приклади розв'язування задач	64
Питання для самоперевірки.....	66
Вправи для самостійного розв'язування	66
РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ	68
Тема 4.1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ.....	68
4.1.1 Поняття похідної. Правила диференціювання	68
4.1.2. Похідні вищих порядків.....	69
4.1.3. Похідна оберненої функцій та функції, заданої неявно або параметрично.....	70
4.1.4. Диференціал функції.....	70
Приклади розв'язання задач	71
Питання для самоперевірки.....	73
Вправи для самостійного розв'язування	74
Тема 4.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ	77
4.2.1. Дотична і нормаль до графіка функції	77
4.2.2. Правила Лопітала	77
Приклади розв'язування задач	77
Питання для самоперевірки.....	79
Вправи для самостійного розв'язування	79
Тема 4.3. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ	81
4.3.1. Ознаки монотонності функції	81
4.3.2. Екстремуми функції. Найбільше та найменше значення функції	81
4.3.3. Опуклість і вгнутість функції. Точки перегину.....	82
4.3.4. Асимптоти кривих	82
4.3.5. Загальне дослідження функції і побудова її графіка.....	83
Приклади розв'язання задач	83
Питання для самоперевірки.....	87
Вправи для самостійного розв'язування	87
ВІДПОВІДІ.....	89
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	92

ВСТУП

Курс вищої математики є фундаментальною базою економічної та технічної світи. При цьому сучасна математична освіта потребує не лише знань теоретичного матеріалу, а й уміння застосовувати ці знання на практиці.

Мета цього практикуму – допомогти студентам глибше опанувати основи математичної теорії і набути навичок розв’язування практичних завдань.

Зміст посібника визначається програмою підготовки бакалаврів з курсу "Вища математика. Частина 1" і охоплює такі розділи: аналітична геометрія, елементи лінійної та векторної алгебри; основи математичного аналізу; диференціальне числення функції однієї змінної.

Практикум складається з чотирьох розділів. У кожному розділі наводиться необхідний теоретичний матеріал, який носить довідковий характер. Детально розібрано рішення великої кількості прикладів і завдань різного рівня складності. По кожній темі практикуму наводяться питання для самоперевірки і завдання для самостійного рішення, які забезпечені відповідями.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Тема 1.1. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1.1.1. Вектори. Лінійні операції над векторами

Вектором або векторною величиною називається будь-яка величина, що має напрям. У геометрії вектором $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ називається напрямлений відрізок. Точка A є початком вектора, точка B – кінцем вектора (рис. 1.1).

Довжина відрізка AB називається модулем (довжиною, абсолютною величиною) вектора $\overrightarrow{AB}$: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Якщо відомі координати точок $A(x_A, y_A, z_A)$ і $B(x_B, y_B, z_B)$, то координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ можна знайти за формулою

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A). \quad (1.1)$$

Нехай $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори (орти), що співпадають за напрямком з координатними осями Ox, Oy, Oz . Тоді будь-якої вектор $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ можна записати у вигляді $\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}$.

Вектори $x_a \vec{i}, y_a \vec{j}, z_a \vec{k}$ називаються компонентами вектора $\vec{a}$, а запис $\vec{a} = x_a \vec{i} + y_a \vec{j} + z_a \vec{k}$ – розкладом вектора $\vec{a}$ по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Якщо вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задані координатами, то їх суму (різницю) можна знайти за формулою

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2). \quad (1.2)$$

Добутком вектора $\vec{a}$ на число (скаляр) λ називається вектор $\lambda \vec{a}$, що має довжину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ та однаковий напрям з $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний напрям при $\lambda < 0$. Якщо $\lambda = 0$, то добуток є нуль-вектором.

Добуток вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ на число λ можна записати у вигляді:

$$\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1). \quad (1.3)$$

1.1.2. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b}$, що дорівнює добутку довжини цих векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi. \quad (1.4)$$

Властивості скалярного добутку

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;
3. $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = (\lambda \bar{b}) \cdot \bar{a} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$;
4. $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, якщо або $|\bar{a}| = 0$, або $|\bar{b}| = 0$, або $\bar{a} \perp \bar{b}$;

Скалярний квадрат вектора $\bar{a}$ дорівнює квадрату його довжини, тобто $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}}$.

Звідси маємо: $\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$ або $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Нехай вектори $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ задані координатами. Тоді скалярний добуток цих векторів можна знайти за формулою

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

(1.6)

Тоді довжина вектора $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ може бути знайдена за формулою

$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Знаючи координати векторів $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ і $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, можна знайти кут між цими векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

(1.7)

Розглянемо вісь l і вектор $\bar{a} = \overline{AB}$. Позначимо через A' і B' відповідно проекції точок A і B на вісь l (рис. 1.1).

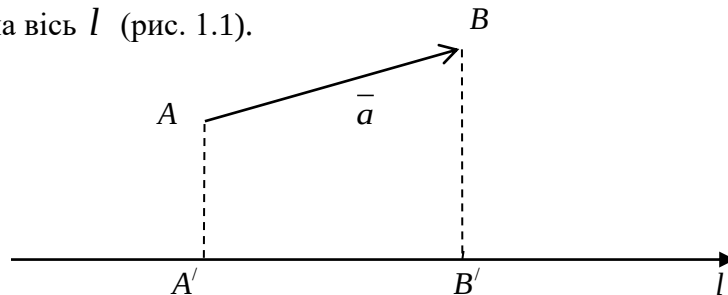


Рис. 1.1. Проекція вектора $\bar{a}$ на ось l

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l (позначення $np_l \overline{AB}$) називається число, яке дорівнює довжині вектора $\overline{A'B'}$ зі знаком плюс, якщо напрям вектора $\overline{A'B'}$ співпадає з напрямом осі l , та зі знаком мінус – в протилежному випадку.

Властивості проекції вектора на вісь

1. $np_l \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi$, де φ – кут між вектором $\bar{a}$ та віссю l ;
2. $np_l(\bar{a} + \bar{b}) = np_l \bar{a} + np_l \bar{b}$;
3. $np_l(k\bar{a}) = k \cdot np_l \bar{a}$.

Проекцію одного вектора на інший можна знайти за формулою

$$np_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cos \varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$

(1.8)

Враховуючи (1.8), скалярний добуток векторів можна записати як добуток довжини одного вектора на його проекцію щодо іншого вектора:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| np_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| np_{\bar{b}} \bar{a}.$$

(1.9)

Нехай відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overline{AB}$. Тоді величини $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$, $a_z = z_2 - z_1$ є проекціями вектора $\overline{AB}$ на осі координат Ox , Oy , Oz .

Нехай α, β, γ – відповідно, кути між вектором $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ і осями координат Ox , Oy , Oz . Ці кути називаються *напрямними кутами*. Величини $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ називаються *напрямними косинусами* вектора $\bar{a}$ і обчислюються за формулами:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\bar{a}|}.$$

(1.10)

З формул (1.10) маємо той факт, що для напрямних косинусів справедлива рівність

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.1. Задані точки $A(2; -3; 1)$ і $B(0; -4; 5)$. Записати розклад вектора $\overline{AB}$ по ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Розв'язання. За формулою (1.1) знаходимо координати вектора $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = (0 - 2; -4 + 3; 5 - 1) = (-2; -1; 4).$$

Тоді $\overline{AB} = -2\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$.

Приклад 1.2. Задані вектори $\bar{a} = (3; -2; 1)$, $\bar{b} = (5; 1; -3)$. Знайти $3\bar{a} - 2\bar{b}$.

Розв'язання. За формулою (1.3) знаходимо

$$3\bar{a} = 3 \cdot (3; -2; 1) = (9; -6; 3); \quad 2\bar{b} = 2 \cdot (5; 1; -3) = (10; 2; -6).$$

Тоді за формулою (1.2) дістанемо $3\bar{a} - 2\bar{b} = (9; -6; 3) - (10; 2; -6) = (-1; -8; 9)$.

Приклад 1.3. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Знайти довжину вектора

$$\bar{c} = 3\bar{a} - 5\bar{b}, \text{ якщо } |\bar{a}| = 3, \quad |\bar{b}| = \frac{9\sqrt{2}}{5}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулою $|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c}}$. Тоді

$$\begin{aligned}\bar{c} \cdot \bar{c} &= (3\bar{a} - 5\bar{b})^2 = 9|\bar{a}|^2 - 30\bar{a} \cdot \bar{b} + 25|\bar{b}|^2 = 9|\bar{a}|^2 - 30|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \frac{\pi}{4} + 25|\bar{b}|^2 = \\ &= 9 \cdot 3^2 - 30 \cdot 3 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 25 \cdot \left(\frac{9\sqrt{2}}{5}\right)^2 = 8 - 162 + 162 = 81\end{aligned}$$

Остаточно маємо, $|\bar{c}| = \sqrt{81} = 9$.

Приклад 1.4. Знайти кут $\varphi = \angle BAC$, якщо $A(2;3;-1)$, $B(3;4;-1)$, $C(3;3;0)$.
Знайти кут $\varphi = \angle BAC$.

Розв'язання. Кут, який необхідно знайти – це кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. За формулою (1.1) знаходимо координати векторів:

$$\overline{AB} = (3-2; 4-3; -1+1) = (1;1;0), \quad \overline{AC} = (3-2; 3-3; 0+1) = (1;0;1).$$

Тоді косинус шуканого кута (за формулою (1.7)):

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Звідси $\varphi = \arccos 0,5 = 60^\circ$.

Приклад 1.5. Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – вектори, які складають з віссю l , відповідно, кути $\frac{\pi}{3}$, π і $\frac{2\pi}{3}$, причому $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$. Знайти проекцію вектора $3\bar{a} - \bar{b} + 5\bar{c}$ на вісь l .

Розв'язання. Використовуючи властивість 1 проекції вектора на вісь, знаходимо проекції цих векторів:

$$\begin{aligned}np_l \bar{a} &= |\bar{a}| \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, & np_l \bar{b} &= |\bar{b}| \cos \pi = 2 \cdot (-1) = -2, \\ np_l \bar{c} &= |\bar{c}| \cos \frac{2\pi}{3} = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Тоді шукана проекція може бути знайдена за властивостями 2 и 3 проекції вектора на вісь:

$$np_l (3\bar{a} - \bar{b} + 5\bar{c}) = 3np_l \bar{a} - np_l \bar{b} + 5np_l \bar{c} = \frac{3}{2} + 2 - \frac{15}{2} = -4.$$

Отже, $np_l (3\bar{a} - \bar{b} + 5\bar{c}) = -4$.

Приклад 1.6. Знайти $np_{\bar{b}} \bar{a}$, якщо $\bar{a} = (3; -2; 1)$ і $\bar{b} = (4; 0; -3)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (1.8), знаходимо:

$$np_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} = \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3}{\sqrt{16 + 0 + 9}} = \frac{9}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}.$$

Приклад 1.7. Знайти напрямні косинуси вектора $\bar{a} = (1; 0; \sqrt{3})$.

Розв'язання. За формулою (1.5) знаходимо довжину вектора $\bar{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Тоді за формулою (1.10): $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\cos \beta = 0$ и $\cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Звідси маємо: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

Питання для самоперевірки

1. Що називають вектором?
2. Як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початку і кінця?
3. Що таке модуль вектора?
4. Як знайти вектора?
5. Які лінійні операції визначені для вектора?
6. Як знайти суму двох векторів, що задані координатами?
7. Як знайти добуток вектора на число, якщо відомі координати вектора?
8. Що таке скалярний добуток векторів?
9. Наведіть властивості скалярного добутку векторів.
10. Як за скалярним добутком відшукати кут між двома векторами?
11. Як обчислити проекцію вектора на вісь і на вектор?
12. В якому випадку проекція вектора на вісь набуває від'ємного значення?
13. Як визначаються напрямні косинуси?
14. Чому дорівнює сума квадратів напрямних косинусів?

Вправи для самостійного розв'язування

1.1. Задані точки A, B, C . Розкласти вектори $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$ по ортах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

1) $A(2;3;-4), B(1;7;-5), C(2;5;-3)$; 2) $A(-3;0;2), B(4;3;8), C(2;-3;-1)$.

1.2. Задані вектори $\vec{a} = (-3;4;-1)$, $\vec{b} = (-1;2;3)$, $\vec{c} = (-4;-2;1)$. Знайти координати векторів: 1) $4\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$; 2) $-5\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}$; 3) $-\vec{a} + 2\vec{b}$; 4) $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

1.3. Знайти координати початку вектора $\vec{a} = (2;-3;1)$, якщо його кінець співпадає з точкою $B(1;-1;2)$.

1.4. На сторонах OA и OB прямокутника $OABC$ відкладені одиничні вектори $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис. 1.2). Виразити через $\vec{i}$ та $\vec{j}$ вектори $\vec{OA}, \vec{AC}, \vec{CB}, \vec{BO}, \vec{OC}, \vec{BA}$, якщо $|\vec{OA}| = 3$ и $|\vec{OB}| = 4$. Нехай точка M – середина сторони BC , а точка N – середина сторони AC . Визначити вектори $\vec{OM}, \vec{ON}, \vec{MN}$.

1.5. Перевірити аналітично і геометрично векторні тотожності:

1) $\vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{a}}{2}$; 2) $\vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$.

1.6. Задані три вершини паралелограма $A(4;2), B(5;7), C(-3;4)$. Знайти четверту вершину D . Зробити рисунок.

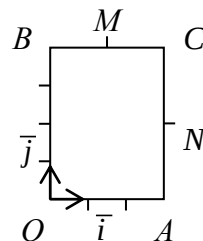


Рис. 1.2

1.7. Вектор $\vec{a}$ утворює з осями Ox та Oz кути $\alpha = 120^\circ$ і $\gamma = 45^\circ$, відповідно. Знайти кут між вектором $\vec{a}$ і віссю Oy .

1.8. В рівнобедреній трапеції $OACB$ (рис. 1.3) кут BOA дорівнює 60° , $|OB| = |BC| = |CA| = 2$, M і N – середини сторін BC і AC . Записати вектори $\vec{AC}$, $\vec{OM}$, $\vec{ON}$, $\vec{MN}$ через одиничні вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, які мають, відповідно, однаковий напрям з векторами $\vec{OA}$ і $\vec{OB}$.

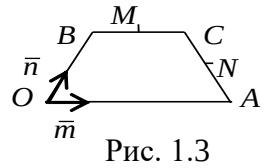


Рис. 1.3

1.9. Радіус-вектор точки $M(x, y, z)$ утворює з віссю Ox кут 45° , а з віссю Oy – 60° . Довжина цього вектору $r = 6$. Знайти координати точки M , якщо її координата z від'ємна. Розкласти вектор $\vec{OM} = \vec{r}$ по ортах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

1.10. Побудувати паралелограм на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{i}$. Визначити координати його діагоналей.

1.11. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{j} + 3\vec{k}$; 2) $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

1.12. Визначити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо

1) $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$; 2) $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$.

1.13. Задані вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Визначити $np_{\vec{a}}\vec{b}$ і $np_{\vec{b}}\vec{a}$.

1) $\vec{a} = (1; 1; 2)$, $\vec{b} = (1; -1; 4)$; 2) $\vec{a} = (0; 3; 1)$, $\vec{b} = (4; -2; 1)$.

1.14. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a}$, якщо:

1) $\vec{a} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$; 2) $\vec{a} = -4\vec{j} + 3\vec{k}$.

1.15. Задані вектори $\vec{a}_1 = (4; -2; -4)$ і $\vec{a}_2 = (6; -3; 2)$. Обчислити:

1) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$; 2) $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2$; 3) $(2\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2) \cdot (\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2)$; 4) $|2\vec{a}_1 - \vec{a}_2|$;
5) $np_{\vec{a}_1}\vec{a}_2$; 6) $np_{\vec{a}_2}\vec{a}_1$; 7) $np_{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)$; 8) $|(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2) \cdot (2\vec{a}_1 + \vec{a}_2)|$.

1.16. Обчислити $(2\vec{i} - \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{j} - 2\vec{k}) \cdot \vec{k} + (\vec{i} - 2\vec{k})^2$.

1.17. Задані вектори $\vec{a} = (3; -5; 8)$ і $\vec{b} = (-1; 1; -4)$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

1.18. Визначити довжини діагоналей паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – одиничні вектори, кут між якими дорівнює 60° .

1.19. Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 4. Кути, які утворені вектором $\vec{a}$ з координатними осями дорівнюють $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$, відповідно. Знайти координати вектора $\vec{a}$.

1.20. Знайти кут між діагоналями паралелограма, що побудований на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$.

1.21. Задані вектори $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{n} + 2\vec{m}$ і $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ дорівнює 60° .

- 1.22. Задані точки $A(a, 0, 0)$, $B(0, 0, 2a)$, $C(a, 0, a)$. Знайти кут між $\overline{OC}$ і $\overline{AB}$.
- 1.23. Знайти кут, утворений одиничними векторами $\overline{l}_1$ і $\overline{l}_2$, якщо відомо, що вектори $\overline{a} = \overline{l}_1 + 2\overline{l}_2$ і $\overline{b} = 5\overline{l}_1 - 4\overline{l}_2$ перпендикулярні.
- 1.24. Знайти вектор $\overline{b}$, колінеарний до вектора $\overline{a} = (2\sqrt{2}; -1; 4)$, якщо $|\overline{b}| = 10$.
- 1.25. Задані три вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$. Довести, що вектор $(\overline{b} \cdot \overline{c})\overline{a} - (\overline{a} \cdot \overline{c})\overline{b}$ перпендикулярний щодо вектора $\overline{c}$.
- 1.26. Задані три послідовні вершини $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$, $C(5, 0, 2)$ паралелограма $ABCD$. Знайти координати четвертої вершини D і кут між векторами $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$.
- 1.27. Перевірити, що чотири точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ утворюють вершини трапеції.
- 1.28. Задані вершини трикутника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$, $C(1; -2; 1)$. Знайти кути трикутника ABC .
- 1.29. Довести, що точки $A(3; 0)$, $B(0; 1)$, $C(2; 7)$ і $D(5; 6)$ є вершинами прямокутника $ABCD$.
- 1.30. Знайти вектор $\overline{a}$, що колінеарний вектору $\overline{b} = (3; 6; 6)$ та задовольняє умові $\overline{a} \cdot \overline{b} = 27$.
- 1.31. Знайти вектор $\overline{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\overline{a} = (2; 3; -1)$, $\overline{b} = (1; -2; 3)$ і задовольняє умові $\overline{c} \cdot (2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = -6$.
- 1.32. В паралелограмі $ABCD$ відомі вершини $A(1, -2)$, $B(2, 3)$, $C(5, 6)$. Знайти координати вершини D .
- 1.33. Задані одиничні вектори $\overline{m}$ і $\overline{n}$, кут між якими дорівнює 30° . Знайти: 1) $(\overline{m} + \overline{n})^2$; 2) $(2\overline{m} + 3\overline{n})(3\overline{m} - 2\overline{n})$; 3) $(\overline{m} - \overline{n})^2 + (\overline{a} - \overline{b})^2$, якщо $|\overline{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{b}| = 4$ і кут між векторами $\overline{a}$, $\overline{b}$ дорівнює 135° .
- 1.34. Задані точки $A(1, 2)$ і $B(3, -4)$. Побудувати вектор $\overline{AB} = \overline{a}$, його проекції на осі координат, визначити довжину і напрям вектора. Знайти кути, які вектор $\overline{a}$ утворює з осями координат.
- 1.35. Обчислити внутрішні кути трикутника ABC з вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$. Чи буде цей трикутник рівнобедреним?
- 1.36. Показати, що кут між діагоналями прямокутника, що побудований на векторах $\overline{a}$ і $\overline{b}$ ($\overline{a} \perp \overline{b}$), визначається формулою $\cos \varphi = \pm (|\overline{a}|^2 - |\overline{b}|^2) : (|\overline{a}|^2 + |\overline{b}|^2)$.
- 1.37. Трикутник ABC заданий координатами своїх вершин $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$ і $C(1; -2; 1)$. Обчислити величину зовнішнього кута α трикутника при вершині A і координати вектора $\overline{a}$, що однаково напрямлений з вектором $\overline{AB}$, і має довжину вектора $\overline{AC}$.

1.38. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, які дорівнюють $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 8$, обчислити:

$$1) (\vec{3a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 2\vec{c}); \quad 2) (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2; \quad 3) (\vec{a} + 2\vec{b} - 3\vec{c})^2.$$

1.39. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120^\circ$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчисліть: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\vec{b}^2$; 4) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 5) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; 6) $(\vec{3a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 3\vec{b})$.

1.40. Задані вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$ і $D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

Тема 1.2. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1.2.1. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Відстань між двома заданими точками $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$ знаходять за формулою

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.11)$$

Поділ відрізка в заданому відношенні. Нехай задані дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$. Число λ ($\lambda \neq -1$) називається відношенням, в якому точка $M(x, y)$ поділяє відрізок AB , якщо $\vec{AM} = \lambda \cdot \vec{MB}$.

Координати точки $M(x, y)$, що поділяє відрізок AB у відношенні λ , визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad \lambda \neq -1. \quad (1.12)$$

Якщо $\lambda > 0$, то точка M лежить між точками A і B . Тоді говорять, що точка M поділяє відрізок AB внутрішнім чином. Якщо $\lambda < 0$, то точка M не належить відріzkу AB (але належить прямій AB) і говорять, що точка M поділяє відрізок AB зовнішнім чином.

Якщо точка $M(x, y)$ – середина відрізка AB , то $\lambda = 1$ і з формул (1.12) одержуємо формули координат середини відрізка:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (1.13)$$

1.2.2. Рівняння прямої на площині

Загальне рівняння прямої лінії на площині має вигляд

$$Ax + By + C = 0, \quad (1.14)$$

де A, B, C – коефіцієнти, причому $A^2 + B^2 \neq 0$.

Якщо в загальному рівнянні прямої $B \neq 0$, то, розв'язавши його відносно y , одержуємо наступне рівняння:

$$y = kx + b, \quad (1.15)$$

де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Рівняння (1.15) називається *рівнянням з кутовим коефіцієнтом* $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, що утворений прямою з додатним напрямом осі Ox (кут нахилу прямої до осі Ox).

Тангенс кута нахилу $k = \operatorname{tg} \alpha$ називається кутовим коефіцієнтом. Число b називається *початковою ординатою*.

Рівняння прямої, що проходить через точку $A(x_A, y_A)$, з кутовим коефіцієнтом k , має вид:

$$y - y_A = k(x - x_A). \quad (1.16)$$

Рівняння (1.16) також називається *рівнянням пучка (в'язки) прямих*.

Рівняння виду

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \quad (1.17)$$

називається *рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки* $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$.

Якщо пряма паралельна осі Ox , тобто в рівняння (1.17) виконується умова $y_A = y_B$, то рівняння такої прямої задається формулою $y = y_A$. Якщо пряма паралельна осі Oy , тобто $x_A = x_B$, то рівняння прямої задається формулою $x = x_A$.

Кутовий коефіцієнт k прямої, що проходить через дві точки $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$, де $x_A \neq x_B$, можна обчислити за формулою

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}. \quad (1.18)$$

Нехай a і b – це величини напрямлених відрізків, які пряма відсікає на координатних осях, тобто пряма проходить через точки $A(a; 0)$ і $B(0; b)$. Тоді рівняння прямої можна записати так:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (1.19)$$

Рівняння (1.19) називається *рівнянням прямої у відрізках*.

1.2.3. Кут між прямими. Взаємне розташування двох прямих

Кутом φ між двох прямих $l_1: y = k_1x + b_1$ і $l_2: y = k_2x + b_2$ називають кут, на який треба повернути проти годинникової стрілки пряму l_1 , щоб вона співпала з прямою l_2 (або стала паралельною до неї). При цьому кут φ ($0 < \varphi < 90^\circ$) можна знайти за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}.$$

(1.20)

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями $l_1: A_1x + B_1x + C_1 = 0$ і $l_2: A_2x + B_2x + C_2 = 0$, то кут φ між ними можна обчислити за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

(1.21)

Очевидно, якщо прямі проходять паралельно (або збігаються), то вони мають однакові кути нахилу. Через це, умова паралельності (або збігу) двох прямих $l_1: y = k_1x + b_1$ і $l_2: y = k_2x + b_2$ набуває вигляду: $k_1 = k_2$.

Якщо ж прямі $l_1: y = k_1x + b_1$ і $l_2: y = k_2x + b_2$ перпендикулярні, то умова перпендикулярності має наступний вигляд: $k_1 = -1/k_2$.

Для прямих $l_1: A_1x + B_1x + C_1 = 0$ і $l_2: A_2x + B_2x + C_2 = 0$ умова паралельності (збігу) і перпендикулярності, відповідно, мають вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad (l_1 \parallel l_2) \quad \text{і} \quad A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (l_1 \perp l_2).$$

Відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ обчислюється за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

(1.22)

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.8. Побудувати пряму $2x - 4y + 8 = 0$.

Розв'язання. Для того, щоб побудувати пряму достатньо знайти координати будь-яких двох її точок, наприклад, точок перетину з осями координат. Підставимо $x = 0$ в рівняння прямої: $2 \cdot 0 - 4y + 8 = 0$, $-4y + 8 = 0$, $-4y = -8$, $y = 2$. Знайшли координати першої точки $A(0, 2)$. Якщо $y = 0$, то аналогічно знаходимо: $2x - 4 \cdot 0 + 8 = 0$, $x = -4$. Маємо другу точку $B(-4, 0)$. Точки A і B наносимо на координатну площину і з'єднуємо їх прямою лінією (рис. 1.4).



Рис. 1.4. Графік прямої $2x - 4y + 8 = 0$

Приклад 1.9. Задані точки $A(2;-1)$ і $B(3;0)$. Знайти довжину відрізка AB та координати точки M , що поділяє відрізок AB у відношенні $\overline{AM} : \overline{MB} = 1:2$.

Розв'язання. Довжину відрізка AB знаходимо за формулою (1.11):

$$|AB| = \sqrt{(3-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

За умовою прикладу $\overline{AM} : \overline{MB} = 1:2$, тобто $\lambda = 0,5$. Тоді за формулою (1.12) знаходимо координати точки M , яка поділяє відрізок AB у відношенні $\lambda = 0,5$:

$$x_M = \frac{2+0,5 \cdot 3}{1+0,5} = 3,5:1,5 = \frac{7}{3}; \quad y_M = \frac{-1+0}{1,5} = -\frac{2}{3}.$$

Отже, координати шуканої точки є $M\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Приклад 1.10. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $C(3,2)$ і середину відрізка AB , якщо $A(-2,1)$, $B(4,3)$.

Розв'язання. Знаходимо координати середини відрізка за формулами (1.13):

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1; \quad y = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Отже, точка $M(1;2)$ – середина відрізка AB . Оскільки $y_C = y_M$, то рівняння прямої має вигляд: $y = 2$.

Приклад 1.11. Дана пряма $l: 2x - y + 1 = 0$. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;1)$ і: 1) паралельна до прямих l ; 2) перпендикулярна до прямої l .

Розв'язання. 1) Знаходимо кутовий кут прямої l , рівняння якої записуємо як $y = 2x + 1$. Тоді кутовий коефіцієнт прямої l є $k_l = 2$. За умови, пряма паралельна прямих l , тобто їх кутові коефіцієнти співпадають (див. умову паралельності прямих), тобто $k = k_l = 2$. Отже, для шуканої прямої відомі кутовий коефіцієнт та координати однієї точки. Скористаємось рівнянням «зв'язку прямих». Підставивши в (1.16) значення кутового коефіцієнта і координати точки $A(2;1)$, дістаємо рівняння $y - 1 = 2(x - 2)$. Звідки $y = 2x - 3$.

2) За умови перпендикулярності прямих маємо, що $k = -\frac{1}{k_l} = -\frac{1}{2}$.

Тоді знаходимо рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;1)$, перпендикулярно до прямої l : $y - 1 = -0,5(x - 2)$ або $y = -0,5x + 2$.

Приклад 1.12. Знайти кут між прямими $y = -3x + 1$ і $2x + 3y - 4 = 0$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння другої прямої, розв'язавши його відносно змінної y : $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

Тоді кутові коефіцієнти першої і другої прямих будуть дорівнювати, відповідно, $k_1 = -3$, $k_2 = -\frac{2}{3}$. За формулою (1.20), знаходимо:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-\frac{2}{3} + 3}{1 + 3 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}} = \frac{7}{9} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{7}{9}.$$

Зауважимо, що для визначення кута між даними прямими можна було б застосувати формулу (1.21). Для цього, перетворивши рівняння першої прямої, запишемо його як загальне рівняння: $3x + y - 1 = 0$. Тоді

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1} = \frac{7}{9} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{7}{9}.$$

Приклад 1.13. Знайти довжину перпендикуляра, що проведений з точки $M(1;2)$

$$\text{на пряму } l: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Довжина перпендикуляра дорівнює відстані від точки M до прямої l . Запишемо рівняння прямої l як загальне рівняння: $3x - 4y - 2 = 0$. Тоді з (1.22) одержимо:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + (-2)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{5}.$$

Приклад 1.14. Складіть рівняння прямих, які проходять через точку $A(3;1)$ і утворюють кут 45° з прямою $2x + 3y - 1 = 0$.

Розв'язання. Нехай шукана пряма представлена рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом, тобто $y = k_1 x + b$ (k_1 – її кутовий коефіцієнт). Оскільки пряма проходить через точку $A(3;1)$, то її координати задовольняють рівнянню прямої, тобто $1 = 3k_1 + b$ або $b = 1 - 3k_1$. Знаходимо кутовий коефіцієнт прямої $2x + 3y - 1 = 0$. Перетворимо рівняння прямої: $2x + 3y - 1 = 0 \Rightarrow 3y = -2x + 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Звідси бачимо, що

$$k_2 = -\frac{2}{3}.$$

За умовою $\varphi = 45^\circ$, тобто $\operatorname{tg} \varphi = 1$. Тоді, за формулою (1.20) кута між двома прямими, які задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом, складемо рівняння для визначення невідомого кутового коефіцієнта k_1 : $\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = 1$ або $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 1$.

Розв'язуємо перше рівняння:

$$\left(k_1 + \frac{2}{3}\right) : \left(1 - \frac{2}{3}k_1\right) = 1 \Rightarrow k_1 + \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3}k_1 \Rightarrow \frac{5}{3}k_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{5} = 0,2$$

.

Тоді $b = 1 - 3k_1 = 1 - 3 \cdot 0,2 = 0,4$ і рівняння шуканої прямої має вигляд: $y = 0,2x + 0,4$.

Аналогічно з другого рівняння знаходимо $k_1 = -5$. Тому $b = 1 - 3k = 1 + 3 \cdot 5 = 16$ и друга пряма задається рівнянням $y = -5x + 16$.

Таким чином, умовам задачі задовольняють дві прямі: $y = 0,2x + 0,4$ та $y = -5x + 16$.

Питання для самоперевірки

1. Як знайти відстань між двома точками?
2. Як знайти координати точки, що поділяє відрізок в заданому відношенні?
3. Напишіть формули координат середини відрізка.
4. При якій умові точка M , яка поділяє відрізок AB у відношенні λ , лежить між точками A і B ? Не лежить між даними точками?
5. Напишіть загальне рівняння прямої на площині.
6. Що таке кутовий коефіцієнт прямої?
7. Для яких прямих кутовий коефіцієнт не можна визначити?
8. Напишіть рівняння пучка прямих на площині.
9. Як знайти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?
10. Який вигляд має рівняння прямої, яка паралельна осі Ox ? осі Oy ?
11. Як знайти кут між двома прямими на площині?
12. Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
13. Напишіть рівняння прямої у відрізках.
14. Як знайти відстань від даної точки до прямої?

Вправи для самостійного розв'язування

1.41. Перевірити, чи належать три дані точки одній прямій:

- 1) $A(-2; -7)$, $B(1; -1)$, $C(4; 5)$; 2) $D(-2; 9)$, $E(2; -7)$, $F(0; 1)$;
- 3) $K(-1; -1)$, $L(-3; -7)$, $M(2; 7)$; 4) $A(2; 3)$, $B(1; 1)$, $C(-2; 4)$.

1.42. Точка C поділяє відрізок AB , де $A(4; -3)$, $B(-8; 6)$, у відношенні $\lambda = 2:1$. Через точку C провести пряму, що утворює з віссю Ox кут 135° і знайти рівняння цієї прямої.

1.43. Побудувати на координатній площині точки $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$ та знайти координати точки $M(x, y)$, яка поділяє відрізок AB у відношенні:

- 1) $AM : MB = 3:2$; 2) $AM : MB = -3:2$; 3) $BM : MA = -1:2$.

1.44. Задані точки $A(-1, 4)$ і $B(2, 5)$. Знайти координати точки $M(x, y)$, що поділяє відрізок AB у відношенні: 1) $AM : MB = 2:3$; 2) $AM : MB = -1:5$.

1.45. Знайти середини сторін трикутника з вершинами $A(2; -1)$, $B(4; 3)$, $C(-2; 1)$.

1.46. Відрізок, який обмежений точками $A(1; 4)$ і $B(4; -14)$, поділений на три рівні частини. Знайти координати точок ділення C і D .

1.47. Задані дві точки $A(-4; 3)$ і $B(2; -1)$. Знайти точку C , якщо відомо, що $|AC| = 3|AB|$ і вона розташована з того ж боку від точки A , що й точка B .

1.48. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку з координатами $(0; 1)$, якщо кутовий коефіцієнт прямої дорівнює 2.

1.49. Побудувати пряму, яка відсікає на осі Oy відрізок $b = 3$ і складає із віссю Ox кут: 1) 45° ; 2) 135° . Написати рівняння цих прямих.

1.50. Написати рівняння прямих, що відсікають на додатній півосі Oy відрізок, який дорівнює 3 одиницям, і утворюють з віссю Ox кути: 1) 45^0 ; 2) 60^0 ; 3) 135^0 ; 4) 150^0 .

1.51. Вершиною трикутника є точка $C(4;-1)$. Рівняння висоти і медіани, які проведені з однієї вершини, відповідно, $2x - 3y + 12 = 0$ і $y = -\frac{2x}{3}$. Знайти рівняння сторін трикутника

1.52. Знайти рівняння прямої і побудувати її, якщо пряма проходить через початок координат і точку $(-2;3)$.

1.53. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(-1;3)$ і $B(4,-2)$.

1.54. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;2)$ і точку перетину прямих $2x + 3y - 4 = 0$ і $3x - 5y + 13 = 0$.

1.55. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1;2)$ і відсікає на координатних осях відрізки однакової довжини.

1.56. Скласти рівняння прямої, яка паралельна до прямої $2x + 3y - 1 = 0$ і відсікає на додатній півосі абсцис відрізок, довжина якого дорівнює 4 одиниці.

1.57. Знайти кут нахилу до осі Ox кожної з наступних прямих, що задані двома точками: 1) $A(2;5)$ і $B(7;6)$; 2) $C(-3;2)$ і $D(-1;5)$; 3) $E(1;-3)$ і $F(-2;1)$.

1.58. Задані точки $O(0,0)$ і $A(-3;0)$. На відрізку OA побудований паралелограм, діагоналі якого перетинаються в точці $B(0;2)$. Знайти рівняння сторін і діагоналей паралелограма.

1.59. Рівняння одної з сторін ромба $2x + y - 3 = 0$. Написати рівняння інших його сторін, якщо діагоналі ромба лежать на осях координат.

1.60. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(2,3)$ і відсікає від координатного кута трикутник, площа якого 12 кв. од.

1.61. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(-4,6)$ і відсікає від осей координат трикутник з площею 6 кв. од.

1.62. Записати рівнянням у відрізках для прямих. Побудувати ці прямі.

1) $3x - 4y + 12 = 0$; 2) $5x - 6y - 30 = 0$.

1.63. Вершинами трикутника є точки $A(2;4)$, $B(-1;-2)$, $C(11;13)$. Знайти рівняння сторін трикутника і тангенси його внутрішніх кутів.

1.64. Знайти кут між прямою $9x + 3y - 7 = 0$ і прямою, що проходить через точки $A(1;-1)$ і $B(5;7)$.

1.65. Протилежні вершини квадрата знаходяться в точках $B(-2;2)$ і $D(0;-3)$. Скласти рівняння сторін квадрата.

1.66. Знайти менший кут між прямими:

1) $3x - 4y = 6$ і $8x + 6y = 11$; 2) $5x - y + 7 = 0$ і $2x - 3y + 1 = 0$;

3) $2x + y = 0$ і $y = 3x - 4$; 4) $3x + 2y = 0$ і $6x + 4y + 9 = 0$.

1.67. Сторони трикутника ABC подаються рівняннями: $2x + 7y - 1 = 0$ (AB), $3x - 2y + 11 = 0$ (BC) і $3x - 5y + 7 = 0$ (AC). Знайти рівняння висоти BN .

- 1.68. Знайти відстань між прямими $2x - 3y - 5 = 0$ і $2x - 3y + 21 = 0$.
- 1.69. Знайти проекцію точки $A(-6; 2)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.
- 1.70. Задані вершини $A(2; 6)$, $B(-6; 0)$, $C(-3; -4)$ трикутника. Знайти рівняння його сторін і медіан.
- 1.71. Дано координати вершин трикутника $A(-2; 0)$, $B(2; 6)$, $C(4; 2)$. Написати рівняння сторони AC , медіани BE і висоти BD .
- 1.72. Визначити вершини і кути трикутника, сторони якого подаються рівняннями $x + 3y = 0$, $x = 3$ і $x - 2y + 3 = 0$.
- 1.73. Знайти точку перетину медіан і точку перетину висот трикутника, вершинами якого є точки $A(-4; 2)$, $B(2; -5)$, $C(5; 0)$.
- 1.74. Знайти довжину висоти BD трикутника з вершинами $A(-3; 0)$, $B(2; 5)$, $C(3; 2)$.
- 1.75. Знайти точку $M(x, y)$, що належить тій же прямій, що й точки $P(1; -7)$ і $Q(-2; 5)$, якщо координати шуканої точки співпадають.
- 1.76. Знайти рівняння пучка прямих, що проходять через точку $(-4; 3)$. Вибрати прямі, що складають з віссю Ox кути. 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 120° ; 5) 135° .

Тема 1.3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Множина точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.23)$$

де A, B, C одночасно не можуть дорівнювати нулю ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), називають *лінією (кривою) другого порядку*.

В рівнянні (1.23) A, B, C, D, E, F – задані дійсні числа – *коефіцієнти* при змінних і *вільний член* F

До ліній другого порядку відносяться *коло, еліпс, гіпербола, парабола*.

Коло – геометричне місце точок, відстані яких від однієї заданої точки цієї ж площини (*центру кола*) дорівнюють сталому числу (*радіусу*).

Канонічне рівняння кола з центром в точці $C(a, b)$ і радіусом R має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1.24)$$

1.3.1. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней кожної з яких від двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала ($2a > |F_1F_2|$).

Позначимо відстань між фокусами $2c$, тобто $|F_1F_2| = 2c$. Нехай фокуси еліпса лежать на осі Ox так, що початок координат знаходиться в середині відрізка F_1F_2 . Тоді точки F_1 і F_2 мають відповідно координати $(-c; 0)$ і $(c; 0)$, та канонічне рівняння еліпса має вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

(1.25)

де $b^2 = a^2 - c^2$.

Осі координат є осями симетрії (рис. 1.5). Початок координат є центром симетрії еліпса. Відрізки довжиною a і b називаються відповідно *великою* та *малою півосьми* еліпса.

Еліпс міститься всередині прямокутника $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Якщо $a > b$, то фокуси F_1 і F_2 знаходяться на осі Ox на відстані $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ від центру.

Відношення $\frac{c}{a} = \varepsilon$ називається *ексцентриситетом* (для еліпсу $\varepsilon < 1$).

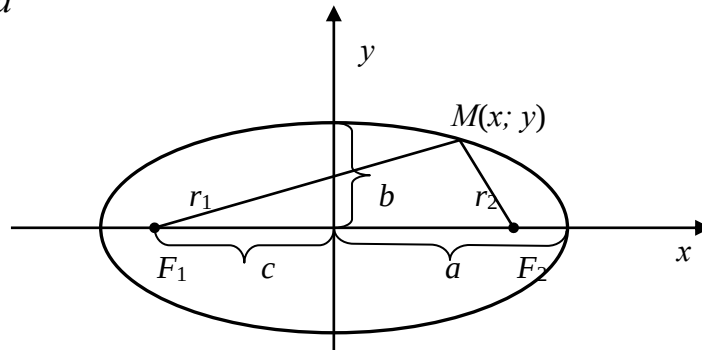


Рис. 1.5. Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Відстані від довільної точки $M(x, y)$ еліпса до його фокусів (*фокальні радіуси-вектори*) знаходять за формулами

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x.$$

(1.26)

Якщо $a < b$, то фокуси знаходяться на осі Oy і тоді виконуються рівності $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, $r_{1,2} = b \pm \varepsilon y$.

1.3.2. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок, для яких різниця $|S_1 - S_2|$ відстаней S_1 і S_2 до двох заданих точок F_1 і F_2 , званих *фокусами гіперболи*, є величина постійна, що дорівнює $2a$ ($0 < 2a < |F_1 F_2| = 2c$).

Якщо початок системи координат знаходиться в середині відрізка $F_1 F_2$ і вісь Ox направлена по прямій $F_1 F_2$, то точки F_1 і F_2 мають відповідно координати $(-c; 0)$ і $(c; 0)$. В цьому випадку канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(1.27)

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Гіпербола, що задається рівнянням (1.27), симетрична відносно осей координат (рис. 1.6). Вона перетинає вісь Ox в точках $A_1(a, 0)$ і $A_2(-a, 0)$, що називаються *вершинами гіперболи* і не перетинає вісь Oy . Гіпербола утворена двома вітками, які містяться в області $\left| \frac{y}{x} \right| \leq \frac{b}{a}$.

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ називаються *асимптотами* гіперболи. Відрізки a і b називаються відповідно *дійсною* і *мнимою* осями гіперболи. Параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ дорівнює відстані від центру до фокусів. Для гіперболи *ексцентриситет* $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$.

Відстані від довільної точки $M(x, y)$ гіперболи до її фокусів (фокальні радіуси-вектори) визначаються формулами

$$(1.28) \quad r_1 = |\varepsilon x - a|, \quad r_2 = |\varepsilon x + a|.$$

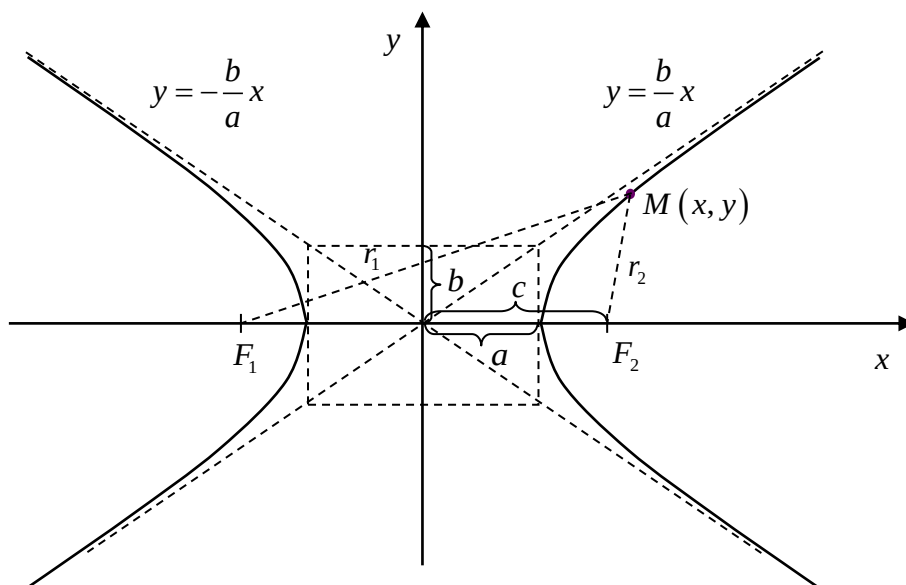


Рис. 1.6. Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Гіпербола, у якої $a = b$, називається *рівнобічною*, її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот мають вигляд $y = \pm x$.

Гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ називають *спряженими*.

1.3.3. Парабола

Параболою називається геометричне місце точок на площині рівновіддалених від заданої точки (*фокусу параболы*) і заданої прямої, яка називається *директрисою* параболы.

Канонічне рівняння параболи: $y^2 = 2px$, якщо парабола симетрична відносно осі Ox (рис. 1.7), або $x^2 = 2py$, якщо парабола симетрична відносно осі Oy .

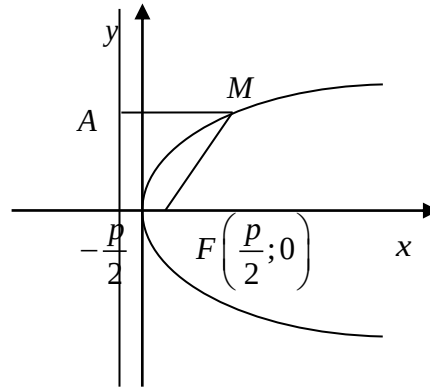


Рис. 1.7. Парабола $y^2 = 2px$

Точка O перетину параболи і осі симетрії називається *вершиною параболи*. В обох випадках вершина параболи співпадає з початком координат.

Парабола $y^2 = 2px$ має фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ і директрису $x = -\frac{p}{2}$, фокальний радіус-вектор її точки $M(x, y)$ дорівнює $r = x + \frac{p}{2}$. Парабола $x^2 = 2py$ має фокус $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ і директрису $y = -\frac{p}{2}$, фокальний радіус-вектор її точки $M(x, y)$ дорівнює $r = y + \frac{p}{2}$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1.15. Знайти координати центру і радіус кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння кола: $(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 1 - 4 - 4 = 0$ або $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Таким чином, центр кола знаходиться в точці $(1, -2)$, а її радіус $R = \sqrt{9} = 3$.

Приклад 1.16. Знайти параметри і ексцентриситет еліпса $3x^2 + 4y^2 = 12$.

Розв'язання. Ділимо обидві частини рівняння на 12: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Тоді $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Крім того, $c = \sqrt{4 - 3} = 1$ і $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

Приклад 1.17. Знайти ексцентриситет і параметри гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$.
Знайти рівняння асимптот гіперболи.

Розв'язання. Ділимо обидві частини рівняння на 12: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$. Тоді

$a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Отже, $c = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{2}$ і рівняння асимптот гіперболи мають

вид: $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Приклад 1.18. Визначити координати фокусу і рівняння директриси параболи $y = x^2$.

Розв'язання. Порівнюючи початкове рівняння з канонічним рівнянням параболи ($x^2 = 2py$), отримаємо $2p = 1$ або $p = 0,5$. Отже, фокус параболи знаходиться в точці $F(0; 0,25)$, а рівняння директриси $y = -0,25$.

Питання для самоперевірки

1. Яка крива називається кривою 2-го порядку і який вигляд має її загальне рівняння?
2. Сформулюйте означення кола.
3. Напишіть канонічне рівняння кола.
4. Сформулюйте означення еліпса.
5. Напишіть канонічне рівняння еліпса.
6. Як визначити ексцентриситет еліпса?
7. Які відрізки називаються великою і малою півосями еліпса?
8. Сформулюйте означення гіперболи.
9. Напишіть канонічне рівняння гіперболи.
10. Що таке фокальні радіус-вектори?
11. Які відрізки називаються дійсною і мнимію осями гіперболи?
12. Напишіть рівняння асимптот гіперболи.
13. Яка гіпербола називається рівнобічною?
14. Сформулюйте означення параболи.
15. Напишіть канонічне рівняння параболи.
16. Що таке директриса параболи?

Вправи до самостійного розв'язування

1.77. Написати рівняння кола з центром в точці $C(-4; 3)$ і радіусом $R = 5$. Зробити рисунок. Чи належать колу точки $A(-1; -1)$, $B(3; 2)$, $O(0; 0)$?

1.78. Задана точка $A(-4; 6)$. Знайти рівняння кола, діаметром якого служить відрізок OA .

1.79. Знайти центр і радіус кола. Зробити рисунок.

1) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 4y = 0$.

1.80. Знайти точки перетину кола $x^2 + y^2 + 5x = 0$ і прямої $x + y = 0$. Зробити рисунок.

1.81. Задані точки $A(-3;0)$ і $B(3;6)$. Написати рівняння кола, діаметром якої є відрізок AB .

1.82. Скласти рівняння кола, що торкається двох паралельних прямих $2x + y - 5 = 0$ і $2x + y + 15 = 0$, причому однієї з них – в точці $A(2;1)$.

1.83. Написати канонічне рівняння еліпса $x^2 + 4y^2 = 16$. Знайти його фокуси і ексцентриситет.

1.84. Написати канонічне рівняння еліпса, якщо: 1) відстань між фокусами дорівнює 8, мала піввісь $b = 3$; 2) велика піввісь $a = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = 0,5$.

1.85. Знайти малу піввісь b і ексцентриситет еліпса, який має велику піввісь $a = 5$ і параметр c , що дорівнює: 1) 4,8; 2) 4; 3) 3; 4) 1,4; 5) 0,5.

Побудувати кожний з еліпсів.

1.86. Еліпс, симетричний щодо осей координат, проходить через точки $M(2;\sqrt{3})$ і $B(0;2)$. Знайти його рівняння і знайти відстань від точки M до фокусів.

1.87. Еліпс, що симетричний відносно осей координат і фокуси якого знаходяться на осі Ox , проходить через точку $M(-4;\sqrt{21})$. Написати рівняння еліпса і знайти фокальні радіус-вектори точки M , якщо $\varepsilon = 0,75$.

1.88. Скласти рівняння еліпса, якщо його фокуси співпадають з фокусами гіперболи $x^2 - 3y^2 = 24$ і ексцентриситет дорівнює 0,4.

1.89. Визначити точки еліпса $9x^2 + 25y^2 = 900$, відстань від яких до правого фокусу дорівнює 14.

1.90. Побудувати гіперболу $x^2 - 4y^2 = 16$ і її асимптоти. Знайти фокуси, ексцентриситет і кут між асимптотами.

1.91. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо: 1) відстань між фокусами $2c = 10$, а між вершинами $2a = 8$; 2) дійсна піввісь $a = 2\sqrt{5}$, $\varepsilon = \sqrt{1,2}$.

1.92. Гіпербола, яка є симетричною відносно осей координат, проходить через точку $M(6;-2\sqrt{2})$ і має мниму піввісь $b = 2$. Написати її рівняння і знайти відстані від точки M до фокусів.

1.93. Знайти рівняння гіперболи, що має вершини у фокусах, а фокуси – у вершинах еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

1.94. Точка M з ординатою 1 належить гіперболі $x^2 - 4y^2 = 16$. Знайти відстань від точки M до фокусів гіперболи.

1.95. Знайти точки перетину асимптот гіперболи $x^2 - 3y^2 = 12$ з колом, що має центр в правому фокусі гіперболи і проходить через початок координат.

1.96. Написати канонічне рівняння гіперболи, якщо відстані від однієї з її вершин до фокусів дорівнюють 9 та 1.

1.97. Знайти відстань від центру кола $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 5 = 0$ до асимптот гіперболи $9x^2 - 16y^2 = 144$.

1.98. Побудувати параболи, які задані рівняннями:

1) $y^2 = 4x$; 2) $y^2 = -4x$; 3) $x^2 = 4y$; 4) $x^2 = -4y$.

Знайти їх фокуси і рівняння директрис.

1.99. Записати рівняння параболи, що:

1) проходить через точки $(0,0)$ і $(1;-3)$ симетрично відносно осі Ox ;

2) проходить через точки $(0,0)$ і $(2;-4)$ симетрично відносно осі Oy .

1.100. Точка $A(6;-3)$ – вершина параболи. Рівняння директриси параболи: $2x + 1 = 0$. Знайти фокус F параболи.

1.101. Знайти рівняння прямої, яка є перпендикулярною до прямої $2x + 4y + 7 = 0$ й торкається параболи $x^2 = 16y$ в точці з ординатою $\frac{1}{16}$.

1.102. Знайти рівняння геометричного місця точок, які однаково віддалені від точки $F(0;2)$ і від прямої $y = 4$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат. Зробити рисунок.

1.103. Знайти канонічне рівняння кривої другого порядку, побудувати цю криву, її вершини, фокуси, якщо 1) $b = 5, \varepsilon = \sqrt{2}$; 2) $c = 6, a = 4$; 3) $c = 2, \varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

1.104. Визначити криві, що задані наступними рівняннями:

1) $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$; 5) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y - 10 = 0$;

2) $3x^2 - 4y - 12x = 0$; 6) $2x^2 - 2y^2 + 2x = 0$; $3x^2 - 4y^2 - 12x = 0$;

7) $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$; 8) $3x^2 + 4y^2 - 12x - 24 = 0$.

Знайти канонічні рівняння цих кривих.

1.105. Знайти рівняння геометричного місця точок, що однаково віддалені від початку координат та від прямої $x = -4$. Знайти точки перетину цієї кривої з осями координат і побудувати її.

1.106. Знайти рівняння геометричного місця точок, що однаково віддалені від точки $F(2,0)$ та від прямої $y = 2$. Знайти вершину кривої, точки її перетину з віссю Oy і побудувати її.

РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Тема 2.1. ЧИСЛОВІ МАТРИЦІ

2.1.1. Основні означення

Матрицею розміром $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що складається з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриці зазвичай позначають великими літерами латинського алфавіту ($A, B, C, \dots$). Числа, що утворюють матрицю – елементи матриці (a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$) позначають відповідними малими літерами з подвійним індексом (a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , ...), де індекс i відповідає номеру рядка матриці ($i = \overline{1, m}$), а j – номеру стовпця ($j = \overline{1, n}$). Отже, елемент a_{ij} матриці A знаходиться на перетині i -го рядка та j -го стовпця.

Запис $m \times n$ означає *розмір* матриці. Наприклад, запис розміру матриці 2×4 означає, що в матриці два рядки і чотири стовпця.

Для позначення матриць також використовують круглі дужки $()$, квадратні дужки $[\]$, або подвійні вертикальні рисочки $\| \|$. Наприклад, $A = (a_{ij})$, $A = [a_{ij}]$, або $A = \|a_{ij}\|$. При посиланні на матрицю певного розміру застосовують наступне позначення $A = (a_{ij})_{m \times n}$, або скорочений запис $A_{m \times n}$.

Матриця називається *квадратною*, якщо $m = n$, тобто число рядків дорівнює числу стовпців матриці. Число n називається *порядком* матриці. В квадратній матриці n -го порядку діагональ, що складається з елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, називається *головною діагоналлю*.

Нульовою матрицею називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю. Така матриця може мати будь-який розмір і позначається O .

Квадратна матриця, в якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, називається *одиничною* матрицею. Одинична матриця позначається E або I .

Матриця, яка одержана з матриці A заміною всіх рядків відповідними за номером стовпцями, називається *транспонованою* по відношенню до матриці A і позначається A^T або A' , тобто

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2.1.2. Дії над матрицями

Добутком матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на число λ називається матриця розміру $m \times n$, кожний елемент якої дорівнює добутку відповідного елемента матриці A на число λ :

$$\lambda A = \lambda (a_{ij})_{m \times n} = (\lambda a_{ij})_{m \times n} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Сумою (різницею) двох матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і $B = (b_{ij})_{m \times n}$ однакового розміру називається матриця $C = A \pm B$, елементи якої є сумою (різницею) відповідних елементів вихідних матриць:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.2)$$

Із означення випливає, що додавати і віднімати можна лише матриці однакового розміру.

Добутком AB матриці $A = (a_{ij})_{m \times k}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{k \times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m \times n}$, елементи c_{ij} ($i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}$) якої дорівнюють сумі добутків елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B , тобто

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

Зауважимо, що добуток матриці $A = (a_{ij})_{m \times k}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{k \times n}$ є визначеним тільки в тому випадку, коли число стовпців першого множника (матриці A) дорівнює числу рядків другого множника (матриці B) і розмір матриці $C = AB$ дорівнює $(m \times n)$:

$$\underbrace{(m \times k)}_A \cdot \underbrace{(k \times n)}_B = \underbrace{(m \times n)}_{AB}.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1. Знайти матриці $A + B$ і $5A$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За формулою (2.1) отримуємо

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 2-5 \\ 1+2 & 2-1 \\ 5-1 & -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись формулою (2.2), маємо

$$5A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 3 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 5 & 10 \\ 25 & -5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2.2. Знайти добуток матриць A і B , якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розміри матриць A і B відповідно (2×3) і (3×3) , тому матриці можна перемножити (зауважимо, що добуток BA не визначений). При цьому розмір матриці $C = AB$ буде дорівнювати (2×3) .

Знаходимо матрицю C :

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 9 \\ 1 & -8 & 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-8) & 2 \cdot 5 + 3 \cdot 9 + 6 \cdot 7 \\ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot (-8) & 4 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 16 & -29 & 79 \\ 3 & 26 & 31 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Питання для самоперевірки

1. Що таке числова матриця?
2. Яка матриця називається квадратною?
3. Дайте означення діагональної й одиничної матриць.
4. Чи можуть бути рівними дві матриці різного розміру?
5. Яку матрицю називають сумою (різницею) двох матриць?
6. Яку матрицю називають добутком матриці на скаляр?
7. За якою умовою існує добуток двох матриць?
8. За яким правилом визначають елементи матриці, яка є добутком двох матриць?
9. Яка матриця називається транспонованою?

Вправи для самостійного розв'язування

2.1. Знайти матриці: 1) $2A + 5B$; 2) $3B - 2A$; 3) $A^T - B$; 4) $2A^T + 5B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.2. Знайти матриці: 1) $3A + 4B$; 2) $7B - 2A$; 3) $A^T - 3B$; 4) $A^T + 2B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.3. Знайти добутки AB і BA матриць A і B , якщо

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \\ 3) \quad A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 4) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4. Які з добутків AB, BA, AC, CA, BC, CB визначені? Знайти їх.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.5. Які з добутків $AB, BA, AC, CA, (BA)C, C(BA)$ визначені? Знайти їх.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.6. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 + 3x - 4$ і

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.7. Знайти $f(A)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

$$1) A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.8. Знайти матриці:

$$1) (3A - 2C) \cdot (3B + D); \quad 2) (3B + D) \cdot (3A - 2C);$$

$$3) (2A^T - 3B) \cdot (2C + D^T); \quad 4) (2C + D^T) \cdot (2A^T - 3B), \text{ якщо}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 5 \\ -1 & -3 & 14 \end{pmatrix}.$$

Тема 2.2. ВИЗНАЧНИКИ

2.2.1. Означення визначника. Визначники 2-го та 3-го порядків

Кожній квадратній матриці по деякому закону ставлять у відповідність деяке число $|A|$, яке називають *визначником* (*детермінантом*) цієї матриці.

Порядком визначника називається порядок відповідної квадратної матриці, для якої розглядається цей визначник.

Позначають визначники так: $\Delta = \Delta A = |A| = \det(A)$.

Визначником другого порядку називається число, яке записане у вигляді таблиці і дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (2.4)$$

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -4.$$

Визначником 3-го порядку називається число, яке дорівнює

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (2.5)$$

Зауважимо, що кожний доданок в (2.5) дорівнює добутку трьох елементів, що взяті по одному з кожного стовпця і кожного рядка, а кількість доданків при цьому дорівнює $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Визначник 3-го порядку можна обчислити за *правилом трикутників*. Якщо з'єднати лінією кожні три елементи визначника (по одному з кожного рядка і кожного стовпця), то одержимо схему, яку легко запам'ятати:

$$\Delta = \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

На схемі, що зліва, лініями з'єднані кожні три елементи визначника, добуток яких входить в визначник зі знаком "+", на правій схемі наведені добутки, які входять в визначник зі знаком "-".

Крім того, існує ще одне правило розкриття визначника третього порядку – *правило Саррюса*: дописуємо справа до визначника перший і другий стовпці, та одержимо схему обчислення визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Добуток елементів, які розміщені на діагоналях, що йдуть згори ліворуч униз праворуч входить в визначник зі знаком "+". Добуток елементів, які розміщені на діагоналях, що йдуть згори праворуч униз ліворуч входить в визначник зі знаком "-".

2.2.2. Властивості визначників

1. При транспонуванні матриці величина її визначника не змінюється, тобто $\det(A) = \det(A^T)$.

Із властивості 1 випливає рівноправність рядків і стовбців визначника. Тому далі формулюємо властивості дії над рядками.

2. Якщо поміняти місцями будь-які два рядки визначника, то визначник змінить свій знак на протилежний.

3. Якщо всі елементи будь-якого рядка мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

4. Якщо один рядок визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

5. Визначник дорівнює нулю, якщо в ньому є два однакові або два пропорційні рядки.

6. Величина визначника не змінюється, якщо к елементам будь-якого рядка додати відповідні елементи іншого рядка, які помножені на одне й те саме число.

7. Якщо елементи деякого рядка визначника Δ записані у вигляді суми двох доданків, то $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$. У визначнику Δ_1 вказаний рядок складається з перших доданків, а

у визначнику Δ_2 – з других доданків. Інші рядки визначників співпадають з відповідними рядками Δ .

2.2.3. Обчислення визначників n -го порядку

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} , визначника n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, утворений у результаті викреслювання i -го рядка і j -го стовпця, на перетинанні яких знаходиться елемент a_{ij} .

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Визначник n -го порядку ($n \geq 2$) дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка на їх алгебраїчні доповнення

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (2.6)$$

або сумі добутків елементів j -го стовпця на їх алгебраїчні доповнення

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (2.7)$$

Формули (2.6) і (2.7) називають *формулами Лапласа* (розкладом визначника відповідно за елементами i -го рядка або j -го стовпця).

Розглянемо способи обчислення визначників.

1. Застосування формул Лапласа. Формули (2.6) і (2.7) дозволяють обчислити визначник n -го порядку здійснюючі його розклад за елементами будь-якого його рядка (стовпця). При цьому обчислення визначника n -го порядку зводиться до обчислення визначників $(n-1)$ -го порядку. Далі обчислення кожного визначника $(n-1)$ -го порядку зводиться до обчислення визначників $(n-2)$ -го порядку тощо. Таким чином, в результаті послідовного використання формул Лапласа, обчислення визначника n -го порядку зводиться до обчислення визначників другого або третього порядків.

2. Зниження порядку визначника шляхом перетворень. Обсяг обчислень за формулами (2.6) і (2.7) буде значно менше, якщо деякі з елементів рядка (стовпця) за яким здійснюється розклад, дорівнюють нулю. В такому разі відповідні алгебраїчні доповнення нема потреби обчислювати. Властивість 6 визначника дозволяє шляхом перетворень замінити на нулі всі елементи будь-якого рядка чи стовпця, окрім одного (якщо визначник не дорівнює нулю).

3. Зведення визначника до трикутного виду. Для обчислення визначників можна застосовувати *метод зведення до трикутного виду*: визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі.

2.2.4. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається *оберненою* по відношенню до матриці A , якщо

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E, \quad (2.8)$$

де E – одинична матриця.

Квадратна матриця A називається *неособливою*, або *невиродженою*, якщо її визначник ΔA не дорівнює нулю. У протилежному випадку вона називається *особливою* або *виродженою* (*сингулярною*).

Для будь-якої квадратної матриці A , визначник якої не дорівнює нулю, існує єдина обернена матриця.

Транспонована матриця алгебраїчних доповнень A^* називається *союзною*, або *приєднаною* по відношенню до матриці A :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} .

Обернена матриця має вид: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$. Якщо $\det(A) = 0$, то обернена матриця A^{-1} не існує.

2.2.5. Ранг матриці

Рангом матриці розміру $m \times n$ називається найбільший порядок відмінного від нуля мінору, який утворено з елементів цієї матриці.

Ранг матриці A позначають $r = \text{rang}(A) = r(A)$.

При обчисленні рангу матриці переходять від мінорів меншого порядку, відмінних від нуля, до мінорів більш високого порядку. Для того, щоб спростити процес обчислення рангу матриці можна використовувати елементарні перетворення матриць, а саме

1. транспонування матриці;
2. відкидання нульового рядка (стовпця) матриці;
3. переставлення місцями двох рядків (стовпців) матриці;
4. множення рядка (стовпця) матриці на число, яке відмінне від нуля;
5. додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Елементарні перетворення не міняють рангу матриці.

Ранг матриці також можна обчислити методом *окаймлення (обвідних) мінорів*. Якщо вже знайдено ненульовий мінор k -го порядку M , то достатньо обчислити тільки мінори $(k+1)$ -го порядку, що окаймляють мінор M . Якщо при цьому всі окаймлючі мінори дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k .

Матриці A і B , які мають однакові ранги, називаються *еквівалентними* матрицями. Їх позначають $A \sim B$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.3. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. 1) Обчислимо визначник за правилом трикутників:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 5 \cdot 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 = 16.$$

2) Обчислимо визначник за правилом Саррюса. Допишемо до визначника перший і другий стовпці і знайдемо значення визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 4 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = 16.$$

Приклад 2.4. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Для обчислення визначника застосуємо формулу Лапласа (2.8) розкладу визначника за елементами j -го стовпця. Обчислення суттєво спрощується, якщо спочатку перетворити визначник, отримавши в рядку (стовбці) нульові елементи. При одержанні нулів в рядку (стовпці) зручно використовувати будь-який елемент $a_{ik} = \pm 1$. Розкладаємо визначник за елементами першого стовпця ($a_{11} = 1$), перетворивши спочатку елементи a_{21}, a_{31}, a_{41} на нулі. Для цього послідовно виконуємо наступні перетворення:

- 1) елементи першого рядка помножимо на (-2) і додамо до відповідних елементів 2-ого рядка;
- 2) помножимо елементи 1-ого рядка на (-5) і додамо до відповідних елементів другого рядка;
- 3) помножимо елементи 1-ого рядка на (-1) і додамо їх до відповідних елементів третього рядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & -7 & -6 & -24 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & -7 & -6 & -24 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Останній визначник розкладаємо за елементами першого стовпця:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -8 \\ 0 & -7 & -6 & -24 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -1 & -8 \\ -7 & -6 & -24 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix},$$

або остаточно

$$\Delta = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 7 & 6 & 24 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3 \cdot 6 \cdot 3 + 1 \cdot 24 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 \cdot 8 - 8 \cdot 6 \cdot (-2) - 1 \cdot 7 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 24) = -33.$$

Приклад 2.5. Обчислити визначник методом зведення до трикутного виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 9 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Послідовно виконуємо наступні перетворення:

1. помножимо елементи першого рядка на (-2) і додаємо до відповідних елементів другого рядка;

2. помножимо елементи першого рядка на (-3) і додаємо до відповідних елементів третього рядка;
3. помножимо елементи першого рядка на (-4) і додаємо до відповідних елементів четвертого рядка;
4. від елементів третього рядка віднімаємо відповідні елементи другого рядка;
5. від елементів четвертого рядка віднімаємо відповідні елементи третього рядка.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -10 \\ 4 & 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-1) = -6.$$

Приклад 2.6. Знайти обернену матрицю для матриці A , зробити перевірку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - 5 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \cdot 3 = 4.$$

Оскільки $\det(A) \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1} .

Обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елементу матриці A .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Тоді

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -6 & 5 \\ -3 & -14 & 9 \\ 4 & 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку, помноживши, наприклад, обернену матрицю на матрицю A :

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -6 & 5 \\ -3 & -14 & 9 \\ 4 & 12 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3-18+25 & -9-6+15 & -12-18+30 \\ -3-42+45 & -9-14+27 & -12-42+54 \\ 4+36-40 & 12+12-24 & 16+36-48 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Приклад 2.7. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконуємо елементарні перетворення матриці, що не змінюють її рангу. Для зручності перетворень змінюємо спочатку місцями перший і третій рядки матриці, отримавши в першому рядку і першому стовпці одиничний елемент ($a_{11} = 1$):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тепер послідовно виконуємо наступні перетворення:

1. до елементів другого рядка додаємо відповідні елементи першого рядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

2. помножимо елементи першого рядка на (-2) і додаємо до відповідних елементів третього рядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot (-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & -11 & -7 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

3. помножимо елементи першого рядка на (-3) і додаємо до відповідних елементів четвертого рядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & -11 & -7 \\ 3 & -2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot (-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & -11 & -7 \\ 0 & -14 & 8 & -22 & -14 \end{pmatrix}.$$

Тепер додаємо до елементів третього рядка відповідні елементи другого рядка, а к елементам четвертого рядка – відповідні елементи другого рядка, які помножені на 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 4 & -11 & -7 \\ 0 & -14 & 8 & -22 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\cdot 2 \\ + \\ +}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відкидаємо в останній матриці два рядки, всі елементи яких дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 7 & 6 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & 7 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця еквівалентна до вихідної і її ранг не може бути більше двох. Знаходимо в останній матриці будь-який ненульовий визначник другого порядку (якщо такий існує). Наприклад, обираємо визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Таким чином, існує ненульовий мінор другого порядку, тому ранг останньої матриці дорівнює двом. Через те, що всі проведені перетворення не міняють рангу матриці, то вихідна матриця теж має ранг, що дорівнює двом.

Приклад 2.8. Обчислити ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & 4 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. В матриці A обираємо будь-який ненульовий мінор другого порядку, наприклад, мінор, що стоїть в верхньому лівому куті:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ \hline 5 & 4 & -7 & 13 \end{array} \right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Записуємо мінори третього порядку, що окаймляють обраний ненульовий мінор другого порядку. Таких мінорів два:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{і} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Мінори третього порядку дорівнюють нулю, тобто $r(A) = 2$.

Питання для самоперевірки

1. Який вираз називається визначником другого порядку? визначником третього порядку?
2. Які основні властивості визначників?
3. Що називається мінором і алгебраїчним доповненням елемента матриці?
4. Яким співвідношенням пов'язані між собою мінор і алгебраїчне доповнення?
5. Напишіть формули Лапласа розкладу визначника за елементами рядка, стовпця.
6. Які способи обчислення визначників вам знайомі?
7. Яка матриця називається оберненою?
8. Для яких матриць існують обернені?
9. Яка матриця називається сингулярною?
10. Як знайти обернену матрицю?
11. Що називається рангом матриці?

12. Як обчислити ранг матриці?
 13. Які матриці називаються еквівалентними?

Вправи для самостійного розв'язування

2.9. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$$

2.10. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & 5 \\ 1 & -7 & 0 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 7 \\ -6 & 11 & 9 \end{vmatrix}.$$

2.11. Обчислити визначники:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad 5) \begin{vmatrix} 4 & -7 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 8 & -4 \\ 6 & 3 & -2 & 9 \\ -4 & 8 & 7 & 2 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 & 4 \\ -3 & 5 & 9 & 1 \\ 5 & -2 & 0 & 4 \\ -7 & 3 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

2.12. Для матриці A знайти обернену матрицю. Зробити перевірку.

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad 5) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}; \quad 6) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.13. Знайти обернену матрицю для матриці A . Зробити перевірку.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2.14. Розв'язати матричні рівняння:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad 2) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix};$$

$$3) X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 15 & -8 \end{pmatrix}; \quad 4) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -17 & 9 \end{pmatrix}; \quad 6) X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 2 & 18 \end{pmatrix};$$

$$7) \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 18 & 17 & 12 \\ -1 & 1 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad 8) X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

;

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.15. Обчислити:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^3; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^4; \quad 3) \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}^n; \quad 4) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n.$$

2.16. Матриці A і B називаються переставними (комутуючими), якщо $AB = BA$. Знайти все матриці, які є переставними з матрицею A , якщо

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.17. Знайти ранг матриць методом окаймлення мінорів:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

;

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad 5) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 15 & -12 \end{pmatrix}; \quad 6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.18. За допомогою елементарних перетворень знайти ранг матриці:

$$1) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 9 & -1 & 4 & 14 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ 5 & 10 & -5 \\ 6 & 12 & -6 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 9 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 11 & 6 & 6 \end{pmatrix}; \quad 5) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 4 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & -1 & 9 \\ 3 & -3 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тема 2.3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

2.3.1. Основні означення

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система, що має вигляд:

(2.9)

Система рівнянь (1.9) називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Множина всіх розв'язків системи (2.9) називається її *загальним розв'язком*.

Лінійне рівняння називається *однорідним*, якщо його вільний член дорівнює нулю.

Розглянемо матриці

(2.10)

X – матриця (вектор – стовпець) невідомих змінних;

Тоді систему (1.9) можна записати так:

(2.11)

(2.9).

(2.12)

41

Загальним розв'язком сумісної системи лінійних рівнянь (2.9) називається рівно-сильна їй система, в якій базисні змінні виражені через вільні. Якщо вільні змінні обрані, то базисні змінні можна обрати єдиним чином. Якщо в загальному розв'язку вільним змінним надати які-небудь числові значення, то одержаний розв'язок називається *частинним*. Якщо вільні змінні дорівнюють нулю, то відповідний розв'язок системи рівнянь

Якщо один базисний розв'язок вже знайдено, то для знаходження наступного базисного розв'язку одну з небазисних змінних переводять в базисну.

Окремим випадком системи m лінійних рівнянь з n невідомими (2.9) є система n лінійних рівнянь з n невідомими, тобто система в якій число рівнянь співпадає з числом змінних:

Припустимо, що визначник матриці системи (2.13) не дорівнює нулю. Тоді з теореми Кронекера-Капеллі витікає, що система має єдиний розв'язок, через те, що $r(A) = r(A|B) = n$.

Якщо матриця коефіцієнтів A системи (1.13) не вироджена ($\det(A) \neq 0$), то для неї існує обернена матриця A^{-1} . Помноживши обидві частини рівняння (1.11) (де $n = r$) зліва на матрицю A^{-1} , одержимо $A^{-1}AX = X^{-1}B$.

(2.14)

Метод Крамера

(2.15)

де Δ – визначник матриці A коефіцієнтів системи і визначники Δ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) одержані з визначника Δ заміною i -го стовпця стовпцем вільних членів.

Формули (2.15) називаються *формулами Крамера*.

Зауважимо, що метод Крамера і метод оберненою матриці можуть бути застосовані тільки в тому випадку, коли число рівнянь дорівнює числу змінних і матриця коефіцієнтів системи не вироджена ($\det(A) \neq 0$).

Метод Гаусса

Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь (2.9) міститься в *послідовному виключенні змінних*. Згідно методу, система рівнянь (2.9) за допомогою елементарних перетворень приводиться до спеціального (трикутного) вигляду, який дозволяє визначити невідомі змінні. Після перетворень за методом Гаусса в кожному рівнянні системи є невідома змінна, що входить в це рівняння з ненульовим коефіцієнтом, а в наступні рівняння системи ця змінна входить з нульовим коефіцієнтом. Після того, як система зведена до спеціального вигляду послідовно, починаючи з останнього рівняння, знаходять змінні $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$. Перехід від системи, що розглядається, до рівносильної системи трикутного вигляду називається *прямим ходом* методу Гаусса. Послідовне знаходження невідомих змінних з одержаної системи рівнянь називається *оберненим ходом* методу Гаусса. На практиці перетворення Гаусса можна проводити не з рівняннями системи, а з її розширеною матрицею.

Метод Жордана – Гаусса

Метод Жордана – Гаусса є модифікацією методу Гаусса. В цьому випадку розширену матрицю вихідної системи приводять до діагонального вигляду, виключаючи невідомі не тільки з наступних, але й з попередніх рівнянь. Після перетворень Жордана-Гаусса в кожному рівнянні системи є змінна, що входить в це рівняння з ненульовим коефіцієнтом (як правило, він дорівнює одиниці), а в інші рівняння системи ця змінна входить з нульовим коефіцієнтом.

Знаходження загального розв'язку за допомогою формул Крамера

- 1) Перевірити дану систему рівнянь на сумісність.
- 2) Обрати один будь-який ненульовий мінор M матриці A системи рівнянь, порядок якого дорівнює рангу матриці A .
- 3) Записати всі рівняння системи, що містять рядки мінора M . В цих рівняннях в лівій частині залишити тільки ті змінні, коефіцієнти при яких є стовпцями мінора M , інші невідомі змінні перенести в праву частину.
- 4) Систему рівнянь, яка отримана в пункті 3), розв'язати за формулами Крамера (2.15).

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.9. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

методом Крамера і матричним способом.

Розв'язання. Запишемо визначник матриці коефіцієнтів системи і обчислимо його:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3.$$

Через те, що $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулою (2.14) або (2.15).

1. Розв'яжемо систему за допомогою методу Крамера. Обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$. Для цього заміняємо в визначнику Δ відповідні стовпці стовпцем вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -9, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 9 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

За формулам (2.15):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{3} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{3} = -3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{3} = 4.$$

Тобто $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 4$.

2. Розв'яжемо систему матричним способом. Через те, що визначник матриці A системи відмінний від нуля, існує обернена матриця A^{-1} . Обчислимо алгебраїчні доповнення і знайдемо обернену матрицю.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 8, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -6, & A_{31} &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \\ A^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -6 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді з (2.14) знайдемо

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 & -6 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Тому $x_1 = -1, x_2 = -3, x_3 = 4$.

Зробимо перевірку. Для цього знайдені значення невідомих змінних підставимо в рівняння системи:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 + 3 + 4 = 6, \\ -1 - 2 \cdot (-3) + 4 = 9, \\ -1 - 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 4 = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6, \\ 9 = 9, \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Приклад 2.10. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = -1, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Розширена матриця системи має вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right).$$

Приводимо розширену матрицю системи до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень над її рядками. Для цього послідовно виконуємо наступні дії:

1. змінюємо місцями перший і четвертий рядки;
2. помножимо елементи першого рядка на (-2) і додаємо їх до відповідних елементів другого рядка;
3. до третього рядка додаємо перший рядок;
4. помножимо елементи першого рядка на (-3) і додаємо їх до відповідних елементів четвертого рядка;
5. елементи другого і четвертого рядків помножимо на (-1) ;
6. від третього рядка віднімаємо другий рядок;
7. від четвертого рядка віднімаємо другий рядок;
8. помножимо третій рядок на (-3) і додаємо його до четвертого рядка;
9. четвертий рядок поділимо на 29.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-2) \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -9 & -11 \\ -1 & 4 & 1 & -4 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{+ \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -9 & -11 \\ 0 & 7 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-3) \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & -9 & -11 \\ 0 & 7 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & -5 & -13 \end{array} \right) \xrightarrow{+ \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 7 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 5 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{- \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & 7 & 4 & 5 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{- \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-3) \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{+ \text{ на } R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 29 & 29 \end{array} \right) \xrightarrow{: (29) \text{ на } R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Запишемо систему рівнянь, яка відповідає отриманій розширеній матриці:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 7x_2 + x_3 + 9x_4 = 11, \\ x_3 - 11x_4 = -9, \\ x_4 = 1. \end{cases} \quad (2.16)$$

Система (2.16) має трикутний вигляд, тому для неї існує єдиний розв'язок. Послідовно, починаючи з останнього рівняння, знаходимо невідомі змінні. З останнього рівняння системи (2.16) зразу маємо $x_4 = 1$. Значення $x_4 = 1$ підставляємо в третє рівняння системи (2.16) і знаходимо x_3 : $x_3 = -9 + 11x_4 = 2$.

Значення змінних x_3 і x_4 підставляємо в друге рівняння системи (1.16) і знаходимо x_2 : $7x_2 = 11 - x_3 - 9x_4 = 11 - 2 - 9 \cdot 1 = 0$ або $x_2 = 0$. Нарешті з першого рівняння знаходимо: $x_1 = 5 - 3 \cdot 0 - 2 - 2 \cdot 1 = 1$.

Таким чином, розв'язок системи рівнянь: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$.

Приклад 2.11. За методом Методом Жордана – Гаусса знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо розширену матрицю системи. За допомогою елементарних перетворень розширеної матриці одержимо одиничні стовпці. Обираємо перший провідний елемент. Для спрощення розрахунків, як правило, за такий провідний елемент беруть елемент a_{11} , спочатку перетворивши матрицю так, щоб a_{11} дорівнював одиниці. В нашому прикладі для цього третій рядок матриці помножимо на (-1) і змінюємо його місцями з першим рядком.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

В наступній матриці помножимо перший рядок на (-2) і додаємо до другого рядка. Помножимо перший рядок на (-3) і додаємо до третього рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot(-2) \cdot(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & -4 & -11 \end{array} \right).$$

В результаті перетворень одержимо один одиничний стовпець – перший стовпець матриці. Розділимо другий рядок на п'ять та отримуємо ще один провідний елемент (a_{22}), але вже в другому стовпці:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 11 & -4 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{:(5)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -4 & -11 \end{array} \right).$$

В останній матриці помножимо другий рядок на (-11) і додаємо його до третього рядка. Другий рядок помножимо на три і додаємо до першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -4 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \cdot(-11) \cdot(3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right).$$

Тепер третій рядок ділимо на (-4) і віднімаємо його від першого рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{:(-4)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Число одиничних стовпців дорівнює числу змінних, тому, система має єдиний розв'язок: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$.

Приклад 2.13. Дослідити сумісність системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

Знайти її загальний розв'язок за допомогою методу Крамера

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи, знайдемо її ранг і одночасно ранг матриці системи рівнянь. Для обчислення рангу застосовуємо елементарні перетворення, що не змінюють рангу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & -1 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & -9 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Ранг матриці системи і ранг розширеної матриці однакові: $r(A) = r(A|B) = r = 2$. Тому, система сумісна. Через те, що число змінних $n = 4$ і $n > r$, то система має нескінченну множину розв'язків, причому дві змінні можна обрати довільно.

Беремо довільний ненульовий мінор M другого порядку, наприклад, $M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$. Цей мінор складається з коефіцієнтів при змінних x_1 і x_2 першого і другого рівнянь системи.

Запишемо перше і друге рівняння системи. В цих рівняннях залишимо в лівій частині невідомі x_1 і x_2 , а інші змінні перенесемо в праву частину:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 - 3x_3 - x_4, \\ 2x_1 + 5x_2 = 1 - 2x_3 + 2x_4. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок системи рівнянь за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 - 3x_3 - x_4 & 2 \\ 1 - 2x_3 + 2x_4 & 5 \end{vmatrix} = 23 - 11x_3 - 9x_4,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 - 3x_3 - x_4 \\ 2 & 1 - 2x_3 + 2x_4 \end{vmatrix} = 1 - 2x_3 + 2x_4 - 2(5 - 3x_3 - x_4) = -9 + 4x_3 + 4x_4$$

Звідки

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 23 - 11x_3 - 9x_4, \\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -9 + 4x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

Змінні x_3 і x_4 – вільні змінні, x_1, x_2 – базисні змінні. Тоді $X_{\text{загал.}} = (23 - 11t_1 - 9t_2, -9 + 4t_1 + 4t_2, t_1, t_2)$, $t_1 \in R, t_2 \in R$.

Приклад 2.14. Знайти методом Жордана-Гаусса загальний і будь-який частинний розв'язок системи

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 17x_4 - 2x_5 = 15, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо розширену матрицю системи. Змінна x_1 входить в це рівняння з коефіцієнтом одиниця. Виключимо x_1 з інших рівнянь за допомогою елементарних перетворень:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 15 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

В третьому рівнянні нової системи містить змінну x_2 з коефіцієнтом, якій дорівнює одиниці. За допомогою елементарних перетворень виключимо змінну x_2 з інших рівнянь. Бачимо, що в четверте рівняння змінна x_3 входить з одиничним коефіцієнтом. За допомогою елементарних перетворень виключимо змінну x_3 з інших рівнянь. Потім за допомогою елементарних перетворень виключимо змінну x_5 з першого, третього і четвертого рівнянь:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 5 & 10 & -13 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -8 & 2 & -4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 50 & -23 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 2 & -4 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

В результаті дістали систему

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 5, \\ -2x_4 + x_5 = -1, \\ x_2 + x_4 = 1, \\ x_3 - 4x_4 = -2. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 = 5 - 4x_4, \\ x_5 = -1 + 2x_4, \\ x_2 = 1 - x_4, \\ x_3 = -2 + 4x_4. \end{cases}$$

В цій системі x_1, x_2, x_3, x_5 – базисні змінні, x_4 – вільна змінна. Остання система – загальний розв'язок системи. Якщо, наприклад, $x_4 = 1$, то $x_1 = 5 - 4x_4 = 1$, $x_2 = 1 - x_4 = 0$, $x_3 = -2 + 4x_4 = 3$, $x_5 = -1 + 2x_4 = 1$. Тому, $(1; 0; 2; 1; 1)$ – частинний розв'язок системи рівнянь.

Приклад 2.15. Знайти всі базисні розв'язки системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо загальний розв'язок системи, перетворивши розширену матрицю системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot (-2) \cdot (-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array} \right).$$

Через те, що два останні рядки співпадають, то один можна видалити:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \cdot (-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & -4 \end{array} \right) \cdot (-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array} \right).$$

Одиничні стовпці відповідають змінним x_1, x_2 , які в даному випадку є базисними.
З останньої матриці маємо

$$\begin{cases} x_1 = 12 - 11x_3, \\ x_2 = -4 + 4x_3. \end{cases}$$

Прирівнюючи вільні змінні до нуля, знаходимо перше базисне розв'язок:
 $X_{\text{баз.1}} = (12; -4; 0)$.

Нехай тепер базисними будуть змінні x_1, x_3 . Для цього змінну x_2 виводимо з базису, а змінну x_3 вводимо:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \end{array} \right) \xleftarrow{(-4)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 12 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{(-11)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{11}{4} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Маємо $X_{\text{баз.2}} = (1; 0; 1)$.

Тепер базисними обираємо змінні x_2, x_3 . Для цього змінну x_1 виводимо з базису, а змінну x_2 знов вводимо в базис:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{11}{4} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{\left(\frac{11}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{\left(\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{\left(\frac{1}{11}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{11} & 1 & 0 & \frac{4}{11} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Звідки $X_{\text{баз.3}} = \left(0; \frac{4}{11}; \frac{12}{11} \right)$.

Питання для самоперевірки

1. Яка система рівнянь називається сумісною? несумісною?
2. Яка система рівнянь називається визначеною? невизначеною?
3. Запишіть лінійну систему рівнянь в матричному виді.
4. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
5. При якій умові система лінійних рівнянь має єдине розв'язання?
6. Який вигляд мають формули Крамера?
7. Які системи лінійних рівнянь можна розв'язати за допомогою оберненої матриці?
8. Як розв'язати систему рівнянь матричним методом?
9. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.
10. Що називається прямим і оберненим ходом метода Гаусса?
11. Метод Жордана-Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.
12. Який розв'язок називається: а) загальним; б) частинним; в) базисним?
13. Яка система рівнянь називається розв'язальною?
14. Що таке загальний розв'язок системи лінійних рівнянь?
15. Як із загального розв'язку системи рівнянь отримати частинний та базисний розв'язок?

Вправи для самостійного розв'язування

2.19. Розв'язати системи рівнянь за формулами Крамера і матричним методом:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -8, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5, \end{cases}$$

2.20. Розв'язати системи рівнянь за методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 17, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ -5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 11, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$

2.21. Розв'язати системи рівнянь за методом Жордана-Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -9, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -11, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -12, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = -14, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -13, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \end{cases}$$

2.22. Знайти всі базисні розв'язки системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -4, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -1, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 - x_4 = 8, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_3 - 4x_4 = -1, \end{cases}$$

РОЗДІЛ 3. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Тема 3.1. ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

3.1.1. Поняття числової послідовності. Границя послідовності

Якщо кожному натуральному числу n за деяким законом поставлено у відповідність єдине число x_n , то кажуть, що задана *числова послідовність* $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$.

Числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ називаються *членами послідовності*, x_n – загальним членом послідовності, число n – порядковим номером члена послідовності x_n .

Числові послідовності позначають так: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}$ або x_n , $n=1, 2, \dots$.

Число A називається *границею послідовності* $\{x_n\}$ при $n \rightarrow \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке число $N = N(\varepsilon) > 0$, що залежить від ε , що для всіх $n > N(\varepsilon)$ справедлива нерівність $|x_n - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ або $x_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Інтервал $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ називається ε -околом числа A (або точки A).

Послідовність, що має границю, називається *збіжною*, якщо послідовність не має границі, то вона називається *розбіжною*.

Граничний перехід при арифметичних операціях

Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, то

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \pm B; \quad 3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = cA,$$

$c = \text{const}$;

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \cdot B; \quad 4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B}, \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0 \right).$$

3.1.2. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності

Послідовність α_n називається *нескінченно малою величиною* (н.м.в.), якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

- 1) Алгебраїчна сума нескінченно малих величин є н.м.в.
- 2) Добуток нескінченно малої величини на константу є н.м.в.
- 3) Добуток нескінченно малої величини на обмежену послідовність є н.м.в.
- 4) Добуток скінченного числа нескінченно малих величин є н.м.в.

Послідовність $\{x_n\}$ називається *нескінченно великою величиною* (н.в.в.), якщо для будь-якого числа $0 < M < +\infty$, існує такий номер N , що для всіх $n > N$ справедлива нерівність $|x_n| > M$. В цьому випадку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

- 1) Якщо α_n – н.м.в. и $\alpha_n \neq 0$, то обернена послідовність $y_n = \frac{1}{\alpha_n}$ є н.в.в.
- 2) Якщо y_n – н.в.в. и $y_n \neq 0$, то обернена послідовність $\alpha_n = \frac{1}{y_n}$ є н.м.в.

Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1. Записати перші п'ять членів послідовності $a_n = n^2 + 1$.

Розв'язання. Послідовно підставляємо значення $n = 1; 2; 3; 4; 5$ в вираз, що визначає загальний член послідовності $a_n = n^2 + 1$. Тоді

$$a_1 = 1^2 + 1 = 2, \quad a_2 = 2^2 + 1 = 5, \quad a_3 = 3^2 + 1 = 10, \quad a_4 = 4^2 + 1 = 17, \\ a_5 = 5^2 + 1 = 26.$$

Таким чином, отримали послідовність $\{2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$.

Приклад 3.2. За означенням границі послідовності довести що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} = 1$.

Розв'язання. Потрібно довести, що для будь-якого додатного числа ε існує номер N , який залежить від ε , і такий, що для всіх $n > N$ справедлива нерівність

$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{або} \quad \left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| = \left| \frac{2}{n} \right| = \frac{2}{n} < \varepsilon \quad (n \in N \text{ то } \Rightarrow n > 0 \text{ і } |n| = n).$$

З останньої нерівності дістаємо $n > \frac{2}{\varepsilon}$. Отже, якщо взяти натуральне число N , більше, ніж $n > \frac{2}{\varepsilon}$, наприклад, $N = N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$ (де $[x]$ – ціла частина числа x), то для всіх $n > N$ буде виконуватися нерівність

$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| = \frac{2}{n} < \frac{2}{N(\varepsilon)} < \frac{2}{\left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1} < \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Що й треба було довести.

Приклад 3.3. Знайти границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 1}{n^2 + 2n + 3}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{(n-1)^2 + 2n + 3}; \quad 3) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n(n-2)}{n^2 + 2n + 3}.$$

Розв'язання. В розглянутих прикладах вирази, які стоять під знаком границі, є відношення двох нескінченно великих величин (при $n \rightarrow \infty$). Для обчислення границі чи-

сільник і знаменник дробу можна поділити на старший ступінь значення n і скориста-

тися тим, що при $k > 0$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

1) Чисельник і знаменник ділимо на n^2 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 1}{n^2 + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2 + n - 1}{n^2}}{\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = 3.$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{(n-1)^2 + 2n + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{n^2 - 2n + 1 + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 5}{n^2 + 4} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 - 2n + 5}{n^3}}{\frac{n^2 + 4}{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{4}{n^3}} = \left(\frac{1}{0} \right) = \infty. \end{aligned}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n(n-2)}{n^2 + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} = 0.$$

При знаходженні границь послідовностей з прикладу 3.3 можна скористатися наступним правилом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } m < k, \\ \frac{a_m}{b_k}, & \text{если } m = k, \\ \infty, & \text{если } m > k. \end{cases}$$

Приклад 3.4. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2}$.

Розв'язання. Відомо, що $|\sin n| < 1$ для всіх n і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Тоді вираз $\frac{\sin n}{n^2}$ є добутком обмеженої послідовності на н.м.в. За властивістю 3) для нескінченно малих величин

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0.$$

В наступному прикладі застосовані відомі границі:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0).$$

Приклад 3.5. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n}$.

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1.$

Приклад 3.6. Обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)$.

Розв'язання. Помножимо і розділимо вираз $(\sqrt{n^2 + 1} - n)$ на спряжений йому вираз $(\sqrt{n^2 + 1} + n)$. Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

Крім того, $(\sqrt{n^2 + 1} + n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді під знаком останньої границі знаходиться величина, яка є оберненою до нескінченно великої, отже

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = 0.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення границі числової послідовності.
2. Що називається ε -околом числа?
3. Дайте означення нескінченно малої і нескінченно великої величин.
4. Які властивості має нескінченно мала величина?
5. Який зв'язок існує між нескінченно малою і нескінченно великою величинами?
6. Чому дорівнюють границі суми, добутку і частки двох збіжних послідовностей?

Вправи для самостійного розв'язку

3.1. Записати перші п'ять членів послідовності $\{x_n\}$, якщо

- 1) $x_n = n^3 - 1$;
- 2) $x_n = \sin \pi n$;
- 3) $x_n = \sqrt{n^2 - n}$;
- 4) $x_n = n^{-1}$;
- 5) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^2$;
- 6) $x_n = \frac{\sin(\pi n/2)}{n}$.

3.2. Записати один з можливих виразів для загального члена послідовності:

- 1) $\frac{2}{3}; \frac{5}{8}; \frac{10}{13}; \frac{17}{18}; \frac{26}{23}; \dots$;
- 2) $1; \frac{1}{2}; 2; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; 4; \frac{1}{5}; \dots$;
- 3) $1; \frac{4}{2}; \frac{9}{6}; \frac{16}{24}; \frac{25}{120}; \frac{36}{720}; \dots$;
- 4) $1; \frac{4}{3}; \frac{1}{2}; \frac{4}{5}; \frac{1}{3}; \dots$;
- 5) $\frac{2}{1}; \frac{5}{2}; \frac{10}{3}; \frac{17}{4}; \frac{26}{5}; \frac{37}{6}; \dots$;
- 6) $1; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{4}; 5; \frac{1}{6}; 7; \frac{1}{8}; \dots$

3.3. За означенням границі послідовності довести, що:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2-1}{2n^2-4} = \frac{5}{2}$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2-n^2} = 0$;

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5}{n^2-2n} = 1; \quad 6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-4}{3n^2-1} = \frac{1}{3}.$$

3.4. Записати послідовності: 1) зростаючу і збіжну до нуля; 2) спадаючу і розбіжну; 3) спадаючу і збіжну к двом; 4) зростаючу і розбіжну.

3.5. Знайти границі:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{5n-2}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n^2-5n+1}; \quad 3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n+4}{2n^2+5n-3}; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2-7}{3+6n-n^2}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n-1} \cdot \frac{5-n}{n+1} \right);$$

$$6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n-1}}{0,2n+3};$$

$$7) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^{n+1}}; \quad 8) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n}; \quad 9) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7n-3};$$

$$10) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2-n} - n \right); \quad 11) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - n}{\sqrt{n+2} + n}; \quad 12) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n} \right);$$

$$13) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{6n-5} \right)^5; \quad 14) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^8}; \quad 15) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+5} - \sqrt{n-1} \right);$$

$$16) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{3n^3+4n-2}; \quad 17) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}; \quad 18) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^3+4n-5}{n^3-5n^2+1} \right);$$

$$19) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \right); \quad 20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$21) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(n-2)(3-n)}{(n+1)(n+2)(3+n)}; \quad 22) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+2}};$$

$$23) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2+n-1} - \sqrt{2n^2-3n-1} \right); \quad 24) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n \right);$$

$$25) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right); \quad 26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \right).$$

Тема 3.3. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

3.3.1. Поняття границі функції. Односторонні границі

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що залежить від ε , що для всіх x , які задовольняють нерівності $|x - x_0| < \delta$, справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Границю функції позначають:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad f(x) \rightarrow A \text{ або } f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Число A називається *границею справа (зліва) функції* $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх x , які задовольняють нерівності $0 < x - x_0 < \delta$ ($-\delta < x - x_0 < 0$), справедлива нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначають: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A$).

Якщо $x_0 = 0$, то пишуть $x \rightarrow +0$ або $x \rightarrow -0$ і відповідно $f(+0)$ або $f(-0)$.

Техніка обчислення границі функції

1) Якщо існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, то існують границі:

а) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B$;

б) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B$;

в) $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = cA$, де $c = \text{const}$;

г) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$, $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq 0 \right)$.

2) Для всіх основних елементарних функцій в будь-якій точці їх області визначення справедлива рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = f(x_0).$$

3) Часто застосовують наступні відомі границі:

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ – перша визначна границя;

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,71828\dots$ – друга визначна границя;

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $(a > 0, a \neq 1)$;

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

(3.1)

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $(a > 0)$.

(3.2)

3.3.2. Типи невизначеностей та їх розкриття

Якщо функція $f(x)$ визначена в точці x_0 , то обчислення границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ зводиться до безпосереднього підставлення значення x_0 замість x та використанню властивостей границь. На практиці при обчисленні границь формальне підставлення замість

змінної x її граничного значення приводить до невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{0 \cdot \infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$, та ін.

1. Якщо $x \rightarrow \infty$, то для розкриття невизначеності типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ чисельник і знаменник (якщо вони є многочленами відносно незалежної змінної x) можна чисельник та знаменник дробу поділити на найвищу степінь x , а потім обчислити границю.

2. Якщо $x \rightarrow x_0$, то при розкритті невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ можна спробувати чисельник і знаменник розкласти на множники і дріб скоротити. Якщо під знаком границі знаходиться тригонометрична функція, то можна застосувати першу визначну границю.

3. Невизначеності типу $\{\infty - \infty\}$ і $\{0 \cdot \infty\}$ за допомогою елементарних перетворень функції, яка знаходиться під знаком границі, приводять до невизначеностей типу $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ або $\left\{\frac{0}{0}\right\}$.

4. У випадку невизначеності типу $\{1^\infty\}$ застосовується друга визначна границя.

Функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою при $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow x_0$ та $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$

називають *еквівалентними* нескінченно малими.

Позначають $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих функцій
($\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \rightarrow 0$)

1.	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x);$	6.	$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x);$
2.	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$	7.	$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a;$
3.	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2};$	8.	$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x);$
4.	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x);$	9.	$(1+\alpha(x))^n - 1 \sim n\alpha(x);$
5.	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$	10.	$\sqrt[n]{1+\alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{n}$

Приклади розв'язування задач

Приклад 3.7. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - x^2 \ln(x-1)}{x+6}$.

Розв'язання. В даному випадку для обчислення границі достатньо підставити значення $x_0 = 2$ в функцію:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - x^2 \ln(x-1)}{x+6} = \frac{3 \cdot 2 - 2^2 \ln(2-1)}{2+6} = \frac{6 - 4 \cdot 0}{8} = \frac{3}{4}.$$

Приклад 3.8. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 4}{3x^3 + 1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Чисельник і знаменник дробу ділимо на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - 4}{3x^3 + 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 3.9. Знайти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x+1}$ і $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x+1}$.

Розв'язання. Якщо $x > 0$ ($x \rightarrow +\infty$), то $\sqrt{x^2} = |x| = x$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x+1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \sqrt{\left(4 + \frac{1}{x^2} \right)}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 2.$$

Якщо $x < 0$ ($x \rightarrow -\infty$), то $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x+1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\cancel{x} \sqrt{\left(4 + \frac{1}{x^2} \right)}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = -2.$$

Приклад 3.10. Знайти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x + 4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Чисельник і знаменник дробу – многочлени і $x = -1$ є коренем многочленів. Тоді їх можна розкласти на множники:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5x + 4} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+4} = \frac{0}{3} = 0.$$

Приклад 3.11. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, необхідно розкрити невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Розкриємо невизначеність, помноживши чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений до виразу $(\sqrt{x^2 + 5} - 3)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+5}-3} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2+5-9} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x^2+5}+3)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}+3)}{x+2} = \frac{3+3}{4} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Приклад 3.12. Знайти 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1 - x}$.

Розв'язання. 1) Під знаком границі знаходиться тригонометрична функція, тому для розкриття невизначеності типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ застосовуємо першу визначну границю. Попередньо перетворимо функцію за тригонометричною формулою

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

2) Як і в попередньому прикладі, маємо невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, але тут аргумент прямує до 1. Тому вводимо нову змінну $t = x - 1$, тобто $x = t + 1$ і $t \rightarrow 0$ якщо $x \rightarrow 1$. Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi(t+1)}{2}}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}\right)}{t}.$$

Застосовуємо тригонометричну формулу $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$.

Тоді

$$- \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2}\right)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi t}{2}}{t} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi t}{2}}{\frac{\pi t}{2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 3.13. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} \right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\{\infty - \infty\}$. Перетворимо функцію, яка знаходиться під знаком границі, приводячи дріб до загального знаменника:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} \right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+1)-4}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x^2-1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x+1} = 1$$

Приклад 3.14. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3x}$.

Розв'язання. Для розкриття невизначеності типу $\{1^\infty\}$ використовуємо другу визначну границю:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{3x} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2} \right]^{\frac{1}{x^2} \cdot 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x^2} \cdot 3x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}} = e^0 = 1$$

Приклад 3.15. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$.

Розв'язання. З рівності (3.2) маємо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} = \ln 3$. Використовуємо цей факт і рівність (3.1), отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^x - 1} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{3^x - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{3^x - 1} \right] = 1 \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 3}$$

Приклад 3.16. Знайти односторонні границі: 1) $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{2}{x-1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

Розв'язання. 1) Нехай $x \rightarrow 1-0$, тобто $x < 1$. Тоді $x-1 < 0$ і, отже $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{x-1} = -\infty$.

Якщо $x \rightarrow 1+0$, то $x > 1$. Тоді $x-1 > 0$ і, отже $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{x-1} = +\infty$.

2) Якщо $x \rightarrow -0$, то $x < 0$. Тоді $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -0} 3^{\frac{1}{x}} = 3^{\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x}} = 0$. Отже

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

Якщо $x \rightarrow +0$, то $x > 0$. Тоді $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +0} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Отже

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Приклад 3.17. За допомогою еквівалентних знайти границі функції:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\ln(1+4x)}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Розв'язання. 1) При $x \rightarrow 0$ можна скористатися заміною на еквівалентні функції (дивись таблицю еквівалентних нескінченно малих функцій), зокрема, $\sin 4x \sim 4x$, $\ln(1+4x) \sim 4x$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{4x} = 1.$$

2) З таблиці еквівалентних нескінченно малих функцій при $x \rightarrow 0$ маємо:
 $1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$, $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$. Отже, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3} = 0$.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення границі функції.
2. Дайте означення границі зліва і границі справа.
3. Які границі називаються першою і другою визначними границями?
4. Як розкрити невизначеності типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{0 \cdot \infty\}$?
5. Коли можна використовувати першу визначну границю?
6. Як розкрити невизначеності типу $\{1^\infty\}$?
7. Які функції називаються еквівалентними нескінченно малими?
8. Напишіть таблицю еквівалентних нескінченно малих.

Вправи для самостійного розв'язування

3.6. Знайти границі функцій:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(2x^2 + \frac{1}{x} - \sin \pi x \right)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (2x + \cos x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} ((4x^2 - 1) \cos x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} (3 - x)^{10}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 1}{x + 2}$.

3.7. Знайти границі функцій:

- 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 8}}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+1)} - x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 1})$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x+5})$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - x)$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt[4]{81x^4 + 1}}{\sqrt[5]{x^5 - 1}}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x)$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt[3]{8x^3 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 8}}$;

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 8}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1} \right);$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2} - x \right);$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right);$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 5x + 1} \right);$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3^x + 1}{3^x - 1};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \cdot 5^x - 3}{9 \cdot 5^x + 4}.$$

3.8. Знайти границі функції:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{x^3 - 27};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 - 5x + 3};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{2x^2 - 7x - 4}{-2x^2 + 5x + 3};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{3 - x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{x-1};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2 - \sqrt{6+x}}{\sqrt{7-x} - 3};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sqrt{x+2} - 2};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sqrt{x+2} - 2};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x+4}}{16 - x^2};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{4 - \sqrt[3]{x}};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{x^2 - 1};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^3 - 2x};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right);$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right).$$

3.9. Користуючись першою визначною границею, знайти:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sin^2 6x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 5x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 8x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg} 5x;$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 6x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1};$$

$$\begin{aligned}
13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\arcsin 12x}; & \quad 14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{\arcsin 10x}; & \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}; \\
16) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{5x}{4}; & \quad 17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}; & \quad 18) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 4 \sin^2 x}{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}; \\
19) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{\sqrt{\sin 2x} - 1}; & & \quad 20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin 1}}{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} 1}}.
\end{aligned}$$

3.10. Користуючись другою визначною границею, знайти:

$$\begin{aligned}
1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+3} \right)^x; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{x} \right)^{5x}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{x+1}; \\
4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-3} \right)^{2x+1}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{x-1}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}; \\
7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)^{-\sec x}; & \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-2} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}; & \quad 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2} \right)^x; \\
10) \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+3) - \ln x]; & \quad 11) \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln x - \ln(x+2)]; & \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}
\end{aligned}$$

3.11. За допомогою принципу заміни еквівалентних знайти границі функцій:

$$\begin{aligned}
1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \ln(1 - 3x)}; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 4x)}{e^{\sin 3x} - 1}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\arcsin 2x}; \\
4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2 - \cos 4x)}{\ln^2(1 + \sin 2x)}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2} - 1}{\ln \cos x}; \\
7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x(e^{4x} - 1)}; & & \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x(1+4x)^2 - x}.
\end{aligned}$$

Тема 3.4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

3.4.1. Основні поняття

Функція $f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0 , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функція $f(x)$ *неперервна на множині* X , якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Функція $f(x)$ *неперервна на проміжку* $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Функція $f(x)$ називається *неперервною в точці x_0 зліва (справа)*, якщо виконуються рівності:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right).$$

Функція $f(x)$ *неперервна на відрізку $[a; b]$* , якщо вона неперервна на проміжку $(a; b)$ і неперервна у точці $x=a$ справа і у точці $x=b$ зліва.

Усі елементарні функції неперервні на інтервалах визначеності.

3.4.2. Розриви функції

Якщо в точці x_0 функція не є неперервною, то кажуть, що вона *має розрив* в точці x_0 і точка x_0 називається *точкою розриву*.

Точка x_0 називається *точкою розриву першого роду* функції $f(x)$, якщо границі зліва і справа $\left(\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ і } \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \right)$ скінченні і при цьому

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0).$$

В цьому випадку точка x_0 називається *точкою усувного розриву*.

Якщо границі зліва і справа $\left(\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ і } \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \right)$ скінченні і при цьому

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x),$$

то x_0 – *точка неусувного розриву першого роду*.

В цьому випадку різниця $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ називається *стрибком функції $f(x)$* в точці x_0 .

Якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ або $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не існує або нескінченна, то точка x_0 називається *точкою розриву другого роду* функції $f(x)$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 3.18. Задані функції:

$$1) f(x) = \frac{1}{x-2}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq -4 \\ 2x, & -4 < x < 2, \\ x^2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Знайти точки розриву і дослідити їх характер. Визначити стрибки функції в точках, де мають місце розриви першого роду.

Розв'язання. 1) Функція $y = \frac{1}{x-2}$ визначена і неперервна при всіх значеннях змінної $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Тому розрив може бути тільки в точці $x = 2$.

Для дослідження характеру розриву знаходимо односторонні границі функції в точці $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty.$$

Односторонні границі дорівнюють нескінченості, тому точка $x = 2$ – точка розриву другого роду (рис. 3.1).

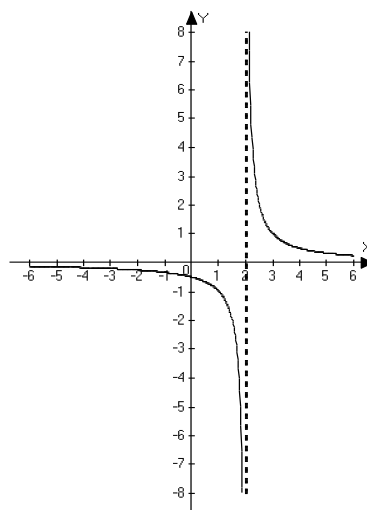


Рис. 3.1. Графік функції $y = \frac{1}{x-2}$

2) Область визначення функції – вся числова вісь $(-\infty; +\infty)$. На інтервалах $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; 2) \cup (2; +\infty)$ функція неперервна. Тому розриви можуть бути тільки в точках $x = -4$ та $x = 2$, в яких змінюється аналітичне представлення функції. Знаходимо односторонні границі в точці $x = -4$:

$$f(-4-0) = \lim_{x \rightarrow -4-0} (-x^2) = -16, \quad f(-4+0) = \lim_{x \rightarrow -4+0} 2x = -8.$$

Значення функції в точці $x = -4$ визначається першим аналітичним виразом, тобто $f(-4) = -(-4)^2 = -16$. Односторонні границі скінчені і $f(-4-0) \neq f(-4+0)$, отже $x = -4$ – точка неусувного розриву першого роду. Стрибок функції в точці розриву дорівнює $f(-4+0) - f(-4-0) = -8 - (-16) = 8$. Зазначимо, що $f(-4-0) = f(-4)$, отже, в точці $x = -4$ функція неперервна зліва.

$$\text{Розглянемо точку } x = 2: f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} 2x = 4, \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} x^2 = 4$$

.Значення функції в точці $x = 2$ визначається третім аналітичним виразом, тобто $f(2) = 2^2 = 4$. Таким чином, $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$, в точці $x = 2$ функція неперервна (рис. 3.2).

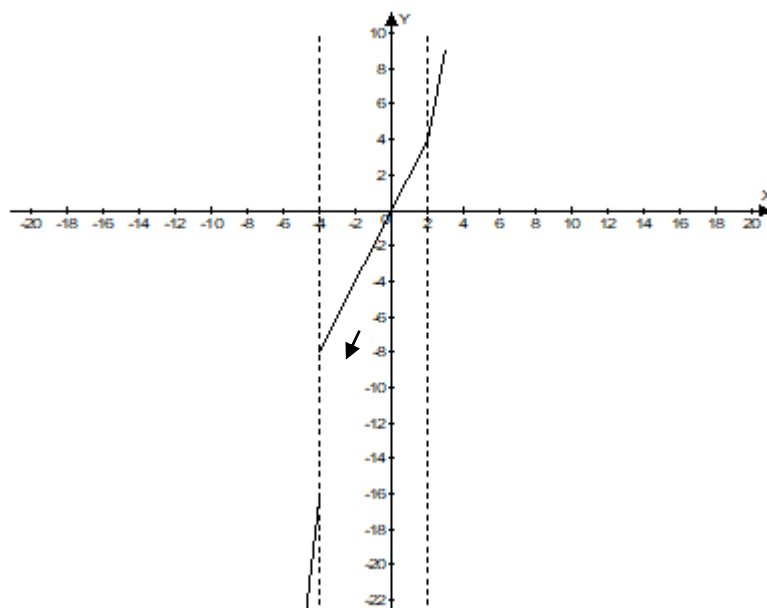


Рис. 3.2. Графік функції з прикладу 3.18. 2)

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення неперервної в точці функції.
2. Дайте означення функції неперервної на множині.
3. Дайте означення функції неперервної зліва.
4. Дайте означення функції неперервної справа.
5. Яка точка називається точкою розриву функції?
6. Що таке точка розриву першого роду?
7. Чим відрізняються усувний та неусувний розриви функції?
Сформулюйте означення точки розриву другого роду.

Вправи для самостійного розв'язування

3.12 Дослідити на неперервність функції та встановити характер точок розриву:

$$1) y = \frac{1}{5-x}; \quad 2) y = \frac{1}{(x+3)^3}; \quad 3) y = \frac{1}{x^2-4};$$

$$4) y = \frac{1}{x^2-5x+6}; \quad 5) y = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ \cos x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x \geq \pi; \end{cases} \quad 6)$$

$$y = \begin{cases} -x-1, & x < -1, \\ 0, & -1 \leq x < 0, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

3.13. Довизначити (якщо це можливо) функції так, щоб вони стали неперервними:

$$1) y = \frac{\sin x}{x}; \quad 2) y = \frac{x^2 + 4x}{x}; \quad 3) y = \frac{\sqrt{1-x} + 2}{x+1}; \quad 4) \\ y = \frac{e^x - 1}{x}.$$

3.14. Знайти односторонні границі функції $y = f(x)$ в точці $x = a$. Дослідити функцію на неперервність, встановити тип точок розриву:

$$1) f(x) = \begin{cases} 2-x, & x > 0, \\ x^2 - 4, & x \leq 0, \end{cases} \quad a = 0, a = 1; \quad 2)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \geq 0, \\ \cos x, & x < 0, \end{cases} \quad a = 0;$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0, a = \pi; \quad 4)$$

$$f(x) = \frac{1}{1 - 4^{\frac{1}{x-1}}}, \quad a = 0, a = 1;$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 2^x, & x \geq 0, \end{cases} \quad a = 0, a = 1; \quad 6)$$

$$f(x) = 2 + \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}, \quad a = 1.$$

3.15. При якому значенні A функція є неперервною в точці $x_0 = 0$:

$$1) y = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \in \left(-\frac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{4}\right), \\ A, & x = 0; \end{cases} \quad 2) y = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, & x \in (-1; 1), \\ A, & x = 0; \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0; \end{cases} \quad 4) y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x|x^2-4|}}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0? \end{cases}$$

3.16. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції:

$$1) y = \frac{2}{x-5}; \quad 2) y = |x-2|; 3) y = 5^{\frac{3}{x-1}}; \quad 4) y = \frac{\sin 2x}{x}.$$

РОЗДІЛ 4. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Тема 4.1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

4.1.1 Поняття похідної. Правила диференціювання

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому інтервалі (a, b) . *Похідною* функції $f(x)$ називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , якщо приріст Δx прямує до нуля, тобто

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Якщо ця границя скінчена, то функція $y = f(x)$ називається *диференційованою* в точці x . Якщо $f'(x) = \infty$, то кажуть, що функція $y = f(x)$ має в точці x *нескінчену похідну*. Похідна позначається $y' = y'(x)$, $f'(x)$ або $\frac{dy}{dx}$.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

Число

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \left(f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)$$

називається *правосторонньою* (лівосторонньою) *похідною* в точці x .

Похідна $f'(x)$ функції $y = f(x)$ існує тоді й тільки тоді, коли $f'_-(x) = f'_+(x)$.

Похідну функції знаходять за допомогою основних правил диференціювання функцій і таблиці похідних основних елементарних функцій.

Основні правила диференціювання

- 1) $C' = 0$, де C – стала величина;
- 2) $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;
- 3) $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$;
- 4) $(cu(x))' = c(u(x))'$, C – стала величина;
- 5) $\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$, $v(x) \neq 0$;

6) якщо функція $u = \varphi(x)$ диференційована в точці x_0 , а функція $y = f(u)$ диференційована в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ диференційована в точці x_0 і $y'_x(x_0) = y'_u(u_0)u'_x(x_0)$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій				
1.	$y = C$	$y' = 0$		
2.	$y = x$	$y' = 1$		
3.	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
4.	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
5.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a u$	$y' = \frac{1}{u \ln a} u'$
6.	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
7.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^u$	$y' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
8.	$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
9.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \sin u$	$y' = \cos u \cdot u'$
10.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$y = \cos u$	$y' = -\sin u \cdot u'$
11.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{tgu}$	$y' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
12.	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \operatorname{ctgu}$	$y' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
13.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos u$	$y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arctgu}$	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
16.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arcctgu}$	$y' = -\frac{u'}{1+u^2}$

4.1.2. Похідні вищих порядків

Якщо похідна $(n-1)$ -го порядку функції $y = f(x)$ вже визначена, то похідна n -го порядку визначається рівністю $y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'$. Зокрема $y''(x) = [y'(x)]'$, $y'''(x) = [y''(x)]'$ тощо.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – n раз диференційовані функції, то

$$[c_1 u(x) \pm c_2 v(x)]^{(n)} = c_1 [u(x)]^{(n)} \pm c_2 [v(x)]^{(n)},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

4.1.3. Похідна оберненої функцій та функції, заданої неявно або параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ ($a < x < b$) диференційована і має однозначну неперервну обернену функцію $x = g(y)$ и $y'_x \neq 0$. Тоді обернена функція $x = g(y)$ також диференційована та $x'_y = \frac{1}{y'_x}$. Для похідної другого порядку виконується рівність

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2}.$$

Нехай функція задана неявно, тобто $F(x, y) = 0$. Для обчислення похідної такої функції потрібно знайти похідно обох частин рівняння $F(x, y) = 0$ та рівняння $\frac{d}{dx} F(x, y) = 0$ розв'язати відносно y'_x .

Нехай однозначна неперервна функція від змінної x задана системою рівнянь

$$\begin{cases} y = u(t), \\ x = v(t), \end{cases} \quad \alpha < t < \beta,$$

де $u(t)$ і $v(t)$ – диференційовані функції та $v'(t) \neq 0$, тобто $y(x)$ задана параметрично. Тоді похідна y'_x також існує і визначається рівністю

$$y'_x = \frac{du}{dt} : \frac{dv}{dt} = \frac{u'_t}{v'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (4.1)$$

Похідні вищих порядків для функцій заданих параметрично обчислюються послідовно. Зокрема, для похідної другого порядку неважко перевірити справедливості наступної формули:

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^2}.$$

4.1.4. Диференціал функції

Якщо приріст функції Δy може бути представлено у вигляді:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x, \Delta x)\Delta x,$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(x, \Delta x) = 0$, то функція $y = f(x)$ називається диференційованою в точці x .

Головна лінійна частина $A(x)\Delta x$ називається диференціалом функції і позначається $df(x)$ або dy . Диференціал функції існує тоді й тільки тоді, коли існує скінчена похідна $y' = A(x)$. Диференціал функції можна записати наступним чином:

$$dy = y'dx = f'(x)dx.$$

(4.2)

Якщо приріст Δx достатньо малий, то з точністю до нескінченно малих більш високого порядку, ніж Δx , справедлива наближена формула $\Delta y \approx dy$. Крім того, з (4.2) виходить, що $\Delta x = dx$.

Диференціали високих порядків послідовно визначаються за формулами:

$$d^2 y = d(dy), \quad d^3 y = d(d^2 y), \dots, d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.1. Знайти приріст Δy функції $y = x^2$ при $x = 0$ і $\Delta x = 0,001$.

Розв'язання. За означенням приріст функції дорівнює $y(x + \Delta x) - y(x)$. Тоді маємо $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 0,000001$.

Приклад 4.2. Дослідити диференційованість функції $y = \sqrt[3]{x-1}$ в точці $x = 1$.

Розв'язання. При $x = 1$ приріст функції має вид:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \sqrt[3]{(1 + \Delta x) - 1} - \sqrt[3]{1 - 1} = \sqrt[3]{\Delta x} - 1.$$

Тоді $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \infty$. Отже, в точці $x = 1$ функція $y = \sqrt[3]{x-1}$ має нескінчену похідну.

Приклад 4.3. Дослідити диференційованість функції $y = \arccos(\sin x)$.

Розв'язання. Для обчислення похідної заданої функції застосуємо таблицю похідних і правила диференціювання складеної функції (дивись правило 6):

$$y' = -\frac{(\sin x)'}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

Отже, значення похідної дослідженої функції залежить від того, з яким знаком буде розкритий модуль в знаменнику.

Якщо $\cos x > 0$, то $|\cos x| = \cos x$ і $y' = -1$. Якщо $\cos x < 0$, то $|\cos x| = -\cos x$ і $y' = 1$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), де $\cos x = 0$, функція неперервна, але не диференційована.

Приклад 4.4. Користуючись означенням, знайти похідну функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 3$.

Розв'язання. Знайдемо приріст функції $f(x) = x^2$ в точці $x_0 = 3$:

$$\Delta y = f(3 + \Delta x) - f(3) = (3 + \Delta x)^2 - 3^2 = 6\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Тоді $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6 + \Delta x) = 6$. Таким чином, $y'(3) = 6$.

Приклад 4.5. Знайти похідні наступних функцій:

$$1) y = x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x + \log_5 x; \quad 2) y = 5^x \cos(2x + 3);$$

$$3) y = \frac{e^x}{1 + x^3}; \quad 4) y = \sin^2\left(\operatorname{tg} \frac{1}{x}\right).$$

Розв'язання. Використовуємо правила диференціювання функцій і таблицю похідних:

$$1) y' = \left(x^2 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \sin x + \log_5 x \right)' = (x^2)' - 2 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' + (\sin x)' + (\log_5 x)' = \\ = 2x + x^{-\frac{3}{2}} + \cos x + \frac{1}{x \ln 5};$$

$$2) y' = \left(5^x \cdot \cos(2x + 3) \right)' = \left(5^x \right)' \cdot \cos(2x + 3) + 5^x \cdot (\cos(2x + 3))' = \\ = 5^x \ln 5 \cdot \cos(2x + 3) - 5^x \cdot \sin(2x + 3) (2x + 3)' =$$

$$= 5^x \ln 5 \cdot \cos(2x + 3) - 2 \cdot 5^x \sin(2x + 3) = 5^x (\ln 5 \cdot \cos(2x + 3) - 2 \sin(2x + 3)).$$

3)

$$y' = \left(\frac{e^x}{1 + x^3} \right)' = \frac{(e^x)' \cdot (1 + x^3) - e^x \cdot (1 + x^3)'}{(1 + x^3)^2} = \frac{e^x(1 + x^3) - 3x^2 \cdot e^x}{(1 + x^3)^2} = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 1)}{(1 + x^3)^2}.$$

4)

$$y' = \left[\sin^2 \left(\operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) \right]' = 2 \sin \left(\operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) \cdot \cos \left(\operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{\sin \left(2 \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x} \right) \right)}{x^2 \cos^2 \left(\frac{1}{x} \right)}.$$

Приклад 4.7. Знайти похідну другого порядку функції $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну першого порядку:

$$y' = \left(e^{-x^2} \right)' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2xe^{-x^2}.$$

Тепер знаходимо похідну другого порядку:

$$y'' = \left(-2xe^{-x^2} \right)' = -2 \left(x' \cdot e^{-x^2} + x \cdot (e^{-x^2})' \right) = -2 \left(e^{-x^2} + x \cdot (-2xe^{-x^2}) \right) = 2e^{-x^2} (2x^2 - 1).$$

Приклад 4.8. Знайти похідну функції $y = x^{\cos x}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Через те, що $y = e^{\ln x^{\cos x}} = e^{\cos x \cdot \ln x}$, то

$$y' = e^{\cos x \cdot \ln x} \cdot (\cos x \cdot \ln x)' = e^{\cos x \cdot \ln x} \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right).$$

Другий спосіб. Розглянемо логарифм заданої функції:
 $\ln y = \ln x^{\cos x} \Rightarrow \ln y = \cos x \ln x$. Диференціюючи обидві частини по змінній x і враховуючи, що функція $\ln y(x)$ є складеною функцією, одержимо

$$\frac{1}{y} y' = \frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x.$$

З останньої рівності знаходимо y' і замість y підставляємо $x^{\cos x}$. Тоді

$$y' = y \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right) = x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right).$$

Приклад 4.9. Для функції

$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$$

заданою параметрично, знайти похідну першого порядку від y по змінній x .

Розв'язання. Знаходимо похідні від y та x по змінній t :

$$x'_t = 5(1 - \cos t); \quad y'_t = 5 \sin t.$$

Тоді за формулою (4.1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 \sin t}{5(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \quad (t \neq 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Приклад 4.10. Знайти диференціал функції $y = \ln(x^2 + 3x + 3) + \sin 2x$. Обчислити dy при $x = 0$, $\Delta x = 0,01$.

$$\text{Розв'язання.} \quad dy = (\ln(x^2 + 3x + 3) + \sin 2x)' dx = \left(\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 3} + 2 \cos 2x \right) dx.$$

Підставивши $x = 0$ і $dx = \Delta x = 0,01$, знаходимо $dy = (1 + 2) \cdot 0,01 = 0,03$.

Приклад 4.11. Знайти приріст і диференціал функції $y = 3x^2 - 2x + 5$ в точці $x = 1$ при $\Delta x = 0,1$. Знайти абсолютну і відносну похибки, які допускаються при заміні приросту функції її диференціалом.

Розв'язання. За означенням маємо

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = 3(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 2x + 5) = 3\Delta x^2 + 6x\Delta x - 2\Delta x.$$

і $dy = y'(x)dx = (6x - 2)dx = (6x - 2)\Delta x$.

Тоді $\Delta y - dy = 3\Delta x^2 + 6x\Delta x - 2\Delta x - 6x\Delta x + 2\Delta x = 3\Delta x^2$. При $x = 1$ і $\Delta x = 0,1$ одержимо $\Delta y = 0,43$, $dy = 0,4$, $\Delta y - dy = 0,03$. Отже, абсолютна похибка $|\Delta y - dy| = 0,03$, відносна похибка:

$$\left| \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \right| = \frac{0,03}{0,43} \approx 0,07 \text{ або } 7\%.$$

Приклад 4.13. Знайти наближено $\sin 29^\circ$.

Розв'язання. За означенням $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ і $\Delta y \approx dy$, тоді маємо $y(x + \Delta x) \approx y(x) + dy$. Нехай $y = \sin x$, $x = 30^\circ$ і $\Delta x = -1^\circ$. Тоді

$$dy = \cos x dx = \cos 30^\circ \cdot \left(-\frac{\pi}{180} \right) = -\frac{\sqrt{3}\pi}{360} \quad \text{та}$$

$$\sin 29^\circ = \sin(30^\circ - 1^\circ) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360} = 0,485.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення похідної.
2. Як називається операція знаходження похідної?
3. Сформулюйте означення лівосторонньої та правосторонньої похідних.
4. Сформулюйте основні правила диференціювання.
5. Напишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
6. Як знайти похідну неявно заданої функції?
7. Як знайти похідну функції, заданої параметрично?

8. Запишіть формулу Лейбніца обчислення похідної n -го порядку від добутку двох функцій.
9. Чому дорівнює похідна n -го порядку для функції $y = \cos x$?

Вправи для самостійного розв'язування

- 4.1.** Знайти приріст функції $y = x^2 + 2$ в точці $x = 1$ при:
- 1) $\Delta x = 0,01$; 2) $\Delta x = -0,3$.
- 4.2.** Знайти приріст функції $y = x - x^2$ в точці $x = 0$ при:
- 1) $\Delta x = 0,001$; 2) $\Delta x = -0,5$.
- 4.3.** Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції в кожній точці її області визначення, якщо;
- 1) $y = x^3$; 2) $y = \cos 2x$; 3) $y = \sqrt{x}$, $x > 0$; 4) $y = \sin 4x$;
- 5) $y = x^2 + x^3$; 6) $y = \sqrt{x-1}$, $x > 1$; 7) $y = x^3 + 2$; 8) $y = \frac{1}{x+2}$;
- 9) $y = \log_2 x$; 10) $y = 3^x$; 11) $\frac{1}{x^2}$; 12) $y = \frac{1}{x} + 1$.
- 4.4.** Користуючись означенням, знайти похідну функції в точці x_0 :
- 1) $y = 2 - x$, $x_0 = 1$; 2) $y = x^2 + 2$, $x_0 = 0$;
- 3) $y = x^2 - x$, $x_0 = 1$; 4) $y = \sin 2x$, $x_0 = \pi/4$;
- 5) $y = \cos x$, $x_0 = \pi/2$; 6) $y = 2^x$, $x_0 = 1$;
- 7) $y = \operatorname{ctgx}$, $x_0 = \pi/4$; 8) $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^4, & x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0$.
- 4.5.** Знайти похідні наступних функцій:
- 1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^2$; 2) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$; 3) $y = (1+2x)^2$;
- 4) $y = (x + \sqrt{x})^3$; 5) $y = 2^x + 3^x - 4^{-x} + 3^x \cdot 5^x$; 6) $y = \ln x + \log_2 x - 2 \log_3 x$;
- 7) $y = \sin x + 4 \cos x - \frac{1}{x}$; 8) $y = \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x$; 9) $y = 4x^5 - \sqrt{2x}$;
- 10) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}$; 11) $y = 5^x - \log_2 3x$; 12) $y = (1+2x)^{50}$;
- 13) $y = \frac{2^x}{4^x} + \ln 4x - \frac{1}{2x}$; 14) $y = \sqrt[5]{x} - \cos(3x+1) + \operatorname{tg} 3x$;
- 15) $y = \arcsin x - e^x \cos x$; 16) $y = e^x \sin x$; 17) $y = x^2 \arcsin 3x$;

$$18) y = \frac{1}{x^5} \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right)^5; \quad 19) y = (1 + x^2) \ln(1 - x);$$

$$20) y = 2^x \arccos 2x; \quad 21) y = (x^2 + x) \cos(3x - 1); \quad 22) y = \frac{x^2 \ln x}{1 + x^2};$$

$$23) y = \sqrt[5]{x^2} \log_3(x - 1); \quad 24) y = \frac{x^2}{1 - \sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3^{x+1}}; \quad 25) y = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x};$$

$$26) y = \sin^2 \frac{2}{x} + \cos^2 \frac{x}{2}; \quad 27) y = \ln \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + x^2}.$$

4.6. Користуючись логарифмічним диференціюванням, обчислити похідні функцій:

$$\begin{aligned} 1) y &= x^{\frac{1}{x}}; & 2) y &= \log_x 2 + \log_{x^2}(x^2 + 1); & 3) y &= x^{\cos x}; \\ 4) y &= x^{x^2}; & 5) y &= (\cos x)^{\sin x}; & 6) y &= (\sqrt{\operatorname{tg} x})^{x+1}; \\ 7) y &= \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2 + 1)}{\sqrt[5]{5 - x}}}; & 8) y &= \sqrt[3]{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}}; & 9) y &= \frac{\sqrt{x + 2}}{\sqrt[3]{(x - 1)^2} \sqrt{(x + 4)^3}}. \end{aligned}$$

4.7. Дослідити на диференційованість функції:

$$\begin{aligned} 1) y &= \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}; & 2) y &= |x| \sin x; & 3) y &= x |\sin x|; & 4) y &= x^2 |x|; \\ 5) y &= \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ x^4, & x \leq 0; \end{cases} & 6) y &= \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

4.8. Знайти праву і ліву похідні в точці x_0 :

$$\begin{aligned} 1) y &= |x + 1|, \quad x_0 = -1; & 2) y &= x^2 - 1, \quad x_0 = 2; \\ 3) y &= \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 5x, & x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0; & 4) y &= \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ \cos x, & x < 0, \end{cases} \quad x_0 = 0; \\ 5) y &= |\sin x|, \quad x_0 = \pi; & 6) y &= |x| - |x + 1|, \quad x_0 = 0; \\ 7) y &= |x^2 - x|, \quad x_0 = 1; & 8) y &= \sqrt{\sin^2 x - \sin x}, \quad x_0 = \pi; \\ 9) y &= \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}; & 10) y &= \arcsin(\sin x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4.9. Підібрати коефіцієнти a і b так, щоб функція $f(x)$ була неперервною і диференційованою в точці $x = x_0$, якщо

$$1) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq x_0, \\ ax + b, & x > x_0; \end{cases} \quad 2) f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq x_0, \\ (x + a)e^{-bx}, & x < x_0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

4.10. Знайти похідні другого порядку наступних функцій:

$$1) y = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} - 5x^2 + \frac{5}{x^3}; \quad 2) y = \frac{1+x^2}{x+3}; \quad 3) y = \frac{\cos 3x}{2 - \ln x};$$

$$4) y = (\sin 2x + \cos 5x)\sqrt{x}; \quad 5) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 6) y = e^{-x^2}.$$

4.11. Користуючись правилом диференціювання оберненої функції, знайти вказані похідні:

$$1) y = \sqrt[4]{x}, \text{ знайти } y'_x; \quad 2) y = \arccos \sqrt{x}, \text{ знайти } y'_x;$$

$$3) y = \ln \sqrt{1+x}, \text{ знайти } y'_x; \quad 4) y = 2x^3 + 3x^2, \text{ знайти } x'_y.$$

4.12. Для функцій, заданих параметрично, знайти відповідні похідні:

$$1) x = 5 \sin t + \sin 5t, \quad y = 5 \cos t - \cos 5t, \text{ знайти } y'_x;$$

$$2) x = e^{2t}, \quad y = e^{-2t}, \quad \text{знайти } y'_x;$$

$$3) x = 2 \cos^3 t, \quad y = 2 \sin^3 t, \quad \text{знайти } y''_{xx};$$

$$4) x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad \text{знайти } y''_{xx};$$

$$5) x = e^{-t}, \quad y = t^3, \quad \text{знайти } y'''_{xxx}.$$

4.13. Для неявно заданих функцій знайти y'_x :

$$1) e^y \sin x + e^x \cos y = 0; \quad 2) x^3 - y^2 - 4x + 5y - 3 = 0; \quad 3) \ln x + e^{\frac{y}{x}} = 5;$$

$$4) x^2 + xy + y^2 = 0; \quad 5) \arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 6) \sqrt{xy} + x + y - 2 = 0.$$

4.14. Знайти диференціали функцій:

$$1) y = x^2 + \frac{1}{x^2}; \quad 2) y = \frac{1+x}{x^2+x}; \quad 3) y = \ln x - \cos 2x;$$

$$4) y = \cos^2 x - 3x + 1; \quad 5) y = e^x \arcsin 2x; \quad 6) y = 5^x \cos 3x.$$

4.15. Знайти диференціали і значення диференціалів функцій $y = f(x)$:

$$1) y = \sin^3 2x. \text{ Знайти } df(x), df(\pi/8), df(\pi/8)|_{dx=0,1};$$

$$2) y = \ln(1+x^2). \text{ Знайти } df(x), df(2), df(2)|_{dx=0,01}.$$

4.16. Знайти диференціали другого порядку:

$$1) y = 2^{-x^2}; \quad 2) y = \sqrt{x^2-1}; \quad 3) y = \ln^2 x + x;$$

$$4) y = \sin^2(x+1); \quad 5) y = \ln(\cos x); \quad 6) y = \sqrt[3]{x+5}.$$

4.17. Знайти приріст і диференціал функції $y = \sqrt{x+2}$ при $x = 2$ і $\Delta x = 0,01$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які допускаються при заміні приросту її диференціалом.

4.18. Знайти приріст Δy та диференціал dy функції $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$ при $x = 0$ і $\Delta x = 0,02$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які допускаються при заміні приросту її диференціалом.

4.19. Обчислити наближено: 1) $\sqrt[3]{27,01}$; 2) $\lg 10,03$; 3) $\arccos 0,01$.

Тема 4.2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

4.2.1. Дотична і нормаль до графіка функції

Рівняння дотичної до графіка диференційованої функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, де $y_0 = y(x_0)$, має вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0). \quad (4.2)$$

Отже, кутовий коефіцієнт дотичної, яка проведена до графіка функції в точці x_0 , дорівнює значенню $y'(x_0)$ похідної функції в цій точці.

Кутом між двома кривими $y = f(x)$ і $y = g(x)$ в точці їх перетинання називається кут між двома дотичними до їх графіків в цій точці.

Нормаллю до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ називається пряма, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до дотичної в цій точці. Рівняння нормалі в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0), \quad y'(x_0) \neq 0. \quad (4.3)$$

4.2.2. Правила Лопіталя

Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ диференційовані в деякому околі точки x_0 , за виключенням, може бути, самої точки x_0 . Якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ або } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (4.4)$$

при умові, що границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ існує. При цьому точка x_0 може бути як скінченною, так і нескінченною точкою, що дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Приклади розв'язування задач

Приклад 4.14. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^2 + x$ в точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Неважко показати, що $y_0 = y(x_0) = y(1) = 2$, $y'(x) = 2x + 1$ і $y'(x_0) = y'(1) = 3$. Тоді, використовуючи рівність (4.6), знаходимо рівняння дотичної: $y - 2 = 3(x - 1)$ або $y = 3x - 1$.

Аналогічно з (4.7) знаходимо рівняння нормалі: $y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 2)$ або

$$y - 2 = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}.$$

Приклад 4.15. Знайти найменший кут між кривими $f(x) = 5x - 6$ і $g(x) = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетинання графіків даних функцій: $5x - 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$. Розв'язуючи останнє квадратне рівняння, знаходимо абсциси точок перетинання: $x_1 = 2$ і $x_2 = 3$. Тоді точки перетину мають координати $M_1(2; 4)$ і $M_2(3; 9)$. Знаходимо значення похідних для заданих функцій в точках перетинання: $f'(x) = 5$ і $g'(x) = 2x$, тобто $f'(2) = f'(3) = 5$ і $g'(2) = 4$, $g'(3) = 6$.

Отже, кутові коефіцієнти дотичних, дорівнюють відповідно $k_1 = f'(2) = 5$ і $k_2 = g'(2) = 4$. Тоді за формулою (1.19) знаходимо кут між дотичними, які проведені до графіків функцій $f(x)$ та $g(x)$, в точці з абсцисою $x_1 = 2$, який дорівнює куту між прямими в точці перетинання: $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{5 - 4}{1 + 5 \cdot 4} = \frac{1}{21} \Rightarrow \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{21}$.

Аналогічно знаходимо кут між заданими кривими в точці перетинання з абсцисою $x_2 = 3$: $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{6 - 5}{1 + 5 \cdot 6} = \frac{1}{31} \Rightarrow \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{31}$.

Приклад 4.16. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність типу $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. Тоді за правилом Лопіталя (4.8), при умові, що $x_0 = \infty$, дістаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right) = 0.$$

Приклад 4.17. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Розв'язання. Має місце невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Використовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\ln(1+x))'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\frac{1}{1+x}} = 2.$$

Приклад 4.18. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin^2 3x}$.

Розв'язання. Розкриваємо невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$, за правилом Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - x}{\sin^2 3x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - x)'}{(\sin^2 3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 1}{6 \sin 3x \cos 3x}.$$

Знов отримали невизначеність типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$. Застосовуємо ще раз правило Лопіталя.

Очевидно, що $\lim_{x \rightarrow 0} 6 \cos 3x = 6$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 1}{6 \sin 3x \cos 3x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2e^{2x} - 1)'}{(\sin 3x)'} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4e^{2x}}{3 \cos 3x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{9}.$$

Приклад 4.19. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x}$.

Розв'язання. Розкриваємо невизначеність типу $\{0^0\}$. Позначимо $y = (\sin x)^{\sin x}$.

Логарифмуємо обидві частини останньої рівності: $\ln y = \ln (\sin x)^{\sin x} = \sin x \cdot \ln (\sin x)$.

Використовуючи правило Лопіталя, знаходимо $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \ln (\sin x) = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (\sin x)}{\frac{1}{\sin x}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln (\sin x))'}{\left(\frac{1}{\sin x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0. \end{aligned}$$

Через те, що $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0$, маємо $\ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} y \right) = 0$ і $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$. Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\sin x} = 1.$$

Питання для самоперевірки

1. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції.
2. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної?
3. Що таке нормаль до графіка функції?
4. Напишіть рівняння нормалі до графіка функції.
5. Сформулюйте правила Лопіталя.
6. Які невизначеності можна розкривати за допомогою правил Лопіталя?

Вправи для самостійного розв'язування

4.20. Скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 .

- 1) $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = 45^\circ$; 3) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$;

$$4) f(x) = x^2 - 2x + 5, x_0 = 0,5; \quad 5) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x_0 = 2;$$

$$6) f(x) = \frac{1}{2} \sin^2 \left(4x - \frac{\pi}{3} \right), x_0 = 30^\circ; \quad 7) f(x) = x \ln x, x_0 = e.$$

4.21. Написати рівняння дотичних до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 . Побудувати криві і дотичні: 1) $f(x) = \frac{1}{x^4} + 2, x_0 = 2;$ 2)

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + 2, x_0 = 0;$$

$$3) f(x) = x^2 + x + 1, x_0 = 0; \quad 4) f(x) = x^2 - x, x_0 = -1$$

4.22. Під яким кутом перетинаються криві:

$$1) f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - x^2}; \quad 2) f(x) = x^3 - x, \quad g(x) = \frac{12}{x};$$

$$3) f(x) = x, \quad g(x) = x^{-1}; \quad 4) f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x^2.$$

4.23. Знайти кут між дотичними до графіка функції $y = f(x)$ в точках з абсцисами $x = -1$ і $x = 1$: 1) $f(x) = x^2 - 1;$ 2) $f(x) = x^3 - x.$

4.24. До кривої $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ провести дотичні, які паралельні прямій $3x - y + 1 = 0.$

4.25. Знайти рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $y = e^x + e^{-x}.$

4.26. Знайти координати точки перетинання двох дотичних, які проведені до графіка функції $y = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ в точках з абсцисами $x_1 = -2$ і $x_2 = 4.$

4.27. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 4x - 1}{\sin^2 5x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{2} \right)}{\ln(1 - x)}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x - 1)}{\operatorname{ctg} \pi x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin 3x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (\sin(2x - 1) \cdot \operatorname{tg} \pi x); \quad 12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x;$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}.$$

Тема 4.3. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

4.3.1. Ознаки монотонності функції

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$ та $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a;b)$. Тоді:

- 1) функція $f(x)$ є *неспадною (незростаючою)* на $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всіх x з $(a;b)$;
- 2) функція $f(x)$ є *спадною (зростаючою)* на $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всіх x з $(a;b)$.

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;b]$ та $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a;b)$. Функція $f(x)$ є *сталою* на $(a;b)$ тоді й тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ для всіх x з $(a;b)$.

4.3.2. Екстремуми функції. Найбільше та найменше значення функції

Точка x_0 називається *точкою локального мінімуму (локального максимуму)* функції $f(x)$, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і для кожної точки $x \neq x_0$ цього околу $f(x) \geq f(x_0)$ (відповідно $f(x) \leq f(x_0)$).

Значення функції $f(x_0)$ називається *мінімумом* функції (відповідно *максимумом* функції). *Екстремумом* функції називається або її мінімум, або її максимум.

Точка x_0 , яка належить області визначення функції $f(x)$, називається *критичною точкою* (точкою, яка підозрюється на екстремум), якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і $f'(x) = 0$, або $f(x)$ не диференційована в точці x_0 .

Необхідна умова екстремуму: якщо x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$, то x_0 – її критична точка.

Достатні умови екстремуму:

1. Нехай функція $f(x)$ неперервна в деякому околі критичною точки x_0 . Якщо при переході через точку x_0 похідна функції змінює знак «плюс» на «мінус», то x_0 – точка максимуму; якщо при переході через точку x_0 похідна функції змінює знак «мінус» на «плюс», то x_0 – точка мінімуму; якщо при переході через точку x_0 похідна не змінює знаку, то в точці x_0 екстремуму немає.

2. Нехай в критичній точці x_0 функція $f(x)$ двічі диференційована. Якщо при цьому $f''(x) < 0$, то в точці x_0 функція досягає максимуму; $f''(x) > 0$, то в точці x_0 функція досягає мінімуму.

3. Нехай функція $f(x)$ задана параметрично: $x = u(t)$, $y = v(t)$, де функції $u(t)$ і $v(t)$ в деякому проміжку зміни аргументу t мають похідні першого та другого порядку, причому $u'(t) \neq 0$. Нехай при $t = t_0$: $v'(t) = 0$. Тоді якщо $v''(t_0) < 0$, то функція $y = f(x)$ при $x = x_0 = u(t_0)$ має максимум; якщо $v''(t_0) > 0$, то функція $y = f(x)$

при $x = x_0 = u(t_0)$ має мінімум; якщо $v''(t_0) = 0$, то питання про наявність екстремуму остається відкритим. Точки, в яких $v''(t) = 0$, потребують спеціального дослідження.

Найбільше (найменше) значення функції, яка є неперервною на відрізку $[a; b]$, досягається або в критичних точках функції або на кінцях відрізка. Для того, щоб знайти найбільше (найменше) значення функції на відрізку $[a; b]$ потрібно обчислити значення функції в усіх критичних точках на відрізку $[a; b]$, значення $f(a)$, $f(b)$ на кінцях відрізка та обрати найбільше (найменше) з одержаних значень.

4.3.3. Опуклість і вгнутість функції. Точки перегину

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і диференційована на інтервалі $(a; b)$. Якщо $f''(x) < 0$ в інтервалі $(a; b)$, то в цьому інтервалі крива $y = f(x)$ *опукла (опукла вгору)*, тобто її графік лежить нижче будь-якої своєї дотичної; якщо $f''(x) > 0$ в інтервалі $(a; b)$, то в цьому інтервалі крива $y = f(x)$ *вгнута (опукла вниз)*, тобто її графік лежить вище будь-якої своєї дотичної.

Точкою перегину графіка неперервної функції називається точка, яка поділяє інтервали, в яких функція опукла вниз і вгору.

Якщо $f''(x_0) = 0$ або не існує, але $f'(x_0)$ існує і друга похідна $f''(x)$ змінює знак при переході через точку x_0 , то точка $(x_0, f(x_0))$ є *точкою перегину кривої* $y = f(x)$.

4.3.4. Асимптоти кривих

Нехай $M(x, y)$ – деяка точка графіка функції $y = f(x)$. Кажуть, що точка M віддаляється в нескінченність по графіку, якщо вона рухається по графіку так, що або $x \rightarrow \pm\infty$, або $y \rightarrow \pm\infty$.

Пряма лінія називається *асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо відстань від точки M , яка лежить на кривій, до цієї прямої прямує до нуля при переміщенні точки M вздовж якої-небудь гілки кривої у нескінченність.

Розрізняють вертикальні, горизонтальні і похилі асимптоти.

Якщо $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, або $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$.

Вертикальна асимптота паралельна осі Oy .

Якщо $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$, то пряма $y = c$ є *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$ (права при $x \rightarrow +\infty$ й ліва при $x \rightarrow -\infty$).

Горизонтальна асимптота паралельна осі Ox .

Якщо існують границі

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ і } b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx),$$

то пряма $y = kx + b$ – *похила асимптота*.

Зазначимо, що горизонтальну асимптоту можна розглядати як окремий випадок похилої асимптоти при $k = 0$.

4.3.5. Загальне дослідження функції і побудова її графіка

Загальне дослідження функції і побудову її графіка можна проводити по наступній схемі:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти точки перетинання графіка з осями координат;
- 3) дослідити функцію на парність, непарність і періодичність;
- 4) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву і з'ясувати характер розривів;
- 5) знайти точки екстремуму функції, обчислити екстремальні значення функції, встановити інтервали монотонності функції;
- 6) знайти точки перегину графіка функції, дослідити функцію на напрямок опуклості;
- 7) знайти асимптоти графіка функції;
- 8) побудувати графік функції.

Приклади розв'язання задач

Приклад 4.20. Дослідити на екстремум функцію

$$y = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ -3x - 4, & x \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Неважко помітити, що точка $x = 0$ – точка розриву функції. Похідна даної функції

$$y' = \begin{cases} 2, & x > 0, \\ -3, & x < 0 \end{cases}$$

існує для всіх $x \neq 0$.

Тоді $x = 0$ – критична точка. При переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак «+» на «-», але максимуму в цій точці немає, через те, що в цій точці порушується умова неперервності функції.

Приклад 4.21. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[0,5;1]$.

$$y = x^2 + 2x - 3 - \frac{3}{2} \ln x.$$

Розв'язання. Функція визначена при $x > 0$ і має похідну в кожній точці цієї множини. Знаходимо похідну:

$$y' = 2x + 2 - \frac{3}{2x} = \frac{4x^2 + 4x - 3}{2x} = \frac{(2x-1)(2x+3)}{2x}.$$

Тоді $x_1 = 0,5$ і $x_2 = -1,5$ – критичні точки і $x_2 \notin [0,5;1]$.

Обчислюємо значення заданої функції на кінцях відрізка $[0,5;1]$ і в критичній точці $x_1 = 0,5$: $y(0,5) = -1,75 + 1,5 \ln 2$, $y(1) = 0$. Очевидно $y(0,5) < 0$, тобто $y_{\text{найм}} = y(0,5) = -1,75 + 1,5 \ln 2$ і $y_{\text{найб}} = y(1) = 0$.

Приклад 4.22. Знайти проміжки опуклості та вгнутості функції

$$y = 5x^3 - 3x^2 + 4.$$

Розв'язання. Функція диференційована на всій числовій прямій. Знайдемо її другу похідну: $y' = 15x^2 - 6x$, $y'' = 30x - 6$. Звідси $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0,2$. При цьому $y'' < 0$, якщо $x < 0,2$ і $y'' > 0$, якщо ж $x > 0,2$. Тоді функція опукла при $x < 0,2$ і вгнута при $x > 0,2$ і точка $x = 0,2$ – точка перегину.

Приклад 4.23. Знайти асимптоти кривих: 1) $y = \frac{x^2}{x-1}$; 2) $y = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

Розв'язання. 1) Крива має вертикальну асимптоту $x = 1$, тому, що

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$$

(точка $x = 1$ є точкою розриву другого роду).

Знаходимо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1.$$

Отже, пряма $y = x + 1$ – похила асимптота.

2) Функція визначена на всій числовій осі і не має вертикальних асимптот.

Знаходимо похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} = 0.$$

Через те, що кутовий коефіцієнт $k = 0$, похилих асимптот немає, але існує горизонтальна асимптота. Знайдемо її: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$. Отже, горизонтальна асимптота задається рівнянням $y = 2$.

Приклад 4.24. Провести повне дослідження функції $y = \frac{x^3}{x^2-1}$ і побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Область визначення функції $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2) Знаходимо точки перетинання з осями координат. Якщо $x = 0$, то $y = 0$, тобто графік функції перетинає осі координат в точці $(0; 0)$.

3) Дослідимо функцію на парність, непарність:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -y(x).$$

Робимо висновок, що функція непарна, тобто її графік симетричний відносно початку координат. Тому достатньо дослідити функцію тільки для $x \in [0; +\infty)$.

4) Функція не є періодичною.

5) Функція неперервна в області визначення. Точки $x = 1$ і $x = -1$ є точками розриву. Дослідимо характер точок розриву. Знаходимо односторонні похідні в точці $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ – точка розриву другого роду.

В силу непарності функції, точка $x = -1$ також є точкою розриву другого роду і

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$$

6) Дослідимо функцію на монотонність. Знаходимо першу похідну і прирівнюємо її до нуля:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0.$$

Звідси критичними точками функції є точки: $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$ і $x = \pm 1$. Зазначимо, що в точках $x = \pm 1$ похідна не існує.

Розбиваємо область визначення функції на інтервали сталого знаку похідної: $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$. Визначає знаки похідної в цих інтервалах. При цьому, як було сказано вище, розглядаємо тільки проміжок $[0; +\infty)$. Результати для зручності записуємо в таблицю:

x	$(0;1)$	1	$(1;\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};+\infty)$
$y'(x)$	–	∞	–	0	+
Монотонність $y(x)$	спадає	∞	спадає	min	зростає

Для визначення знаку похідної достатньо у відповідному інтервалі визначити знак тільки для одного конкретного значення x з цього інтервалу. Наприклад, в інтервалі $(0;1)$ беремо точку $x = 0,5$ і підставляємо її у вираз для похідної та визначаємо знак:

$$y'(0,5) = \frac{(0,5)^2((0,5)^2-3)}{((0,5)^2-1)^2} < 0.$$

Аналогічно визначаємо знаки в інших інтервалах.

В силу непарності функція має дві точки екстремуму – точку мінімуму $x = \sqrt{3}$ і точку максимуму $x = -\sqrt{3}$.

Знаходимо мінімальне значення функції, підставивши значення $x = \sqrt{3}$ у функцію:

$$y_{\min} = y(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,6.$$

Аналогічно обчислюємо максимальне значення функції:

$$y_{\max} = y(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{(-\sqrt{3})^2-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6.$$

Зазначимо, що значення $y_{\max} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2,6$ можна виписати одразу, використовуючи непарність функції.

7) Знаходимо точки перегину функції та інтервали опуклості, вгнутості. Для цього знаходимо другу похідну функції і прирівнюємо її до нуля:

$$y'' = \left[\frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \right]' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0.$$

Друга похідна функції дорівнює нулю в точці $x = 0$ і не існує при $x = \pm 1$.

Визначаємо знак другої похідної, результат записуємо в таблицю (як і раніше, розглядаємо тільки інтервал $[0; +\infty)$):

x	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$y''(x)$	–	∞	+
$y(x)$	опукла	∞	вгнута

Через те, що функція непарна, то її графік на інтервалі $(-1;0)$ вгнутий і, отже, точка $x = 0$ – точка перегину.

8) Знаходимо асимптоти графіка.

Прямі $x = -1$ та $x = 1$ є вертикальними асимптотами (дивись п. 5).

Знаходимо похилу асимптоту:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2 - 1)x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0.$$

Отже, пряма $y = x$ є похилою асимптотою.

Через те, що $k = \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2 - 1)} = \infty$, то горизонтальних асимптот немає.

9) Будуємо графік функції для $x \in [0; +\infty)$ і відображуємо симетрично відносно початку координат (дивись рис 4.2).

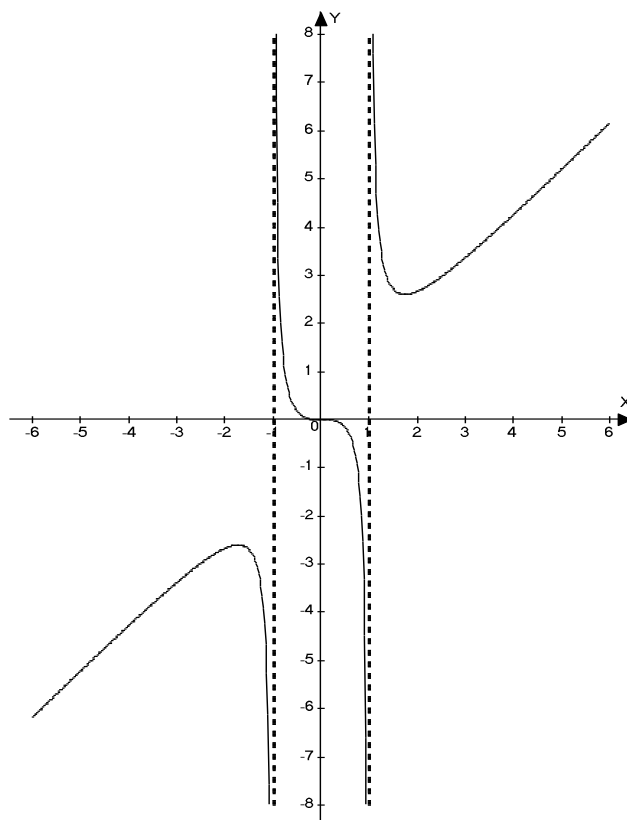


Рис 4.2. Графік функції $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ з асимптотами

Питання для самоперевірки

1. Які ознаки монотонності функції вам відомі?
2. Що називається екстремумом функції?
3. Які точки називаються критичними?
4. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму.
5. Похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю. Чи можна стверджувати, що в цій точці є екстремум функції?
6. Сформулюйте достатні умови існування екстремуму.
7. Як знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку?
8. Як знайти інтервали опуклості і вгнутості функції?
9. Яка точка графіка називається точкою перегину і як її знайти?
10. Що таке асимптота графіка функції? Як знайти асимптоти?
11. За якою схемою проводять повне дослідження функції?

Вправи для самостійного розв'язування

4.28. Знайти проміжки зростання і спадання функції:

- 1) $y = 2x^2 - 8x + 15$; 2) $y = x^3 - 8x^2$; 3) $y = x^2 e^x$; 4) $y = x \ln x$;

- 5) $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$; 6) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$; 7) $y = x(\sqrt[3]{x} - 1)$; 8) $y = 2e^x + 3e^{-x}$.

4.29. Знайти екстремуми функції:

- 1) $y = \frac{x^4}{4} - x^2$; 2) $y = \frac{\ln x}{x}$; 3) $y = x e^{-x}$; 4) $y = x^2(1 - x)$;

- 5) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 8$; 6) $y = x + \sqrt{5 - x}$;

- 7) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; 8) $y = e^{-x^2}$; 9) $y = \frac{e^x}{x}$.

4.30. Знайти екстремум функції

$$\begin{cases} x = t^5 - 5t^3 - 20t + 5, \\ y = 4t^3 - 3t^2 - 18t - 5, \end{cases} \quad (-2 < t < 2).$$

4.31. Знайти максимуми і мінімуми функцій:

- 1) $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$; 2) $\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x + 4}$;

- 3) $y = x \sin x$; 4) $y = x^2 e^{-x}$.

4.32. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$, якщо:

- 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $x \in [-2; 2]$; 2)

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9, \quad x \in [-1; 3];$$

- 3) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $x \in [-2; 1]$; 4) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $x \in [1; 6]$;

$$5) f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}, \quad x \in [-5; -1]; \quad 6)$$

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}, \quad x \in [-3; 3].$$

4.33. Знайти інтервали опуклості, вгнутості і точки перегину наступних функцій:

$$1) y = x + \frac{1}{x}; \quad 2) y = (1 + 2x^2)e^x; \quad 3) y = 3x^3 - 2x^2; \quad 4) y = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1};$$

$$5) y = \frac{x+1}{x^2 + x + 1}; \quad 6) y = x^2 \ln x; \quad 7) y = \frac{x}{\ln x}; \quad 8) y = xe^{x-1};$$

$$9) y = \sqrt[3]{x}(1+x); \quad 10) y = x^3 - 3x; \quad 11) y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}; \quad 12) y = \frac{x^2 - 9}{x}.$$

4.34. Знайти асимптоти кривих:

$$1) y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}; \quad 2) y = \frac{2x}{x^2 - 1}; \quad 3) y = xe^{-x};$$

$$4) y = x \ln x; \quad 5) y = \frac{5x^2}{x - 1}; \quad 6) y = \frac{2}{x^2 - 5x}.$$

4.35. Провести повне дослідження функції і побудувати її графік:

$$1) y = \frac{x^2}{x^2 - 1}; \quad 2) y = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}; \quad 3) y = \frac{x^4}{(1+x)^3};$$

$$4) y = \frac{x^2}{e^x}; \quad 5) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}; \quad 6) y = x^2 \ln(x + 2)$$

;

$$7) y = x^3 - 3x^2 - 9x; \quad 8) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}; \quad 9) y = \frac{x^4}{4} + x^3;$$

$$10) y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}; \quad 11) y = \sqrt[3]{x^2} - 1; \quad 12) y = \frac{(x+1)^2}{x-2}.$$

$$13) y = \frac{2x^2}{x+1}; \quad 14) y = 3^{\frac{1}{x}}; \quad 15) y = x - \sqrt{x};$$

$$16) y = \frac{x^3}{x+1}; \quad 17) y = \frac{x^4}{x^3 - 2}; \quad 18)$$

$$y = 2 + \sqrt{\frac{x^3}{x-6}};$$

$$19) y = (x+1)(x-2)^2; \quad 20) y = \sqrt[3]{x^2} - 1; \quad 21) y = x + e^{-x}.$$

- 1.1.** 1) $\overline{AB} = -\bar{i} + 4\bar{j} - \bar{k}$, $\overline{AC} = 2\bar{j} + \bar{k}$; 2) $\overline{AB} = 7\bar{i} + 3\bar{j} + 6\bar{k}$, $\overline{AC} = 5\bar{i} - 3\bar{j} - 3\bar{k}$. **1.2.** 1) $(-7; 26; 3)$; 2) $(7; -14; 18)$; 3) $(1; 0; 7)$; 4) $(-5; -2; -6)$. **1.3.** $(-1; 2; 1)$. **1.4.** $\overline{OA} = 4\bar{i}$, $\overline{AC} = 4\bar{j}$, $\overline{CB} = -3\bar{i}$; $\overline{BO} = -4\bar{j}$, $\overline{OC} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overline{BA} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$; $\overline{OM} = 1,5\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overline{ON} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$, $\overline{MN} = 1,5\bar{i} - 2\bar{j}$. **1.6.** $D(-4; -1)$. **1.7.** $\beta = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. **1.8.** $\overline{AC} = 2\bar{n} - 2\bar{m}$; $\overline{OM} = 2\bar{n} + \bar{m}$; $\overline{ON} = \bar{n} + 3\bar{m}$; $\overline{MN} = -\bar{n} + 2\bar{m}$. **1.9.** $M(3\sqrt{2}; 3; -3) = 3\sqrt{2}\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}$. **1.10.** $(-2; 1; 1)$ і $(4; 1; -1)$. **1.11.** 1) $(\bar{a}, \bar{b}) = -27$; 2) $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$. **1.12.** 1) 135° ; 2) $\arccos 3\sqrt{14}/14$. **1.13.** 1) $np_{\bar{a}} \bar{b} = 4\sqrt{6}/3$, $np_{\bar{b}} \bar{a} = 4\sqrt{18}/9$; 2) $np_{\bar{a}} \bar{b} = -\sqrt{10}/2$, $np_{\bar{b}} \bar{a} = -5\sqrt{21}/21$. **1.14.** 1) $\cos \alpha = 8/9$, $\cos \beta = -4/9$, $\cos \gamma = 1/9$; 2) $\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = -4/5$, $\cos \gamma = 3/5$. **1.15.** 1) 22; 2) 41; 3) -200; 4) $\sqrt{105}$; 5) $11/3$; 6) $22/7$; 7) $-84\sqrt{129}/129$; 8) 280. **1.16.** 2. **1.17.** $|\bar{a} + \bar{b}| = 6$; $|\bar{a} - \bar{b}| = 14$. **1.18.** $\sqrt{7}$ і $\sqrt{13}$. **1.19.** $\bar{a}(2; -2; 2\sqrt{2})$. **1.20.** 90° . **1.21.** $3\sqrt{271}/91$. **1.22.** $\sqrt{10}/10$. **1.23.** 60° . **1.24.** $\bar{b}(4\sqrt{2}; -2; 8)$. **1.26.** $D(-1; 1; 1)$; 120° . **1.28.** $\hat{A} = \arccos 4/9$; $\hat{B} = \arccos \sqrt{29}/87$; $\hat{C} = \arccos 14\sqrt{29}/87$. **1.30.** $\bar{a}(1; 2; 2)$. **1.31.** $\hat{C} = (-3; 3; 3)$. **1.32.** $D(4; 1)$. **1.33.** 1) $2 + \sqrt{3}$; 2) $5\sqrt{3}/2$; 3) $30 - \sqrt{3}$. **1.34.** $|AB| = 2\sqrt{10}$; $\cos \alpha = \sqrt{10}/10$; $\cos \beta = -3\sqrt{10}/10$. **1.35.** трикутник рівнобедрений, тому що $\angle B = \angle C$. **1.37.** $\cos \alpha = -4/9$; $\bar{a}(4; -2; 4)$. **1.38.** 1) -58; 2) 162; 3) 373. **1.39.** 1) -6; 2) 9; 3) 16; 4) 13; 5) 37; 6) -111. **1.49.** 1) $y = x + 3$; 2) $y = -x + 3$. **1.50.** 1) $y = x + 5$; 2) $y = \sqrt{3}x + 5$; 3) $y = -x + 5$; 4) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 5$. **1.52.** $y = -\frac{3}{2}x$. **1.53.** $y = -x + 2$. **1.54.** $y = 2$. **1.55.** $y = x + 1$ і $y = -x + 3$. **1.56.** $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **1.57.** 1) $k = 1/5$; 2) $k = 3/2$; 3) $k = -4/3$. **1.58.** $y = 0$; $y = 4$; $y = \frac{4}{3}x$; $y = \frac{4}{3}x + 4$; $y = \frac{2}{3}x + 2$; $x = 0$. **1.59.** $y = -2x - 3$; $y = 2x + 3$. **1.60.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$; $\frac{(1-\sqrt{2})x}{4} + \frac{(1+\sqrt{2})y}{6} = 1$; $\frac{(1+\sqrt{2})x}{4} + \frac{(1-\sqrt{2})y}{6} = 1$. **1.61.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$; $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = -1$. **1.62.** 1) $-\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$; 2) $\frac{x}{6} - \frac{y}{5} = 1$. **1.63.** $AB: y = 2x$; $AC: y = x + 2$; $BC: y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$; $\operatorname{tg} A = -1/3$; $\operatorname{tg} B = 1/5$; $\operatorname{tg} C = 1/9$. **1.64.** 45° . **1.65.** $y = \frac{7}{3}x + \frac{20}{3}$; $y = \frac{7}{3}x + 7$; $y = -\frac{3}{7}x + \frac{8}{7}$; $y = -\frac{3}{7}x - \frac{9}{7}$. **1.66.** 1) 90° ; 2) 45° ; 3) 45° ; 4) 0° . **1.67.** $y = -\frac{5}{3}x + 4$. **1.68.** $2\sqrt{13}$. **1.69.** $\frac{31\sqrt{41}}{41}$. **1.70.** $AB: 3x - 4y + 18 = 0$; $BC: 4x + 3y + 24 = 0$; $AC: 2x - y + 2 = 0$; медіани: $16x - 13y + 46 = 0$; $2x - 11y + 12 = 0$; $7x - y + 17 = 0$. **1.71.** $AC: x - 3y + 2 = 0$; $BE: 5x - y - 4 = 0$; $BD: 3x + y - 12 = 0$. **1.72.** $A(-1, 8; 0, 6)$; $B(3; 3)$; $C(3; -1)$; $\hat{A} = 45^\circ$; $\hat{B} = \arctg 2$; $\hat{C} = \arctg 3$. **1.73.** $K(1; -1)$ – точка перетину медіан; $N(8/3; -2)$ – точка перетину висот. **1.74.** $\sqrt{10}$. **1.75.** $M(-0, 6; -0, 6)$. **1.76.** $y - 3 = k(x + 4)$; 1) $\sqrt{3}x - 3y + 4\sqrt{3} + 9 = 0$; 2) $y = x + 7$; 3) $\sqrt{3}x - y + 4\sqrt{3} + 3 = 0$; 4) $\sqrt{3}x + y + 4\sqrt{3} - 3 = 0$; 5) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$, $A(-1; -1)$ лежить на окружності. **1.78.** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$. **1.79.** 1) $O(2; 3)$, $R = 4$; 2) $O(4; 0)$, $R = 4$; 3) $O(0; -2)$, $R = 2$. **1.80.** $(0; 0)$ і $(-2, 5; 2, 5)$. **1.81.** $x^2 + (y - 3)^2 = 18$. **1.82.** $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 20$. **1.83.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $F_2(2\sqrt{3}; 0)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **1.84.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. **1.85.** 1) $b = 1, 4$; $\varepsilon = 0, 96$; 2) $b = 3$; $\varepsilon = 0, 8$; 3) $b = 4$; $\varepsilon = 0, 6$; 4) $b = -4, 8$; $\varepsilon = 0, 28$; 5) $b = 1, 5\sqrt{11}$; $\varepsilon = 0, 1$. **1.86.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. **1.87.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$, $r_{1,2} = 8 \pm 0, 75x$. **1.88.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{84} = 1$. **1.89.** $(-5; 3\sqrt{3})$ і $(-5; -3\sqrt{3})$. **1.90.** $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$, $F_2(2\sqrt{5}; 0)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $y = \pm \frac{x}{2}$; $\alpha = \arctg \frac{4}{3}$. **1.91.** 1)

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1$. **1.92.** $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$; $r_{1,2} = 2\sqrt{3} \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}x$. **1.93.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **1.94.** 1 і 9. **1.95.** $(0; 0)$, $(6; 2\sqrt{3})$, $(6; -2\sqrt{3})$. **1.96.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ і $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$. **1.97.** 1 і 2,6. **1.98.** 1) $F(1; 0)$; $x = -1$; 2) $F(-1; 0)$; $x = 1$; 3) $F(0; 1)$; $y = -1$; 4) $F(0; -1)$; $y = 1$. **1.99.** 1) $y^2 = 9x$; 2) $x^2 = -y$. **1.100.** $F(6, 5; -3)$. **1.101.** $32x - 16y - 1 = 0$. **1.102.** $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3$. **1.103.** 1) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$; 3) $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{24} = 1$. **1.104.** 1) еліпс, $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$; 2) парабола $(x-2)^2 = \frac{4}{3}(y+3)$; 3) гіпербола, $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$; 4) еліпс, $\frac{(x-2)^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$; 5) коло, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{105}{16}$; 6) гіпербола, $\frac{(x+0,5)^2}{0,25} - \frac{y^2}{0,25} = 1$; 7) парабола, $(y+1)^2 = 4(x-2)$. **1.105.** $y^2 = 8(x+2)$. **1.106.** $(x-2)^2 = -2(y+2)$, $O'(2; -2), (0; -4)$. **2.1.** 1) $\begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 16 & 13 \\ 25 & -8 \end{pmatrix}$. **2.2.** 1) $3A + 4B = \begin{pmatrix} 19 & -4 & 19 \\ 39 & 12 & 17 \\ -6 & 13 & 8 \end{pmatrix}$ 2) $7B - 2A = \begin{pmatrix} 26 & -7 & 55 \\ 32 & -8 & 37 \\ -25 & 1 & 14 \end{pmatrix}$; 3) $A^T - 3B = \begin{pmatrix} -11 & 12 & -47 \\ -42 & 4 & -32 \\ 18 & -8 & -14 \end{pmatrix}$; 4) $A^T + 2B^T = \begin{pmatrix} 25 & 89 & -40 \\ -14 & 4 & 17 \\ 95 & 69 & 28 \end{pmatrix}$. **2.3.** 1) $AB = \begin{pmatrix} 18 & 1 & 7 \\ 16 & 14 & 4 \\ 13 & 8 & 7 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 10 & 11 & 18 \end{pmatrix}$; 2) $AB = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 2 \\ 7 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $AB = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 20 & -1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -14 \end{pmatrix}$; 4) $AB = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 3 \\ 11 & -10 & -1 \\ -7 & 21 & 9 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -14 & 10 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. **2.4.** $AB = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 26 \\ -3 & 1 & -4 \\ 22 & 21 & 51 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 26 & 26 \\ 29 & 39 \end{pmatrix}$, добуток AC не визначено, $CA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 10 & 8 \\ 32 & 30 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 25 & 15 & 13 \\ 61 & 17 & 26 \end{pmatrix}$, добуток CB не визначено. **2.5.** $AB = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 13 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} -7 & 9 & -4 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \\ 9 & -15 & 12 & -3 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 11 & -19 & 16 & -3 \\ 17 & -27 & 20 & -7 \end{pmatrix}$, $ABC = \begin{pmatrix} 27 & -49 & 44 & -5 \\ 39 & -65 & 52 & -13 \\ 51 & -81 & 60 & -21 \end{pmatrix}$, добутки BA , CA , CB , ABC , CAB не визначені. **2.6.** $f(x) = \begin{pmatrix} 18 & 7 \\ 28 & 4 \end{pmatrix}$. **2.7.** 1) $f(x) = \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 4 & 32 \end{pmatrix}$; 2) $f(x) = \begin{pmatrix} 19 & 10 & -1 \\ -6 & 29 & 7 \\ -8 & 1 & 14 \end{pmatrix}$; 3) $f(x) = \begin{pmatrix} 36 & 10 & 3 \\ -24 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & 13 \end{pmatrix}$. **2.8.** 1) $\begin{pmatrix} -22 & -9 & -7 \\ -9 & -18 & 81 \\ -12 & -10 & 26 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -37 \\ 4 & -21 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 176 & -7 \\ 210 & 454 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 6 & -130 & 110 \\ -22 & 180 & -130 \\ -186 & -153 & 444 \end{pmatrix}$. **2.9.** 1) -2; 2) 23; 3) 27; 4) 24; 5) 1. **2.10.** 1) 218; 2) -10; 3) 144; 4) 77; 5) 171; 6) -71; 7) -906; 8) 417. **2.11.** 1) 6; 2) -9; 3) -10; 4) -510; 5) -3454; 6) -3997. **2.12.** 1) $A^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & -7 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0,8 & -0,2 \\ 2 & 2,4 & -0,6 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$; 3) $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $A^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 17 & -22 & 18 \\ -1 & -1 & 2 \\ -13 & 13 & -13 \end{pmatrix}$; 6) $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 9 & -6 & 0 \end{pmatrix}$; 7) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1,5 & 1 \\ 0,5 & -0,5 & 0 \\ -0,5 & 2,5 & -1 \end{pmatrix}$; 8) $A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 8 & -7 & 9 \\ -1 & 11 & -18 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **2.13.** 1) $A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 24 & -13 & -19 \\ -5 & -8 & 5 & 6 \\ -5 & -11 & 6 & 9 \\ 3 & 5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$; 3) $A^{-1} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} -30 & -60 & 0 & 30 \\ 25 & 31 & -2 & -17 \\ 5 & 11 & 8 & -7 \\ 10 & 16 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. **2.14.** 1) $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 3) $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $X = \begin{pmatrix} 13/7 & -5/7 \\ -5/7 & 10/7 \end{pmatrix}$; 6) $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; 7)

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; 8) розв'язку не має; 9) $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -4 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. **2.15.** 1) $\begin{pmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -107 & -252 \\ 84 & 61 \end{pmatrix}$. **2.16.**
 1) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$, $x \in R$, $y \in R$; 2) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in R$, $y \in R$; 3) $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x \in R$, $y \in R$; 4) $\begin{pmatrix} 2x-3y & 2y \\ 3y & 2x \end{pmatrix}$, $x \in R$, $y \in R$.
2.17. 1) 3; 2) 1; 3) 2; 4) 3; 5) 2; 6) 2. **2.18.** 1) 3; 2) 2; 3) 2; 4) 4; 5) 4. **2.19.** 1) (1;-1;0); 2) (1;0;-1); 3) (1;1;1); 4) (1;0;-1); 5) $\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$; 6) (1;0;-3). **2.20.** 1) (1;2;3); 2) (3;0;-2); 3) (1;-1;-1); 4) $\left(\frac{3}{2}; 5; -\frac{3}{2}\right)$; 5) (1;0;-1;1); 6) (-0,6; 0,1; -5,2; 0,7). **2.21.** 1) (1;0;-1); 2) (0;-1;2); 3) (1;2;-3); 4) (2;0;-1). **2.22.** 1) $\left(0; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$, $(-3;0;7)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; 0\right)$ 2) $\left(0; -\frac{6}{7}; \frac{2}{7}\right)$, $\left(-\frac{6}{13}; 0; \frac{8}{13}\right)$, $\left(\frac{2}{5}; -\frac{8}{5}; 0\right)$; 3) $\left(0; \frac{7}{6}; \frac{11}{6}\right)$, $\left(\frac{7}{13}; 0; \frac{18}{13}\right)$, $\left(\frac{11}{5}; -\frac{18}{5}; 0\right)$; 4) $\left(0; -\frac{17}{3}; -\frac{7}{3}\right)$, $(1,7;0;-0,1)$, $\left(\frac{19}{11}; \frac{1}{11}; 0\right)$; 5) $\left(0; \frac{7}{6}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $(7;0;3;4)$, $\left(-2; \frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$; 6) $\left(0; \frac{100}{41}; -\frac{13}{41}; -\frac{6}{41}\right)$, $\left(\frac{100}{59}; 0; \frac{13}{59}; \frac{106}{59}\right)$, $(1;1;0;1)$, $\left(\frac{6}{47}; \frac{106}{47}; -\frac{13}{47}; 0\right)$; **3.1.**
 1) $\{0, 7, 26, 63, 124, \dots\}$; 2) $x_n = 0, n = 1, 2, \dots$; 3) $\{0, \sqrt{2}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{5}, \dots\}$; 4) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$; 5) $\left\{4, \frac{9}{4}, \frac{16}{9}, \frac{25}{16}, \frac{36}{25}, \dots\right\}$; 6) $\left\{1, 0, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots\right\}$. **3.2.** 1) $x_n = \frac{n^2+1}{5n-2}$; 2) $x_n = 3^n + (-1)^n$; 3) $x_n = \frac{n^2}{n!}$; 4) $x_n = \frac{3^n + (-1)^n}{n+1}$; 5) $x_n = \frac{n^2+1}{n}$; 6) $x_n = n^{(-1)^{n+1}}$. **3.3.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$; 4) -4; 5) -2; 6) 0; 7) 1; 8) 9) 1; 10) $-\frac{1}{2}$; 11) -1; 12) 0; 13) $\frac{1}{32}$; 14) 1; 15) ∞ ; 16) $\frac{1}{3}$; 17) $\frac{1}{2}$; 18) 2; 19) 1; 20) 1; 21) -1; 22) $\frac{1}{2}$; 23) $\sqrt{2}$; 24) $\frac{1}{3}$; 25) 0; 26) $\frac{1}{2}$. **3.6.** 1) 3; 2) π ; 3) $15\cos 2$; 4) 0; 5) 1; 6) $\frac{1}{3}$. **3.7.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 1; 5) ∞ ; 6) ∞ ; 7) 1, якщо $x \rightarrow +\infty$, -1, якщо $x \rightarrow -\infty$; 8) 1; 9) 0; 10) 0; 11) -2; 12) 2; 13) 0; 14) -1; 15) 0; 16) 0, якщо $x \rightarrow +\infty$, ∞ , якщо $x \rightarrow -\infty$; 17) 0, якщо $x \rightarrow +\infty$, ∞ , якщо $x \rightarrow -\infty$; 18) $\frac{3}{2}$, якщо $x \rightarrow +\infty$, ∞ , якщо $x \rightarrow -\infty$; 19) 1, якщо $x \rightarrow +\infty$, -1, якщо $x \rightarrow -\infty$; 20) $\frac{2}{9}$, якщо $x \rightarrow +\infty$, $-\frac{3}{4}$, якщо $x \rightarrow -\infty$. **3.8.** 1) 2; 2) -4; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 5; 6) $-\frac{4}{3}$; 7) $-\frac{9}{7}$; 8) 1; 9) $\frac{4}{9}$; 10) 4; 11) $-\frac{1}{3}$; 12) 1; 13) $\frac{3}{2}$; 14) $\frac{8}{3}$; 15) 2; 16) $\frac{2}{3}$; 17) $-\frac{5}{64}$; 18) $\frac{2}{3}$; 19) -3; 20) 4; 21) 3; 22) $2\sqrt{3}$; 23) 24) 0; 31) $\frac{1}{16}$; 25) ∞ ; 26) $\frac{1}{2}$. **3.9.** 1) 2; 2) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 1; 7) -1; 8) $\frac{7}{3}$; 9) $\frac{3}{4}$; 10) 0; 11) $\frac{1}{8}$; 12) $-\frac{1}{2}$; 13) $\frac{1}{3}$; 14) 0; 15) 0; 16) 100; 17) 2; 18) $-2\sqrt{3}$; 19) ∞ ; 20) $\frac{2\cos^{\frac{5}{2}} 1}{\sin^{\frac{1}{6}} 1}$. **3.10.** 1) e ; 2) e^{-20} ; 3) e^5 ; 4) $e^{\frac{8}{3}}$; 5) $e^{-\frac{1}{2}}$; 6) e ; 7) e ; 8) $e^{\frac{9}{4}}$; 9) 1; 10) 3; 11) -2; 12) e^3 . **3.11.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{5}{2}$; 5) $\frac{1}{8}$; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{8}$; 8) $\frac{1}{8}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський, В.В. Вища математика для економістів: навч. посіб. / В.В. Барковський, Н.В. Барковська. - К.: НАУ, 2005.- 448с.
2. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г.Н. Берман. - М.: Наука, 1985. - 446 с.
3. Бугров, Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - М.: Наука, 1988. — 432 с.
4. Бугров, Я. С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Наука, 1988. — 240 с.
5. Валєєв, К. Г. Вища математика: навч. посіб.: У 2-х ч. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. — К.: КНЕУ, 2001. — Ч. 1. — 546 с.
6. Высшая математика для экономистов: учеб. / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман ; под ред. Н.Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : ЮНИТИ, 2003. - 471 с.
7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2-х ч: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А. Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 5-е изд., испр. - М.: Высш. шк., 1997.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу (для вузов) / под ред. Б. П. Демидовича. — М.: Наука, 1968. — 472 с.
9. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие. / Д. В. Клетеник. — М.: Наука, 1986. — 224 с.
10. Ковальчук, Т.В. Вища математика для економістів / Т.В. Ковальчук, В.С. Мартиненко. -Ч.1.-К. :КНТЕУ, 2005.
11. Ковальчук, Т.В. Вища математика для економістів : підручник / Т.В. Ковальчук, В.С. Мартиненко, В.І. Денисенко. - Ч. 2. - К. : КНТЕУ, 2007. - 341 с.
12. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов : учеб. / Н.Ш. Кремер. - М. : ЮНИТИ, 2001. - 471 с.
13. Кудрявцев, В.А. Краткий курс высшей математики : учеб. пособие / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович - М.: Наука, 1989. - 655 с.
14. Збірник задач з вищої математики / уклад. В.С. Мартиненко та ін. - Ч. 1. - К. : КНТЕУ, 2000. - 210 с.
15. Пак, В.В. Вища математика : учеб. / В.В. Пак, Й.Л. Носенко. — К.: Либідь, 1996. — 440 с.
16. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учеб. / Н.С. Н.С. — Т. 1, 2. — М.: Наука, 1985.
17. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики / под ред. Г. И. Кручковича. — М.: Высш, шк., 1970. — 512 с.
18. Стрижак, Т. Г. Математичний аналіз : навч. посіб. / Т.Г. Стрижак, Н.Р. Коновалова. — К.: Либідь, 1995. — 240 с.
19. Тевяшев А.Д. Вища математика у прикладах та задачах : навч. посіб.- Ч.1. / А.Д. Тевяшев,О.Г. Литвин. - Харків: ХНУРЕ; Фактор, 2004. - 592 с.
20. Улітін, Г.М. Курс лекцій з вищої математики : навч. посіб. / Г.М. Улітін, А.М. Гончаров. - Ч.2. - Донецьк : ДонНТУ, 2008. - 105 с.