

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»**



**Факультет машинобудування, електроінженерії та хімічних технологій
Кафедра вищої математики і фізики**

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Вища математика. Частина 2»

**для студентів інженерно-технічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання**

Покровськ - 2022

УДК 51(042.3)
К 65

Конспект лекцій з дисципліни «**Вища математика. Частина 2**» для студентів освітнього ступеню «бакалавр» інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання [Електронний ресурс] / уклад. Є.В. Лесіна, С.В. Волков. – Покровськ : ДонНТУ, 2022. – 114 с.

Конспект лекцій з дисципліни «**Вища математика. Частина 2**» для студентів інженерно-технічних спеціальностей денної та заочної форм навчання містить основні поняття та теореми за темами: «Функції багатьох змінних»; «Невизначений інтеграл»; «Визначений інтеграл»; «Диференціальні рівняння». Конспект лекцій відповідає робочим програмам курсу «Вища математика. Частина 2», що викладається інженерно-технічним спеціальностям.

Укладачі: _____ Євгенія ЛЕСІНА, доцент кафедри ВМФ, к.ф.-м.н., доцент
(підпис)

_____ Сергій ВОЛКОВ, доцент кафедри ВМФ, к.ф.-м.н.
(підпис)

Рецензент: _____ Людмила СЕРГІЄНКО, доцент кафедри ВМФ, к.п.н., доцент
(підпис)

Відповідальний

за випуск: _____ Юлія НОВІКОВА, в.о. завідувача кафедри ВМФ, к.ф.-м.н., доцент
(підпис)

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ
Протокол № 7 від 22.02.2022 р.

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики і фізики
Протокол № 3 від 16 лютого 2022 р.

Зміст

ВСТУП.....	6
I. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.....	7
Тема 1. Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних.....	7
1. Основні поняття та означення.....	7
2. Границя та неперервність.	8
Тема 2. Диференціал функції багатьох змінних.	9
1. Частинні похідні.	9
2. Повний диференціал.	10
3. Похідна складеної функції.....	11
4. Повна похідна та частинні похідні функції, заданої неявно.	12
5. Частинні похідні вищих порядків.	13
6. Похідна за напрямком та градієнт.	14
7. Дотична та нормаль до поверхні.....	16
Тема 3. Векторна функція скалярного аргументу.	17
1. Векторна функція. Границя. Неперервність.	17
2. Похідна векторної функції.....	18
Тема 4. Екстремуми функції двох змінних.	20
1. Локальний екстремум. Необхідні та достатні умови екстремуму.	20
2. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області.	22
3. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.	23
4. Метод найменших квадратів.	27
II. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	29
Тема 5. Невизначений інтеграл та його властивості.....	29
1. Поняття первісної, означення невизначеного інтегралу функції.	29
2. Основні властивості невизначеного інтегралу.....	30
3. Таблиця невизначених інтегралів основних функцій.....	31
Тема 6. Основні методи інтегрування.	32
1. Безпосереднє інтегрування (метод розкладів).	32
2. Інтегрування заміною (метод підстановок).....	32
3. Інтегрування частинами.....	35
Тема 7. Інтегрування раціональних дробів.....	36
1. Многочлени та раціональні дроби.	36
2. Інтегрування раціональних дробів.	39
Тема 8. Інтегрування тригонометричних виразів.	40
1. Універсальна тригонометрична підстановка.	40

1) $\int R(\cos x) \sin x dx$; 2) $\int R(\sin x) \cos x dx$;	
2. Інтеграли виду 3) $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, $\int R(\cos^{2m} x; \sin^{2n} x) dx$.	41
3. Знаходження інтегралів виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$.	42
4. Знаходження інтегралів $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$; $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$; $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$.	42
Тема 9. Інтегрування ірраціональностей	43
1. Знаходження інтегралів виду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$, $\int R(x; \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}) dx$, тригонометричні підстановки.	43
2. Знаходження інтегралів виду $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{\alpha_n}{\beta_n}}\right) dx$. Дробово-лінійна підстановка.	44
3. Інтеграли, що не виражаються через елементарні функції.	45
III. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	47
Тема 10. Визначений інтеграл та його властивості.	47
1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу.	47
2. Означення та основні поняття визначеного інтегралу функції.	48
3. Обчислення визначеного інтегралу, формула Ньютона-Лейбніца.	49
4. Основні властивості визначеного інтегралу.	51
Тема 11. Основні методи обчислення визначеного інтегралу.	52
1. Метод підстановки.	52
2. Інтегрування частинами.	54
Тема 12. Невласні інтеграли.	55
1. Невласний інтеграл I-го роду.	55
2. Невласний інтеграл II-го роду.	57
Тема 13. Застосування визначеного інтегралу.	58
1. Геометричне застосування визначеного інтегралу.	58
2. Застосування визначеного інтегралу до задач фізики (механіки).	63
IV. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	65
Тема 14. Диференціальні рівняння першого порядку.	65
1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Загальні поняття, та означення.	65
2. Диференціальні рівняння першого порядку, задача та теорема Коші.	67
Тема 15. Класифікація та методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку, що інтегруються в квадратурах.	70
1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.	70
2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.	72

3. Лінійні диференціальні рівняння I порядку.	74
4. Диференціальні рівняння Бернуллі.	76
5. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.	78
Тема 16. Диференціальні рівняння вищих порядків.	80
1. Основні поняття та означення. Задача Коші.	80
2. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.	81
Тема 17. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку.	84
1. Основні поняття та означення. Фундаментальний розв'язок.	84
2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	88
Тема 18. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	91
1. Основні поняття та означення. Метод Лагранжа.	91
2. Метод підбору.	93
Тема 19. Системи диференціальних рівнянь.	96
1. Нормальні системи диференціальних рівнянь та їх розв'язання.	96
2. Системи лінійних диференціальних рівнянь. Метод підстановки.	99
3. Матричний метод розв'язання систем.	102
Тема 20. Побудова математичних моделей та розв'язання задач практичного змісту.	104
V. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	110
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	113

ВСТУП

Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика. Частина 2» для студентів інженерно-технічних спеціальностей створено з огляду на сучасні вимоги щодо істотного підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки таких фахівців.

Мета даної методичної розробки полягає в допомозі студенту самостійно оволодіти теоретичним матеріалом та навчитись розв'язувати задачі з курсу вищої математики. Серед розв'язаних прикладів, що наводяться в кожній лекції, більшість можна назвати типовими; ознайомлення з ними дозволяє студенту при мінімальній допомозі зі сторони викладача оволодіти основними методами та алгоритмами. Ця обставина особливо важлива для студентів, які навчаються заочно.

Конспект лекцій містить матеріали з чотирьох напрямів курсу вищої математики: функції багатьох змінних; невизначений інтеграл; визначений інтеграл; диференціальні рівняння. Теоретичний матеріал викладено в доступній формі, з достатньою кількістю прикладів та ілюстрацій.

І. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 1. Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних.

1. Основні поняття та означення.

Зупинимось переважно на функціях двох змінних. Означення та отримані результати легко поширюються на випадок більшої кількості змінних.

Розглянемо площину Oxy – множину точок $(x; y)$.

Означення 1. Множина всіх точок $(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$, називається $\mathcal{E}$ – околom точки $(x_0; y_0)$ та позначається $U_\varepsilon(M_0)$.

Означення 2. Областю D називається множина точок, які задовольняють наступні властивості:

- 1) будь-яка точка $M \in D$ належить області разом з деяким ε - околom (відкритість);
- 2) будь-які точки $M_1 \in D$ і $M_2 \in D$ можна з'єднати неперервною лінією, яка цілком належить D (зв'язність).

Лінія, яка обмежує дану область, називається межею. Якщо додати до області точки межі, то така область називається замкненою (рис. 1.1).

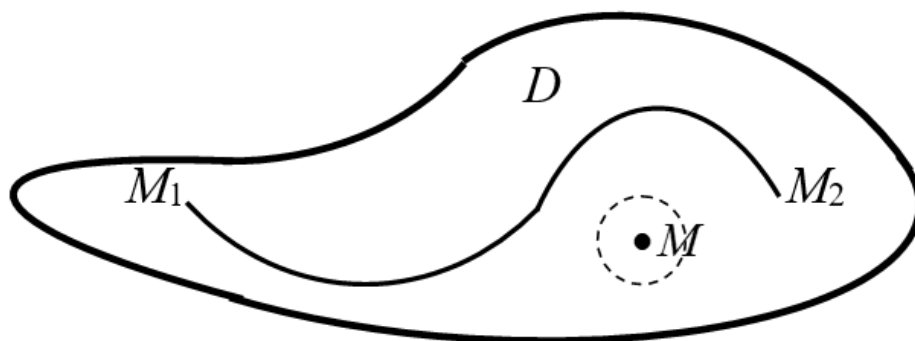


Рис.1.1

Означення 3. Якщо кожній парі $(x; y)$ значень двох незалежних змінних із області D відповідає за деяким правилом певне значення величини z , то z називається функцією двох змінних в області D : $z = f(x, y)$.

Аналогічно, як і для функції однієї змінної, визначається багатозначна функція багатьох змінних.

Приклад 1. Закон Ома: $U = IR$ – функція двох змінних.

Приклад 2. Робота сталої сили при прямолінійному русі: $A = FS \cos \alpha$ – функція трьох змінних.

Означення 4. Множина значень $(x; y)$, при яких визначена $z = f(x, y)$, називається областю визначення функції.

Приклад 3. Знайти область визначення функцій:

1. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто областю визначення даної функції є коло $x^2 + y^2 \leq 1$.

2. $z = \ln(xy) \Rightarrow xy > 0$, тобто область визначення – перша і третя координатні чверті без координатних осей.

Геометрично функцію двох змінних можна представити як поверхню, рівняння якої $z = f(x, y)$. Наприклад, рівняння функції $z = x^2 + y^2$ описує у просторі параболоїд.

2. Границя та неперервність.

Точка $M(x; y)$ прямує до точки $M_0(x_0; y_0)$, якщо відстань між цими точками прямує до нуля: $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0$. Це твердження еквівалентне наступним співвідношенням: $x \rightarrow x_0; y \rightarrow y_0$.

Означення 5. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при $M(x; y) \rightarrow M_0(x_0; y_0)$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує окіл $U(M_0)$ такий, що для всіх його точок виконується нерівність: $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Границя позначається

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = A \text{ або } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Аналогічно встановлюється поняття нескінченної границі функції. У випадку, коли $A = \infty$ або $A = -\infty$, нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ замінюється на нерівності виду: $f(x, y) > M$ або $f(x, y) < -M$ відповідно, де M – довільне додатне число, при цьому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \infty \text{ або } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = -\infty.$$

Означення 6. Функція $z = f(x, y)$ має границю A при $x \rightarrow \infty$ і $y \rightarrow \infty$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0$ таке, що $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ при $x > M; y > M$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) = A.$$

Означення 7. Функція називається неперервною в точці M_0 , якщо виконується рівність:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = f(M_0).$$

Якщо в деякій точці умова неперервності порушується, ця точка називається точкою розриву.

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точці $M_0(0; 0)$.

Розглянемо значення функції вздовж прямих $y = kx$:

$$M \rightarrow M_0(0; 0) \Rightarrow f(x, kx) = \frac{k^2}{1 + k^2}.$$

Отже, функція приймає різні значення в залежності від значення k . Точка $M_0(0; 0)$ є точкою розриву.

Зауваження. Властивості неперервної функції двох змінних аналогічні відповідним властивостям функції однієї змінної.

Тема 2. Диференціал функції багатьох змінних.

1. Частинні похідні.

Надамо незалежній змінній x приріст Δx , тоді функція $z = f(x, y)$ отримає приріст, який називається частинним приростом Z за x і позначається

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогічно визначається частинний приріст Z за y :

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Якщо приріст отримують одночасно x і y , то приріст

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

називається повним.

Означення. Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за x називається границя

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

інші позначення: z'_x , $f'_x(x, y)$.

Аналогічно,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

або $z'_y, f'_y(x, y)$.

З означень випливає, що правила обчислення частинних похідних збігаються з правилами для функції однієї змінної. При цьому, наприклад, якщо ми знаходимо похідну $\frac{\partial z}{\partial x}$, то в процесі диференціювання вважаємо, що $y = \text{const}$.

Приклад 1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = (x^2 + y^3) \sin(xy)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin(xy) + (x^2 + y^3) y \cos(xy);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \sin(xy) + (x^2 + y^3) x \cos(xy).$$

2. Повний диференціал.

Як відомо, повний приріст функції визначається за формулою $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Нехай $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, тобто є диференційованою. Повний приріст представимо у вигляді:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Застосуємо до кожної різниці Лагранжа:

$$\Delta z = \frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y} \Delta y,$$

де $x < \xi < x + \Delta x$; $y < \eta < y + \Delta y$.

В силу неперервності існують границі

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

тоді за теоремою про границю функції матимемо:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \underline{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y},$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_1 = 0$; $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \alpha_2 = 0$.

Це означає, що підкреслений доданок є н.м.в. при $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$ і тоді

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta \rho,$$

де $\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \alpha = 0$.

Отже, отримали еквівалентне означення диференційованої функції двох змінних.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою в точці, якщо її приріст можна представити у вигляді суми двох доданків, лінійних відносно Δx і Δy , та нескінченно малої величини більш високого порядку відносно $\Delta\rho$, тобто

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha \Delta \rho.$$

При цьому лінійна частина Δz називається повним диференціалом та позначається

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Оскільки прирости незалежних змінних називаються їх диференціалами, то остаточно

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

а $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$; $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ – частинні диференціали.

3. Похідна складеної функції.

Нехай задано функцію $z = z(u, v)$, де $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$. В цьому випадку z є складеною функцією аргументів x та y . Припустимо, що всі ці функції мають неперервні частинні похідні.

Надамо змінній x приріст Δx , тоді

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v} \Delta_x v + \alpha_1 \Delta_x u + \alpha_2 \Delta_x v,$$

де $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_1 = 0$; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_2 = 0$.

Розділимо дану рівність на Δx и перейдемо до границі при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_1 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha_2 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

$$\text{Звідси } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \text{ Аналогічно маємо: } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приклад 2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = e^{3u+v^2}$; $u = x \operatorname{arctg} y$;

$$v = \ln(x+y).$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{3u+v^2} \cdot 3 \cdot \operatorname{arctg} y + e^{3u+v^2} \cdot 2v \cdot \frac{1}{x+y} = e^{3x \operatorname{arctg} y + \ln^2(x+y)} \left(3 \operatorname{arctg} y + \frac{2 \ln(x+y)}{x+y} \right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{3u+v^2} \cdot 3 \cdot \frac{x}{1+y^2} + e^{3u+v^2} \cdot 2v \cdot \frac{1}{x+y} = e^{3x \operatorname{arctg} y + \ln^2(x+y)} \left(\frac{3x}{1+y^2} + \frac{2 \ln(x+y)}{x+y} \right).$$

4. Повна похідна та частинні похідні функції, заданої неявно.

Нехай задано функцію $u = u(x, y, z)$, де $y = y(x)$, $z = z(x)$. Тоді, узагальнюючи формулу для випадку похідної від функції двох змінних, одержимо:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}. \quad (2.1)$$

Формула (1) називається формулою повної похідної.

Приклад 3. Знайти повну похідну функції $z = x^2 \ln y + x \operatorname{arctg} y$, якщо $y = x^2$

$$\frac{dz}{dx} = 2x \ln y + \operatorname{arctg} y + \left(\frac{x^2}{y} + \frac{x}{1+y^2} \right) \cdot 2x = 2x \ln x^2 + \operatorname{arctg} x^2 + 2x + \frac{2x^2}{1+x^4}.$$

Нехай, потрібно знайти частинні похідні z'_x і z'_y , якщо $F(x, y, z) = 0$, де $z = z(x, y)$. Застосуємо правило диференціювання складеної функції для випадку трьох змінних:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow z'_x = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

$$\text{Аналогічно обчислюємо } z'_y = - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}.$$

Зауваження. Звідси випливає випадок для функції однієї змінної: якщо

$$F(x, y) = 0, \text{ де } y = y(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Приклад 4. Знайти частинні похідні функції, заданої неявно:

$$e^z - xz + y^3 - e^x = 0.$$

$$z'_x = -\frac{-z - e^x}{e^z - x} = \frac{z + e^x}{e^z - x}; \quad z'_y = -\frac{3y^2}{e^z - x}.$$

5. Частинні похідні вищих порядків.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$. Якщо частинні похідні $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ – диференційовані функції, то від них знову можна знаходити частинні похідні. Частинні похідні другого порядку визначаються наступним чином:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = f''_{xy}(x, y).$$

Останні дві похідні називаються мішаними похідними другого порядку.

Аналогічно визначаються похідні вищих порядків. Наприклад,

$\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ означає, що функцію $z(x, y)$ спочатку продиференційовано m разів за x , а потім $n - m$ разів за y .

Приклад 5. Знайти мішані похідні другого порядку від функції $z = x^2 y^3 + ye^x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + ye^x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2 + e^x;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2 + e^x \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + e^x.$$

У розглянутому прикладі ми отримали рівність двох мішаних похідних другого порядку. Виникає питання: чи залежить у загальному випадку результат диференціювання від порядку диференціювання?

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні f'_x , f'_y визначені у деякому околі точки M , і f''_{xy} , f''_{yx} неперервні, то у цьому околі мішані похідні співпадають:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

6. Похідна за напрямком та градієнт.

Розглянемо функцію трьох змінних $u = u(x, y, z)$, задану в просторовій області V , і точку $M(x; y; z) \in V$ (рис. 2.1).

Проведемо із точки M вектор $\bar{s}$, напрямні косинуси якого $\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma$. На векторі $\bar{s}$ візьмемо точку $M_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$, тоді

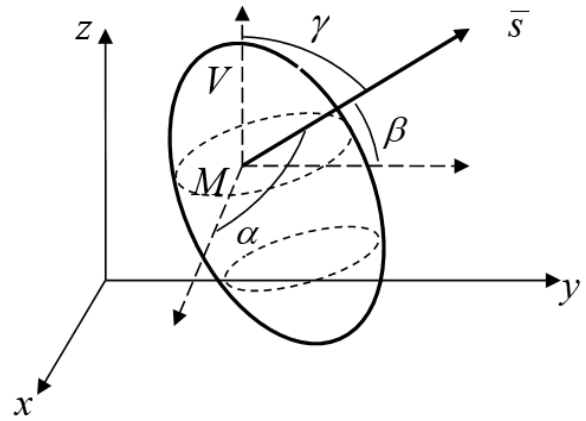


Рис.2.1

$\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$ – відстань між точками M і M_1 .

Приріст функції $u = u(x, y, z)$ матиме вигляд:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \alpha \cdot \Delta \rho,$$

де $\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \alpha = 0$. Поділивши цю рівність на $\Delta \rho$ і перейшовши до границі при $\Delta \rho \rightarrow 0$, одержимо:

$$\lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta \rho} = \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) представляє собою похідну функції $u(x, y, z)$ за напрямом вектору $\bar{s}$.

Зауваження. Частинні похідні – це частинний випадок похідних за напрямками векторів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$.

Зауваження. На площині похідна за напрямом має вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha.$$

Приклад 6. Знайти похідну за напрямом вектору $\bar{s} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ в точці $M(0; 1; 2)$ від функції $u = x^2 y + z^2 x + \ln y$.

Обчислимо частинні похідні в точці M :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_M = (2xy + z^2)_M = 4; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_M = \left(x^2 + \frac{1}{y} \right)_M = 1; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_M = (2xz)_M = 0.$$

Визначимо напрямні косинуси вектору $\bar{s}$:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}; \quad \cos \beta = -\frac{1}{3}; \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Тоді } \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)_M = 4 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Розглянемо функцію трьох змінних.

Означення. Сукупність точок, що задовольняють рівняння $u(x, y, z) = C$, де $C = \text{const}$, утворює поверхню, яка називається поверхнею рівня.

Приклад 7. Знайти поверхні рівня функції $u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

$$x^2 + y^2 - z^2 = C \Rightarrow \begin{cases} C > 0 & - \text{однопорожнинний гіперболоїд,} \\ C = 0 & - \text{конус,} \\ C < 0 & - \text{двопорожнинний гіперболоїд.} \end{cases}$$

Зауваження. Для функції двох змінних $z = z(x, y)$ маємо рівняння лінії рівня $z(x, y) = C$.

Означення. Вектор $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$ називається градієнтом функції $u = u(x, y, z)$.

Зауваження. Для функції двох змінних $z = z(x, y)$ градієнт має вигляд:

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j}.$$

Основні властивості градієнта:

1. Похідна за напрямом $\frac{\partial u}{\partial s}$ дорівнює проекції $\text{grad } u$ на $\bar{s}$, тобто

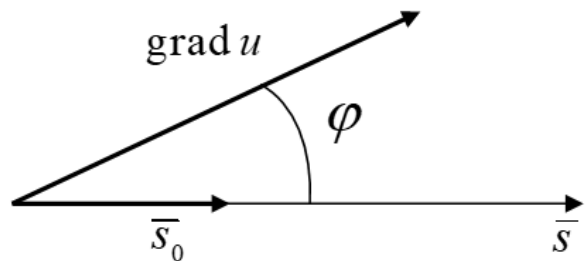
$$\frac{\partial u}{\partial s} = |\text{grad } u| \cos \varphi \quad (\text{рис. 2.2}).$$


Рис. 2.2

Оскільки одиничним вектором для вектору $\bar{s}$ буде вектор $\bar{s}_0 = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \text{grad } u \cdot \bar{s}_0 = \\ &= |\text{grad } u| \cdot |\bar{s}_0| \cos \varphi = |\text{grad } u| \cos \varphi, \end{aligned}$$

що і потрібно довести.

2. Похідна за напрямом в даній точці набуває найбільшого значення, якщо напрям вектору $\bar{s}$ збігається з напрямом градієнта.

Цей факт впливає із властивості 1, тому що $\max \frac{\partial u}{\partial s}$ досягається при $\varphi = 0$.

3. Похідна за напрямом, перпендикулярним градієнту, дорівнює нулю. Ця властивість також впливає із властивості 1, оскільки

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial s} = 0.$$

4. Градієнт спрямований перпендикулярно до поверхні рівня.

Приклад 8. Знайти градієнт функції $u = z \ln(x^2 + y^2) + \arctg(x^2 + z^2)$ в точці $M(0; 1; 1)$.

Знаходимо частинні похідні:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = \left(\frac{2xz}{x^2 + y^2} + \frac{2x}{1 + (x^2 + z^2)^2}\right)_M = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = \left(\frac{2yz}{x^2 + y^2}\right)_M = \frac{2}{1} = 1;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = \left(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2z}{1 + (x^2 + z^2)^2}\right)_M = 0 + \frac{2}{2} = 1.$$

Тоді $(\text{grad } u)_M = 2\bar{j} + \bar{k} = (0; 2; 1)$.

7. Дотична та нормаль до поверхні.

Нехай поверхня задається рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Це рівняння можна розглядати як рівняння поверхні рівня функції $u = F(x, y, z)$ при $C = 0$, і тоді на підставі властивостей градієнта одержимо рівняння нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}$$

та рівняння дотичної площини P (рис 2.3)

$$(x - x_0)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} + (y - y_0)\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} + (z - z_0)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0} = 0.$$

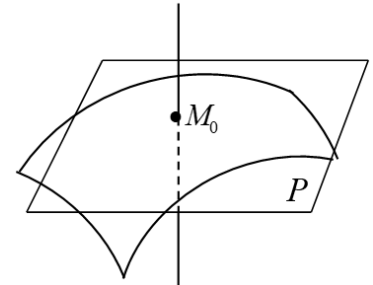


Рис. 2.3

Зауваження. Якщо поверхня задана рівнянням $z = f(x, y)$, то її можна представити у вигляді:

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1,$$

і тоді рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z - z_0}{-1},$$

а рівняння дотичної площини:

$$(x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} + (y - y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} - (z - z_0) = 0.$$

Приклад 9. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ в точці $M_0(-1; 2; -2)$.

Обчислимо частинні похідні в цій точці:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} = (2x)_{M_0} = -2; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} = (2y)_{M_0} = 4; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0} = (2z)_{M_0} = -4.$$

Тоді одержимо рівняння нормалі

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+2}{-4},$$

а рівняння дотичної площини –

$$(x+1)(-2) + (y-2)4 + (z+2)(-4) = 0 \quad \text{або} \quad -x + 2y - 2z - 9 = 0.$$

Тема 3. Векторна функція скалярного аргументу.

1. Векторна функція. Границя. Неперервність.

Аналогічно, як і у випадку плоскої лінії, просторову лінію можна задати параметричними рівняннями виду:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$$

Наприклад, $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$ – рівняння прямої у просторі, а

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t, \\ y = R \sin \omega t, \\ z = Vt, \end{cases}, \text{ де } R, \omega, V - \text{const}, \text{ – рівняння гвинтової лінії (спіраль).}$$

Розглянемо радіус-вектор $\vec{r}$, координатами якого є функції параметра t :

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (3.1)$$

Кожному значенню параметра t за формулою (3.1) ставиться у відповідність вектор $\vec{r}(t)$, тобто $\vec{r}(t) \in$ функцією скалярного аргументу t . Таким чином, векторна функція скалярного аргументу записується в виде $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Означення. Лінія, яку описує кінець вектору $\vec{r}$, називається годографом векторної функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (рис. 3.1).

Границя і неперервність векторної функції визначаються через скалярні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Якщо існують границі

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0 ;$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0 ; \quad \text{то} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 .$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0 ,$$

$$\text{де } \vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} .$$

Аналогічно визначається неперервність векторної функції через неперервність функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

2. Похідна векторної функції.

Надамо приріст аргументу t . В результаті векторна функція $\vec{r}(t)$ отримає приріст:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = (x(t + \Delta t) - x(t)) \vec{i} + (y(t + \Delta t) - y(t)) \vec{j} + (z(t + \Delta t) - z(t)) \vec{k} .$$

Розглянемо відношення $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$. Якщо функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

диференційовані, то

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{i} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + \vec{j} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} + \vec{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \\ &= x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j} + z'(t) \vec{k} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Формула (3.2) визначає похідну векторної функції скалярного аргументу. Модуль цього вектору дорівнює

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} .$$

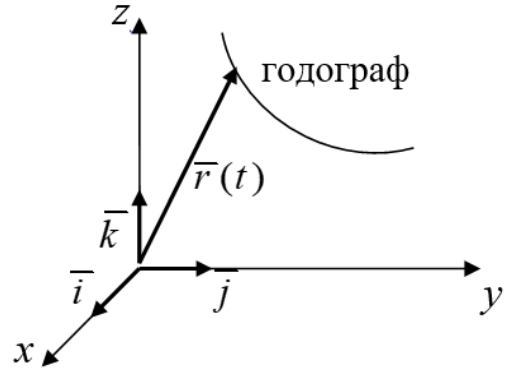


Рис. 3.1

З'ясуємо геометричний зміст похідної.

Із рисунка 3.2 видно, що при $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow (\cdot)M_1 \rightarrow (\cdot)M$, тобто похідна має напрям дотичної. Нормалей до просторової кривої в даній точці можна провести нескінченну кількість – всі вони розташовані в площині, яка називається нормальною площиною. Виходячи із геометричного змісту похідної, одержимо рівняння дотичної

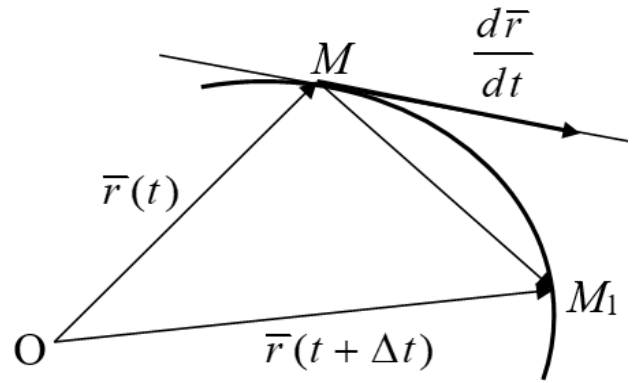


Рис. 3.2

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

та рівняння нормальної площини

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Зауваження. З означення похідної випливає, що правила її обчислення такі, як і для скалярної функції однієї змінної.

Аналогічно, як і для плоскої лінії, вводиться поняття її кривизни.

Формула для обчислення кривизни просторової лінії має вигляд:

$$k^2 = \frac{\left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \right)^2}{\left(\left(\frac{d\bar{r}}{dt} \right)^2 \right)^3}.$$

Приклад 1. Показати, що якщо $|\bar{r}(t)| = \text{const}$, то $\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \bar{r} = 0$.

Дійсно, оскільки $\bar{r}^2(t) = \text{const}$, то після диференціювання одержимо:

$$2 \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \bar{r} = 0.$$

Приклад 2. Скласти рівняння дотичної, нормальної площини та знайти кривизну гвинтової лінії в точці $t_0 = \frac{\pi}{2\omega}$.

Обчислимо значення функцій та їх похідних у відповідній точці:

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t, \\ y = R \sin \omega t, \\ z = Vt, \end{cases} \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = R, \\ z_0 = \frac{\pi V}{2\omega}, \end{cases} \begin{cases} x'_0 = -\omega, \\ y'_0 = 0, \\ z'_0 = V, \end{cases} \begin{cases} x''_0 = 0, \\ y''_0 = -\omega^2, \\ z''_0 = 0. \end{cases}$$

Складемо рівняння дотичної

$$\frac{x}{-\omega} = \frac{y-R}{0} = \frac{z - \frac{\pi V}{2\omega}}{V}$$

і нормальної площини

$$-\omega x + Vz - \frac{\pi V^2}{2\omega} = 0.$$

Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{r}'_0(-\omega; 0; V)$; $\vec{r}''_0(0; -\omega^2; 0)$:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{t_0} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega & 0 & V \\ 0 & -\omega^2 & 0 \end{vmatrix} = \omega^2 V \vec{i} + \omega^3 \vec{k}.$$

Тоді

$$(k^2)_{t_0} = \frac{\omega^4 V^2 + \omega^6}{(\omega^2 + V^2)^3} = \frac{\omega^4}{(\omega^2 + V^2)^2} \Rightarrow k\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{\omega^2}{(\omega^2 + V^2)}.$$

Тема 4. Екстремуми функції двох змінних.

1. Локальний екстремум. Необхідні та достатні умови екстремуму.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ досягає максимуму (мінімуму) в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо для будь-якої точки $M(x; y) \in U(M_0)$ виконується нерівність $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ ($f(x, y) < f(x_0, y_0)$). Максимум і мінімум називаються екстремумами функції.

Візьмемо точку $M_0(x_0; y_0)$, надамо в її околі прирости аргументам $x = x_0 + \Delta x$; $y = y_0 + \Delta y$, тоді приріст функції

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

і, якщо $\Delta z < 0 \quad \forall \Delta x, \Delta y$, то точка $M_0(x_0; y_0)$ – точка максимуму, якщо ж $\Delta z > 0 \quad \forall \Delta x, \Delta y$, – то точка мінімуму.

Приклад 1. Розглянемо функцію $z = x^2 + y^2$ і точку $M_0(0; 0)$ (див. рис. 4.1).

У цій точці маємо $\Delta z = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 > 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow M_0(0; 0)$ – точка мінімуму.

Теорема (необхідні умови екстремуму).

Якщо функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $M_0(x_0; y_0)$, то в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю або не існують.

Надамо змінній y певного значення y_0 . Тоді $z = f(x, y_0)$ буде функцією однієї змінної x . При $x = x_0$ вона має екстремум,

тому частинна похідна $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0$ або не існує.

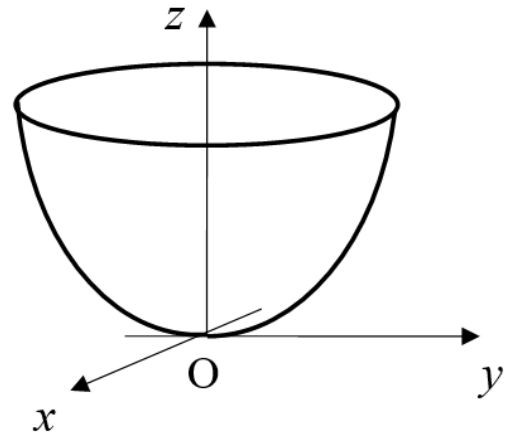


Рис. 4.1

Твердження теореми аналогічно доводиться для частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ця умова не є достатньою, що видно із прикладу.

Приклад 2. Розглянемо функцію $z = x^2 - y^2$. Тоді

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0; 0).$$

В даній точці повний приріст функції $\Delta z = (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2$, звідки випливає, що в її околі Δz має як додатні, так і від'ємні значення. Екстремуму немає.

Означення. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю або не існують, називаються критичними. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються стаціонарними.

Зауваження. Із означення градієнта витікає, що в стаціонарних точках градієнт буде нульовим вектором.

Теорема. Якщо в деякому околі стаціонарної точки $M_0(x_0; y_0)$ функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні до третього порядку включно, то якщо:

1. $B^2 - AC < 0$ – екстремум є, при цьому, якщо $A < 0$ – max, а при $A > 0$ – min.
2. $B^2 - AC > 0$ – екстремуму немає.

3. $B^2 - AC = 0$ – відповіді немає, потрібне додаткове дослідження.

$$\text{Тут } A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{M_0}; \quad B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{M_0}; \quad C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{M_0}.$$

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + xy - \frac{1}{2}y^2 - 2y$.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x - y - 2 = 0. \end{cases}$$

Із даної системи одержимо: $3x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = \frac{2}{3}$,

Тобто маємо дві стаціонарні точки: $M_1(-1; -3); M_2\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

В точці $M_1: A = -6; B = 1; C = -1 \Rightarrow B^2 - AC < 0$ і $A < 0 \Rightarrow \max, z_{\max} = \frac{7}{2}$.

В точці $M_2: A = 4; B = 1; C = -1 \Rightarrow B^2 - AC > 0 \Rightarrow$ екстремуму немає.

2. Найменше та найбільше значення функції в замкненій області.

Для знаходження найбільшого та найменшого значень використовують той самий алгоритм дій, що і у випадку функцій однієї змінної, а саме:

1. Визначають значення функції в критичних точках, які належать області.
2. Обчислюють найбільше та найменше значення на межі області.
3. Із отриманих значень обирають найбільше та найменше.

Приклад 4. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$z = 3x^2 - 6xy + y^2 + 4y \text{ в області } D: \begin{cases} x \geq -1; \\ y \geq -1; \\ x + y \leq 3. \end{cases}$$

Область D – це трикутник ABC (рис 4.2).

Визначимо критичні точки, які розташовані в області D :

$$\begin{cases} z'_x = 6x - 6y = 0 \\ z'_y = -6x + 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(1; 1) \in D \Rightarrow z(M_0) = 2.$$

На межі $AB: y = 3 - x \Rightarrow z = 10x^2 - 28x + 21$.

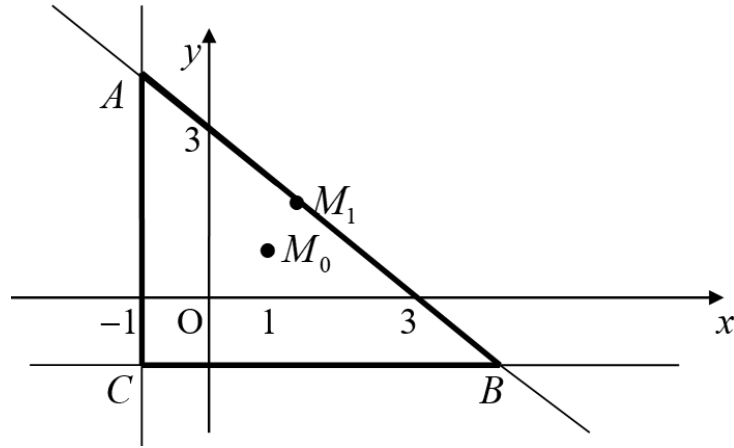


Рис. 4.2

$$\frac{dz}{dx} = 20x - 28 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{5}; \quad y_1 = \frac{8}{5} \Rightarrow z(M_1) = \frac{7}{5}.$$

Обчислимо значення функції на кінцях відрізка AB

$$z(A) = z(-1; -4) = 59; \quad z(B) = z(4; -1) = 69.$$

На межі AC : $x = -1 \Rightarrow z = y^2 + 10y + 3$.

$$\frac{dz}{dy} = 2y + 10 = 0 \Rightarrow M_2(-1; -5) \notin D.$$

Тепер обчислимо значення функції на кінцях відрізка AC

$$z(C) = z(-1; -1) = -6.$$

На межі BC : $y = -1 \Rightarrow z = 3x^2 + 6x - 3$.

$$\frac{dz}{dx} = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1,$$

тобто отримали точку B .

Із отриманих значень обираємо найбільше та найменше:

$$\max_D z = z(B) = 69; \quad \min_D z = z(C) = -6.$$

3. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.

Означення. Умовним екстремумом функції $z = f(x, y)$ називається екстремум, якого функція досягає за умови, що змінні x, y пов'язані рівнянням $\varphi(x, y) = 0$.

Геометрично задача полягає у тому, щоб на даній лінії знайти таку точку M_0 , в якій значення функції $z = f(x, y)$ буде найбільшим (найменшим) у порівнянні з іншими значеннями на цій лінії в деякому околі точки M_0 . Такі точки називаються точками умовного (відносного) екстремуму.

Продемонструємо геометричний зміст поняття на прикладі.

Приклад 5. Графіком функції $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ є верхня півсфера. Розглянемо пряму $\varphi(x, y) = x + y - 1 = 0$ (рис. 5.1).

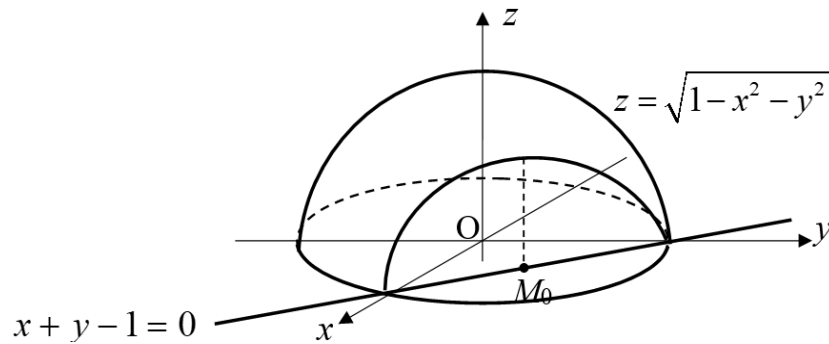


Рис. 5.1

Для точок даної прямої, в силу симетрії, функція набуває максимального значення в точці $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Це і є точка умовного максимуму на лінії.

Тепер сформулюємо задачу, яку будемо розв'язувати. Необхідно знайти точки умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ при $\varphi(x, y) = 0$, (дана умова називається рівнянням зв'язку).

За правилом знаходження повної похідної від функції $z = f(x, y)$, одержимо:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (4.1)$$

В точках екстремуму формула (4.1) має вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4.2)$$

Аналогічно перетворимо рівняння зв'язку, взявши похідну:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4.3)$$

Помножимо вираз (4.3) на невизначений множник λ , додамо до виразу (4.2) і здійснимо групування членів:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (4.4)$$

Обираємо множник λ так, щоб у виразі (4.4) виконувалось

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Тоді матимемо, що в точках екстремуму задовольняються три рівняння:

Для цього складається функція Лагранжа

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

і її частинні похідні прирівнюються нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 & i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_j} = 0 & j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (4.8)$$

Із системи (4.8) визначаються $x_1, x_2, \dots, x_n$ та допоміжні множники $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Приклад 6. Знайти умовний екстремум функції $z = xy$, $x > 0, y > 0$, якщо рівняння зв'язку $x^2 + y^2 = 8$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 8).$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок даної системи: $x = y = 2; \lambda = -\frac{1}{2}$.

Одержали точку $M_0(2; 2)$. Скористаємося достатніми умовами екстремуму. Знайдемо в цій точці визначник (4.7):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 64 > 0,$$

тобто M_0 – точка умовного максимуму, $z_{\max} = 4$.

4. Метод найменших квадратів.

Нехай в результаті експерименту встановлено, що значенням величини x , рівним $x_1, x_2, \dots, x_n$, відповідають значення величини y : $y_1, y_2, \dots, y_n$. Потрібно відшукати вид функції $y = f(x)$, яка найкращим чином описує отриману залежність.

До функціональної залежності загального виду, що визначається із змісту експерименту, включимо параметри: $a, b, c, \dots$, які доберемо так, щоб сума квадратів різниць значень, одержаних експериментально та обчислених за формулою $y = f(x, a, b, c, \dots)$, була найменшою:

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i, a, b, c, \dots))^2 \rightarrow \min.$$

Із необхідних умов

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \frac{\partial S}{\partial c} = 0; \dots$$

випливає система для знаходження параметрів $a, b, c, \dots$.

Розглянемо випадок, коли апроксимація (наближення) експериментальних даних здійснюється за лінійним законом: $y = ax + b$.

Тоді

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2,$$

і

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) x_i = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0,$$

тобто система для визначення коефіцієнтів a, b прийме вид:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - a x_i^2 - b x_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n (y_i - a x_i) - b n = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Якщо позначити

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

то система (4.9) зводиться до наступної форми:

$$\begin{cases} a\overline{x^2} + b\bar{x} = \overline{xy}; \\ a\bar{x} - b = \bar{y}. \end{cases} \quad (4.10)$$

Розв'язавши систему (4.10), одержимо:

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}; \quad b = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}.$$

Приклад 7. Експериментальним шляхом було отримано наступні результати:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0,95	1,25	1,42	1,50	1,85

Визначити залежність величини y от x, вважаючи її лінійною.

Тут $n = 5$; $\bar{x} = 0,2$; $\bar{y} = 1,394$; $\overline{xy} = 0,3198$; $\overline{x^2} = 0,06$.

За формулами (4.11) маємо:

$$a = \frac{0,3198 - 0,2788}{0,06 - 0,04} = 2,05; \quad b = \frac{0,08364 - 0,06396}{0,06 - 0,04} = 0,984 \Rightarrow y = 2,05x + 0,984.$$

II. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Тема 5. Невизначений інтеграл та його властивості.

1. Поняття первісної, означення невизначеного інтегралу функції.

Раніше для заданої функції $F(x)$ ми знаходили похідну $F'(x) = f(x)$. Тепер розглянемо обернену задачу: Відома похідна $f(x) = F'(x)$. Необхідно знайти $F(x)$, яка називається первісною.

З точки зору механіки – по швидкості необхідно встановити закон руху матеріальної точки.

Означення. Функція $F(x)$ називається первісною на деякому проміжку $[a; b]$ для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$ для всіх x з цього проміжку.

Приклад 1. Якщо $f(x) = \cos x$, то $\forall x \in R$ отримаємо $F(x) = \sin x$, так як $F'(x) = \cos x$. Крім того, відмітимо, що первісними будуть також функції $F_1(x) = \sin x + 3$; $F_2(x) = \sin x - 0,5$ і т.д.

Таким чином, первісні відрізняються на константу.

Теорема. Якщо $F_1(x)$ і $F_2(x)$ первісні на $[a; b]$, то $\forall x \in [a; b]$ виконується $F_1(x) - F_2(x) = C$, де $C = \text{const}$.

Позначимо $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ та застосуємо до цієї функції теорему Лагранжа: $\Phi(x) - \Phi(a) = \Phi'(\xi)(x - a)$; $a < \xi < x$, так як $\Phi'(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$, то $\Phi(x) = \Phi(a) = C$.

Зауваження. Якщо первісну визначити на деякій множині, а не на проміжку, то дана теорема, взагалі, невірна, що видно з прикладу:

Дві функції $F_1(x) = \frac{1}{x}$; $F_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & x < 0 \\ \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$ є первісними для функції

$f(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Однак, їх різниця $F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases} \neq \text{const}$.

Означення. Множина усіх первісних на деякому проміжку називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ та позначається

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Вираз $f(x)dx$ називається підінтегральним. Операція знаходження невизначеного інтеграла називається інтегруванням функції $f(x)$.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл представляє собою множину кривих $y = F(x) + C$, отримаємо шляхом зсуву однієї з них паралельно самій собі вздовж осі Oy .

2. Основні властивості невизначеного інтегралу.

Виходячи з означення невизначеного інтеграла, зазначимо його властивості:

1. Похідна від невизначеного інтегралу рівна підінтегральній функції (Диференціал невизначеного інтегралу рівний підінтегральному виразу):

$$\left(\int f(x)dx \right)' = f(x); \quad d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx.$$

Дійсно, $d\left(\int f(x)dx \right) = d(F(x) + C) = F'(x)dx = f(x)dx$.

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції рівний сумі цієї функції та довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Дійсно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

3. Постійний множник a ($a \neq 0$) можна виносити за знак невизначеного інтегралу:

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій рівний алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx.$$

5. Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, то:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

6. Невизначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \begin{cases} \int f(u)du = F(u) + C, \\ \int f(z)du = F(z) + C. \end{cases}$$

де u, z – диференційовані функції.

3. Таблиця невизначених інтегралів основних функцій.

Безпосереднім диференціюванням можна перевірити наступні формули:

- | | |
|--|---|
| 1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$ | 2. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$ |
| 3. $\int e^u du = e^u + C$ | 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ |
| 5. $\int \sin u du = -\cos u + C$ | 6. $\int \cos u du = \sin u + C$ |
| 7. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ | 8. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$ |
| 9. $\int sh u du = chu + C$ | 10. $\int ch u du = sh u + C$ |
| 11. $\int \frac{du}{ch^2 u} = th u + C$ | 12. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cth u + C$ |
| 13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C \quad (a \neq 0)$ | 14. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0)$ |
| 15. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2} + C$ | 16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$ |

Деякі з наведених формул не мають аналогів в таблиці похідних, перевіряються за допомогою першої властивості НІ.

Зауваження. Використовуючи властивості, таблицю невизначених інтегралів можна розширити. Наприклад, $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$.

За допомогою цієї таблиці можна знаходити деякі інтеграли.

Приклад 2. Знайдіть інтеграл.

$$\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx = \int \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx = x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C.$$

Приклад 3. Знайдіть інтеграл.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Тема 6. Основні методи інтегрування.

1. Безпосереднє інтегрування (метод розкладів).

Алгоритм методу:

- тотожне перетворення підінтегральних функцій;
- використання властивостей НІ;
- використання таблиці НІ основних функцій.

Приклад 1. Знайдіть інтеграл $I = \int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2 - 1}{x} dx$.

Розв'язання: спростимо підінтегральну функцію (піднесемо до квадрату, зведемо подібні і т.д.):

$$I = \int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2 - 1}{x} dx = \int \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2 + 2^2 - 1}{x} dx$$

$$= \int \frac{(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} \cdot 2 + 2^2 - 1}{x} dx = \int \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{x} dx = \int \left(\frac{x}{x} + \frac{4\sqrt{x}}{x} + \frac{3}{x} \right) dx.$$

Приклад 2. Знайдіть інтеграл $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x} - x^2 + x^3}{\sqrt{x}} - e^x \right) dx$.

Розв'язання: Представимо даний інтеграл у вигляді суми табличних

інтегралів: $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 5x^2 + 14x^3}{\sqrt{x}} - 2e^x \right) dx$

$$= \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} - 5 \frac{x^2}{\sqrt{x}} + 14 \frac{x^3}{\sqrt{x}} - 2e^x \right) dx = \int x^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} dx -$$

$$= -5 \int x^{2 - \frac{1}{2}} dx + 14 \int x^{3 - \frac{1}{2}} dx - 2 \int e^x dx =$$

$$\int x^{-\frac{1}{6}} dx - 5 \int x^{\frac{3}{2}} dx + 14 \int x^{\frac{5}{2}} dx - 2 \int e^x dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{1}{6} + 1}}{\frac{1}{6} + 1} - 5 \frac{x^{\frac{3}{2} + 1}}{\frac{3}{2} + 1} + 14 \frac{x^{\frac{5}{2} + 1}}{\frac{5}{2} + 1} - 2e^x + C = \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{5}{2}} + 4x^{\frac{7}{2}} - 2e^x + C.$$

2. Інтегрування заміною (метод підстановок).

Нехай функція $x = \varphi(t)$ диференційована і має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Тоді має місце формула, яка перевіряється диференціюванням:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Дійсно, продиференціювавши ліву частину $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, потім праву частину $\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_x =$ (використавши правило диференціювання складної функції) $= \left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} =$ (за правилом диференціювання оберненої функції) $= f(\varphi(t))\varphi'(t) \frac{1}{\varphi'(t)} = f(x)$.

Відмітимо також, що дану формулу можна використовувати і у зворотньому порядку:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \left| \begin{matrix} \varphi(x) = z \\ \varphi'(x)dx = dz \end{matrix} \right| = \int f(z)dz. \quad (6.1)$$

В першому випадку суть полягає в заміні змінної x в заданому інтегралі функцією $\varphi(t)$ нової змінної t .

В другому випадку, за умови наявності в підінтегральному виразі деякої функції та лінійно залежного з нею диференціала, замінюють наявну функцію $\varphi(x)$ новою змінною z .

Зауваження. Функцію $x = \varphi(t)$ слід обирати так, щоб інтеграл в правій частині формули (6.1) можна було б знайти.

Зауваження. На практиці, при знаходженні інтегралів, константу C не пишуть для кожного інтегралу, так як вони в підсумку будуть входити в кінцевий результат, що містить довільну сталу.

Зауваження. Більш доцільно застосовувати заміну змінної у вигляді $t = \varphi(x)$. Це в тому випадку, коли інтеграл можна представити у вигляді $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$. Наприклад,

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \left(\begin{matrix} t = f(x) \\ dt = f'(x)dx \end{matrix} \right) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Приклад 3. Знайдіть невизначений інтеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx = \left(\begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \end{matrix} \right) =$

$$\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C = \\
&= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

Приклад 4. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\int \frac{x dx}{1-x^4} = \left(\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x^2}{1-x^2} \right| + C.$$

Приклад 5. Знайдіть невизначений інтеграл

$$\int x \sqrt{1-x^2} dx = \left(\begin{array}{l} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \\ x dx = -\frac{1}{2} du \end{array} \right) = -\frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Приклад 6. Знайдіть помилку:

Зважаючи на властивість 4, маємо: $\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$

З іншого боку,

$$\int \sin 2x dx = 2 \int \sin x \cos x dx = \left(\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right) = 2 \int t dt = t^2 + C = \sin^2 x + C.$$

Звідси слідує $-\frac{\cos 2x}{2} = \sin^2 x$?

Приклад 7. Знайдіть інтеграл $I = \int \frac{\ln^2 x + \sqrt{\ln x}}{x} dx.$

Розв'язання: бачимо, що підінтегральний вираз містить функцію $\ln x$ та її диференціал $d(\ln x) = \frac{1}{x} dx$, зробимо заміну.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\ln^2 x + \sqrt{\ln x}}{x} dx = \int (\ln^2 x + \sqrt{\ln x}) \frac{1}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = z \Rightarrow \\ d(\ln x) = d(z) \Rightarrow \\ \frac{1}{x} dx = dz \end{array} \right| = \int (z^2 + \sqrt{z}) dz = \\
&= \int z^2 dz + \int \sqrt{z} dz = \frac{z^3}{3} + \frac{z^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + C.
\end{aligned}$$

Приклад 8. Знайдіть інтеграл $I = \int x e^{-3x^2+1} dx$.

Розв'язання: очевидно, що функція $-3x^2+1$ має диференціал $d(-3x^2+1) = -6x dx$, зробимо заміну.

$$I = \int x e^{-3x^2+1} dx = \left. \begin{array}{l} -3x^2+1 = z \\ d(-3x^2+1) = dz \\ -6x dx = dz \\ x dx = -\frac{1}{6} dz \end{array} \right| = \int e^z \left(-\frac{1}{6}\right) dz = -\frac{1}{6} \int e^z dz = -\frac{1}{6} e^z + C =$$

$$= -\frac{1}{6} e^{-3x^2+1} + C.$$

3. Інтегрування частинами.

Інтегруванням частинами називають метод, який використовує формулу

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (6.2)$$

де $u = u(x)$, $v = v(x)$ – неперервно диференційовані функції від x . При використанні формули (6.2) знаходження інтеграла від функції $u = u(x)$ зводиться до відшукування іншого інтеграла від $v = v(x)$. Використання (6.2) доцільно в тих випадках, коли останній інтеграл табличний або до нього подібний, чи простіше вихідного.

Справедливість формули (6.2) встановлюється, виходячи з відомої рівності: якщо u та v – диференційовані функції, то $d(uv) = u dv + v du$.

Проінтегрувавши останній вираз, отримаємо формулу інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$.

Виділимо три основні випадки підінтегральних виразів, коли застосовується формула інтегрування частинами:

$$I) x^k \cdot \begin{cases} \sin \alpha x; \\ \cos \alpha x; \\ e^{\alpha x}. \end{cases}; \quad II) x^k \cdot \begin{cases} \ln x; \\ \arccos \alpha x; \\ \arcsin \alpha x; \\ \operatorname{arctg} \alpha x; \\ \operatorname{arcctg} \alpha x. \end{cases}; \quad III) e^{\alpha x} \cdot \begin{cases} \sin \beta x; \\ \cos \beta x. \end{cases}.$$

Причому за частину $u = u(x)$ береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої може бути знайдений.

Приклад 9. Знайдіть. $\int x \cos 2x dx = \left(\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x dx & v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right) =$

$$= \frac{x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx + C = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Приклад 10. Зайти інтеграл $I = \int e^x \sin x dx$.

Скористаємося формулою (6.2) двічі.

$$I = \left(\begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{array} \right) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \left(\begin{array}{ll} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right) = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Приклад 11. $\int \sqrt{x} \ln x dx = \left(\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \sqrt{x} dx & v = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \end{array} \right) =$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{3}{2} \int x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{3}{2} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{9}{4} x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Тема 7. Інтегрування раціональних дробів.

1. Многочлени та раціональні дроби.

Спочатку нагадаємо деякі факти з алгебри.

Розглянемо многочлен n -ої степеня $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ з дійсними коефіцієнтами. Якщо $P_n(\alpha) = 0$, то α називається коренем многочлена. Згідно основної теореми алгебри, будь-який такий многочлен можна представити у вигляді:

$$P_n(x) = a_n (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_i)^{k_i} (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}, \quad (7.1)$$

де α_m – дійсні корені кратності k_m , квадратичні множники в формулі (7.1) дійсних коренів не мають, і $k_1 + \dots + k_i + 2(s_1 + \dots + s_j) = n$.

Приклад 1. Представити у вигляді (7.1) многочлен $P_5(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$.

$$\begin{aligned} P_5(x) &= x^3(x^2 - 1) + (x^2 - 1) = (x^3 + 1)(x^2 - 1) = \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x + 1) = \\ &= (x - 1)(x + 1)^2(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Тут $k_1 = 1$; $k_2 = 2$; $s_1 = 1$ та $k_1 + k_2 + 2s_1 = 5$.

Означення 1. Раціональною функцією або дробом називається функція виду

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}. \quad (7.2)$$

При цьому будемо вважати, що $a_n = 1$ (це завжди можна зробити шляхом ділення чисельника та знаменника на a_n) і $m < n$. Такий раціональний дріб називається правильним раціональним дробом.

В іншому випадку необхідно виділити цілу частину, розділивши чисельник на знаменник, тобто представити дріб в вигляді

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = R_{m-n}(x) + \frac{F_k(x)}{P_n(x)},$$

де $R_{m-n}(x)$ – многочлен степеня $m-n$, а $F_k(x)$ – многочлен степеня менше $k < n$.

Приклад 2. Виділити цілу частину неправильного раціонального дробу

$$\frac{x^5 + 2x^2 + 3}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

Виконаємо ділення многочленів, розділимо чисельник $x^5 + 2x^2 + 3$ на знаменник $x^4 - x^3 - x + 1$:

$$\begin{array}{r} x^5 \quad + 2x^3 \quad \quad + 3 \quad | x^4 - x^3 - x + 1 \\ x^5 - x^4 \quad \quad - x^2 + x \quad | x + 1 \\ \hline x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 3 \\ x^4 - x^3 \quad \quad - x + 1 \\ \hline 3x^3 + x^2 \quad + 2 \end{array}$$

Таким чином, дріб можна представити у вигляді

$$\frac{x^5 + 2x^2 + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = x + 1 + \frac{3x^3 + x^2 + 2}{x^4 - x^3 - x + 1}.$$

Означення 2. Раціональні дробу виду

$$1. \frac{A}{x-a}; \quad 2. \frac{A}{(x-a)^k}, \quad k > 1; \quad 3. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad 4. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

називаються найпростішими дробами.

Інтеграли від дробів 1-2 табличні. Інтеграл від дробу 3 буде розглянуто пізніше. Інтеграл від останнього дробу шляхом заміни $t = x + \frac{p}{2}$ приводиться до

відомого інтегралу і інтегралу виду $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$, для обчислення якого за допомогою формули інтегрування частинами можна отримати рекурентну формулу

$$I_k = \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1} + \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Наприклад, якщо $k = 2$, то маємо:

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \int \frac{dt}{t^2+a^2} + \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + C.$$

Таким чином, знаходження інтегралів від найпростіших дробів не представляє принципових складнощів.

В алгебрі доводиться наступна теорема.

Теорема. Якщо в правильному раціональному дробу знаменник можна представити розкладом (7.1), то його можна розкласти в суму найпростіших дробів, тобто

$$\begin{aligned} \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = & \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1}{x-a_1} + \dots + \frac{B_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}} + \dots + \frac{B_1}{x-a_i} + \dots + \\ & + \frac{M_{s_1}x+N_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{C_{s_j}x+D_{s_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}} + \dots + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_jx+q_j}. \end{aligned}$$

З використанням цієї теореми перетворюється підінтегральна раціональна функція, і знаходження інтегралу приводиться до інтегрування найпростіших дробів. Коефіцієнти в чисельниках цих дробів обчислюються методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 3. Для виразу, отриманого в прикладі 2, маємо:

$$\frac{x^5+2x^2+3}{x^4-x^3-x+1} = x+1 + \frac{x^3+3x^2+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = x+1 + \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Коефіцієнти A, B, C, D визначимо методом невизначених коефіцієнтів. Виконаємо додавання дробів і прирівняємо чисельники правильного дробу в лівій частині з результатом додавання дробів (чисельника) в правій частині:

$$x^3+3x^2+2 = A(x^2+x+1) + B(x^3-1) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо систему лінійних рівнянь:

$$x^0 : A - B + D = 2;$$

$$x^1 : A - 2D + C = 0;$$

$$x^2 : A + D - 2C = 3;$$

$$x^3 : B + C = 1 ,$$

з якої слідує $A = 2$; $B = 1$; $D = 1$; $C = 0$. Остаточно отримаємо

$$\frac{x^5 + 2x^2 + 3}{x^4 - x^3 - x + 1} = x + 1 + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

2. Інтегрування раціональних дробів.

На основі розглянутої в попередньому пункті теореми перетворюється підінтегральна раціональна функція, і знаходження інтеграла зводиться до інтегрування найпростіших дробів. Коефіцієнти в чисельниках цих дробів обчислюються методом невизначених коефіцієнтів.

Приклад 4. $\int \frac{-2x^2 + 8x + 16}{x^4 - 2x^3 - 8x + 16} dx.$

Перетворимо підінтегральну функцію, представивши її як суму найпростіших дробів:

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 + 8x + 16}{x^4 - 2x^3 - 8x + 16} &= \frac{-2x^2 + 8x + 16}{x^3(x-2) - 8(x-2)} = \frac{-2x^2 + 8x + 16}{(x-2)^2(x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 4}. \end{aligned}$$

Визначимо коефіцієнти A ; B ; C ; D . Для цього приведемо дробу в правій частині рівності до спільного знаменника і прирівняємо чисельник дробу в правій і лівій частинах отриманої рівності:

$$-2x^2 + 8x + 16 = A(x^2 + 2x + 4) + B(x^3 - 8) + (Cx + D)(x^2 - 4x + 4).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , прийдемо до системи:

$$x^0 : 16 = 4A - 8B + 4D;$$

$$x^1 : 8 = 2A + 4C - 4D;$$

$$x^2 : -2 = A - 4C + D;$$

$$x^3 : 0 = B + C.$$

Спростимо систему, враховуючи, що $C = -B \Rightarrow \begin{cases} A - 2B + D = 4; \\ A - 2B - 2D = 4; \\ A + 4B + D = -2. \end{cases}$

З перших двох рівнянь отримуємо $D = 0$, з першого і третього – $B = -1$ і $A = 2$, $C = 1$.

Тоді наш інтеграл приводиться до знаходження інтегралів:

$$\begin{aligned} \int \frac{-2x^2 + 8x + 16}{x^4 - 2x^3 - 8x + 16} dx &= 2 \int \frac{dx}{(x-2)^2} - \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{xdx}{x^2 + 2x + 4} \\ &= \left(\begin{matrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{matrix} \right) = -\frac{2}{x-2} - \ln|x-1| + \int \frac{tdt}{t^2 + 3} - \int \frac{dt}{t^2 + 3} + C = \\ &= -\frac{2}{x-2} - \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-7}{x^2-4x+3} dx$.

Перетворимо підінтегральну функцію:

$$\frac{3x-7}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Визначимо коефіцієнти A та B , виконавши додавання дробів, і прирівняємо чисельник дробу правої і лівої частин рівності:

$$3x-7 = Ax-3A+Bx-B.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x і вільні члени, отримаємо $\begin{cases} 3 = A+B; \\ -7 = -3A-B, \end{cases}$

звідки $A = 2$; $B = 1$.

Тоді маємо: $\int \frac{3x-7}{x^2-4x+3} dx = 2 \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-3} = 2 \ln|x-1| + \ln|x-3| + C.$

Тема 8. Інтегрування тригонометричних виразів.

1. Універсальна тригонометрична підстановка.

Інтеграли виду $\int R(\cos x, \sin x) dx$, де R – раціональна функція, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою заміни $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, яка називається універсальною тригонометричною підстановкою. Це досягається завдяки тому, що $\sin x$, $\cos x$ і dx виражаються через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ раціонально:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \quad (8.1)$$

Приклад 1. $\int \frac{dx}{\sin x - 2 \cos x + 2} =$ (скористаємося формулами (8.1)) =

$$= \left(t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = \int \frac{2dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2-2t^2}{1+t^2} + 2 \right) (1+t^2)} = \int \frac{dt}{t(2t+1)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} - 2 \int \frac{dt}{2t+1} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \ln \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + \ln |C| = \ln \left| \frac{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right|.$$

Зауваження. Використання такої підстановки часто призводить до громіздких виразів. Ця підстановка, як правило, ефективна, якщо $\sin x$ і $\cos x$ входять в дробовий вираз у першому степені.

1) $\int R(\cos x) \sin x dx$; 2) $\int R(\sin x) \cos x dx$;
2. Інтеграли виду 3) $\int R(\operatorname{tg} x) dx, \int R(\cos^{2m} x; \sin^{2n} x) dx$.

Інтеграли такого виду можуть бути знайдені за допомогою підстановки $t = \cos x$; $t = \sin x$; $t = \operatorname{tg} x$ і відповідно приводяться до інтегралів від раціональної функції.

Приклад 2. $\int \operatorname{tg}^3 x dx = \left(\begin{matrix} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right) = \int \frac{t^3 dt}{1+t^2} = \int t dt - \int \frac{t dt}{1+t^2} =$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.$$

Для інтегралів виду $\int R(\cos^{2m} x; \sin^{2n} x) dx$ також використовується заміна $t = \operatorname{tg} x$, так як $\sin^2 x$ і $\cos^2 x$ виражаються через $\operatorname{tg} x$ раціонально: $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, або використовуються тригонометричні формули пониження степеня.

Приклад 3.
$$\int \frac{dx}{(2 - \sin^2 x) \cos^2 x} = \left(\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right) = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(2 - \frac{t^2}{1+t^2} \right) \cdot \frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)dt}{2+t^2} = \int dt - \int \frac{dt}{2+t^2} = \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

3. Знаходження інтегралів виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Розглянемо інтеграли виду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де серед показників m і n хоча одне непарне. В цьому випадку за нову змінну t приймається та функція, яка містить парний степінь, або довільна, якщо всі функції в непарних степенях.

Приклад 4. Використовуючи заміну, знайдіть $\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x}$.

$$\int \frac{\cos^5 x dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x}{\sin^3 x} dx = \left(\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right) =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt - 2 \int \frac{dt}{t} + \int t dt = -\frac{1}{2 \sin^2 x} - 2 \ln |\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

4. Знаходження інтегралів $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$; $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$; $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$.

Ці інтеграли знаходяться з використанням формул:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x);$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x);$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)x).$$

Приклад 5. Знайти інтеграл:

$$\int \cos 3x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int \cos 10x dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx = \frac{1}{20} \sin 10x + \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

Тема 9. Інтегрування ірраціональностей.

1. Знаходження інтегралів виду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \int R(x; \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}) dx,$
тригонометричні підстановки.

1.1. Інтеграли виду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. За допомогою заміни $t = \frac{1}{2}(ax^2+bx+c)' = ax + \frac{b}{2}$ зводяться до відомого табличного інтегралу.

Приклад 1.
$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2-4x+5}} dx = \left(\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(4x-4) = 2x-2 \\ x = \frac{1}{2}t+1 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{t+2+1}{\sqrt{\frac{1}{2}t^2+2t+2-2t-4+5}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t+3}{\sqrt{t^2+6}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{t}{\sqrt{t^2+6}} dt + \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+6}} =$$

$$= \left(\begin{array}{l} u = t^2+6 \\ du = 2tdt \end{array} \right) = \frac{2}{2\sqrt{2}} \sqrt{u} + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|t + \sqrt{t^2+6}| + C =$$

$$= \sqrt{2x^2-4x+5} + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln|2x-2 + \sqrt{4x^2-8x+10}| + C.$$

1.2. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$.

Заміною $x = a \sin t$ такі інтеграли приводяться до інтегралів від раціональних функцій.

Приклад 2.
$$\int \frac{\sqrt{-4x^2+8x+12}}{(1-x)^2} dx = 2 \int \frac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{(1-x)^2} dx = \left(\begin{array}{l} u = -x+1 \\ du = -dx \end{array} \right) =$$

$$= -2 \int \frac{\sqrt{4-u^2}}{u^2} du = \left(\begin{array}{l} u = 2 \sin t \\ du = 2 \cos t dt \end{array} \right) = -2 \int \frac{\sqrt{4-u^2}}{u^2} du = \left(\begin{array}{l} z = \operatorname{ctg} t \\ dt = -\frac{dz}{1+z^2} \end{array} \right) = 2 \int \frac{z^2+1-1}{1+z^2} dz =$$

$$= 2z + 2 \operatorname{arccotg} z + C = 2t + 2 \operatorname{ctg} t + C = 2 \arcsin \frac{u}{2} + 4 \frac{\sqrt{1-\left(\frac{u}{2}\right)^2}}{u} + C =$$

$$= 2 \arcsin \frac{1-x}{2} + 2 \frac{\sqrt{-x^2+2x+3}}{1-x} + C.$$

1.3. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$.

В цьому випадку доцільно використати заміну $x = \frac{a}{\sin t}$.

Приклад 3.
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^3} dx = \left(\begin{array}{l} x = \frac{1}{\sin t}; \quad t = \arcsin \frac{1}{x} \\ dx = -\frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \end{array} \right) = \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t} - 1} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t}}{\frac{1}{\sin^3 t}} dt =$$

$$= -\int \frac{\sin^3 t \cos^2 t}{\sin^3 t} dt = -\int \cos^2 t dt = -\frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = -\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \sin \left(2 \arcsin \frac{1}{x} \right) + C = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} + C.$$

1.4. Інтеграли виду $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$.

Раціоналізація підінтегрального виразу досягається заміною $x = a \cdot \operatorname{tg} t$.

Приклад 4.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \left(\begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \end{array} \right) = \frac{2}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3} \cos^2 t} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\frac{\cos^2 t}{\cos^3 t}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{\operatorname{tg} t}{4\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C.$$

2. Знаходження інтегралів виду $\int R \left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{\alpha_n}{\beta_n}} \right) dx$.

Дробово-лінійна підстановка.

Розглянемо тільки деякі частинні випадки, коли інтеграли від ірраціональної функції виражаються через елементарні функції. Інтеграли

такого виду раціоналізуються підстановкою $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$, де

$$k = \text{НОК}(\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Очевидно, що $(cx + d)t^k = ax + b \Rightarrow cxt^k + dt^k = ax + b \Rightarrow x = \frac{ct^k - a}{b - dt^k}$

Приклад 5.
$$\int \frac{(1 + 2\sqrt[6]{x})}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx = \left(\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right) = 6 \int \frac{(1 + 2t)t^5}{t^3 + t^2} dt = 6 \int \frac{2t^4 + t^3}{1 + t} dt =$$

$$= 12 \int t^3 dt - 6 \int t^2 dt + 6 \int t dt - 6 \int dt + 6 \int \frac{dt}{1+t} = 3x^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{x} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln \left(1 + x^{\frac{1}{6}} \right) + C.$$

Приклад 6.
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \left(\begin{array}{l} 2x-1 = t^2 \\ x = \frac{1}{2}(t^2+1) \\ 2dx = 2t dt \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{t^2+1}{t} t dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int (t^2+1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) + C = \frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6} + \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$$

Приклад 7.
$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left(\begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3 \quad x = 1 + \frac{2}{t^3-1} \\ dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right) =$$

$$= - \int \frac{t}{\frac{(t^3-1)^2}{4}} \cdot \frac{6t^2 dt}{(t^3-1)^2} = - \frac{3}{2} \int t^3 dt = - \frac{3}{8} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

3. Інтеграли, що не виражаються через елементарні функції.

Зрозуміло, що операція інтегрування функцій є значно складнішою за операцію диференціювання. Не завжди обраний метод (спосіб, шлях) інтегрування є найкращим, простішим, швидше приведе до кінцевого результату. Як відомо, будь-яка неперервна функція має первісну. Але з цього не випливає, що інтеграл від будь-якої елементарної функції виражається через елементарні функції. Розглянуті методи інтегрування дозволяють у багатьох випадках, але не в усіх, знайти первісну для підінтегральної функції. У випадку, коли первісна елементарної функції $f(x)$ є елементарною функцією, кажуть, що $\int f(x) dx$ «береться», знаходиться – виражається через елементарні функції;

якщо $\int f(x)dx$ не виражається через елементарні функції, то кажуть, що інтеграл «не береться», не знаходиться.

Так, наприклад, неможливо знайти $\int \sqrt{x} \sin x dx$, оскільки не існує елементарної функції, похідна якої буде рівна $\sqrt{x} \sin x$, але дуже просто знаходиться $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx$, який дорівнює $-\frac{2\sqrt{\cos^3 x}}{3} + C$.

Приклади інтегралів, що не виражаються через елементарні функції, та області їх застосування:

$\int e^{-x^2} dx$ – інтеграл Пуассона (застосування – теорія ймовірностей);

$\int \frac{dx}{\ln x}$ – інтегральний логарифм (застосування – теорія чисел);

$\int \frac{e^x}{x} dx$ – інтегральна показникова функція (застосування – теорія чисел);

$\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$ – інтеграли Френеля (застосування – фізика);

$\int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx$ – інтегральний косинус та синус (застосування – теорія інтерполяції та наближення функцій).

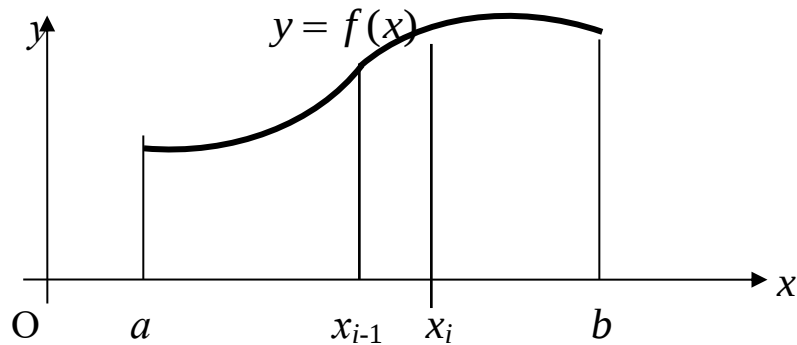
III. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Тема 10. Визначений інтеграл та його властивості.

1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу.

1. Задача про площу криволінійної трапеції.

Нехай на $[a; b]$ задана функція $f(x) \geq 0$. Потрібно знайти площу S фігури, що утворена віссю Ox , прямими $x=a$; $x=b$ і графіком функції $y=f(x)$ (криволінійна трапеція).



Розіб'ємо $[a; b]$ на n частин: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. На кожній частині розбиття $[x_{i-1}; x_i]$ ($i=1, \dots, n$) виберемо точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ і складемо суму

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \quad (10.1)$$

Тоді $S \approx S_n$, так як S_n геометрично представляє собою площу східчастої фігури. Якщо тепер перейти до границі в формулі (10.1), коли $\forall \Delta x_i \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$, то одержимо значення площі криволінійної трапеції, тобто

$$S = \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

2. Задача про масу тіла.

Нехай дано лінійний неоднорідний стержень з густиною $\gamma(x)$, що лежить в межах $[a; b]$. Необхідно визначити його масу M . Аналогічно розіб'ємо його на частини. Так як в межах Δx_i густина $\gamma(x)$ змінюється мало, то $\Delta m_i \approx \gamma(\xi_i) \Delta x_i$, а маса стержня

$$M \approx M_n = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i) \Delta x_i.$$

Точне значення маси отримаємо, якщо перейти до границі, коли $\forall \Delta x_i \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow \infty$.

$$M = \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i) \Delta x_i.$$

2. Означення та основні поняття визначеного інтегралу функції.

Нехай на відрізку $[a; b]$ задана функція $f(x)$. Розділимо $[a; b]$ на частини довільним чином точками: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. На кожному з отриманих відрізків розбиття $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) довільно виберемо точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ і складемо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad (10.2)$$

що називається інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

Означення 1. Якщо границя інтегральної суми (10.2) при $n \rightarrow \infty$ не залежить від способу розбиття $[a; b]$ і вибору точок ξ_i , то вона називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначається

$$\lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} I_n = \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx, \quad (10.3)$$

де a – нижня, b – верхня межа інтегрування.

Означення 2. Якщо для $f(x)$ на $[a; b]$ існує границя (10.3), то функція $f(x)$ називається інтегрованою на $[a; b]$.

При яких умовах існує границя (10.3)?

Теорема 1 (теорема існування визначеного інтеграла). Якщо $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то вона інтегрована на $[a; b]$.

Зауваження. Серед розривних функцій на $[a; b]$ є як інтегровані (монотонні), так і неінтегровані. Наприклад, неінтегрованою являється функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{раціональне;} \\ 0, & \text{если } x - \text{ірраціональне.} \end{cases}$$

Дійсно, якщо в якості точок ξ_i обрати раціональні точки і розглянути функцію Діріхле на відрізку $[0; 1]$, то з формули (10.3) випливає

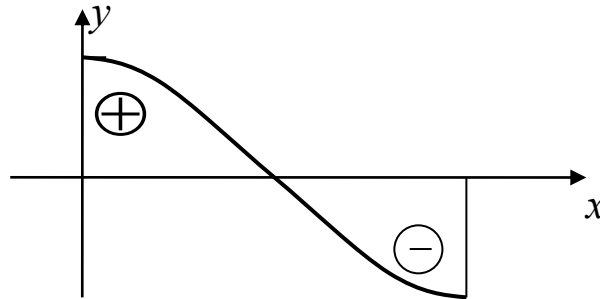
$$\int_0^1 D(x) dx = 1,$$

а якщо обрати ірраціональні точки, то

$$\int_0^1 D(x) dx = 0.$$

Таким чином, границя (10.3) не існує.

Тепер з'ясуємо геометричний сенс визначеного інтегралу. З раніше розглянутої задачі при $f(x) \geq 0$ – це площа криволінійної трапеції. При $f(x) < 0$ – це також площа, але зі знаком мінус. Тому визначений інтеграл – це алгебраїчна площа криволінійної трапеції.



Фізичний сенс визначеного інтеграла з раніше розглянутої задачі про масу стержня з лінійною густиною $\gamma(x)$ визначається як $M = \int_a^b \gamma(x) dx$.

Аналогічно розмірковуючи, отримаємо: якщо $F(x)$ – сила, що діє вздовж прямолінійного відрізка $[a; b]$, то робота цієї сили $A = \int_a^b F(x) dx$.

3. Обчислення визначеного інтегралу, формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x) dx$ зафіксувати нижню межу інтегрування, а верхню вважити змінною, то інтеграл буде функцією верхньої межі: $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$, де $x \in [a; b]$. Знайдемо похідну цієї функції.

Теорема 2 (Барроу). Якщо $f(x)$ – неперервна функція, то $\Phi'(x) = f(x)$.

Дамо змінній x приріст Δx , тоді

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

За теоремою про середнє, отримаємо

$$\Delta \Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x, \quad (10.4)$$

де $x < \xi < x + \Delta x$. З формули (10.4) випливає, що функція $\Phi(x)$ неперервна, оскільки

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \Phi = 0.$$

З урахуванням цієї формули знаходимо похідну:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x),$$

що впливає в силу неперервності функції $f(x)$.

Теорема 3. Якщо функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (10.5)$$

З урахуванням теореми Барроу, функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ буде первісною, і тоді з теореми про первісні випливає, що

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C.$$

Визначимо в цій рівності $x = a \Rightarrow C = -F(a)$. Тоді маємо

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Визначивши $x = b$, отримаємо формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Приклад 1. Оцініть $\int_0^3 (x^2 - 2x + 3) dx$.

Для підінтегральної функції неважко встановити, що $m = 2$; $M = 6$ і $b - a = 3$. Тоді

$$6 \leq \int_0^3 (x^2 - 2x + 3) dx \leq 18.$$

Тепер обчислимо інтеграл безпосередньо за формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_0^3 (x^2 - 2x + 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \Big|_0^3 = 9 - 9 + 9 = 9,$$

тобто $6 < 9 < 18$.

Приклад 2. Знайдіть середнє значення функції $f(x) = 8x + \cos x$ на відріжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

За теоремою про середнє маємо:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8x + \cos x) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} (4x^2 + \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} (\pi^2 + 1) = 2\pi + \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

4. Основні властивості визначеного інтегралу.

1. Якщо $M = \text{const} \Rightarrow \int_a^b M dx = M(b-a)$.

Дійсно, $I_n = M \sum_{i=1}^n \Delta x_i = M(b-a)$.

2. Властивість лінійності. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ інтегровані на відріжку $[a; b]$ і $A, B - \text{const}$, то

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx = A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx.$$

Ця властивість є наслідком означення визначеного інтеграла.

3. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Ця властивість випливає з того, що в інтегральній сумі всі різниці $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ змінюють знак.

4. $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Дійсно, так як $\forall \Delta x_i = 0$.

5. Властивість адитивності. Якщо $a < c < b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Це випливає з означення визначеного інтегралу, якщо в якості точки розбиття обрати точку c .

6. Якщо $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Дійсно, так як в інтегральній сумі всі доданки більше або дорівнюють нулю.

7. Якщо на $[a; b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ задовольняють нерівність $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

Дійсно, якщо розглянути різницю, то, з урахуванням попередньої властивості, одержимо:

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \geq 0.$$

$$8. \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Проінтегрувавши очевидну нерівність $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, приходимо до даної властивості.

9. Оцінка визначеного інтеграла. Якщо m і M - найменше і найбільше значення неперервної функції $f(x)$ на $[a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Інтегруючи нерівність $m \leq f(x) \leq M$ з урахуванням властивостей 1 і 7, отримаємо дану властивість.

10. Теорема про середнє. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то існує така точка $\xi \in (a; b)$, для якої виконується рівність

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

З властивості 8 отримаємо нерівність $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$.

Так як $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, то вона приймає всі значення, що знаходяться між m та M . Із цього випливає дана властивість.

Тема 11. Основні методи обчислення визначеного інтегралу.

1. Метод підстановки.

Нехай задано інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де підінтегральна функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$. Розглянемо функцію $x = \varphi(t)$, яка має неперервну похідну на $[t_1; t_2]$, і $\varphi(t_1) = a$; $\varphi(t_2) = b$.

Тоді має місце формула заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (11.1)$$

Доведемо цю формулу.

З одного боку, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$,

а з іншого —

$$\int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) \Big|_{t_1}^{t_2} = F(\varphi(t_1)) - F(\varphi(t_2)) = F(b) - F(a).$$

Зауваження. Аналогічно, як і для невизначеного інтегралу, часто більш зручно використовувати заміну $t = \psi(x)$.

Зауваження. При обчисленні визначеного інтеграла за формулою (11.1) не потрібно повертатися до «старої» змінної.

Зауваження. Важливо відмітити властивості визначеного інтеграла від парних і непарних функцій в симетричних межах інтегрування:

1. Якщо $f(x)$ – парна функція, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$

$$\text{(Заміна у першому інтегралі } \begin{pmatrix} x = -t & x: -a; 0 \\ dx = -dt & t: a; 0 \end{pmatrix}) = - \int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx =$$

$$\text{(Далі за визначенням парної функції)} = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

2. Якщо $f(x)$ – непарна функція, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx =$$

$$\text{(Заміна у першому інтегралі } \begin{pmatrix} x = -t & x: -a; 0 \\ dx = -dt & t: a; 0 \end{pmatrix}) = - \int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx =$$

$$\text{(Далі за визначенням непарної функції)} = - \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Приклад 1. Обчислити $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

Виконаємо заміну $x = \sin t$. Тоді для нижньої межі інтегрування $a = 0$ отримаємо $t_1 = 0$, а для верхньої межі інтегрування $b = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cdot \cos t \cdot \cos t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{\sin 4t}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{32}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int_0^{\ln 2} \frac{(e^{2x} - e^x) dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} \frac{(e^{2x} - e^x) dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x(e^x - 1) dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \left(\begin{array}{ll} t = e^x & x: 0; \ln 2 \\ dt = e^x dx & t: 1; 2 \end{array} \right) = \int_1^2 \frac{(t-1) dt}{\sqrt{1+t^2}} = \\
&= \int_1^2 \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}} - \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \left(\begin{array}{ll} u = t^2 + 1 & t: 1; 2 \\ du = 2t dt & u: 2; 5 \end{array} \right) = \frac{1}{2} \int_2^5 \frac{du}{\sqrt{u}} - \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \Big|_1^2 = \\
&= \sqrt{u} \Big|_2^5 - \ln(2 + \sqrt{5}) + \ln(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{5} - \sqrt{2} - \ln \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

2. Інтегрування частинами.

Відомо, що

$$d(uv) = vdu + u dv;$$

якщо відповідні інтеграли існують, то зазначену вище формулу проінтегруємо від a до b .

Отримаємо так звану формулу інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (11.2)$$

Зауваження. Вирази для u і dv обираються з таких міркувань, щоб інтеграл в правій частині формули (11.2) був відомим.

Приклад 3.

$$\begin{aligned}
\int_1^e x^2 \ln x dx &= \left(\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right) = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \\
&= \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Аналогічно, як і для невизначеного інтеграла, формулу інтегрування частинами можна застосувати для обчислення інтегралу неодноразово.

Приклад 4.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx &= \left(\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2x dx & v = -\cos x \end{array} \right) = -x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \\
&= \left(\begin{array}{ll} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \sin x \end{array} \right) = 2x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \pi + 2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.
\end{aligned}$$

Тема 12. Невласні інтеграли.

1. Невласний інтеграл I-го роду.

Нехай задано інтеграл

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Невласні інтеграли I роду розглядаються на нескінченних проміжках, на проміжках виду: 1) $[a; +\infty)$, 2) $(-\infty; b]$, 3) $(-\infty; +\infty)$. Розглянемо його поведінку при $b \rightarrow \infty$.

Означення. Якщо для неперервної на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ існує скінченна границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$, то значення цієї границі і називають невласним інтегралом першого роду і позначають $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ та кажуть, що невластний інтеграл збігається. Тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (12.1)$$

Якщо ж границя $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ не існує (в т.ч. є нескінченною), то кажуть, що інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ розбігається.

За аналогічним принципом визначаються невластні інтеграли на проміжках 2) $(-\infty; b]$, 3) $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{та} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx,$$

де c — довільне число, а збіжність невластного інтегралу встановлюється за умови збіжності кожного інтегралу.

Якщо відома первісна функції $f(x)$, то

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a) = F(\infty) - F(a). \quad (12.2)$$

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

За формулою (12.2) отримуємо

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(b) - \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$; $a > 0$.

За означенням невластного інтеграла та з таблиці невизначених інтегралів отримуємо

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{-p+1}}{1-p} - \frac{a^{-p+1}}{1-p}, & p \neq 1; \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \ln b - \ln a, & p = 1. \end{cases} = \begin{cases} \frac{a^{-p+1}}{p-1}, & p > 1; \\ \infty, & p \leq 1. \end{cases}$$

Таким чином, інтеграл збігається, якщо степінь $p > 1$, та розбігається, якщо $p \leq 1$.

У випадку, коли первісна функції $f(x)$ невідома або коли не потрібно обчислювати інтеграли, а достатньо розуміти, збігається він чи ні (існує чи не існує), використовують ознаки збіжності. Наприклад, ознака порівняння:

Теорема. Нехай $\forall x \in [a; \infty) : 0 \leq f(x) \leq g(x)$, тоді

- якщо $\int_a^{\infty} g(x)dx$ збігається, то збігається і $\int_a^{\infty} f(x)dx$,
- якщо $\int_a^{\infty} f(x)dx$ розбігається, то розбігається і $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

Враховуючи властивість визначеного інтегралу, проінтегрувавши задану нерівність, отримуємо:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Переходячи до границі при $b \rightarrow \infty$, приходимо до нерівності:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} g(x)dx \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx < \infty.$$

Аналогічно доводиться і друга частина теореми.

Приклад 3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx < 1 + \int_1^{\infty} x e^{-x^2} dx = \\ &= \left(\begin{array}{ll} t = x^2 & x: 1; \infty \\ dt = 2x dx & t: 1; \infty \end{array} \right) = 1 + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-t} dt = 1 + \frac{e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, інтеграл збігається. Нерівність була отримана з використанням властивості інтеграла про оцінку.

Теорема. Якщо $\int_a^{\infty} |f(x)| dx < \infty \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx < \infty$.

Доведення аналогічне.

В цьому випадку інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ називається абсолютно збіжним. Якщо

$\int_a^{\infty} f(x) dx < \infty$, а $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ розбігається, то інтеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ називається умовно збіжним.

Наприклад, інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ є абсолютно збіжним, так як

$$\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^2} dx < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} < \infty.$$

Інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ – умовно збіжним.

2. Невласний інтеграл II-го роду

Якщо функція $f(x)$ на $[a, b]$ має скінченне число точок розриву першого роду, то обчислення інтегралу від такої функції труднощів не представляє. Наприклад, якщо $c \in (a, b)$ – точка розриву першого роду, тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Якщо функція $f(x)$ має нескінченний розрив, то в цьому випадку інтеграл називається невластним другого роду. Тоді, якщо $x = b$ – точка розриву другого роду, то інтеграл визначається наступним чином

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Аналогічно визначаються невластні інтеграли від функцій з розривами в точках $x = a$ і $c \in (a, b)$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx ; \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Якщо для невластного інтегралу від розривної функції в точці $x = b$ відома первісна $F(x)$, то його збіжність залежить від існування значення $F(b)$.

Приклад 4. Дослідити на збіжність $\int_0^b \frac{dx}{x^p}$; $b > 0$.

$$\int_0^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{\varepsilon}^b, & p \neq 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^b, & p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{b^{1-p}}{1-p}, & p < 1, \\ \infty, & p \geq 1. \end{cases}$$

Таким чином, інтеграл збігається, якщо степінь $p < 1$ і розбігається, якщо $p \geq 1$.

Якщо ж первісна функції $f(x)$ невідома, то для дослідження збіжності, як і для невластних інтегралів першого роду, використовуються аналогічні ознаки порівняння.

Приклад 5. Дослідити на збіжність $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Відмітимо, що в точці $x = 1$ підінтегральна функція має розрив другого роду, і тоді

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 3 \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \sqrt[3]{x-1} \Big|_0^{1-\varepsilon_1} + 3 \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \sqrt[3]{x-1} \Big|_{1+\varepsilon_2}^2 = \\ &= -3 \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \sqrt[3]{\varepsilon_1} + 3 + 3 - 3 \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \sqrt[3]{\varepsilon_2} = 6. \end{aligned}$$

Інтеграл збігається.

Тема 13. Застосування визначеного інтегралу.

1. Геометричне застосування визначеного інтегралу.

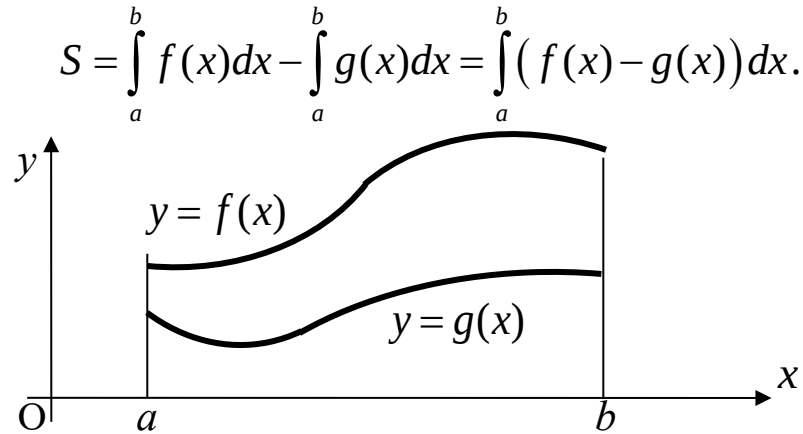
1.1. Площа фігури, ДСК.

Як відомо, площа криволінійної трапеції $S = \int_a^b f(x) dx$, якщо $f(x) \geq 0$.

Якщо ж $f(x)$ – знакозмінна функція, то за умови, що $f(c) = 0$,

$$S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b |f(x)| dx,$$

У випадку, якщо плоска фігура обмежена зверху кривою $y = f(x)$, а знизу – кривою $y = g(x)$, то



1.2. Площа фігури, якщо її границя задана параметричними рівняннями.

Нехай для криволінійної трапеції лінія задана параметричними рівняннями:
 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ при цьому $a = x(t_1)$; $b = x(t_2)$. Тоді, виконуючи заміну в інтегралі, отримаємо:

$$S = \int_a^b y(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt. \quad (13.1)$$

Приклад 1. Знайти площу еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Напишемо параметричне рівняння еліпса $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$ Тоді, за формулою (13.1), зважаючи на симетрію, отримаємо:

$$S = -4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 ab \sin t \sin t dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

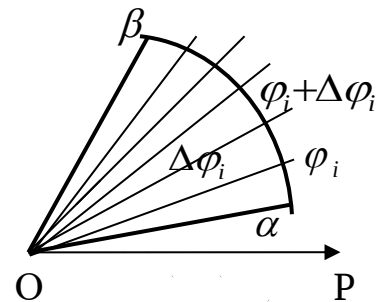
1.3. Площа в полярній системі координат (площа криволінійного сектора).

Розглянемо фігуру, що обмежена двома променями: $\varphi = \alpha$; $\varphi = \beta$, які виходять з полюса, та кривою $\rho = \rho(\varphi)$. Знайдемо її площу.

Для цього розіб'ємо її на n секторів з

площею $\Delta S_i \approx \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta \varphi_i$, де $\Delta \varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму



$$S_n = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \Delta \varphi_i, \quad (13.2)$$

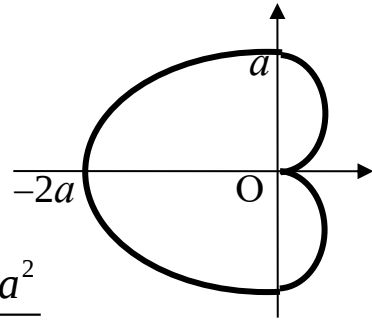
Перейдемо до границі в формулі (13.2) при $\forall \Delta \varphi_i \rightarrow 0$, і отримаємо

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (13.3)$$

Приклад 2. Знайти площу кардіоїди $\rho = a(1 - \cos \varphi)$.

Враховуючи симетрію, та з урахуванням формули (13.3), отримаємо

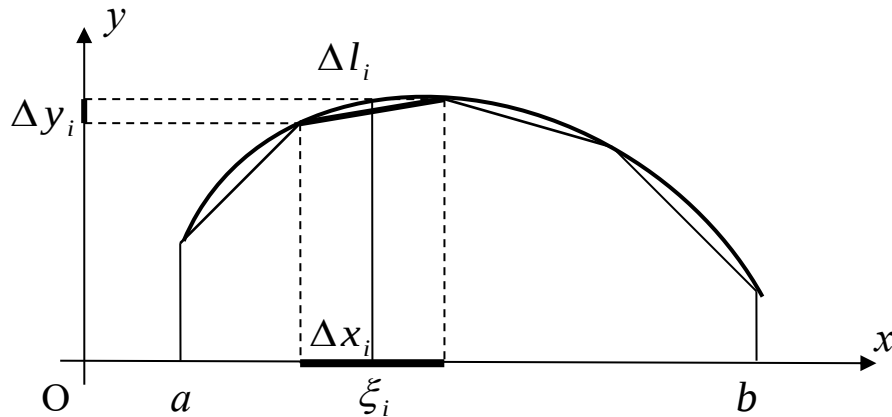
$$\begin{aligned} S &= a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} d\varphi - \\ &- 2a^2 \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\ &= a^2 \left(\varphi + \frac{1}{2} \varphi \right) \Big|_0^{\pi} - 2a^2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$



1.4. Довжина дуги плоскої кривої, заданої в ДСК.

Визначимо довжину дуги AB . Впишемо в неї ланку, довжина якої

$$l_n = \sum_{i=1}^n \Delta l_i, \text{ де } \Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \Delta x_i.$$



Скористаємося теоремою Лагранжа: $\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i$, де $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Тоді

$$l = \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (13.4)$$

Приклад 3. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln \sin x$ при $\pi/3 < x < \pi/2$.

$$l = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}} dx = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} =$$

$$= \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{1}{2} \ln 3.$$

1.5. Довжина дуги плоскої кривої, що задана параметричними рівняннями.

Лінія задана рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad \text{і нехай } a = x(t_1);$

$b = x(t_2)$. Тоді, замінюючи змінну в інтегралі (13.4), з урахуванням значення

похідної від функції, заданої параметричним рівнянням, $f'(x) = \frac{y'_t}{x'_t}$, з

формули (13.4) випливає:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2} \cdot x'_t dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (13.5)$$

Зауваження. Вирази $dl = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$; $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$ називаються диференціалами дуги.

Приклад 4. Знайти довжину розгортки кола $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t); \\ y = R(\sin t - t \cos t). \end{cases}$

Відповідно до формули (13.5) отримаємо:

$$l = R \int_0^{2\pi} \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} dt = R \int_0^{2\pi} t dt = \frac{R}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 R.$$

1.6. Довжина дуги лінії, заданої в полярній системі координат.

Розглядаючи φ як параметр з урахуванням, що $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ і $\rho = \rho(\varphi)$,

отримаємо

$$\frac{dx}{d\varphi} = \rho'_\varphi \cos \varphi - \rho \sin \varphi; \quad \frac{dy}{d\varphi} = \rho'_\varphi \sin \varphi + \rho \cos \varphi.$$

Тоді з формули витікає:

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho'_\varphi)^2 + \rho^2} d\varphi. \quad (13.6)$$

Приклад 5. Знайти довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

В силу симетрії, за формулою (13.6), одержимо

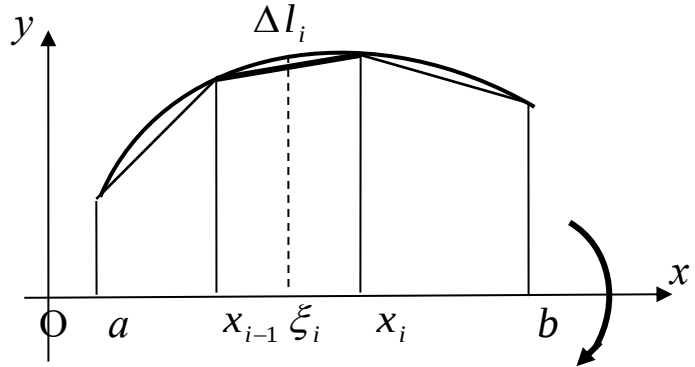
$$l = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \varphi + 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

1.7. Площа поверхні тіла обертання.

Нехай лінія $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ обертається навколо осі Ox .

Визначимо площу
поверхні обертання.

Розіб'ємо $[a; b]$ на n
частин і впишемо ломану
в графік $f(x)$. Тоді кожна
хорда Δl_i опише бокову
поверхню зрізаного
конуса з площею



$$\Delta S_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta l_i = \pi(f(x_{i-1}) + f(x_i))\sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i.$$

Враховуючи, що при $\Delta x_i \rightarrow 0 \Rightarrow x_{i-1} \rightarrow \xi_i, x_i \rightarrow \xi_i$, і переходячи до
границі в інтегральній сумі, отримаємо

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} S_n = \pi \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2} \Delta x_i = \\ &= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Приклад 6. Знайти площу поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Розглянемо сферу як поверхню, утворену обертанням півкола
 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ навколо осі Ox . Тоді $y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, і за формулою (13.7) маємо

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R \int_{-R}^R dx = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

1.8. Обчислення об'ємів тіл за площами перерізів.

Нехай нам відома площа будь-якого перерізу тіла площиною,
перпендикулярною осі Ox : $S = S(x)$.

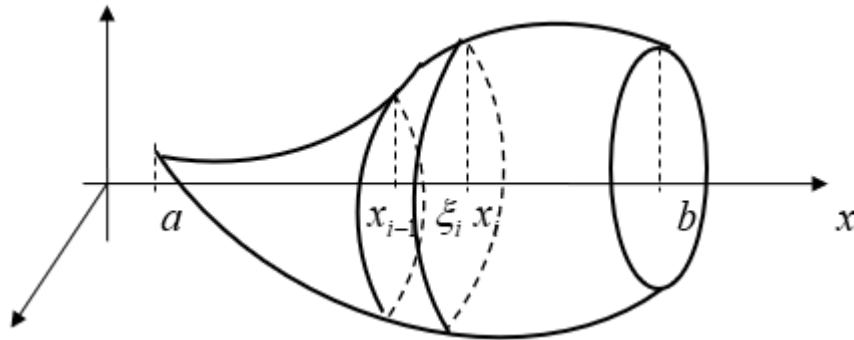


Рис.13.1

Складемо інтегральну суму $V_n = \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i$, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Тоді

$$V = \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} V_n = \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b S(x) dx. \quad (13.8)$$

Наслідок. Якщо тіло отримане шляхом обертання криволінійної трапеції навколо осі Ox , то з формули (13.8) слідує, що

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (13.9)$$

Аналогічно, якщо тіло отримано шляхом обертання навколо осі Oy , то

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Приклад 7. Знайти об'єм кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Розглянемо кулю як тіло, що утворене обертанням півкола $y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$ навколо осі Ox . Тоді за формулою (13.9) отримаємо

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

2. Застосування визначеного інтегралу до задач фізики (механіки).

Застосування визначеного інтеграла до задач фізики розглянемо на декількох прикладах, розв'язання яких представляють собою загальну ідею розв'язання подібних задач.

Задача 1. Визначити роботу, витрачену на викачку рідини з резервуара, що має форму поверхні, утвореної при обертанні лінії $y = f(x)$ навколо осі Oy .

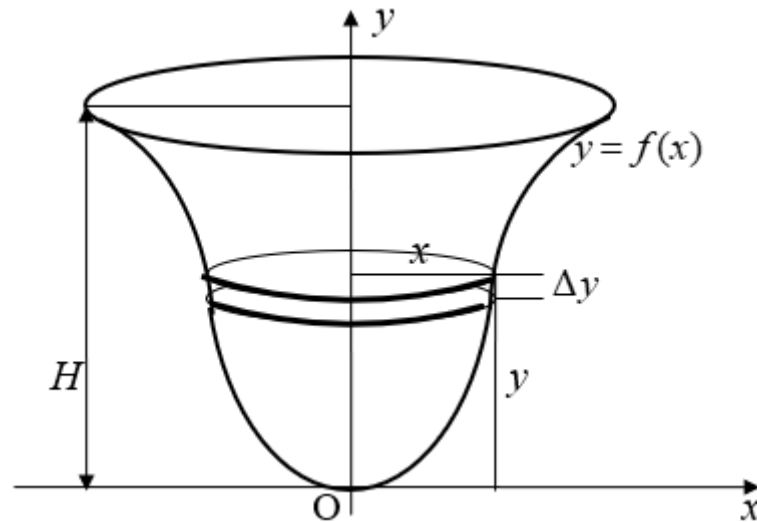


Рис. 13.2

Робота при піднятті елементарного об'єму рідини

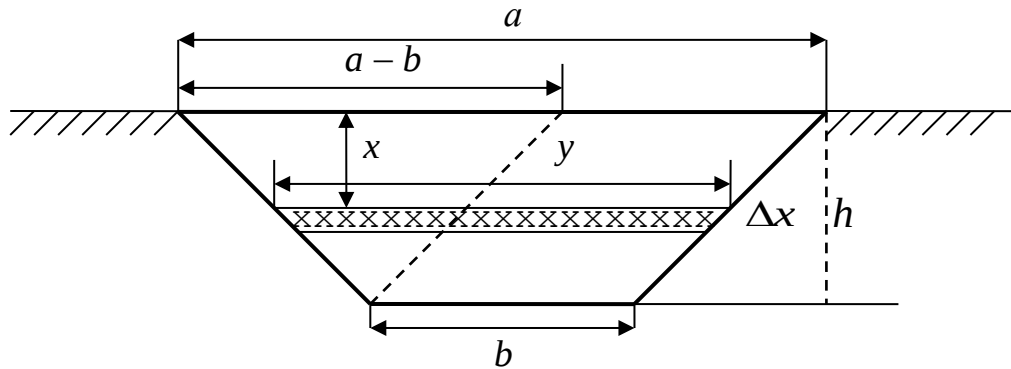
$$\Delta A = \gamma g \pi x^2 \Delta y (H - y),$$

де γ – густина рідини, H – глибина резервуара. Тоді

$$A = \pi \gamma g \int_0^H x^2 (H - y) dy = \pi \gamma g \int_0^H (f^{-1}(y))^2 (H - y) dy,$$

де $f^{-1}(y)$ – обернена функція до функції $y = f(x)$.

Задача 2. Визначити тиск рідини на вертикальну пластину, що має форму рівнобічної трапеції, у якої більша основа співпадає з рівнем рідини.



Тиск рідини на елементарну полоску $\Delta p = \gamma g x y \Delta x$. З подібності трикутників визначимо $y = y(x)$:

$$\frac{a-b}{y-b} = \frac{h}{h-x} \Rightarrow y = a - \frac{x}{h}(a-b).$$

Тоді, інтегруючи, отримаємо

$$p = \gamma g \int_0^h x \left(a - \frac{x}{h}(a-b) \right) dx = \gamma g \frac{h^2(a+2b)}{6}.$$

IV. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Тема 14. Диференціальні рівняння першого порядку.

1. Задачі, що приводять до диференціальних рівнянь. Загальні поняття, та означення.

Досліджуючи явища та процеси навколо нас, ми не в змозі безпосередньо встановити вид залежності між факторами впливу на результат. Але ми в змозі в деяких випадках встановити залежність між результатом, швидкістю та прискоренням його зміни та фактором впливу.

Розглянемо наступні приклади.

1. Задача про падіння тіла. З деякої висоти падає тіло m . Необхідно встановити закон зміни шляху S , що проходить дане тіло.

Згідно другого закону Ньютона, маємо

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = F, \text{ где } F = mg - F_{\text{сопр}}, \text{ а } F_{\text{сопр}} = kV^2 = k \left(\frac{dS}{dt} \right)^2.$$

Таким чином, отримаємо
$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = mg - k \left(\frac{dS}{dt} \right)^2.$$

Останнє співвідношення представляє собою диференціальне рівняння для знаходження $S(t)$ і є математичною моделлю відповідного фізичного процесу.

2. Задача про радіоактивний розпад. Експериментально встановлено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини маси M пропорційна кількості речовини, що не розпалася, тобто

$$\frac{dM}{dt} = -kM,$$

де k – коефіцієнт розпаду, який встановлюється експериментально.

Означення 1. Звичайним диференціальним рівнянням називається рівність, що містить, у загальному випадку, незалежну змінну, невідому функцію цієї змінної та хоча б одну похідну невідомої функції або диференціали аргументу і функції.

Так, якщо $y = y(x)$ – невідома функція, то, у відповідності до означення 1, звичайне диференціальне рівняння має загальний вигляд:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, n \in \mathbb{N} \quad (14.1)$$

Означення 2. Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної, що до нього входить.

Отже, диференціальне рівняння (14.1) є рівнянням n -го порядку, бо старша похідна, яку воно містить, має n -й порядок.

Означення 3. Функція $y = \varphi(x)$, диференційована на деякому інтервалі (a, b) , називається частинним розв'язком, або інтегралом диференціального рівняння (14.1), якщо після заміни y на $\varphi(x)$, y' на $\varphi'(x)$, ..., $y^{(n)}$ на $\varphi^{(n)}(x)$ воно перетворюється на тотожність на (a, b) . Графік розв'язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою цього рівняння.

Процедура знаходження розв'язку диференціального рівняння називається інтегруванням заданого рівняння. Поряд з терміном «розв'язок диференціального рівняння» використовують «інтеграл диференціального рівняння», під яким, як правило, розуміють розв'язок, що отриманий неявно, тобто у вигляді $\Phi(x, y) = 0$.

Приклад 1. Переконатися, що функція $y = 3\cos x$ є розв'язком рівняння $y'' + y = 0$.

Знайдемо y', y'' і підставимо в задане рівняння: $y' = (3\cos x)' = -3\sin x$, $y'' = (y')' = -3\cos x \Rightarrow -3\cos x + 3\cos x = 0, 0 \equiv 0$. Як бачимо, функція $y = 3\cos x$ перетворює задане рівняння в тотожність. Згідно означення 3, вона являється розв'язком рівняння.

Приклад 2. Переконатися, що функція $y = \sin x$ є розв'язком для диференціального рівняння $y'' + y = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Знайдемо } y', y'' \text{ і підставимо в задане рівняння: } y' &= (\sin x)' = \cos x \Rightarrow \\ y'' &= (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x \Rightarrow y'' + y = 0 \Rightarrow -\sin x + \sin x = 0 \equiv 0. \end{aligned}$$

Основною задачею теорії диференціальних рівнянь являється знаходження всіх розв'язків даного диференціального рівняння.

Приклад 3. Переконатися, що функція $y = Ce^{x^2}$, де C – довільна стала, є розв'язком для диференціального рівняння $y' = 2xy$.

Знайдемо y' : $y' = (Ce^{x^2})' = C2xe^{x^2} = 2xCe^{x^2} = 2xy$. Очевидно, що у якості розв'язків виступають функції $y = e^{x^2}$, $y = 3e^{x^2}$, $y = -5e^{x^2}$, ...

Очевидно, що розв'язком будь-якого диференціального рівняння І-го порядку є нескінченна множина функцій, що визначається формулою, яка містить одну довільну сталу C , тобто має вигляд:

$$y = \varphi(x, C) \text{ або } \Phi(x, y, C) = 0.$$

Означення 4. Множина функцій $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, де $C_i \ \forall i = \overline{1, n}$ являються незалежними між собою сталими величинами ($C_i - \text{const}$), називається загальним розв'язком рівняння (14.1), якщо вона перетворює його в тотожність і при заданих початкових умовах із неї можна виділити єдиний частинний розв'язок.

2. Диференціальні рівняння першого порядку, задача та теорема Коші.

Означення 5. Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0. \quad (14.2)$$

Рівняння (14.2) може в окремому випадку не містити явно x і (чи) y , але обов'язково містить похідну y' чи dx і dy , так як $y' = \frac{dy}{dx}$.

Так, прикладами диференціальних рівнянь першого порядку являються рівняння: $2xy - 3y' = x$; $(4x - y)dx = x^2 dy$.

Якщо рівняння (14.2) можна розв'язати відносно y' , то його записують у вигляді:

$$y' = f(x, y), \quad (14.3)$$

і (14.3) називають рівнянням в нормальній формі.

Отже, загальним розв'язком, або загальним інтегралом диференціального рівняння (14.2) або (14.3) називається функція $y = \varphi(x, C)$ або $\Phi(x, y, C) = 0$, що задовольняє умовам:

1. Перетворює в тотожність диференціальне рівняння при довільних C ;
2. Для будь-якої точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ можна знайти таке значення постійної $C = C_0$, для якого $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$ або $\Phi(x_0, y_0, C_0) = 0$.

Для того, щоб із загального розв'язку виділити конкретний частковий розв'язок, необхідно задати початкову умову, тобто

$$y|_{x=x_0} = y_0 \text{ або } y(x_0) = y_0.$$

В цьому випадку задача про знаходження частинного розв'язку називається задачею Коші.

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші: $y' = 2xy$, $y(0) = 5$.

Як було встановлено раніше, загальний розв'язок заданого диференціального рівняння має вигляд $y = Ce^{x^2}$. Визначимо константу C , виходячи з початкових умов $y(0) = 5$.

$$x = 0, y = 5 \Rightarrow 5 = Ce^0 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow y = 5e^{x^2} \text{ — розв'язок задачі Коші.}$$

Відповідь на запитання про те, за яких умов рівняння (3.3) має частинний розв'язок, дає теорема Коші (теорема про існування та єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку).

Теорема (Коші). Нехай функція $f(x, y)$ і її частинна похідна $f'_y(x, y)$ визначені і неперервні у відкритій області D площини xOy , і точка $(x_0, y_0) \in D$. Тоді існує єдиний розв'язок $\varphi = \varphi(x, C_0)$ рівняння (14.3), який задовольняє умову: $\varphi(x_0) = y_0$. Цей розв'язок називається частинним розв'язком рівняння (14.3). Задача знаходження частинного розв'язку називається задачею Коші.

Геометричний зміст теореми: при виконанні умов теореми із сімейства інтегральних кривих (з загального розв'язку) завжди можна виділити єдину криву, що проходить через точку (x_0, y_0) .

Приклад 5. Переконатися, що множина функцій $y = x \ln x + Cx$ являється розв'язком рівняння $xy' - x - y = 0$, та розв'язати задачу Коші за умови $y(1) = 2$.

Функція $y = x \ln x + Cx$ є диференційованою на відрізьку $(0; \infty)$. При підстановці y і $y' = x' \ln x + x(\ln x)' + Cx' = \ln x + 1 + C$ в дане рівняння одержуємо: $x(\ln x + 1 + C) - x - x \ln x - Cx = 0$. Після розкриття дужок і зведення подібних одержимо тотожність $0 \equiv 0$.

Отже, множина функцій $y = x \ln x + Cx$ утворює загальний розв'язок, оскільки являється такою множиною функцій $y = \varphi(x, C)$, що перетворюють дане рівняння в тотожність $x\varphi'(x, C) - x - \varphi(x, C) \equiv 0$.

Із даної множини розв'язків виділимо частинний розв'язок (розв'яжемо задачу Коші) за даними початковими умовами $y(1) = 2$. Підставимо в загальний розв'язок $x = 1, y = 2$; маємо: $2 = 1 \ln 1 + C \cdot 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y = x \ln x + 2x$ – частинний розв'язок даного рівняння.

Приклад 6. Знайдіть область існування єдиного частинного розв'язку диференціального рівняння

$$y' = \frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} e^x.$$

Для заданого рівняння $f(x, y) = \frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} e^x$.

Тоді $\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{3}{2}(y-1)^{\frac{2}{3}} e^x \right)'_y = \frac{e^x}{\sqrt[3]{y-1}}$, і при $y = 1$ можливе

порушення єдиності розв'язку. У всіх інших точках розв'язок, відповідно до теореми Коші, існує і буде єдиним.

При знаходженні частинного розв'язку користуємося алгоритмом:

- знаходимо загальний розв'язок;
- підставляємо в нього початкові значення x_0, y_0 замість x і y ;
- знаходимо з одержаного рівняння відповідне значення $C = C_0$;
- підставляємо в загальний розв'язок C_0 замість C , одержуємо частинний розв'язок.

Тема 15. Класифікація та методи розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку, що інтегруються в квадратурах.

1. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Означення 1. Рівняння (14.2), записане у вигляді

$$y' = X(x) \cdot Y(y), \quad (15.1)$$

називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Характерна ознака: похідна невідомої функції являє собою добуток двох функцій, одна з яких залежить тільки від аргументу x , друга – тільки від невідомої функції y . У окремому випадку можливо $X(x) = \text{const}$ або $Y(y) = \text{const}$.

Розв'язуємо його за алгоритмом:

- записуємо y' як $\frac{dy}{dx}$, праву частину рівняння (15.1) залишаємо без зміни,

$$\text{маємо рівняння } \frac{dy}{dx} = X(x)Y(y);$$

- помножимо обидві частини цього рівняння на $\frac{dx}{Y(y)}$, зауваживши, що

$Y(y) \neq 0$, одержимо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{dy}{Y(y)} = X(x)dx; \quad (15.2)$$

- оскільки рівняння (15.2) містить тотожно рівні диференціали, то відповідні невизначені інтеграли відрізняються між собою на сталу величину.

Інтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{dy}{Y(y)} = \int X(x)dx + C. \quad (15.3)$$

Зауваження. Важливо не забути розглянути випадок $Y(y) = 0$ і знайти при цьому розв'язок, який може бути частинним, коли його можна одержати із загального розв'язку при певному значенні C , або особливим розв'язком, коли його не можна одержати із загального.

Таким чином, рівняння (15.1) розв'язано в квадратурах, а рівність (15.3) визначає його загальний розв'язок.

Зауваження. Альтернативною до (15.1) формою визначення рівнянням з відокремлюваними змінними є

$$f_1(x) f_2(y) dx + f_3(x) f_4(y) dy = 0. \quad (15.1^*)$$

Розділимо рівняння (15.1*) на добуток $f_2(y) f_3(x)$, тоді отримаємо

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = 0.$$

Інтегруючи його, отримаємо його загальний інтеграл

$$\int \frac{f_1(x)}{f_3(x)} dx + \int \frac{f_4(y)}{f_2(y)} dy = C.$$

Як зазначалося, особливої уваги заслуговують точки, де функції $f_2(y)$ та $f_3(x)$ дорівнюють нулю. Нехай, наприклад, $f_2(y_0) = 0$. Тоді розв'язок рівняння визначається не лише загальним інтегралом, але й має розв'язок $y = y_0$. Аналогічно, якщо $f_3(x_0) = 0$, то $x = x_0$ також є розв'язком заданого рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = 2y - 3$.

Оскільки це рівняння можна записати у вигляді $y' = \frac{1}{x} \cdot (2y - 3)$, то воно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Представимо y' як $\frac{dy}{dx}$, тоді маємо рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} (2y - 3)$. Помноживши обидві його частини на $\frac{dx}{2y - 3}$ при $2y - 3 \neq 0$, отримаємо $\frac{dy}{2y - 3} = \frac{dx}{x}$. Інтегруючи останнє співвідношення, одержимо:

$$\frac{1}{2} \ln |2y - 3| = \ln |x| + \ln |C| \Rightarrow \ln |2y - 3| = \ln |Cx^2|.$$

Потенціюючи, матимемо:

$$2y - 3 = Cx^2 \Rightarrow 2y = Cx^2 + 3 \Rightarrow y = \frac{C}{2} x^2 + \frac{3}{2} - \text{загальний розв'язок.}$$

Розглянемо випадок: $2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ - частинний розв'язок даного рівняння, так як його можна отримати із загального при $C = 0$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(xy^2 - x)dx - (x^2y - 4y)dy = 0.$$

Перетворимо рівняння:

$$x(y^2 - 1)dx - y(x^2 - 4)dy = 0,$$

або

$$\frac{x dx}{x^2 - 4} - \frac{y dy}{y^2 - 1} = 0,$$

при цьому $x \neq \pm 2$; $y \neq \pm 1$. Проінтегруємо рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4| - \frac{1}{2} \ln |y^2 - 1| = \frac{1}{2} \ln |C|,$$

або

$$\ln \left| \frac{x^2 - 4}{y^2 - 1} \right| = \ln |C| \Rightarrow x^2 - 4 = C(y^2 - 1).$$

Цей розв'язок необхідно доповнити розв'язком виду $y = \pm 1$, а розв'язок виду $x = \pm 2$ входить до загального при $C = 0$. Остаточно маємо $x^2 - 4 = C(y^2 - 1)$; $y = \pm 1$.

Зауваження. Рівняння виду $y'(x) = f(ax + by + c)$ шляхом заміни $z(x) = ax + by + c$ $z'(x) = a + by'$ зводиться до рівняння $\frac{z'}{b} - \frac{a}{b} = f(z)$ з відокремлюваними змінними.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = (x + y + 1)^2$.

Виконаємо заміну $x + y + 1 = z$ і, диференціюючи, одержимо $y' = z' - 1$. Задане рівняння прийме вигляд: $z' - 1 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = z^2 + 1 \Rightarrow \frac{dz}{z^2 + 1} = dx$. Проінтегрувавши останню рівність, отримаємо $\arctg(z) = x + C \Rightarrow z = \tg(x + C)$. Враховуючи введену заміну, одержимо $x + y + 1 = \tg(x + C)$, або $y = \tg(x + C) - x - 1$.

2. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Означення 2. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n -го виміру відносно змінних x та y , якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність $f(xt, yt) = t^n f(x, y)$.

Так, наприклад, функція $f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{3x + y}$ являється однорідною функцією першого виміру, так як $f(tx, ty) = \frac{t^2 x^2 - 2t^2 y^2}{3tx + ty} = \frac{t^2 (x^2 - 2y^2)}{t(3x + y)} = t \cdot f(x, y)$.

Очевидно, що функція $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ є однорідною нульового порядку, так як

$$f(tx, ty) = \frac{txty}{t^2x^2 + t^2y^2} = \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

Означення 3. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \quad (15.4)$$

називається однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру, тобто $f(xt, yt) = f(x, y)$.

Так, наприклад, рівняння $(4x - y)dx = (x + 5y)dy$ являється однорідним, тому що $y' = \frac{4x - y}{x + 5y}$ і функція $f(x, y) = \frac{4x - y}{x + 5y}$ – однорідна функція нульового виміру. Дійсно,

$$f(xt, yt) = \frac{4xt - yt}{xt + 5yt} = \frac{t(4x - y)}{t(x + 5y)} = \frac{4x - y}{x + 5y} = t^0 f(x, y).$$

За умовою $f(tx, ty) = f(x, y)$. Прийнемо в цій тотожності $t = \frac{1}{x}$, тоді

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

і рівняння (15.4) набуває вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Рівняння (15.4) можна, зокрема, представити у одному з виглядів:

$$\text{а) } y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \text{ б) } y' = \gamma\left(\frac{x}{y}\right), \text{ в) } y' = \frac{Q_n(x, y)}{P_n(x, y)}, \quad (15.5)$$

де $Q_n(x, y)$ і $P_n(x, y)$ – однорідні многочлени n -го виміру, інакше кажучи: всі члени $Q_n(x, y)$, $P_n(x, y)$ є членами n -го степеня відносно x та y .

Розв'язуємо (15.5 а, б, в) за алгоритмом:

- Робимо підстановку $y = u \cdot x$, звідки $y' = u'x + u$, де $u = u(x)$ – невідома функція.
- Дане рівняння зводимо до рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно, якщо функція $y = ux$ є розв'язком однорідного рівняння, то вона задовольняє рівняння $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто

$$(ux)' = \varphi(u) \Rightarrow u'x + u = \varphi(u) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}(\varphi(u) - u)$$

– це рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції u . Розв'язавши його, одержимо загальний розв'язок $\varphi(x, u, c) = 0$. Враховуючи, що $u = \frac{y}{x}$, дістанемо $\varphi(x, \frac{y}{x}, c) = 0$ – загальний розв'язок рівняння $y' = \varphi(\frac{y}{x})$.

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння $xy' = y + x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, що задовольняє умову $y(1) = \frac{\pi}{6}$.

Розв'яжемо дане рівняння відносно y' , враховуючи, що $x \neq 0$: $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Очевидно, рівняння має вигляд $y' = \varphi(\frac{y}{x})$, а значить є однорідним. Застосуємо

заміну: $y = ux$, $y' = u'x + u$. Тоді $u'x + u = u + \operatorname{tg} u \Rightarrow u'x = \operatorname{tg} u \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \operatorname{tg} u$. Розділимо

змінні за умови, що $\operatorname{tg} u \neq 0$, та проінтегруємо: $\frac{du}{\operatorname{tg} u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \operatorname{ctg} u \, du = \int \frac{dx}{x}$, звідки

$\ln |\sin u| = \ln |x| + \ln C \Rightarrow Cx = \sin u$. Враховуючи, що $u = \frac{y}{x}$, одержимо загальний

розв'язок: $Cx = \sin \frac{y}{x}$. Підставимо в загальний розв'язок початкові умови

$x=1, y=\frac{\pi}{6}$, тоді $C = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Підставимо значення C в загальний розв'язок:

$\frac{x}{2} = \sin \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \arcsin \frac{x}{2} \Rightarrow y = x \arcsin \frac{x}{2}$ – шуканий частинний розв'язок даного рівняння.

Розглянемо: $\operatorname{tg} u = 0 \Rightarrow u = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{y}{x} = k\pi \Rightarrow y = k\pi x$ – частинний розв'язок, так

як його можна одержати із загального $Cx = \sin \frac{y}{x}$ при $C = 0$.

3. Лінійні диференціальні рівняння I порядку.

Означення 4. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (15.6)$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані і неперервні на деякому проміжку (a, b) функції.

Термін „лінійне рівняння” обумовлюється тим, що невідома функція y і її похідна y' входять до рівняння тільки в першому степені, тобто лінійно.

Розглянемо один із існуючих методів інтегрування рівняння (15.6) – метод Бернуллі, який полягає в тому, що розв’язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y = u \cdot v, \quad (15.7)$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – невідомі функції від x , одна з яких знаходиться за нашим припущенням і не рівна тотожно нулю, а друга знаходиться в залежності від першої.

Диференціюючи (15.7), знаходимо $y' = u'v + uv'$ і підставляємо в рівняння (15.6), дістанемо:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad (15.8)$$

Групуємо в лівій частині рівняння (15.8) третій доданок з першим або другим і виносимо спільний множник за дужки.

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \quad (15.9)$$

Користуючись довільністю у виборі однієї із функцій, доберемо функцію v так, щоб

$$v' + p(x)v = 0. \quad (15.10)$$

Рівняння (15.10) дозволяє знайти функцію v , так як являється диференціальним рівнянням відносно v , і звести рівняння (15.9) до більш простого рівняння

$$u'v = q(x) \quad (15.11)$$

Розв’яжемо систему рівнянь (15.10) і (15.11):

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x). \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо v :

$v' = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx \Rightarrow \ln |v| = -\int p(x)dx + C_1 \Rightarrow v = e^{-\int p(x)dx + C_1}$ – множина функцій.

Візьмемо одну довільну функцію, наприклад, при $C_1 = 0$, $v = e^{-\int p(x)dx}$ і, підставивши її в друге рівняння системи, одержимо:

$u' e^{-\int p(x) dx} = q(x) \Rightarrow u' = q(x) e^{\int p(x) dx} \Rightarrow u = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C$. Підставляючи u і v в (15.7), знаходимо загальний розв'язок рівняння (15.6) $y = uv = \left(\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C \right) e^{-\int p(x) dx}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' + y \operatorname{tg} x = x \cos x$.

Очевидно, задане рівняння має вигляд (15.6), тобто є лінійним. Використаємо заміну (15.7) і матимемо систему $\begin{cases} y = uv, \\ u'v + uv' + uvtgx = x \cos x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = uv, \\ u'v + u(v' + vtgx) = x \cos x \end{cases}$.

Нехай v буде такою, що $v' + vtgx = 0$. Тоді $\frac{dv}{v} = -tg x dx$ і $\int \frac{dv}{v} = -\int tg x dx \Rightarrow$

$\ln|v| = \ln|\cos x| \Rightarrow v = \cos x$. Підставимо v в систему: $\begin{cases} y = u \cos x, \\ u' \cos x + 0 = x \cos x \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y = u \cos x, \\ u' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = u \cos x, \\ u = \frac{x^2}{2} + C \end{cases} \Rightarrow y = uv = (0,5x^2 + C) \cos x$ – загальний розв'язок.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^3 x}$.

Не важко помітити, що дане рівняння є лінійним, розв'язок шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$. Тоді для функції $v(x)$ отримаємо рівняння

$$v' - v \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln v = -\ln \cos x \Rightarrow v = \frac{1}{\cos x},$$

а для функції $u(x)$ –

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^3 x} \cdot e^{\ln \cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u = \operatorname{tg} x + C.$$

Остаточню маємо:

$$y = uv = (\operatorname{tg} x + C) \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{C}{\cos x}.$$

4. Диференціальні рівняння Бернуллі.

Означення 5. Рівнянням Бернуллі називають рівняння виду

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1. \quad (15.12)$$

Очевидно, при $\alpha = 0$ рівняння (15.12) є лінійне, а при $\alpha = 1$ маємо рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння (15.12) заміною $z = y^{1-\alpha}$ можна звести до лінійного рівняння відносно z , розв'язавши яке знаходимо z , тобто $y^{1-\alpha}$, а потім y .

Зручнішим методом являється метод Бернуллі, тобто заміна (15.7).

Зауваження. При $\alpha > 0$ рівняння (15.12), крім розв'язку $y = uv \neq 0$, має розв'язок $y = 0$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y' + y = x\sqrt{y}$.

Задане рівняння має вигляд (15.12) при $\alpha = \frac{1}{2}$, а значить, згідно означення, є диференціальним рівнянням Бернуллі. Для розв'язання використаємо метод Бернуллі, за яким: $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + uv = x\sqrt{uv} \Rightarrow$

$$u'v + u(v' + v) = x\sqrt{uv} \Rightarrow \begin{cases} v' + v = 0, \\ u'v = x\sqrt{uv}. \end{cases}$$

Знайдемо v з першого рівняння системи:

$$v' + v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -dx \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int dx \Rightarrow \ln|v| = -x \Rightarrow v = e^{-x}.$$

Підставимо v в друге рівняння системи і одержимо рівняння відносно u зі змінними, що розділяються. Розв'яжемо його:

$$u'e^{-x} = x\sqrt{u}e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow u^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} = x \Rightarrow u^{\frac{1}{2}} = xe^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \int u^{\frac{1}{2}} du = \int xe^{\frac{x}{2}} dx \Rightarrow$$

$$2\sqrt{u} + 2C = 2e^{\frac{1}{2}x}(x-2) \Rightarrow u = (e^{\frac{1}{2}x}(x-2) + C)^2.$$

Згідно підстановки $y = uv$, маємо: $y = (e^{\frac{1}{2}x}(x-2) + C)^2 e^{-x} \Rightarrow y = (x-2 + Ce^{\frac{x}{2}})^2 e^{-x}$ – шуканий загальний розв'язок.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $x^2 y^2 y' + x y^3 \operatorname{tg} x = 1$.

Розділимо задане рівняння на $x^2 y^2$ і отримаємо рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2 y^2},$$

де $\alpha = -2$. Розв'язок шукаємо у вигляді $y = u(x)v(x)$. Тоді

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2 y^2 v^2}.$$

Для функції $v(x)$ отримаємо

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{x},$$

а для функції $u(x)$ –

$$u' \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 u^2 \frac{1}{x^2}} \Rightarrow u^2 du = x dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо $u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}$.

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$y = uv = \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C} = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}.$$

5. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.

Означення 6. Рівняння виду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ називається рівнянням в повних диференціалах, якщо

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (15.13)$$

де частині похідні неперервні в деякій області.

Покажемо, що рівність (15.13) є умовою повного диференціала.

Теорема. Якщо $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ – повний диференціал деякої функції $U(x, y)$, то виконується умова (15.13). Справедливе і зворотне твердження.

Нехай вираз $Mdx + Ndy$ є повним диференціалом. Це означає, що $\exists U(x, y): dU = Mdx + Ndy$, так як

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \Rightarrow M = \frac{\partial U}{\partial x}; N = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

Продиференціювавши перший отриманий вираз за y , а другий за x , отримаємо:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Навпаки, нехай виконується умова (15.13). Необхідно знайти функцію $U(x, y)$, яка повинна задовольняти умови:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y).$$

Інтегруючи першу з них, отримаємо

$$U = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + f(y),$$

де (x_0, y_0) є фіксованою точкою з області визначення функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$, а $f(y)$ – довільна функція. Тепер продиференціюємо цей вираз:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + f'(y) = N$$

і скористаємося умовою (15.3):

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + f'(y) = N,$$

звідки

$$N(x, y)|_{x_0}^x + f'(y) = N(x, y) \Rightarrow f(y) = N(x_0, y) \text{ і } f(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy.$$

Таким чином, функція $U(x, y)$ знайдена:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy. \quad (15.14)$$

Теорема доведена.

Якщо виконується умова (15.13), то, згідно теореми, маємо

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \Rightarrow U(x, y) = C - \text{загальний інтеграл.}$$

З урахуванням формули (15.14) остаточно визначаємо загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах:

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (15.15)$$

Приклад 9. Розв'язати задачу Коші

$$(ye^x + 2x)dx + \left(e^x - \frac{1}{y}\right)dy = 0; \quad y(0) = 1.$$

Перевіримо виконання умови (15.13):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x,$$

тобто маємо рівняння в повних диференціалах. За формулою (15.15) отримуємо

$$\int_{x_0}^x (ye^x + 2x) dx + \int_{y_0}^y \left(e^{x_0} - \frac{1}{y}\right) dy = C,$$

або

$$ye^x + x^2 - ye^{x_0} - x_0^2 + ye^{x_0} - \ln y - y_0 e^{x_0} + \ln y_0 = C.$$

Приведемо подібні члени та згрупуємо всі константи в одну:

$$ye^x + x^2 - \ln y = C.$$

Значення константи C визначимо з початкової умови: $C = 1$. Тоді розв'язок задачі Коші буде мати вигляд:

$$ye^x + x^2 - \ln y = 1.$$

Тема 16. Диференціальні рівняння вищих порядків.

1. Основні поняття та означення. Задача Коші.

Диференціальне рівняння $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ при $n \geq 2$ називають диференціальним рівнянням вищого порядку, або розв'язаним відносно старшої похідної:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Для пошуку частинного розв'язку необхідно задати початкові умови:

$$y(x_0) = y_0 ; \quad y'(x_0) = y'_0 ; \quad \dots ; \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} . \quad (16.1)$$

Загальним розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається функція $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ або $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ відповідно, яка:

1. Задовольняє рівняння при будь-яких значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$.
2. При будь-яких заданих початкових умовах (16.1) з області визначення можна знайти такі $C_1, C_2, \dots, C_n$, що функція $y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$ або $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ відповідно будуть задовольняти умовам (16.1).

Означення 1. Диференціальним рівнянням другого порядку називають рівняння виду

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (16.2)$$

У рівняння (16.2) обов'язково повинна входити похідна y'' і не обов'язково $-x, y, y'$.

Означення 2. Розв'язком рівняння (16.2) на інтервалі (a, b) називається неперервна, двічі диференційована функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у дане рівняння перетворює його в тотожність, тобто $\forall x \in (a; b) \Rightarrow F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)) \equiv 0$.

Задача Коші: серед усіх розв'язків рівняння (16.2) знайти такий розв'язок $y = y(x)$, який при $x_0 \in (a; b)$ задовольняє наступні умови:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (16.3)$$

Умови (16.3) називають початковими умовами.

Існування і єдиність розв'язку задачі Коші визначаються теоремою Коші.

Теорема. Якщо $y'' = f(x, y, y')$ і функція $f(x, y, y')$ з її частинними похідними $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ неперервні в деякій відкритій області $G \in R_3$, то для будь-якої точки $(x_0, y_0, y'_0) \in G$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння (16.2), який задовольняє початкові умови (16.3).

Єдиність розв'язку означає, що із всіх ліній, що проходять через точку (x_0, y_0) , тільки єдина має кутовий коефіцієнт $k = y'(x_0)$

Зрозуміло, що у загальному випадку для знаходження розв'язку рівняння (16.2) необхідно виконати два послідовних інтегрування, тому загальний розв'язок рівняння (16.2) має вигляд: $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ – в явній формі і $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ – у неявній формі.

Алгоритм розв'язання задачі Коші для рівняння (16.3):

- знайти загальний розв'язок даного рівняння;
- із загального розв'язку виділити частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови: підставимо їх у систему

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2), \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2) \end{cases}$$

і одержимо

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2), \end{cases}$$

розв'язавши яку знайдемо C_{10} і C_{20} ;

- підставити в загальний розв'язок C_{10} , C_{20} замість C_1 і C_2 та записати $y = \varphi(x, C_{10}, C_{20})$ – частинний розв'язок.

2. Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку.

Одним з методів розв'язування диференціальних рівнянь вищих порядків, і другого порядку зокрема, є метод зниження порядку – за допомогою відповідної заміни змінної дане диференціальне рівняння n -го порядку зводиться до рівняння $(n-1)$ -го порядку.

Розглянемо три типи рівнянь, які допускають зниження порядку.

Перший тип – це рівняння виду $F(x, y'') = 0$, або в загальному випадку – $y^{(n)} = f(x)$. Для знаходження розв'язків даного рівняння необхідно проінтегрувати його n разів.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = e^{2x}$.

Проінтегруємо рівняння тричі:

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \Rightarrow y' = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2 \Rightarrow y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Другий тип – це рівняння виду $F(x, y', y'') = 0$, яке не містить явно шуканої функції.

Виконавши заміну, наприклад, $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, зводимо дане рівняння до системи рівнянь $\begin{cases} y' = P(x) \\ F(x, p, p') = 0 \end{cases}$. Розв'язуємо її і приходимо до рівняння $\Phi(x, y', C_1) = 0$ першого порядку.

В загальному вигляді такі рівняння записують у формі $F(x, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (відсутній y). За допомогою заміни $y' = z(x)$ рівняння набуває вигляду

$$F_1(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $xy'' = y'$.

Очевидно, дане рівняння можна записати у вигляді $F(x, y', y'') = 0$, тобто маємо рівняння I типу. Рекомендована заміна у цьому випадку: $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$.

У результаті маємо систему $\begin{cases} xp' = p(x) \\ p(x) = y' \end{cases}$.

Перше рівняння системи – рівняння зі змінними, що розділяються, і розв'язується так:

$$xp' = p \Rightarrow p' = \frac{p}{x} (x \neq 0) \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, p \neq 0 \Rightarrow$$

$$\ln |p| = \ln |x| + \ln |C_1| \Rightarrow p = C_1x \Rightarrow \begin{cases} p(x) = C_1x \\ p(x) = y' \end{cases} \Rightarrow y' = C_1x \Rightarrow y = \int C_1x dx \Rightarrow y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Із умови $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ – тривіальний розв'язок.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $x(y'' + 1) + y' = 0$.

Після заміни $y' = z(x)$ рівняння приймає вигляд

$$x(z' + 1) + z = 0 \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = -1.$$

Очевидно, це лінійне рівняння; використаємо підстановку $z = uv$. Тоді отримаємо

$$v' + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{x}$$

$$u'v = -1 \Rightarrow u' = -x \Rightarrow u = -\frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow z = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}.$$

Так як $z = y'$, то

$$y' = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{x}.$$

Інтегруючи, остаточно отримаємо

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln |x| + C_2.$$

Третій тип – рівняння виду $F(y, y', y'') = 0$, яке не містить явно аргументу x .

Виконавши заміну, наприклад, $y' = p(y)$, $y''_x = p'_y p$, зводимо дане рівняння до рівняння першого порядку $F(y, p, p'p) = 0$ та розв'язуємо систему $\begin{cases} y' = p(y) \\ F(y, p, p'p) = 0 \end{cases}$.

В загальному вигляді такі рівняння записують у формі $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (відсутній x). За допомогою аналогічної заміни, що вказана вище, $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'_y y' = z'_y z \Rightarrow y''' = z''_y z^2 + (z'_y)^2 z$ рівняння матиме вигляд

$$F_1(y, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння $y'' = 2yy'$, який задовольняє умову $y(0) = y'(0) = 1$.

Очевидно, дане рівняння можна записати у вигляді $F(y, y', y'') = 0$, тобто маємо рівняння II типу. Заміна: $y' = p(y)$, $y'' = p'_y p \Rightarrow \begin{cases} p'p = 2yp \\ p(y) = y' \end{cases}$.

Перше рівняння системи – рівняння зі змінними, що розділяються, та розв'язується так: $p(p' - 2y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = 0, \\ p' - 2y = 0. \end{cases}$ Розв'язок першого рівняння тривіальний: $p = 0, y' = 0 \Rightarrow y = C$, і не задовольняє початковим умовам. З другого рівняння слідує, що $p' = 2y, \frac{dp}{dy} = 2y, dp = 2y dy, \Rightarrow p(y) = y^2 + C_1$. Повернемося до системи $\begin{cases} p(y) = y^2 + C_1 \\ p(y) = y' \end{cases} \Rightarrow y' = y^2 + C_1$. Враховуючи те, що $y(0) = y'(0) = 1$, маємо

$$1 = 1 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0. \text{ Тоді } y' = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = dx (y \neq 0) \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C_2 \Rightarrow y = -\frac{1}{x + C_2}.$$

Враховуємо початкову умову $y(0)=1$: $1 = -\frac{1}{0+C_2} \Rightarrow C_2 = -1$, $y = -\frac{1}{x-1}$ – шуканий частинний розв’язок.

Приклад 5. Розв’язати задачу Коші $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 2$.

Після заміни $y' = z(y) \Rightarrow y'' = z'_y y' = z'_y z$ отримаємо рівняння зі змінними, що розділяються:

$$yz \frac{dz}{dy} = z^2 - z^3 \Rightarrow \frac{dz}{z - z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Проінтегруємо:

$$\ln \left| \frac{z}{1-z} \right| = \ln |y| + \ln |C_1| \Rightarrow \frac{y'}{1-y'} = C_1 y.$$

Виходячи з початкових умов,

$$\frac{2}{1-2} = -C_1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Розв’яжемо рівняння відносно y' і розділимо змінні: $\frac{1+2y}{2y} dy = dx$.

Проінтегруємо: $\frac{1}{2} \ln |y| + y = x + C_2$.

З початкових умов знаходимо $C_2 = -1$ і, остаточно, отримаємо частковий розв’язок

$$\frac{1}{2} \ln |y| + y = x - 1.$$

Тема 17. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку.

1. Основні поняття та означення. Фундаментальний розв’язок.

Означення 1. Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (17.1)$$

Очевидно, функція $y=0$ являється його тривіальним розв’язком.

Розглянемо теореми, які є підґрунтям для знаходження нетривіального розв’язку.

Теорема 1. Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ – розв’язки рівняння (17.1), то його розв’язком є також функція

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (17.2)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Доведення. Підставимо функцію (17.2) в рівняння (17.1):

$$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p(x)(C_1 y_1' + C_2 y_2') + q(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = 0 \Rightarrow$$

$C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0$, так як вирази в дужках тотожно дорівнюють нулю, оскільки $y_1(x), y_2(x)$ – розв'язки за умовою. Отже, функція (17.2) є розв'язком рівняння (17.1).

Для того, щоб функція (17.2) була загальним розв'язком рівняння (17.1) необхідно і достатньо, щоб вона перетворювала його в тотожність, і при заданих початкових умовах з неї можна було виділити єдиний частинний розв'язок. Для з'ясування того, якими при цьому мають бути функції $y_1(x), y_2(x)$, розглянемо лінійну залежність та незалежність двох функцій.

Означення 2. Функції $y_1(x), y_2(x)$ називаються лінійно залежними на (a, b) , якщо

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \lambda - \text{const}.$$

Так, функції $y_1(x) = 2 \sin x, y_2(x) = 3 \sin x$ згідно означення лінійно залежні, так як $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{3 \sin x}{2 \sin x} = \frac{3}{2} - \text{const}.$

Означення 3. Функції $y_1(x), y_2(x)$ називаються лінійно незалежними на (a, b) , якщо відношення $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ не являється сталою величиною.

Так функції $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{5x}$ лінійно незалежні, бо $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{e^{5x}}{e^{3x}} = e^{2x} \neq \text{const}.$

Перевірку на лінійну залежність чи незалежність можна виконати за допомогою визначника Вронського

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1', \quad (17.3)$$

що впливає з наступних теорем.

Теорема 2. Якщо функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійно залежні (ЛЗ) на $[a; b]$, то визначник Вронського $W(y_1, y_2) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Так як $y_2 = \lambda y_1$, то $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = \lambda y_1 y_1' - \lambda y_1 y_1' = 0$.

Теорема 3. Якщо визначник Вронського, складений з розв'язків рівняння (17.1), при деякому $x_0 \in [a; b]$ є відмінним від нуля, тобто $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Так як $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язок рівняння (17.1), то

$$\begin{aligned} y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 &= 0; \\ y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Першу рівність помножимо на y_1 , другу на $(-y_2)$ і додамо отримані результати. З урахуванням того, що

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1' y_2' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'',$$

отримаємо рівняння зі змінними, що розділяються:

$$\frac{dW}{dx} + a_1 W = 0.$$

Знайдемо його розв'язок, що задовольняє початкову умову $W(x_0) = W_0 \neq 0$,

$$\int_{x_0}^x \frac{dW}{W} = - \int_{x_0}^x a_1 dx \Rightarrow W = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx}. \quad (17.4)$$

Або

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = W_0 e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx}.$$

Формула (17.4) називається формулою Ліувілля. З неї видно, що якщо $W_0 \neq 0$, то $W(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Зауваження. З формули (17.4) також слідує, що коли при деякому $x_0 \in [a; b]$ $W_0 = 0 \Rightarrow W(x) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Зауваження. За формулою Ліувілля, знаючи один з розв'язків ЛОДУ-2, можна знайти інший. Розділивши обидві частини рівності (17.4) на y_1^2 , отримаємо

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx}}{y_1^2} \Rightarrow y_2 = y_1 \int e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx} y_1^{-2} dx.$$

Теорема 4. Якщо розв'язок ЛОДР-2 (17.4) ЛНЗ на $[a; b]$, то $W(y_1, y_2) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$.

Доведення. Нехай справедливе зворотнє, тобто $W(x_0) = 0$ при деяких $x_0 \in [a; b]$. Тоді, за теоремою 3, $W(y_1, y_2) = 0 \quad \forall x \in [a; b]$. Припустимо, що $y_1 \neq 0$ (в іншому випадку визначник Вронського тотожно рівний нулю), тоді маємо рівність

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \lambda = \text{const},$$

тобто функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно залежні. Отримане протиріччя доводить теорему.

Теорема 5. (Про структуру загального розв'язку однорідного рівняння). Якщо функції $y_1(x), y_2(x)$ – два лінійно незалежних на проміжку $(a; b)$ розв'язки рівняння (17.1), то множина функцій $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ є його загальним розв'язком.

Доведення. Те, що (17.2) є розв'язком, доведено вище. Покажемо, що з множини таких функцій можна виділити єдиний частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \quad (17.5)$$

де $x_0 \in (a; b)$.

Після підстановки (17.2) в (17.5) одержимо систему лінійних рівнянь відносно C_1, C_2 :

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_0'. \end{cases} \quad (17.6)$$

Визначник системи (17.6) $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$, так як, згідно з умовою,

функції $y_1(x), y_2(x)$ лінійно незалежні. Отже, система (17.6) має єдиний

розв'язок, тобто знаходимо єдину пару C_{10} і C_{20} , а значить – єдиний частинний розв'язок.

Функції $y_1(x), y_2(x)$, що задовольняють умову теореми 5, утворюють так звану фундаментальну систему розв'язків.

Приклад 1. Переконатися, що функції $y_1 = e^x$ і $y_2 = e^{-2x}$ задовольняють рівняння $y'' + y' - 2y = 0$, та побудувати його загальний розв'язок.

Підставимо y_1, y_1', y_1'' в задане рівняння, одержимо $e^x + e^x - 2e^x = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0 \Rightarrow y_1 = e^x$ – розв'язок. Аналогічно підставимо y_2, y_2', y_2'' в дане рівняння, одержимо $4e^{-2x} - 2e^{-2x} - 2e^{-2x} = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0 \Rightarrow y_2 = e^{-2x}$ – розв'язок. Крім того, $y_1(x), y_2(x)$ лінійно незалежні. Отже, множина функцій $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ – загальний розв'язок даного рівняння.

2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо вільні затухаючі коливання (рис. 17.1.).

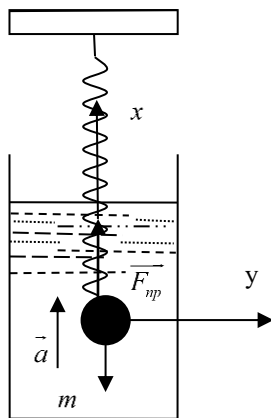


Рис. 17.1.

Підвісимо кульку масою m та зануримо її в рідину. На кульку діють сила пружності та сила тертя.

Рівняння рівноваги системи відоме:

$$F_{пр} - F_{тер} = ma,$$

$$\text{де } F_{пр} = -kx, F_{тер} = \tau x'.$$

$$-kx - \tau x' = mx''$$

$$x'' + \frac{\tau}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0$$

$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$ – модель розглянутого процесу є лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Означення 4. Рівняння виду

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (17.7)$$

де $p, q \neq 0 - \text{const}$, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Ейлером було запропоновано шукати розв'язок рівняння (17.7) у вигляді $y = e^{kx}$. Знайдемо значення k , при якому б функція $y = e^{kx}$ задовольняла рівняння (17.7). Підставимо $y = e^{kx}$, $y' = ke^{kx}$ та $y'' = k^2 e^{kx}$ у рівняння (17.7), отримаємо $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$, звідки

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (17.8)$$

Рівняння (17.8) називають характеристичним по відношенню до (17.7). Можливі три випадки розв'язання (17.8):

$$\begin{aligned} 1) \quad & D = b^2 - 4ac > 0, k_1 \neq k_2, \\ 2) \quad & D = b^2 - 4ac = 0, k_1 = k_2 = k, \\ 3) \quad & D = b^2 - 4ac < 0, k_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \end{aligned} \quad (17.9)$$

де D – дискримінант характеристичного рівняння, а $k_{1,2}$ – його корені.

1. Корені рівняння k_1 та k_2 дійсні, причому $k_1 \neq k_2$.

Тоді, очевидно, що $y_1 = e^{k_1 x}$ і $y_2 = e^{k_2 x}$. Ці розв'язки ЛНЗ, так як $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}$. В цьому випадку загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Корені k_1 та k_2 дійсні та збігаються: $k_1 = k_2 = k$.

Тоді в якості першого частинного розв'язку можна взяти $y_1 = e^{kx}$. Покажемо, що в цьому випадку розв'язком також є функція $y_2 = xe^{kx}$. Підставимо її в рівняння та, з урахуванням теореми Вієта, отримаємо:

$$xe^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) + e^{kx}(2k + a_1) = 0.$$

Ці розв'язки ЛНЗ, так як $\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq \text{const}$. В цьому випадку загальний розв'язок прийме вигляд:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \quad (17.10)$$

3. Корні комплексно-спряжені, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Спочатку покажемо, що у випадку, якщо $y = u + iv$ є розв'язком рівняння (17.7), то цьому рівнянню задовольняють функції u і v . Підставимо $y = u + iv$ в рівняння (17.7) і виділимо дійсну та уявну частини:

$$\underline{u'' + a_1 u' + a_2 u + i(v'' + a_1 v' + a_2 v)} = 0.$$

Підкреслений вираз та вираз в дужках рівні нулю. Отже, в цьому випадку частинні розв'язки мають вигляд:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} \text{ и } y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Скористаємося формулою Ейлера, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$,

$$y_1 = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x);$$

$$y_2 = e^{\alpha x - i\beta x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x);$$

і, як показано вище, розв'язком рівняння (17.7) будуть функції:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; e^{\alpha x} \sin \beta x; e^{\alpha x} \cos \beta x; -e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Очевидно, лінійно незалежними серед них будуть

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x; y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

так як $\frac{y_1}{y_2} = \operatorname{ctg} \beta x \neq \operatorname{const}.$

Остаточно загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \quad (17.11)$$

Отже, відповідні три випадки запису загальних розв'язків (17.7):

$$\begin{aligned} 1) \quad y &= C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \\ 2) \quad y &= e^{kx} (C_1 + C_2 x), \\ 3) \quad y &= e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \end{aligned} \quad (17.12)$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' - y' - 2y = 0$.

Нам дано лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами, характеристичне рівняння якого $k^2 - k - 2 = 0$. Його корені: $k_1 = -1, k_2 = 2 \Rightarrow y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Характеристичне рівняння: $k^2 - 10k + 25 = 0 \Rightarrow (k - 5)^2 = 0, \quad k_{1,2} = 5 \Rightarrow y = e^{5x} (C_1 + C_2 x).$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання:

Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 13 = 0$. Його дискримінант $D = b^2 - 4ac \Rightarrow D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36 = (6i)^2 < 0 \Rightarrow k_{1,2} = 2 \pm 3i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 3$.

Отже, $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

Тема 18. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Основні поняття та означення. Метод Лагранжа.

Розглянемо вимушені механічні коливання (рис. 18.1). На тіло маси m діють сила пружності $F_{np} = -kx$, сила тертя $F_{тер} = \tau x'$, де $x = x(t)$ – зміщення тіла в залежності від часу, $x' = x'(t)$ – швидкість зміщення, та сила $F_x = F_0 \cos(\omega t)$ – зовнішня періодична сила, що змінюється за гармонічним законом. Тоді рівняння рівноваги запишеться у наступній формі:

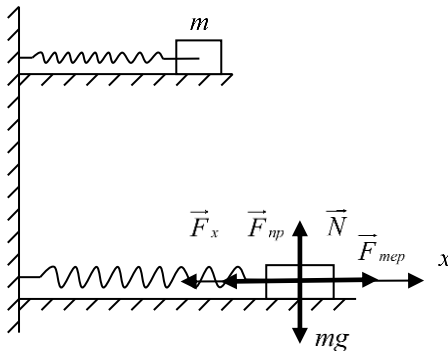


Рис. 18.1

$$F_{np} + F_x - F_{тер} = ma,$$

$$-kx + F_0 \cos(\omega t) - \tau x' = mx'',$$

$$mx'' + \tau x' + kx = F_0 \cos(\omega t).$$

Звідси $x'' + \frac{\tau}{m} x' + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$ – модель

розглянутого процесу, яка описується лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням

другого порядку.

Означення 1. Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається диференціальне рівняння виду

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (18.1)$$

де $p, q = \text{const}$, а $f(x) \neq 0$ – дана функція.

Загальний розв'язок рівняння (18.1) можна знайти методом Лагранжа (методом варіації довільних сталих), тобто у вигляді:

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2, \quad (18.2),$$

де $C_1(x), C_2(x)$ – функції, що задовольняють систему

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x), \end{cases} \quad (18.3)$$

яку отримаємо, підставляючи (18.2) в (18.1) та роблячи певні домовленості.

Розв'язавши (18.3), одержимо:

$$C_1(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx, \quad C_2(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx \quad (18.4)$$

Алгоритм розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь методом Лагранжа:

- знаходимо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$, відповідного даному неоднорідному, у вигляді $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 (C_1, C_2 - \text{const})$;
- знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ за формулами (18.4);
- записуємо загальний розв'язок даного рівняння (18.2).

Приклад 1. Розв'язати методом Лагранжа рівняння: $y'' - 7y' + 12y = e^x$.

$y'' - 7y' + 12y = 0$ – лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами, відповідне даному лінійному неоднорідному рівнянню. $k^2 - 7k + 12 = 0$ – його характеристичне рівняння, що має корені $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$y_{\text{го}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} \quad (C_1, C_2 - \text{const}).$$

Маємо фундаментальну систему розв'язків: $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{4x}$. Знаходимо $C_1(x)$ і $C_2(x)$ за формулами (18.4):

$$W = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ 3e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 4e^{7x} - 3e^{7x} = e^{7x} \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^{4x} \\ e^x & 4e^{4x} \end{vmatrix} = -e^{5x}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{3x} & 0 \\ 3e^{3x} & e^x \end{vmatrix} = e^{4x},$$

$$C_1(x) = \int \frac{\Delta_1 dx}{W} = \int \frac{-e^{5x} dx}{e^{7x}} = -\int e^{-2x} dx = \frac{1}{2} e^{-2x} + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\Delta_2 dx}{W} = \int \frac{e^{4x} dx}{e^{7x}} = \int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C_2.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned}
 y &= \left(\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1\right)e^{3x} + \left(-\frac{1}{3}e^{-3x} + C_2\right)e^{4x} \Rightarrow \\
 y &= C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^x \Rightarrow \\
 y &= C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \frac{1}{6}e^x.
 \end{aligned}$$

2. Метод підбору.

Як бачимо з прикладу 1, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами містить функцію y_{zo} і функцію $\varphi(x) = \frac{1}{6}e^x$. Чи

не являється вона частинним розв'язком даного рівняння? Перевіримо:

$$\begin{aligned}
 12 \Big| \varphi(x) &= \frac{1}{6}e^x \\
 -7 \Big| \varphi'(x) &= \frac{1}{6}e^x \Rightarrow 2e^x - \frac{7}{6}e^x + \frac{1}{6}e^x = e^x \Rightarrow e^x \Rightarrow e^x. \\
 1 \Big| \varphi''(x) &= \frac{1}{6}e^x
 \end{aligned}$$

Очевидно, функція $\varphi(x) = \frac{1}{6}e^x$ – частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

Гіпотеза: загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y = y_{zo} + y_{чн} \quad (18.5)$$

де y_{zo} – загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, відповідного даному лінійному неоднорідному рівнянню зі сталими коефіцієнтами;

$y_{чн}$ – частинний розв'язок даного лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Дійсно, підставивши (18.5) у (18.1), одержимо:

$$\begin{aligned}
 y''_{zo} + y''_{чн} + p(y'_{zo} + y'_{чн}) + q(y_{zo} + y_{чн}) &\equiv f(x) \Rightarrow \\
 (y''_{zo} + py'_{zo} + qy_{zo}) + y''_{чн} + py'_{чн} + qy_{чн} &\equiv f(x) \quad .
 \end{aligned}$$

Згідно означення розв'язку диференціального рівняння, перший доданок дорівнює нулю, другий – $f(x)$. Отже, маємо тотожність, що підтверджує структуру загального розв'язку рівняння (18.1) у вигляді (18.5).

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Знайдемо $y_{\text{го}} = C_1 y_1 + C_2 y_2$: $y'' + y = 0$ – лінійне однорідне рівняння, відповідне даному, $k^2 + 1 = 0$ – його характеристичне рівняння, $k_{1,2} = \pm i$ – корені. Шуканий загальний розв'язок: $y_{\text{го}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, де $C_1, C_2 = \text{const}$.

Знайдемо $y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2$, використовуючи метод Лагранжа. Складемо систему (18.3):

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ C_1' (-\sin x) + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

та застосуємо формули (18.4).

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \sin x;$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C_2.$$

Отже,

$$y_{\text{цп}} = \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C_1 \right) \cos x + (C_2 - \cos x) \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \cos x + (-\cos x) \sin x.$$

Пропонуємо самостійно переконатися, що функція

$$\varphi(x) = \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \cos x + (-\cos x) \sin x$$

є частинним розв'язком даного рівняння.

Коли права частина має спеціальний вид, тобто

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_k(x) \sin \beta x), \quad (18.6)$$

де $P_k(x), Q_k(x)$ – многочлени k -го степеня відповідно, то доцільно користуватися методом підбору. У цьому випадку $y_{\text{чн}}$ знаходиться у вигляді:

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x} (U_k(x) \cos \beta x + V_k(x) \sin \beta x) \quad (18.7)$$

де r – кількість коренів характеристичного рівняння рівних $\alpha + \beta i$, а $U_k(x), V_k(x)$ – многочлени з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що й $P_k(x), Q_k(x)$ відповідно.

Розглянемо окремі види $f(x)$.

Якщо $f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$ – деякий многочлен, тобто в (18.7) відсутні тригонометричні та показникова функції ($\alpha = 0, \beta = 0$), то $y_{\text{чн}} = x^r U_k(x)$, де $U_k(x) = A_k x^k + \dots + A_1 x + A_0$ – многочлен з невизначеними коефіцієнтами того ж степеня, що й $P_k(x)$, а r – кількість коренів характеристичного рівняння, рівних нулю.

Якщо $f(x) = a e^{\alpha x}$ ($\beta = 0, U_k(x) = \text{const}$), то $y_{\text{чн}} = A x^r e^{\alpha x}$, де r – кількість коренів характеристичного рівняння рівних α , а A – невизначений коефіцієнт.

Якщо $f(x) = a \cos \beta x + b \sin \beta x$ ($\alpha = 0, U_k(x), V_s(x) = \text{const}$), то $y_{\text{чн}} = x^r (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$, де r – кількість коренів характеристичного рівняння, рівних βi , A, B – невизначені коефіцієнти.

У кожному із розглянутих випадків невизначені коефіцієнти знаходимо, виходячи з означення розв'язку диференціального рівняння. А саме: підставимо $y_{\text{чн}}$ відповідної конструкції в дане рівняння, одержимо тотожність і використаємо означення тотожності або теорему про тотожну рівність многочленів.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - y' - 6y = 5e^{3x}.$$

Відомо, що загальний розв'язок $y = y_{\text{зо}} + y_{\text{чн}}$. Знайдемо $y_{\text{зо}}$. Відповідне лінійне однорідне рівняння: $y'' - y' - 6y = 0$. Його характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ має корені $k_1 = -2, k_2 = 3 \Rightarrow y_{\text{сі}} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x}$. Знайдемо $y_{\text{чн}}$. Оскільки права частина є функцією спеціального виду $f(x) = a e^{\alpha x}$, тоді $y_{\text{чн}} = A x^r e^{\alpha x}$. Так як $\alpha = 3, \beta = 0$ і $r = 1$ ($\alpha = 3$ є коренем характеристичного рівняння один раз), то $y_{\text{чн}} = A x e^{3x}$.

Константу A знайдемо в результаті підстановки сконструйованого $y_{\text{чи}}$ у задане рівняння:

$$y_{\text{чи}} = Ae^{3x}, \quad y'_{\text{чи}} = Ae^{3x}(1+3x), \quad y''_{\text{чи}} = Ae^{3x}(6+9x),$$

$$y''_{\text{чи}} - y'_{\text{чи}} - 6y_{\text{чи}} = 5e^{3x} \Rightarrow Ae^{3x}(6+9x) - Ae^{3x}(1+3x) - 6xe^{3x} = 5e^{3x}.$$

Розкриємо дужки та зведемо подібні:

$$Ae^{3x}(6+9x-1-3x-6x) = 5e^{3x} \Rightarrow Ae^{3x}5 = 5e^{3x} \Rightarrow A=1.$$

Отже, $y_{\text{чи}} = xe^{3x}$, а $y = y_{\text{зо}} + y_{\text{чи}} = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + xe^{3x}$ – шуканий загальний розв'язок.

Тема 19. Системи диференціальних рівнянь.

1. Нормальні системи диференціальних рівнянь та їх розв'язання.

До побудови та розв'язання систем диференціальних рівнянь приводять задачі з вивчення процесів коливання в техніці, фізиці, механіці. Вібрації споруд, електромагнітні коливання, коливання пружних тіл – всі ці процеси описуються системами диференціальних рівнянь.

У якості прикладу розглянемо рух матеріальної точки масою m в площині Oxy . Відповідно другому закону Ньютона маємо

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right).$$

Спроектуємо векторну рівність на координатні осі:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{m} F_x \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right); \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{m} F_y \left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right). \end{cases} \quad (19.1)$$

Отримано систему диференціальних рівнянь відносно двох незалежних функцій $x(t)$, $y(t)$ (де t – час), які визначають положення точки на площині.

Тут

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad - \text{проекції швидкості,}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} \quad - \text{проекції прискорення на координатні осі.}$$

Будемо розглядати системи диференціальних рівнянь, кожне рівняння яких розв'язане відносно старшої похідної – канонічні системи. Таку систему, шляхом введення додаткових функцій, завжди можна привести до еквівалентної їй системи диференціальних рівнянь першого порядку (ДР-1).

Приклад 1. Визначити траєкторію ядра, яке товкнув атлет під кутом α до горизонту зі швидкістю V_0 . Супротивом повітря зневажаємо.

На початку було розглянуто загальне рівняння (19.1), яке можна застосувати для даної задачі

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = 0; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -g, \end{cases}$$

де g – прискорення вільного падіння. Проінтегруємо кожне рівняння системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = C_1; \\ \frac{dy}{dt} = -gt + C_2. \end{cases}$$

Константи інтегрування C_1 та C_2 знайдемо з початкових умов:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = V_0 \cos \alpha; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = V_0 \sin \alpha \Rightarrow C_1 = V_0 \cos \alpha; \quad C_2 = V_0 \sin \alpha.$$

Тоді система матиме вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V_0 \cos \alpha; \\ \frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Інтегруючи вдруге, одержимо:

$$\begin{cases} x = tV_0 \cos \alpha + C_1; \\ y = -\frac{gt^2}{2} + tV_0 \sin \alpha + C_2. \end{cases}$$

Константи інтегрування C_1 та C_2 визначимо з початкових умов, враховуючи вибір початку системи координат в точці відриву ядра:

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0; \quad C_2 = 0.$$

Таким чином, розв'язком системи є функції

$$\begin{cases} x = tV_0 \cos \alpha; \\ y = -\frac{gt^2}{2} + tV_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

Виключаючи параметр t , приходимо до рівняння траєкторії

$$y = -\frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha - \text{парабола}.$$

Розв'язання системи (19.2) зводиться до розв'язання ДР-*n* методом виключення.

Продиференціюємо за x перше рівняння системи (19.2):

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} y_n'.$$

З урахуванням інших рівнянь системи, цей вираз набуває вигляду:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n} f_n \quad \text{або} \quad y_1'' = F_1(x, y_1, \dots, y_n).$$

Аналогічно, знову продиференціювавши, отримаємо

$$y_1''' = F_2(x, y_1, \dots, y_n)$$

і т. д., поки не знайдемо n -у похідну

$$y_1^{(n)} = F_{n-1}(x, y_1, \dots, y_n).$$

Таким чином, отримаємо систему n рівнянь

[illegible]

З перших $n - 1$ рівнянь системи (19.4) виразимо $Y_2, \dots, Y_n$ через змінні $X, Y_1, Y_1', \dots, Y_1^{(n-1)}$. Підставляючи їх значення в останнє рівняння системи (19.4), маємо

$$y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}). \quad (19.5)$$

Розв'язуючи рівняння (19.5), знайдемо $y_1 = y_1(x, C_1, \dots, C_n)$, а за допомогою виразів для $y_2, \dots, y_n$ визначимо ці функції.

Зауваження. З наведених вище міркувань видно структуру загального розв'язку системи ДР (19.2).

Зауваження. Часто систему рівнянь можна відразу зводити до рівняння (19.5), в обхід системи (19.4). Як приклад, це відноситься до лінійних систем ДР.

2. Системи лінійних диференціальних рівнянь. Метод підстановки.

Означення. Однорідною системою лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами називається система виду

Виконуючи підстановку знайденої функції $x(t)$ в перше рівняння, отримаємо

$$y(t) = 2(C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}) - (C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t})' = 3C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{4t}.$$

Зазначимо, що розв'язок будь-якої системи можна перевірити шляхом безпосередньої підстановки отриманих результатів у задану систему. При цьому знайдений розв'язок повинен кожне рівняння системи перетворювати в тотожність.

Приклад 2. Для системи з прикладу 1 знайти частинний розв'язок, що задовольняє умовам $\begin{cases} x(0) = 3, \\ y(0) = -1. \end{cases}$

Враховуючи загальний розв'язок системи і початкові умови, складемо систему з невідомими C_1, C_2 :

$$\begin{cases} 3 = C_1 e^{-0} + C_2 e^{4 \cdot 0} \\ -1 = 3C_1 e^{-0} - 2C_2 e^{4 \cdot 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ -1 = 3C_1 - 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{cases}$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y; \\ \frac{dy}{dt} = 2y - 2x; \end{cases} \quad x(0) = 0; y(0) = 3.$$

З першого рівняння знаходимо $y = x - \frac{dx}{dt}$ і підставляємо в друге рівняння:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 3 \frac{dx}{dt} = 0.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k_1 = 0; k_2 = 3.$$

Тоді

$$x = C_1 + C_2 e^{3t} \text{ і } y = x - \frac{dx}{dt} = C_1 - 2C_2 e^{3t}.$$

Зважаючи на початкові умови, отримаємо систему для знаходження C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 - 2C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 1; C_2 = -1.$$

Остаточно $x = 1 - e^{3t}$; $y = 1 + 2e^{3t}$.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix}, X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ . \\ x'_n(t) \end{pmatrix} - \text{матриці-стовпці невідомих функцій та похідних}$$

відповідно.

Очевидно, рівняння (19.8) є рівнянням зі змінними, що розділяються. Загальний розв'язок його знаходимо у вигляді

$$X(t) = X_1 C_1 e^{k_1 t} + X_2 C_2 e^{k_2 t} + \dots + X_n C_n e^{k_n t}, \quad (19.9)$$

де k_i – власні значення матриці A , які є коренями характеристичного рівняння $\det(A - kE) = 0 \quad i = \overline{1, n}$;

X_i – власні вектори матриці A , що отримані з рівняння $(A - k_i E)X_i = 0$,

$X_i \neq 0, \quad i = \overline{1, n}$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = -6x + y \end{cases}$ матричним методом.

Запишемо дану систему у вигляді (19.8):

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення $k_{1,2}$ матриці A із характеристичного рівняння $\det(A - kE) = 0$:

$$\det \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ -6 & 1-k \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, отримаємо $k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow$ корені $k_1 = -1, k_2 = 4$ – власні значення матриці A .

Власні вектори $X_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$ отримаємо із системи $(A - k_i E)X_i = 0 \quad i = \overline{1, 2}$. Знайдемо

перший власний вектор X_1 , який відповідає першому власному значенню

$$k_1 = -1: \begin{pmatrix} 2+1 & -1 \\ -6 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ -6\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = 3\alpha_1. \text{ Нехай } \alpha_1 = 1, \text{ тоді}$$

$\beta_1 = 3$ і $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Власний вектор X_2 для $k_2 = 4$ знайдемо аналогічно:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & -1 \\ -6 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ -6\alpha_2 - 3\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = -2\alpha_2. \text{ Нехай } \alpha_2 = 1, \text{ тоді } \beta_2 = -2 \text{ і}$$

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Згідно (19.9), загальний розв'язок системи можна записати так:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X_1 C_1 e^{k_1 t} + X_2 C_2 e^{k_2 t}.$$

Враховуючи власні значення та власні вектори, маємо:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} C_1 e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} C_2 e^{4t} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}, \\ y(t) = 3C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Тема 20. Побудова математичних моделей та розв'язання задач практичного змісту.

Розв'язання задач практичного змісту з різних областей діяльності людини (механічної, фізичної, хімічної, економічної чи технічної) приводить до побудови математичної моделі у вигляді диференціального рівняння чи системи диференціальних рівнянь. Складання диференціального рівняння полягає у визначенні математичної залежності між змінними величинами та їх приростами.

Є випадки, коли диференціальні рівняння можуть бути отримані без розгляду приросту - за рахунок їх попереднього урахування.

Наприклад, швидкість можна представити виразом $v(t) = \frac{ds}{dt}$; отже, не використовуємо $\Delta s, \Delta t$, бо вони враховані, тому що $v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Прискорення

в довільний час t виражається залежністю $a(t) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, і знову $\Delta v, \Delta t$ враховані.

Складанню диференціального рівняння передують глибоке вивчення процесу, що зводиться:

- до визначення його окремих моментів;
- установлення загального закону його протікання.

Окремий момент процесу, так званий елементарний процес, виражається рівнянням, що зв'язує змінні величини процесу з їхніми диференціалами або похідними диференціальним рівнянням. Закон загального протікання процесу виражається рівнянням, що пов'язує змінні величини процесу, але вже без диференціалів цих величин.

Загальних правил для складання диференціальних рівнянь немає. У більшості випадків методика розв'язання технічних задач із застосуванням теорії звичайних диференціальних рівнянь зводиться до наступного:

- докладне вивчення умови задачі і побудова малюнку, що пояснював би її суть;
- складання диференціального рівняння процесу, що розглядається (використовується фізичний або геометричний зміст похідної);
- інтегрування складеного диференціального рівняння і визначення загального розв'язку цього рівняння;
- визначення частинного розв'язку задачі на підставі даних початкових умов;
- визначення, в міру необхідності, допоміжних параметрів (коефіцієнта пропорційності та ін.) з використанням для цього додаткових умов задачі;
- знаходження загального закону процесу, що розглядається, та визначення невідомих величин;
- аналіз результатів та перевірка вихідних положень задачі.

Деякі з цих рекомендацій в залежності від характеру задач можуть бути відсутніми.

Задача 1. Швидкість розпаду радію в кожен момент часу пропорційна своїй масі. Визначити, який відсоток маси розпадеться через 200 років, якщо відомо, що період напіврозпаду, тобто період, за який розпадається половина присутньої маси, дорівнює 1590 років, при початковій кількості радію $m_0 = 1$ кг.

Розв'язання:

Враховуючи фізичний зміст похідної як швидкості зміни функції $m(t)$ і виходячи з умови, маємо $\frac{dm}{dt} = -km$, де $m(t)$ – кількість радію в момент часу t , $\frac{dm}{dt}$ – швидкість розпаду, тобто зміна маси m за одиницю часу t , k – коефіцієнт пропорційності, а знак «мінус» означає зменшення маси із зміною часу. Складене диференціальне рівняння $\frac{dm}{dt} = -km$ є рівнянням зі змінними, що розділяються. Розв'язуємо його:

$$\frac{dm}{m} = -kdt \Rightarrow \int \frac{dm}{m} = \int -kdt \Rightarrow \ln m = -kt + C_1 \Rightarrow m(t) = Ce^{-kt}.$$

Значення C знайдемо з початкової умови $m(0) = m_0 = 1$.

Підставимо початкову умову в знайдений розв'язок $m(0) = Ce^0 = 1 \Rightarrow C = 1$. Отже, $m(t) = e^{-kt}$ – загальний закон зміни маси речовини в залежності від часу. Коефіцієнт k знайдемо, враховуючи час напіврозпаду: $0,5m_0 = m_0 e^{-1590k} \Rightarrow k \approx 0,00044$.

Маємо закон розпаду радію $m(t) = e^{-0,00044t}$, згідно якого через 200 років маса радію буде дорівнювати $m(200) = e^{-0,00044 \cdot 200} = 0,915$ кг, а маса радію, що розпався, становить $\frac{m(0) - m(200)}{m(0)} \cdot 100\% = 0,085\%$ початкової ваги.

Відповідь: через 200 років з 1 кг радію залишиться 0,915 кг, тобто буде втрачено 0,085% усієї ваги.

Задача 2. Моторний човен рухається по озеру зі швидкістю $v_0 = 20$ км/г. На повній швидкості двигун вимикають, через 40 с після цього його швидкість зменшиться до $v_1 = 8$ км/г. Відомо, що опір води пропорційний швидкості руху човна. Визначити швидкість човна через 2 хв після вимикання двигуна.

Розв'язання:

Складемо математичну модель процесу. На човен, що рухається (рис. 20.1), діють сили: за законом Ньютона, сила, що дорівнює добутку маси на

прискорення, $F = m \cdot a$, де $a = v' = \frac{dv}{dt}$; та сила опору води $F = -k \cdot v$, де k – коефіцієнт пропорційності. Отже, рівняння руху: $m \cdot \frac{dv}{dt} = -k \cdot v$ – рівняння із змінними, що розділяються. Очевидно,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \int dt \Rightarrow \ln(v) = -\frac{k}{m}t + c.$$

Потенціюючи останню рівність, одержимо $v(t) = e^{-\frac{k}{m}t+c} = e^{-\frac{k}{m}t} e^c = C e^{-\frac{k}{m}t}$ – загальний розв'язок. Використовуючи початкові умови, знайдемо значення C . При $t = 0$ $v_0 = 20$ км/Г, звідки

$$20 = C e^{-\frac{k}{m}0} \Rightarrow 20 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 20.$$

Тоді загальний закон руху для заданих умов: $v(t) = 20 e^{-\frac{k}{m}t}$.

Додаткові умови показують, що при $t = 40$ с $= \frac{1}{90}$ год швидкість човна складає

$$v_1 = 8 \text{ км/г} \Rightarrow 8 = 20 e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{90}} = \frac{2}{5} \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}.$$

Використавши додаткові умови, одержимо закон руху човна:

$$v(t) = 20 \left(\frac{2}{5}\right)^{90t}.$$

Для визначення швидкості човна через $t = 2$ хв. $= \frac{1}{30}$ год. після вимикання двигуна

скористаємося останньою формулою: $v\left(\frac{1}{30}\right) = 20 \left(\frac{2}{5}\right)^{90 \cdot \frac{1}{30}} = 20 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{160}{125} \approx 1,28 \text{ км/г}.$

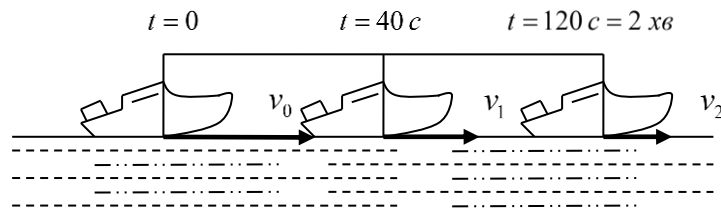


Рис. 20.1. Рух човна

Відповідь: $v\left(\frac{1}{30}\right) \approx 1,28 \text{ км/г}.$

Задача 3. Траєкторією руху тіла є крива, яка проходить через точку $(1;3)$ і має властивість: відрізок, що відтинає на осі ординат будь-яка дотична, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайти закон руху тіла.

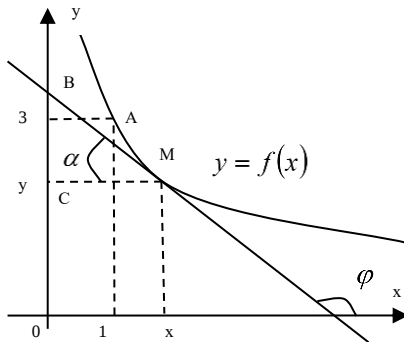


Рис. 20.2

Розв'язання:

Побудуємо схематичний малюнок.

За умовою (рис. 20.2): $OB = 2x$, так як

$$OB = OC + CB,$$

$$OC = y, CB = CM \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$CM = x, \alpha = 180^\circ - \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi = -y' \quad \text{то отримаємо}$$

диференціальне рівняння $y - xy' = 2x$, яке можна записати у вигляді $y' = \frac{y - 2x}{x}$.

Очевидно, маємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Для його розв'язку виконаємо заміну:

$$y = Zx, \quad y' = Z'x + Z \Rightarrow Z'x + Z = \frac{Zx - 2x}{x} \Rightarrow Z'x = -2 \Rightarrow Z' = -\frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$dZ = -\frac{2dx}{x} \Rightarrow \int dZ = -\int \frac{2}{x} dx \Rightarrow Z = -2 \ln|x| + C \Rightarrow Z = C - \ln x^2.$$

Тоді $y = x(C - \ln x^2)$ – множина ліній, що задовольняє умові задачі. Виділимо з неї криву, що проходить через точку $(1;3)$, використовуючи початкові умови: $y(1) = 3 \Rightarrow 3 = 1(C - \ln 1^2) \Rightarrow C = 3$ $y = x(3 - \ln x^2)$ – закон руху тіла.

Задача 4. Визначити криву, що проходить через точку $M_0(4; 3)$, якщо піддотична AB будь-якої її точки є середнє арифметичне координат (рис. 20.3).

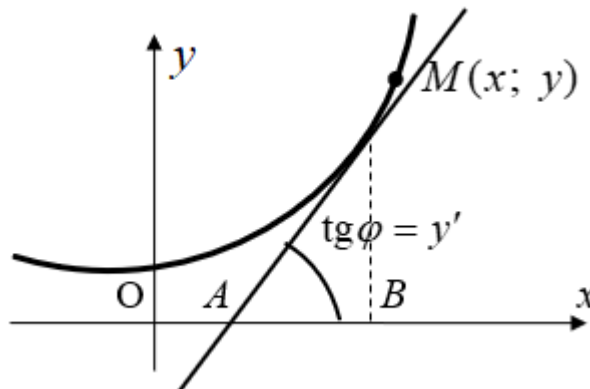


Рис. 20.3

Якщо $M(x; y)$ – точка кривої, то, за умовою задачі, отримаємо рівняння

$$\frac{y}{y'} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow y' = \frac{2y}{x+y},$$

яке є однорідним диференціальним рівнянням. Виконаємо заміну $y = ux$ та $y' = u'x + u$.

Рівняння матиме вигляд:

$$u'x = \frac{2u}{1+u} - u.$$

Розділимо змінні

$$\frac{(1+u)du}{u(1-u)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{du}{u} + \frac{2du}{1-u} = \frac{dx}{x}$$

та проінтегруємо

$$\ln|u| - 2\ln|1-u| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{u}{(1-u)^2}\right| = \ln|Cx|.$$

Виконавши зворотну заміну $u = \frac{y}{x}$, отримуємо $\frac{y}{x} = Cx\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2$.

Остаточно, враховуючи, що крива проходить через точку M_0 , підставляючи в загальний розв'язок $x_0 = 4, y_0 = 3$,

$$\frac{3}{4} = 4C\left(1 - \frac{3}{4}\right)^2,$$

знаходимо C і отримуємо шукане рівняння кривої: $y = 3(x - y)^2$.

V. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення функції багатьох змінних. Що таке область визначення, множина значень та лінії рівня функції двох змінних?
2. Означте поняття частинної похідної першого порядку функції двох змінних. Сформулюйте правила відшукування частинних похідних. Означте диференціал першого порядку та вкажіть на його застосування.
3. Означте поняття частинних похідних другого порядку функцій двох змінних та диференціалу другого порядку. Сформулюйте основні властивості.
4. Як знаходиться похідна функції, що задана неявно? Як знаходяться частинні похідні складної функції?
5. Означте поняття градієнта функції двох змінних та градієнта функції в точці. Що називають похідною функції за напрямком?
6. Дайте означення дотичної площини та нормалі до поверхні у заданій точці. Виведіть рівняння дотичної площини та нормалі до графіка функції, заданої неявно.
7. Дайте означення локального екстремуму функції двох змінних та критичної точки. Сформулюйте необхідну та достатню умови існування екстремуму.
8. Що називають умовним екстремумом функції двох змінних? Які достатні умови існування умовного екстремуму? Опишіть алгоритм відшукування умовного екстремуму (метод множників Лагранжа).
9. Що називають найбільшим та найменшим значення функції двох змінних на обмеженій множині? Який алгоритм знаходження таких значень?
10. Дайте означення первісної та невизначеного інтегралу. Який геометричний зміст невизначеного інтегралу?
11. Запишіть основні властивості невизначеного інтегралу та частину з них доведіть.
12. Таблиця невизначених інтегралів. Обґрунтуйте декілька позицій з таблиці.

13. Вкажіть основні методи знаходження невизначеного інтегралу та детально опишіть (обґрунтуйте): безпосереднє інтегрування; інтегрування методом заміни; інтегрування частинами. Зазначте випадки їх використання.
14. Сформулюйте алгоритм інтегрування раціональних дробів.
15. Які рекомендації щодо інтегрування раціональних дробів: у випадку, коли знаменник дробу не розкладається на множники; у випадку, коли знаменник дробу розкладається на множники (три випадки)?
16. Інтегрування тригонометричних виразів. Опишіть способи знаходження таких інтегралів: без використання універсальної тригонометричної підстановки; з використання універсальної тригонометричної підстановки.
17. Визначте поняття інтегралів, що не беруться. Приведіть приклади таких інтегралів та вкажіть області їх застосування.
18. Сформулюйте задачу (знаходження: площі криволінійної трапеції, маси неоднорідного стержня), що призводить до поняття визначеного інтегралу. Дайте означення визначеному інтегралу. Які умови інтегрованості функції на відрізьку?
19. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца, опишіть її використання.
20. Запишіть основні властивості визначеного інтегралу та кілька доведіть.
21. Вкажіть основні методи обчислення визначеного інтегралу та детальніше опишіть метод: розкладів (безпосередній); замін; інтегрування частинами.
22. Дайте означення невластних інтегралів I-го та II-го роду та вкажіть критерії їх збіжності.
23. Застосування визначених інтегралів. Виведіть формулу обчислення площ плоских фігур.
24. Геометричне застосування визначених інтегралів. Виведіть формули обчислення: об'ємів тіл обертання; довжини дуги плоскoї кривої; площі бічної поверхні тіл обертання.
25. Механічне застосування визначених інтегралів. Запишіть та обґрунтуйте формули обчислення: довжини пройденого шляху за відомою швидкістю; маси неоднорідного стержня за відомою густиною.

26. Що називають диференціальним рівнянням? Як встановити його тип та порядок? Що називають розв'язком ДР, які вони бувають? В чому суть задачі Коші?
27. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають із змінними, що розділяються? Який алгоритм його розв'язання?
28. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають однорідним? Який алгоритм його розв'язання?
29. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним? Який алгоритм його розв'язання?
30. Яке диференціальне рівняння першого порядку класифікують як ДР Бернуллі? Опишіть алгоритм його розв'язання.
31. Які диференціальні рівняння вищого порядку називаються рівняннями, що допускають зниження порядку? Опишіть алгоритми їх розв'язання.
32. Що розуміють під фундаментальною системою розв'язків лінійного диференціального рівняння? Сформулюйте та доведіть теорему про структуру розв'язку лінійного диференціального рівняння.
33. Які диференціальні рівняння другого порядку називаються лінійними однорідними рівняннями зі сталими коефіцієнтами? Укажіть та обґрунтуйте алгоритми їх розв'язання.
34. Які диференціальні рівняння другого порядку називаються лінійними неоднорідними зі сталими коефіцієнтами? Укажіть алгоритми їх розв'язання у випадку довільного виду правої частини (метод варіації).
35. Які диференціальні рівняння другого порядку називаються лінійними неоднорідними зі сталими коефіцієнтами? Укажіть алгоритми їх розв'язання у випадку спеціального виду правої частини (метод підбору).
36. Що називають системою лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь? Укажіть алгоритми розв'язання однорідної системи методом виключення.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик, В.П. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – 4-те вид. – Харків : Веста, 2013. – 648 с.
2. Литвин, І.І. Вища математика / І.І. Литвин, О.М. Конопчук, Г.О. Железняк. – К. : ЦНЛ, 2019. – 368 с.
3. Клепко, В.Ю. Вища математика в прикладах і задачах / В.Ю. Клепко, В.Л. Голець. – К. : ЦНЛ, 2019. – 594 с.
4. Турчанінова, Л.І. Вища математика в прикладах і задачах : навч. посіб. / Л.І. Турчанінова, О.В. Доля. – К. : Ліра, 2018. – 348 с.
5. Бугров, Я.С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – 3-е изд. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
6. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов : в 2-х т. / Н.С. Пискунов. – 13-е изд. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985.
7. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студ. втузов : в 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. – Ч. I. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 2003. – 304 с.
8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособие для студ. втузов : в 2-х ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевников. – Ч. II. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 2003. – 416 с.
9. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. – 640 с.