

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Артеменко Ю.А., Любименко О.М.

ФІЗИКА. ЧАСТИНА 1

- Фізичні основи класичної механіки
- Основи молекулярної фізики і термодинаміки
- Електростатика та постійний струм
- Електромагнетизм

Рекомендовано Державним вищим навчальним закладом

«Донецький національний технічний університет»

Міністерства освіти і науки України

як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Луцьк

ДВНЗ «ДонНТУ»

2022

УДК 53(075.8)
А 86

ISBN 978–966–377–249–3

Рекомендовано Вченою Радою Державного вищого навчального закладу «Донецький національний технічний університет» Міністерства освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (Протокол № 6 від 30.06.2022 р.)

Автори:

Ю.А. Артеменко, к.т.н., доцент, доцент кафедри електричної вищої математики та фізики (Державний вищий навчальний заклад «Донецький національний технічний університет»).

О.М. Любименко, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри електричної інженерії (Державний вищий навчальний заклад «Донецький національний технічний університет»).

Рецензенти:

Е.П. Фельдман, д.ф.-м.н., професор, відділення фізики гірничих процесів Інституту геотехнічної механіки НАН України м. Дніпро, Україна

А.П. Відьмаченко, академік АН ВШ України, д.ф.-м.н., професор, професор кафедри фізики (Національний університет біоресурсів і природокористування України)

Н.Ф. Гоголева, к.ф.-м.н., доцент, доц. кафедри вищої математики та фізики (Державний вищий навчальний заклад «Донецький національний технічний університет»).

А 86 Артеменко Ю.А. Фізика. Частина 1: навч. посіб. / Ю.А. Артеменко, О.М. Любименко. – Луцьк : ДВНЗ «ДонНТУ», 2022. – 259 с.: іл.46, табл.7. – Бібліогр. 9.

У навчальному посібнику розглянуто питання використання та застосування основних законів фізики. Наведено визначення основних фізичних понять і величин, що вивчаються в курсі загальної фізики, сформульовані фізичні закони, коротко роз'яснена сутність описуваних ними явищ.

Значну увагу надано способам і засобам відображення основних законів, роботі з формулами. Розглянуто принципи роботи деяких вимірювальних приладів.

Застосування основних законів та понять для вирішення розповсюджених завдань робить даний посібник корисним як на початковому етапі вивчення сучасної фізики, так і для поглиблення знань в області фізики та наук, які базуються на елементарних знаннях з фізики. Навчальний посібник містить приклади розв'язання задач, а також питання для самоконтролю.

Навчальний посібник призначений для студентів фаху електротехніка, теплотехніка гірництво, механіка, електроніка, телекомунікації, автоматизація та споріднених спеціальностей.

© Артеменко Ю.А., Любименко О.М., 2022

ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. Фізичні основи класичної механіки.	9
1.1 Кінематика поступального руху.....	9
1.2 Кінематика обертального руху.....	14
1.3 Зв'язок кутових і лінійних величин.....	16
1.4 Динаміка поступального руху.	17
1.4 Закони динаміки (закони Ньютона).	21
1.5 Механічна енергія.....	25
1.6 Динаміка обертального руху.....	32
1.7 Принцип відносності Галілея.....	41
1.8 Елементи спеціальної теорії відносності.....	46
1.9 Приклади розв'язку завдань.....	52
1.10 Питання для самоконтролю.....	59
РОЗДІЛ 2. Основи молекулярної фізики і термодинаміки.....	65
2.1 Основи молекулярно–кінетичної теорії.....	65
2.2 Основне рівняння молекулярно–кінетичної теорії (Рівняння Клаузіуса). 69	
2.3 Молекулярно–кінетичне трактування абсолютного нуля.....	71
2.4 Середня енергія молекул.....	72
2.5 Основи статистичної фізики Максвела – Больцмана.....	75
2.6. Середні швидкості молекул.....	80
2.7 Розподіл Больцмана.....	84
2.8 Основи термодинаміки.....	85
2.9 Внутрішня енергія, теплота та робота газу.....	87
2.10 Перший закон термодинаміки.....	89
2.11 Теплоємність і її трактування молекулярно кінетичною теорією.....	90
2.12 Застосування першого закону термодинаміки до фізичних процесів.....	92
2.13 Другий закон термодинаміки.....	97

2.14 Теплові та холодильні машини.....	101
2.15 Явища переносу.....	104
2.16 Приклади розв'язання завдань.....	111
2.17 Питання для самоконтролю	116
РОЗДІЛ 3. Електростатика та постійний струм	121
3.1 Електростатика	121
3.1.1 Електричний заряд. Закон Кулона.....	121
3.1.2 Електричне поле	123
3.1.3 Теорема Гауса. Використання теореми для розрахунку полів.....	126
3.1.4 Робота електричного поля по переміщенню заряду.....	132
3.1.5 Потенційна енергія взаємодії точкових зарядів.....	133
3.1.6 Потенціал електричного поля. Еквіпотенціальні поверхні	134
3.1.7 Зв'язок напруженості електричного поля з потенціалом	136
3.1.8 Діелектрики в електричному полі	138
3.1.9 Провідники в електричному полі	143
3.1.10 Електроємність	144
3.1.11 Конденсатори.....	146
3.1.12 Енергія електричного поля.....	150
3.2 Постійний електричний струм.....	152
3.2.1 Характеристики струму	152
3.2.2 Електрорушійна сила. Напруга.....	154
3.2.3 Закон Ома для однорідної ділянки кола	157
3.2.4 Закон Джоуля –Ленца. Робота й потужність струму.....	160
3.2.5 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола	161
3.3 Приклади розв'язання завдань.....	164
3.4 Питання для самоконтролю	169
РОЗДІЛ 4. Електромагнетизм	174
4.1 Магнітне поле в вакуумі.....	175
4.1.1 Вектор індукції магнітного поля	176
4.1.2 Закон Біо–Савара–Лапласа. Магнітне поле рухомого заряду	178

4.1.3	Магнітне поле прямого струму	180
4.1.4	Магнітне поле на осі кругового струму	182
4.1.5	Циркуляція вектору індукції магнітного поля. Закон повного струму для вакууму	185
4.1.7	Сила, що діє на елемент струму в магнітному полі. Закон Ампера	192
4.1.8	Сила Лоренца. Рух заряджених частинок в магнітному полі	194
4.1.9	Контур зі струмом в магнітному полі	199
4.1.10	Магнітний потік. Теорема Гаусса-Остроградського	204
4.1.11	Робота по переміщенню провідника з струмом в магнітному полі. ..	206
4.2	Магнітне поле в речовині	208
4.2.1	Теорема Гаусса–Остроградського для магнітного поля в речовині. Вектор намагніченості	208
4.2.2	Вектор напруженості магнітного поля. Закон повного струму для магнетиків	211
4.2.3	Магнітна сприйнятливість і магнітна проникність речовини	214
4.2.4	Магнітне поле на межі двох магнетиків	215
4.2.5	Класифікація магнетиків. Магнітні моменти атомів і молекул	218
4.2.6	Елементарна теорія діа– і парамагнетизму	220
4.2.7	Феромагнетизм. Доменна структура феромагнетиків.....	224
4.3	Явище електромагнітної індукції	227
4.3.1	Потокозчеплення. Струми Фуко.....	229
4.3.2	Явище самоіндукції. Індуктивність. Струми при розмиканні і замиканні ланцюга.....	230
4.3.3	Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії магнітного поля ...	233
4.3.4	Явище взаємної індукції. Енергія системи провідників зі струмом	234
4.4	Приклади розв'язання завдань.....	238
4.5	Питання для самоконтролю	243
4.6	Тестові завдання	245
	СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	250
	ДОДАТКИ.....	251

Додаток А. Поняття про вимірювання. Інтернаціональна система одиниць вимірювання (СІ).....	251
Додаток Б. Деякі числа, що часто зустрічаються	252
Додаток В. Формули для наближених обчислень	252
Додаток Г. Основні тригонометричні формули.....	253
Додаток Д. Таблиця похідних	253
Додаток Е. Деякі відомості про вектори.....	253
Додаток Ж. Приставки до позначень одиниць.....	254
Додаток З. Основні фізичні константи	254
Додаток Й. Зв'язок між магнітною індукцією B поля в феромагнетику і напруженість H намагнічуючого поля.....	258

ВСТУП

Фізика є наукою про найбільш загальні форми руху матерії. Рух – це спосіб існування матерії, найважливіший її атрибут. Під рухом розуміють будь–які зміни, які відбуваються з матерією. Зміна положення тіла в просторі, нагрівання тіл, розширення газу, поширення електромагнітної хвилі – це все форми руху матерії. Існують такі види руху матерії: механічний, тепловий, електромагнітний, оптичний, атомний і ядерний;

У русі матерії, зміні оточуючого нас світу спостерігаються певні закономірності. Одне із завдань науки полягає у виявленні цих закономірностей. Після аналізу великого фактичного матеріалу, як правило, можна знайти найбільш загальну закономірність, яку називають фізичним законом. Фізичний закон пояснює певне коло явищ, які спостерігаються при русі матерії.

Курс лекцій містить основні поняття і закони механіки великих тіл і малих швидкостей, яка була створена працями Тихо Браге (1546–1601) і Галілео Галілея (1564–1642), які розвинули її експериментальну частину, а також працями М. Коперника (1473– 1543), І. Кеплера (1571–1630) та І. Ньютона (1642–1727), які сформулювали теоретично її основні закони. Ця механіка, названа класичної або механікою Ньютона, грає виключно велику роль у фізиці. Дійсно, на ній, так чи інакше, ґрунтуються багато положень, що традиційно розглядаються в фізики. Наприклад, молекулярна фізика включає в себе вивчення системи безладно рухаються часток, а в електродинаміці струм – це спрямоване рух заряджених частинок.

Молекулярна фізика і термодинаміка – це розділи фізики, що вивчають будову і властивості речовини. В даний час ці два розділи фізики досить тісно взаємопов'язані один з одним так, що часом важко визначити, де закінчується молекулярна фізика і починається термодинаміка. Проте, можна виділити два принципово різних підходи до вивчення властивостей речовини: молекулярно–кінетичний і термодинамічний.

Молекулярно – кінетичний підхід заснований на основних положеннях молекулярно–кінетичної теорії (МКТ) згідно з якими всі речовини складаються з атомів і молекул, які знаходяться в стані безперервного

хаотичного руху. МКТ розглядає, строго кажучи, не сама речовина, а його модель. Наприклад, при розгляді газу використовують більш–менш складну модель ідеального газу. Застосувавши закони механіки для опису руху частинок ідеального газу, можна отримати деякі властивості газів.

Термодинамічний підхід передбачає вимір будь–яких параметрів системи, що вивчається. Так, вимірюючи температуру, тиск і об'єм газу можна отримати математичну зв'язок між цими величинами. Термодинаміка не розглядає атомно–молекулярну будову речовини. Тут важливі такі поняття, як енергія, робота, кількість теплоти, ентропія і ін. В основі термодинаміки лежать її основні закони: перший і другий початок термодинаміки.

Метою викладання навчальної дисципліни «Фізика» має бути: створення у студентів достатньо широкої теоретичної підготовки з області фізики, яка дозволяє майбутнім спеціалістам мати цілісне уявлення про процеси та явища в живій та неживій природі, орієнтуватися в потоці наукової та технічної інформації та забезпечує можливість використання сучасних наукових методів для вирішення професійних завдань

Основними завданнями вивчення дисципліни «Фізика» є формування світогляду та сучасного фізичного мислення; знайомство із загальними фізичними явищами, їх механізмами, закономірностями та їх практичним використанням; оволодіння різноманітними методами розв'язання конкретних задач з різних областей фізики; ознайомлення з фізичною апаратурою, формування навичок проведення фізичного експерименту; формування навичок фізичного моделювання прикладних задач майбутньої спеціальності.

Програма навчальної дисципліни «Фізика. Частина 1», складається з чотирьох змістових модулів. Назва модуля співпадає з назвами тем:

Тема 1. Фізичні основи класичної механіки.

Тема 2. Основи молекулярної фізики і термодинаміки.

Тема 3. Електростатика та постійний струм.

Тема 4. Електромагнетизм.

РОЗДІЛ 1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ МЕХАНІКИ.

- 1.1 Кінематика поступального руху.
- 1.2 Кінематика обертального руху
- 1.3 Зв'язок кутових і лінійних величин
- 1.4 Динаміка поступального руху.
- 1.5 Механічна енергія
- 1.6 Динаміка обертального руху.
- 1.7 Принцип відносності Галілея
- 1.8 Елементи спеціальної теорії відносності.
- 1.9 Приклади розв'язання завдань
- 1.10 Питання для самоконтролю

1.1 Кінематика поступального руху

Механіка – це розділ фізики, що вивчає найбільш просту форму руху матерії – механічний рух. Механічним рухом називається зміна положення даного тіла (або його частин) відносно інших тіл. Історично механіка почала розвиватися раніше інших розділів фізики.

Кінематика – це розділ механіки, який вивчає механічний рух тіл без розгляду причин, що викликають цей рух.

Найпростіший об'єкт дослідження кінематики – матеріальна точка (м.т.) – це тіло, розмірами якого, в умовах даного завдання, можна знехтувати. Завдання кінематики полягає у визначенні положення м.т. в просторі, її швидкості та прискорення в будь-який момент часу. Положення м.т. або будь-якого тіла в просторі визначається щодо якогось тіла, яке називається тілом відліку. Як правило, з тілом відліку пов'язують декартову систему координат. Для визначення положення м.т. в системі координат необхідно задати 3 координати: x , y , z .

Нехай положення м.т. в момент часу t_1 визначається радіус-вектором $\vec{r}_1$, а в момент часу t_2 – $\vec{r}_2$ (рис 1.1).

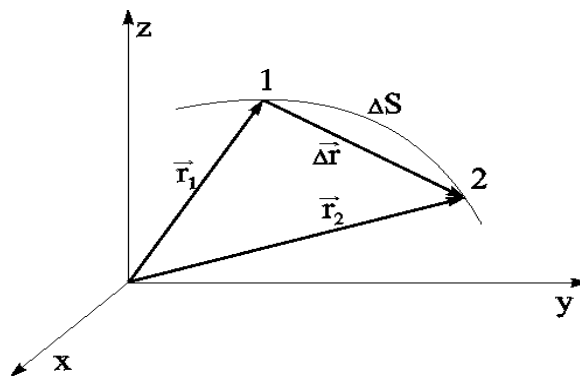


Рисунок 1.1 – Положення матеріальної точки

Тоді за час $\Delta t = t_2 - t_1$ матеріальна точка переміститься з положення 1 в положення 2. Довжина відрізка 1 – 2 дорівнює ΔS – це шлях, пройдений точкою. Вектор $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ називається переміщенням. У загальному випадку $\Delta S \geq \Delta r$. Якщо $\Delta t \rightarrow dt$, то $\Delta \vec{r} \rightarrow d\vec{r}$, а $\Delta S \rightarrow dS$. Тоді вектор $d\vec{r}$ (елементарне переміщення) спрямований по дотичній до траєкторії, а $dS = dr$.

Швидкість – одне з основних понять в кінематиці. Середньою швидкістю називається відношення шляху, пройденого м.т., до того проміжку часу, протягом якого цей шлях пройдено.

$$v_{\text{сеп}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Середньою векторною швидкістю називається відношення

$$\vec{v}_{\text{сеп}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Справжньою (миттєвою) швидкістю називається вектор і є формулою для визначення швидкості:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.1)$$

Вектор $\vec{v}$ спрямований по дотичній до траєкторії. Так як $|d\vec{r}| = dS$, то

$$v = \frac{dS}{dt}$$

Швидкість – фізична векторна величина, характеристика руху, яка чисельно дорівнює похідній від шляху за часом.

Рух з постійною швидкістю називають рівномірним. Для рівномірного і прямолінійного руху справедлива формула

$$v = \frac{S}{t}$$

Прискорення

Нехай у положенні 1 матеріальна точка має швидкість v_1 , а через час Δt у положенні 2 – швидкість v_2 (рис.1.2). Швидкість може змінюватися по величині й по напрямку (рис.1.3).

Прискорення характеризує зміну швидкості в часі.

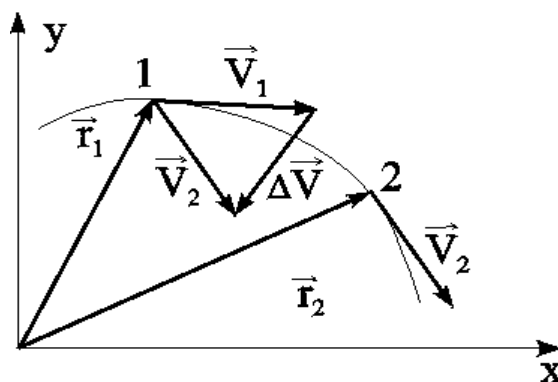


Рисунок 1.2 – Зміна швидкості

Середнє прискорення – відношення збільшення швидкості до проміжку часу, протягом якого відбулася зміна швидкості (використовується для рівномірного руху):

$$a_{\text{сеп}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

Дійсне прискорення – це межа відносини, коли Δt прагне до нуля, тобто

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1.2)$$

Можна записати

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

або *прискорення* $a = \frac{d^2 s}{dt^2}$ – є друга похідна від шляху за часом.

Нормальне й тангенціальне прискорення

Вектор швидкості $\vec{v}$ можна записати як добуток

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}, \quad (1.3)$$

де вектор $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, спрямований по дотичній до траєкторії



Рисунок 1.3 – Спрямування швидкості

Підставимо (1.3) в (1.2) і тоді похідна добутку

$$\vec{a} = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Позначимо: $\vec{a}_\tau = \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt}$ – тангенціальне прискорення,

$\vec{a}_n = v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$ – нормальне прискорення.

Тангенціальне прискорення $\vec{a}_\tau$ – характеризує зміну швидкості по величині. Вектор $\vec{a}_\tau$ спрямований по дотичній до траєкторії.

Нормальне прискорення $\vec{a}_n$ – характеризує зміну швидкості по напрямку. Вектор $\vec{a}_n$ спрямований до центру кривизни траєкторії.

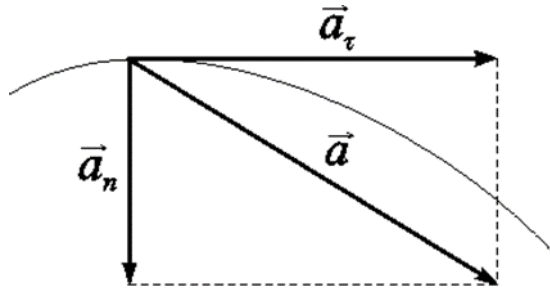


Рисунок 1.4 – Прискорення

Повне прискорення дорівнює:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t;$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}.$$

Відзначимо, що напрямок повного прискорення збігається з напрямком результуючої сили, що діє на матеріальну точку (згідно 2-го закону Ньютона):

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_{рез}.$$

Приклади:

1. $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_\tau = 0$ – це відповідає рівномірному, прямолінійному руху. Для цього випадку

$$S = v \cdot t$$

2. $\vec{a}_n = 0$, $\vec{a}_\tau = \text{const}$ – це рівнозмісний рух по прямій. Для цього випадку напишемо формули кінематики:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad v = v_0 + at$$

3. $\vec{a}_n = \text{const}$, $\vec{a}_\tau = 0$ – це рівномірний рух по колу.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

1.2 Кінематика обертального руху

Розглянемо тверде тіло, яке має нерухливу вісь обертання.(рис.1.5).

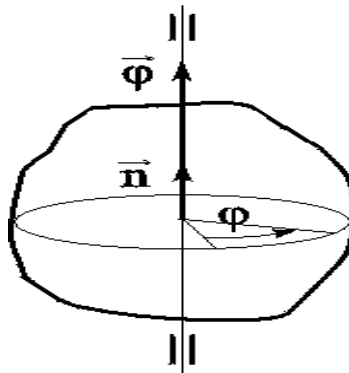


Рисунок 1.5 –Тіло, яке має нерухливу вісь

Тіло повернулося на кут φ . Вектор кута повороту:

$$\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{n}$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор, спрямований уздовж осі обертання так, що його напрямок пов'язане з напрямком обертання правилом правого гвинта (буравчика).

Відзначимо, що вектори типу швидкості, прискорення, для яких напрямок впливає із самої природи величин, називаються полярними.

Вектора типу $\vec{\varphi}$ напрямом яких зв'язують із напрямком обертання (або обходу), називають аксіальними.

Кутова *швидкість* – перша похідна від кута повороту за часом:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

Спрямований вектор $\vec{\omega}$ так як $\vec{\varphi}$ – уздовж осі обертання. Для рівномірного обертання

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Кутове *прискорення* – перша похідна від кутової швидкості за часом:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ спрямований, так само, як і $d\vec{\omega}$.

Для рівноприскореного обертального руху

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Період обертання T – час, за який тіло робить один оборот, тобто повертається на кут 2π радіан. Оскільки за час $\Delta t = T$ тіло повертається на кут $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Частота ν – число обертів в одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Зв'язок частоти з кутовою швидкістю

$$\omega = 2\pi\nu$$

1.3 Зв'язок кутових і лінійних величин

Радіус кола R , довжина дуги S і кут повороту φ (у радіанах) (рис.1.6) зв'язані таким співвідношенням:

$$S = \varphi \cdot R$$

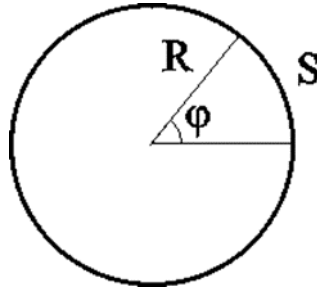


Рисунок 1.6 – Радіус кола R , довжина дуги S і кут повороту φ

Диференціюючи це вираження за часом, одержимо:

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{або} \quad v = R\omega \quad (1.4)$$

Це є зв'язок лінійної й кутової швидкості. Повторне диференціювання за часом приведе до вираження

$$\frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \quad \text{або} \quad a_t = R \cdot \varepsilon \quad (1.5)$$

Це є зв'язок тангенціального й кутового прискорень.

Ще одна корисна формула:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \quad (1.6)$$

1.4 Динаміка поступального руху

Динаміка – розділ механіки, який вивчає механічний рух з урахуванням причин, що викликає цей рух.

Основні поняття

1. *Маса* – це міра гравітаційних і інертних властивостей тіла, міра його енерговмісту.

а) Гравітаційна маса відбиває властивість мас m_1 і m_2 притягатися друг до друга. Закон всесвітнього тяжіння:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

б) Інертна маса відбиває інертні властивості тіл. Другий закон Ньютона:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

в) Маса, як захід енерговмісту. У спеціальній теорії відносності

$$E = mc^2$$

У класичній механіці маса не залежить від швидкості руху тіла

2. *Імпульс* характеризує рух тіла.

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad (1.7)$$

Формула (1.7) є визначенням імпульсу для матеріальної точки. Спрямований вектор $\vec{P}$ так само, як вектор $\vec{v}$. У класичній механіці, для будь-яких швидкостей, імпульс тіла прямо пропорційний його швидкості.

3. *Сила* – спосіб впливу одного тіла на інше, результатом якого є зміна швидкості або деформація (рис. 1.7). Сила – векторна величина, характеризується величиною, напрямком і точкою прикладання. Для поступального руху точка прикладання часто не відіграє ролі.

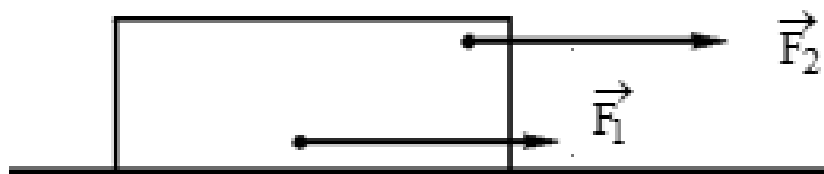


Рисунок 1.7 – Результат дії $\vec{F}_1$ або $\vec{F}_2$ – однаковий.

Для сил діє принцип незалежності дії: дія однієї сили на м.т. (тіло) не залежить від дії інших сил. Тому сили можна складати за правилом додавання векторів (рис.1.8).

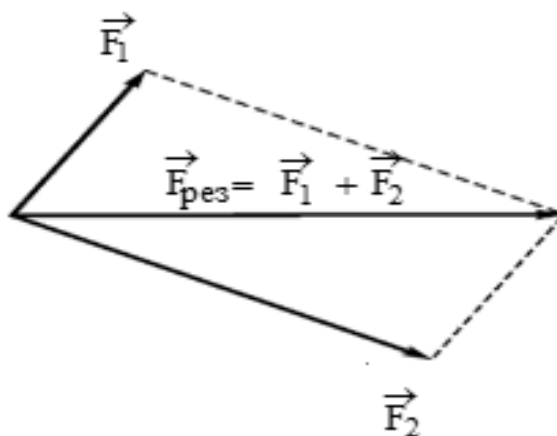


Рисунок 1.8 – Додавання сил

Величину сили можна визначити, вимірявши її (наприклад, динамометром) або розрахувати, використовуючи закони взаємодії.

У механіці 5 законів взаємодії:

1) Сила гравітаційної взаємодії

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad (1.8)$$

2) Закон Ньютона – Амонтона або закон сухого тертя

$$F = \mu N \quad (1.9)$$

де μ – коефіцієнт тертя,

N – реакція опори.

3) Закон Архімеда

$$F_A = \rho g V \quad (1.10)$$

4) Закон Гука, сила пружності

$$F_{np} = -k x \quad (1.11)$$

5) Закон Стокса (в'язкого тертя)

$$F = r v \quad (1.12)$$

де r – коефіцієнт опору,

v – швидкість руху.

4. *Робота*. Тіло переміщується під дією сили на величину $d\vec{r}$ (рис.1.9 а).

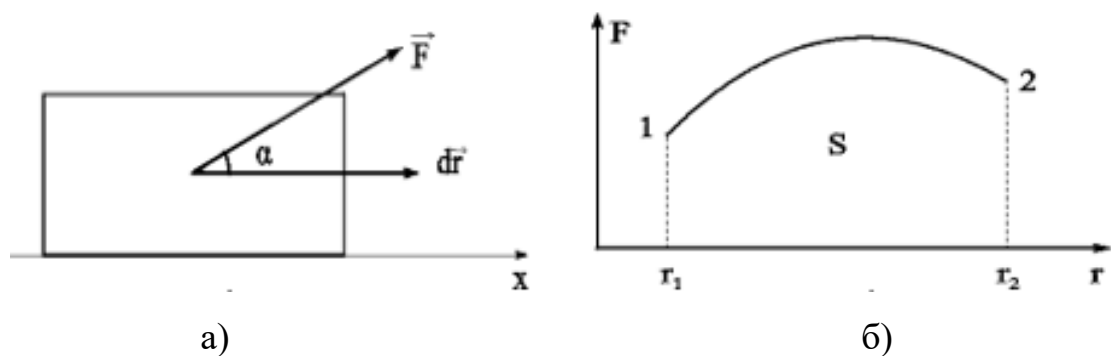


Рисунок 1.9 – Робота сили (а) та залежності сили від переміщення (б)

Тоді, на ділянці $d\vec{r}$ сила $\vec{F}$ виконує елементарну роботу dA :

$$A = F_1 \cdot dr, \quad (1.13)$$

де скалярний добуток векторів можна записати у вигляді

$$dA = F \cdot dr \cdot \cos \alpha.$$

Аналіз поняття:

1) Робота – величина скалярна, алгебраїчна.

а) $dA > 0$, якщо $0 \leq \alpha < \pi/2$

У цьому випадку говорять, що сила виконує роботу над тілом.

б) $dA < 0$, якщо $\pi/2 < \alpha \leq \pi$

У цьому випадку тіло виконує роботу проти зовнішніх сил. Наприклад, відбувається робота проти сил тертя.

в) $dA = 0$, якщо $\alpha = \pi/2$

Якщо сила перпендикулярна переміщенню, то робота не відбувається. Наприклад, сила Лоренца перпендикулярна швидкості, тому її робота завжди дорівнює нулю.

Сила, що лінійно залежить від швидкості точки й спрямована завжди перпендикулярно цієї швидкості називається *гіроскопічною силою*.

2) Для визначення роботи на ділянці кінцевої довжини треба знати, як міняється сила залежно від переміщення й обчислити інтеграл

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r) d\vec{r}$$

3) На рис. 1.9 б, площа S під кривій 1 – 2 чисельно дорівнює роботі сили на відрізок $r_2 - r_1$.

4) *Потенційні й консервативні сили*. Сили, які залежить тільки від взаємного розташування тіл, називаються *потенційними* (наприклад, сила гравітаційної взаємодії). Якщо робота таких сил не залежить від шляху, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла, то сили називаються *консервативними*.

5) *Дисипативною силою* називається сила, спрямована завжди протилежно швидкості тіла щодо середовища, що викликає гальмування цього тіла. Робота дисипативних сил (сила тертя, сила опору середовища) завжди негативна. Дисипативна сила має вигляд

$$F_{\text{дис}} = -k v$$

де k – коефіцієнт, який може залежати від швидкості.

5) *Потужність*. Характеризує швидкість виконання роботи.

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Можна записати:

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v},$$

або

$$N = F v \cos \alpha,$$

де α – кут між $\vec{F}$ і $\vec{v}$.

1.4 Закони динаміки (закони Ньютона).

Закони Ньютона – це основні закони механіки.

1-й закон: $\vec{F}_{рез} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

Існують такі системи відліку (вони називаються інерційними), у яких тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху поки й оскільки на нього не діють інші тіла (поля).

Інакше кажучи, якщо результуюча сила, що діє на тіло дорівнює нулю, то тіло перебуває у спокою або рівномірно й прямолінійно рухається. Спокій – окремий випадок рівномірного, прямолінійного руху.

$$\vec{F}_{рез} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Результуюча сила, що діє на тіло дорівнює швидкості зміни імпульсу цього тіла.

Урахуємо, що $\vec{P} = m\vec{v}$

тоді

$$\vec{F}_{рез} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt}.$$

Якщо $m = \text{const}$, то

$$\vec{F}_{рез} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Тому для випадку, коли маса тіла постійна, закон можна записати так:

$$\vec{F}_{рез} = m\vec{a}$$

Звідси, зокрема, випливає, що напрямок результуючої сили збігається з напрямком прискорення $\vec{a}$.

Із другого закону випливає, що під дією даної сили зміна швидкості для тіла з більшою масою відбувається за більш тривалий проміжок часу. Говорять, що тіла мають інерційні властивості, а маса є заходом інертних властивостей.

З інерцією тіл кожний зустрічався на практиці – довести дану швидкість масивному тілу або зупинити масивне тіло, що рухається, складніше, чим проробити те ж з менш масивним.

3-й закон (рис.1.10).

Нехай взаємодіють два тіла перше (1) і друге (2):

F_{21} – сила, з якої друге тіло діє на перше.

F_{12} – сила, з якої перше тіло діє на друге.

Тоді закон записується так:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Сили взаємодії двох тіл рівні по величині й протилежні по напрямку.



Рисунок 1.10 – Взаємодія двох тіл

Із третього закону Ньютона, зокрема, випливає, що сили в природі виникають попарно, наприклад (рис.1.11):

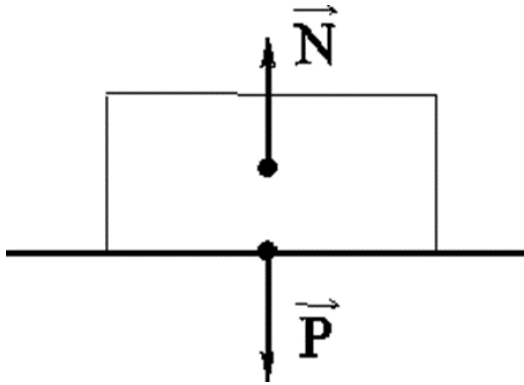


Рисунок 1.11 – Сила ваги P дорівнює силі реакції опори N .

Другий закон Ньютона для системи тіл.

Система може містити скільки завгодно тіл. Для простоти розглянемо систему з 2-х тіл (м.т.) (рис.1.12):

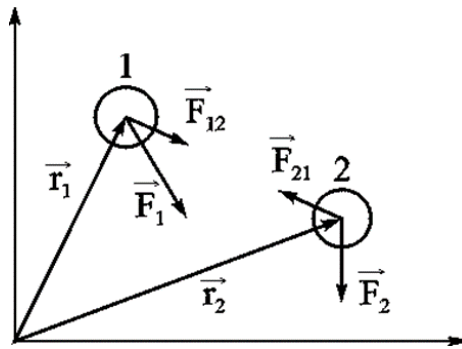


Рисунок 1.12 – Система тіл

Нехай у системі діють внутрішні сили $\vec{F}_{12}$ і $\vec{F}_{21}$ й зовнішні сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ тобто наша система не замкнена. Для системи тіл уводять поняття *центру мас*. Положення центру мас визначається радіус-вектором $\vec{r}_c$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

де N – число тіл (м.т.) у системі.

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Для нашої системи, m_1 і m_2 – маси тіл.

Швидкість центру мас дорівнює

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \right) = \frac{\sum (m_i \vec{v}_i)}{\sum m_i}$$

Позначимо $M_c = \sum m_i$ – маса системи,

$\vec{P}_c = \sum m_i \vec{v}_i$ – імпульс системи, тоді швидкість центру мас буде дорівнювати

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{P}_c}{M_c}.$$

Запишемо другий закон Ньютона для 1 і 2 тіла

$$\frac{d(m_1 \vec{v}_1)}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1$$

$$\frac{d(m_2 \vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2$$

Склавши ці два вираження, одержимо

$$\frac{d(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,$$

оскільки з 3–го закону Ньютона $F_{12} = -F_{21}$.

Узагальнивши закон для будь-якої системи тіл, одержимо 2–й закон Ньютона для системи тіл

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = \sum \vec{F}_i \quad (1.14)$$

Швидкість зміни імпульсу системи дорівнює сумі зовнішніх сил, що діють на тіла системи.

Закон збереження імпульсу

Цей закон можна одержати з 2–го закону Ньютона для системи тіл.

Якщо система м.т. замкнена, то зовнішні сили відсутні, тобто $\sum \vec{F}_i = 0$.
Тоді 2-й закон Ньютона для системи тіл (м.т.) запишеться так

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = 0$$

або $\vec{P}_c = \text{const.}$

Це і є закон збереження імпульсу.

Словами: *імпульс замкненої системи м.т. залишається постійним.*

Оскільки імпульс системи дорівнює добутку маси системи на швидкість центру мас, то центр мас замкненої системи повинен рухатися рівномірно й прямолінійно. Внутрішні сили не можуть змінити швидкість центру мас системи. Важливо, що характер внутрішніх сил у системі ролі не відіграє. Внутрішні сили можуть бути консервативними й неконсервативними – закон збереження імпульсу працює для будь-яких сил.

Закон збереження імпульсу можна застосовувати й для незамкнутих систем у двох випадках:

1. Система незамкнута, але зовнішні сили, що діють на тіла системи, у сумі дають нуль.
2. Система незамкнута, але сума проекцій зовнішніх сил на деякий напрямок дорівнює нулю. У цьому випадку постійним залишається проекція $\vec{P}_c$ на цей напрямок.

1.5 Механічна енергія

Можна дати таке загальне визначення поняттю енергія: *це єдиний захід різних форм руху матерії*. Розрізняють механічну, хімічну, ядерну, електричну, теплову й ін. види енергії. У цьому розділі нас буде цікавити механічна енергія.

Якщо тіло здатне зробити роботу, то воно має певну енергію.

Механічна енергія тіла може бути обумовлена або рухом тіла, або знаходженням тіла в поле потенційних сил.

Енергія руху тіла називається кінетичною енергією E_k .

Енергія механічної взаємодії тіл або положення тіла в потенційному полі називається потенційною енергією E_p .

Тоді механічною енергією системи тіл назвемо енергію руху й взаємодії тіл і енергію їх положення в потенційних полях.

$$E_m = E_k + E_p$$

Кінетична енергія

Нехай тіло масою m переміщається з положення 1 у положення 2 під дією сили $\vec{F}$ (рис. 1.13).

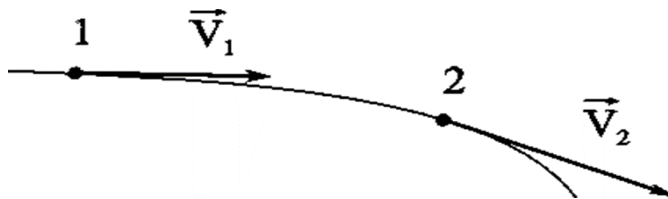


Рисунок 1.13 – Рух тіла

Сила $\vec{F}$ виконує роботу A_{12} і швидкість тіла збільшується від v_1 до v_2 .

Напишемо 2-й закон Ньютона для тіла:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Помножимо останнє рівняння на $\vec{v}dt = d\vec{r}$:

$$m\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Тоді одержимо

$$mv dv = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Проінтегруємо це рівняння, та отримаємо

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{12},$$

де A_{12} – робота з переміщення тіла із точки 1 у точку 2.

Назвемо кінетичною енергією величину $E_k = \frac{mv^2}{2}$, тоді $\Delta E_k = A$.

Це рівняння має наступний сенс: *робота сили дорівнює зміні кінетичної енергії тіла* (дія зовнішньої сили збільшує швидкість тіла). Якщо ж тіло виконує роботу проти зовнішніх сил ($A < 0$), тоді його кінетична енергія зменшується на ΔE_k .

Можна дати таке визначення поняттю кінетичної енергії – це енергія руху, чисельно рівна роботі зовнішніх сил, витраченої на переміщення тіла із точки, де швидкість тіла дорівнює нулю в точку, де швидкість тіла V .

Потенційна енергія

Потенційне поле – це область простору, у кожній точці якого на м.т. діють потенційні сили, що закономірно змінюються від точки до точки. Приклад – гравітаційне поле Землі – у кожній точці на тіло діє сила ваги. Нехай ці сили будуть консервативними.

Покажемо, що робота консервативних сил по замкненому контуру рівна 0. Нехай тіло переміщається в потенційному полі із точки 1 у точку 2 по шляху "а" і "б" (рис.1.14).

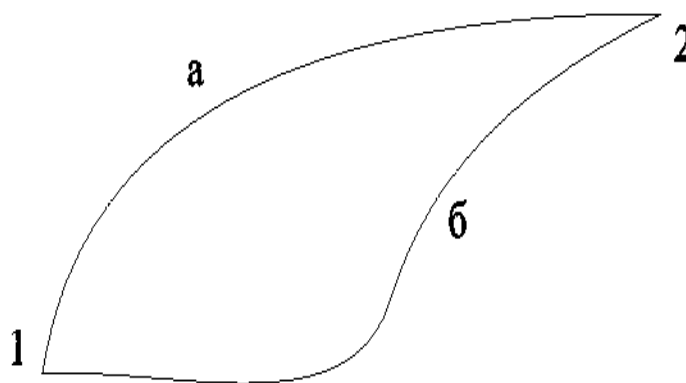


Рисунок 1.14 – Переміщення тіла в потенційному полі

З визначення консервативних сил випливає, що робота цих сил не залежить від шляху:

$$A_{12}(a) = A_{12}(b)$$

тоді

$$A_{12}(a) - A_{12}(b) = 0$$

Якщо тіло переміщається з 2 в 1, то напрямок сил на кожному відрізку шляху поміняється на протилежне, тобто

$$-A_{21}(b) = A_{12}(b)$$

тоді

$$A_{12}(a) + A_{21}(b) = 0$$

Тому що шляхи "а" і "б" обрані довільно, те тим самим було доведено, що робота консервативних сил по замкненому контуру рівна 0 або

$$\oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Потенційна *енергія* тіла в даній точці чисельно дорівнює роботі, яку виконують консервативні сили, при переміщенні тіла із цієї точки в точку, де значення $E_n = 0$

$$E_{n_1} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = A_{12}$$

Звідси випливає, що зміна потенційної енергії

$$\Delta E = E_{n2} - E_{n1} = -A_{12}$$

Це означає, що роблячи роботу консервативні сили зменшують потенційну енергію тіла.

Приклад 1. Потенційна енергія тіла, піднятого над Землею (рис.1.15).

На рівні Землі $E_n = 0$, а на висоті h

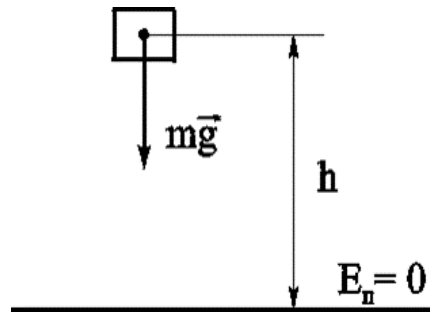


Рисунок 1.15 – Потенційна енергія тіла, піднятого над Землею

$$E_n = \int_0^h mg dh = mgh$$

Приклад 2. Потенційна енергія стислої пружини

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}$$

де k – коефіцієнт твердості пружини,

x – деформація.

Закон збереження механічної енергії

Розглянемо систему, у якій діють наступні сили:

1. Внутрішні – консервативні й неконсервативні сили. Це можуть бути, наприклад, сили гравітаційної взаємодії між тілами системи (консервативні) і сили тертя (неконсервативні).

2. Зовнішні – консервативні сили. Наприклад, тіла перебувають у полі ваги Землі.

Зміна кінетичної енергії системи за довільний проміжок часу:

$$\Delta E_K = A_K + A_{HK}$$

де A_K – робота консервативних сил,

A_{HK} – робота неконсервативних сил.

З іншого боку, роблячи роботу, консервативні сили зменшують потенційну енергію системи, тобто

$$A_K = -\Delta E_{\Pi}$$

Тоді

$$\Delta E_K + \Delta E_{\Pi} = A_{HK}$$

Робота неконсервативних сил дорівнює зміні механічної енергії системи. Якщо в системі відсутні неконсервативні сили, то

$$\Delta E_K + \Delta E_{\Pi} = 0$$

або $\Delta E_M = 0$ – закон збереження механічної енергії.

Якщо в системі тіл діє тільки консервативні сили (зовнішні й внутрішні), то механічна енергія системи зберігається.

Закон всесвітнього тяжіння (рис.1.16).

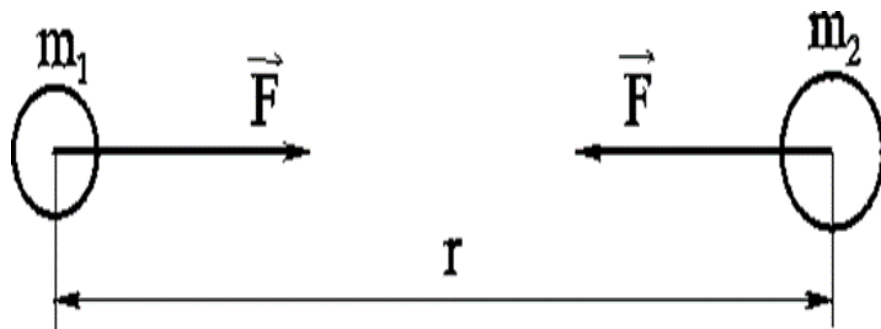


Рисунок 1.16 – Взаємодія двох тіл

Між двома матеріальними точками діють сили взаємного притягання, прямо пропорційні масам цих крапок і обернено пропорційні квадрату відстані між ними (Ньютон, 1665 г.). Модуль сили тяжіння визначається вираженням

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$ – гравітаційна стала.

Використовуючи закон, можна порахувати силу гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок m_1 і m_2 , що перебувають на відстані r друг від друга. Закон слушний і для сферичних тіл. У цьому випадку r – відстань між центрами цих тіл.

Енергія гравітаційної взаємодії

Розрахуємо енергію гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок m_1 і m_2 . Для цього скористаємося визначенням потенційної енергії й визначимо потенційну енергію m_2 у гравітаційному полі m_1 (рис.1.17).

Нехай m_1 перебуває на початку координат, а m_2 може рухатися уздовж осі r . Потенційна енергія m_2 рівна 0 при $r = \infty$.

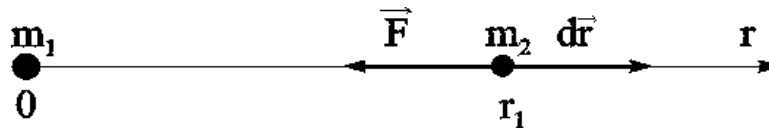


Рисунок.1.17 – Гравітаційна взаємодія

$$E_{\Pi} = \int_{r_1}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{\infty} F \cdot dr \cdot \cos \alpha = - \int_{r_1}^{\infty} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_1}$$

Потенційна енергія взаємодії: $E_{\Pi} = - \gamma \frac{m_1 m_2}{r}$

Графік потенційної енергії має вигляд (рис.1.18).

Графіки такого типу називаються діаграми потенційної енергії. Їх зручно використовувати для аналізу різних фізичних завдань.

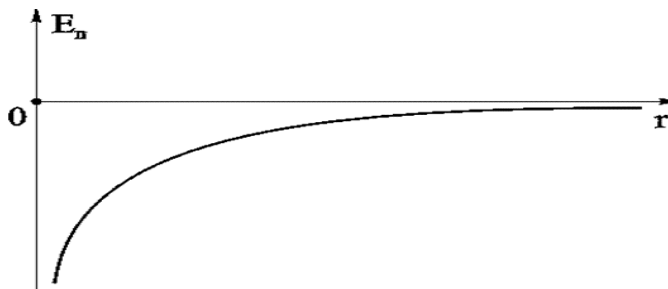


Рисунок 1.18 – Діаграма потенційної енергії

1.6 Динаміка обертального руху

Кінетична енергія обертання твердого тіла

Розглянемо тверде тіло, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ щодо нерухливої осі. Виділимо в цьому тілі елементарний об'єм dV . Маса цього об'єму

$$dm = \rho dV,$$

де ρ – густина матеріалу з якого виготовлено тіло (рис.1.19).

Кінетична енергія елементарної маси dm

$$dE_k = \frac{dmv^2}{2}$$

Про інтегруємо:

$$E_k = \int_0^m \frac{dmv^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^m r^2 dm$$

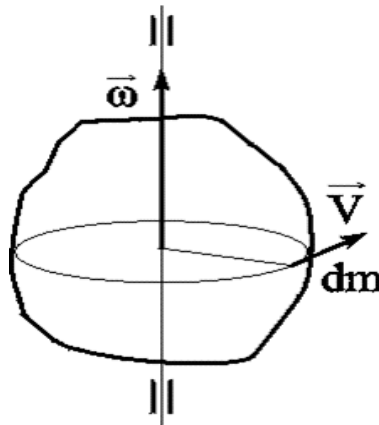


Рисунок 1.19 – Тіло, що має вісь

Величину I назвемо *моментом інерції твердого тіла відносно нерухомої осі*:

$$I = \int_0^m r^2 dm = \int_0^V r^2 \rho dV$$

Тоді кінетична енергія тіла, що обертається може бути розрахована, як:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Порівняємо цю формулу з формулою для кінетичної енергії при поступальному русі:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

За структурою формули однакові.

Якщо тіло приймає участь одночасно у двох рухах: поступальному й обертальному (наприклад, котиться куля), то загальна кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій поступального й обертального руху

$$E_k = E_{\text{пос}} + E_{\text{об}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Момент інерції твердого тіла

Момент інерції визначає інертні властивості тіла при обертальному русі так само, як маса при поступальному русі.

Для матеріальної точки (рис.1.20):

$$I = mr^2,$$

де r – відстань від осі обертання до точки

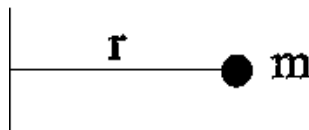


Рисунок 1.20 – Матеріальна точка.

Для тіла довільної форми I можна розрахувати по формулі:

$$I = \int_0^V r^2 \rho dV$$

Момент інерції тіла відносно осі залежить від розподілу маси щодо цієї осі.

Моменти інерції деяких тіл відносно осі, що проходить через центр мас, наведені нижче

1) Циліндр (диск)

а) порожній циліндр (диск) (рис.1.21):

$$I = mr^2$$

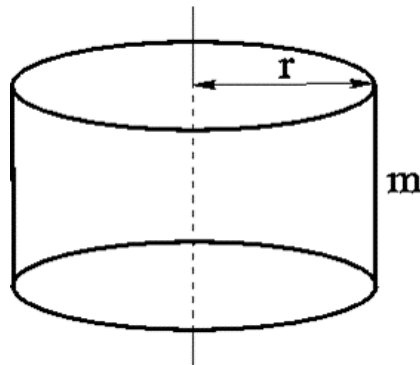


Рисунок 1.21 – Диск

б) суцільний циліндр (диск)

$$I = \frac{mr^2}{2}$$

2) Куля (рис.1.22) :

$$I = \frac{2}{5}mR^2$$

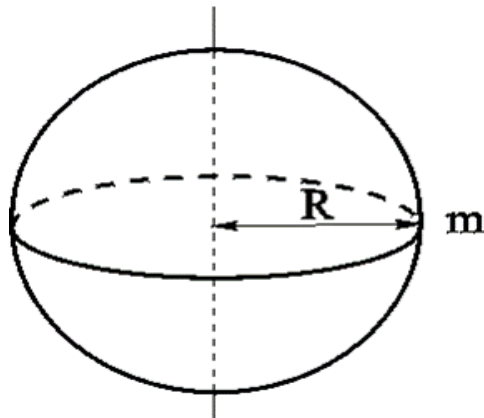


Рисунок 1.22 – Куля

3) Стрижень (рис.1.23):

$$I = \frac{1}{12}ml^2$$

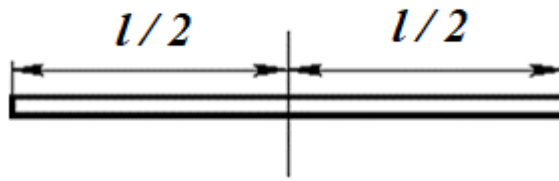


Рисунок 1.23 – Стрижень

Для розрахунків моменту інерції I щодо довільної осі, використовують теорему Штейнера.

Нехай момент інерції тіла m щодо осі 1 котра проходить через центр мас – I_0 . Тоді момент інерції щодо довільної осі 2, паралельної даної, буде рівний (рис.1.24):

$$I = I_0 + ma^2$$

де a – відстань між осями.

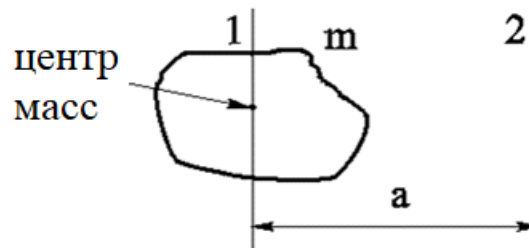


Рисунок 1.24 – Пояснювальний рисунок до теореми Штейнера

Приклад: Знайдемо момент інерції стрижня щодо осі, що проходить через його кінець (рис.1.25):

$$I = I_0 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} ml^2$$

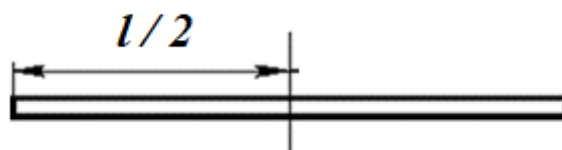


Рисунок 1.25 – Стрижень з віссю, що проходить через його кінець

Момент імпульсу

Момент імпульсу характеризує стан руху тіла при обертанні

а) момент імпульсу матеріальної точки відносно точки обертання O .

Нехай м.т. m має імпульс $\vec{P}$ спрямований, як показано на рис.1.26, $\vec{r}$ – радіус–вектор, проведений від точки O до м.т. m .

Тоді
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \text{ або } L = r \cdot P \cdot \sin \alpha$$

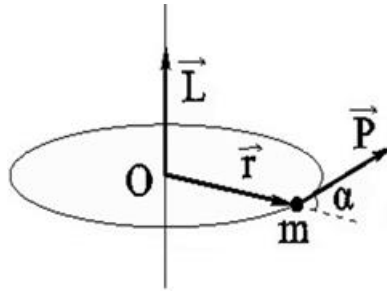


Рисунок 1.26 – Момент імпульсу матеріальної точки відносно точки обертання O

Напрямок вектору $\vec{L}$ показаний на рисунку.

б) момент імпульсу тіла відносної осі обертання (рис.1.27):

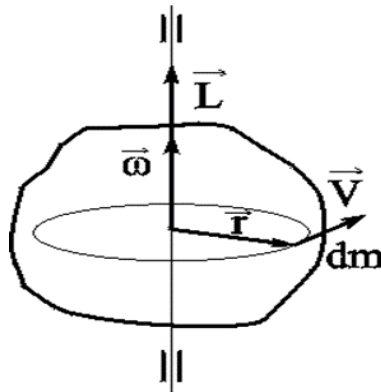


Рисунок 1.27 –Тіло що має вісь

Нехай є однорідне тверде тіло. Виберемо в ньому елементарний об'єм масою dm . Момент імпульсу маси dm щодо осі

$$dL = r \cdot P \sin 90^\circ = \omega \cdot r^2 \cdot dm$$

Для будь-якої елементарної маси dm кут між $\vec{r}$ та $\vec{P}$ дорівнює 90° . Тоді

$$L = \omega \int_0^m r^2 dm = I\omega$$

Враховуючи, що момент імпульсу $\vec{L}$ тіла відносно осі— вектор спрямований уздовж осі обертання в ту ж сторону, що й $\vec{\omega}$.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Момент сили

Якщо тіло має вісь обертання, то точка прикладання сили відіграє важливу роль.

а) Момент сили відносно точки (рис.1.28)

Моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O називається вектор $\vec{M}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

або

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha$$

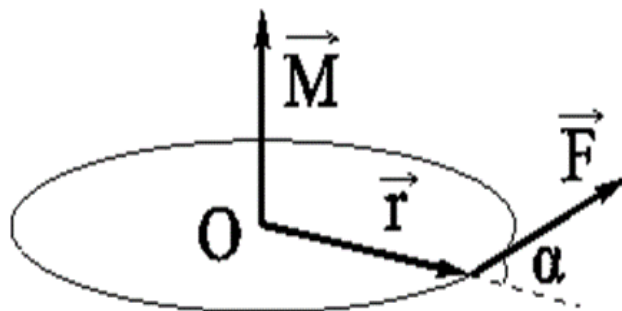


Рисунок 1.28 – Момент сили відносно точки

Момент сили ($\vec{M}$) характеризує здатність сили обертати тіло навколо точки, відносно якої воно береться.

б) Момент сили відносно осі.

Нехай тіло має вісь обертання (для простоти зображення обраний диск).

До точки А прикладена сила $\vec{F}$ (рис.1. 29).

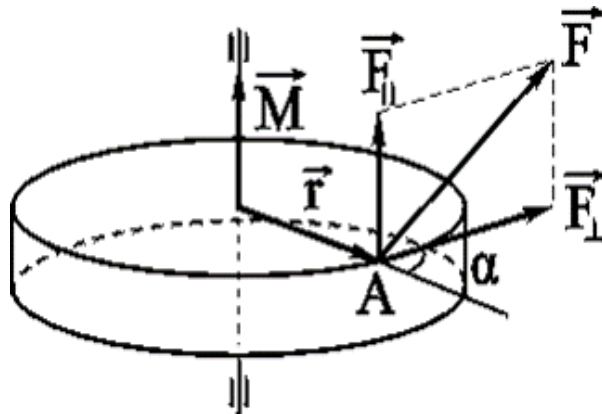


Рисунок 1.29 – Момент сили відносно осі

Розкладемо силу на дві складові: $\vec{F}_{\parallel}$ – проекцію сили на вісь, паралельну осі обертання й $\vec{F}_{\perp}$ – проекцію на площину, перпендикулярну осі. Моментом сили назвемо величину

$$M = \vec{r} \cdot \vec{F}_{\perp} \cdot \sin \alpha,$$

або

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp},$$

Спрямований вектор $\vec{M}$ уздовж осі обертання, згідно із правилом векторного добутку.

Основний закон динаміки обертального руху.

З'ясуємо, як виглядає основний закон динаміки обертового руху. Для поступального руху

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Для обертального руху, за аналогією, можна записати

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Тут силу $\vec{F}$ формально замінімо на момент сили $\vec{M}$, імпульс $\vec{P}$ а момент імпульсу $\vec{L}$.

Перевіримо, чи істи такий зв'язок.

Нехай матеріальна крапка обертається навколо нерухливої осі. Для цього випадку напишемо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \vec{P} \right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{V} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{F}$$

Тому що вектору $\vec{V}$ й $\vec{P}$ спрямовані в одну сторону, те $\vec{V} \times \vec{P} = 0$. Тоді похідна моменту імпульсу за часом прийме вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

Ми знайшли зв'язок між величинами :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{рез}} \quad (1.15)$$

це основний закон динаміки обертового руху.

Результуючий момент сил, що діють на тіло, щодо нерухливої осі дорівнює швидкості зміни моменту імпульсу тіла щодо цієї осі.

Напишемо основний закон динаміки обертового руху для випадку, коли момент інерції величина постійна

$$\vec{M} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$$

За структурою формула збігається із записом

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Закон збереження моменту імпульсу

Розглянемо тіло, що має вісь обертання, на яке не діють сили або сума їх

моментів дорівнює нулю. Тоді з основного рівняння динаміки обертального руху

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \text{або} \quad \vec{L} = \text{const} \quad (1.16)$$

Якщо на тіло не діють зовнішні сили, або їх дія скомпенсована, то момент імпульсу тіла щодо осі обертання є величина постійна.

Відзначимо, що закон слушний не тільки для тіла, але й для будь-якої замкненої системи матеріальних крапок.

Момент імпульсу замкненої системи матеріальних точок залишається постійним.

Важливо, що в системі можуть діяти внутрішні сили. Їхній характер ролі не відіграє. Ці сили виникають попарно і їх моменти сил урівноважують один одного.

Закон слушний і в незамкнутій системі, якщо моменти зовнішніх сил щодо осі обертання дорівнюють нулю. Наприклад, на каруселі без тертя виконується закон збереження моменту імпульсу, тому що сила ваги паралельна осі обертання, і її момент сили дорівнює нулю.

Робота при обертальному русі

Одержимо формулу для розрахунків роботи сили при обертальному русі. Скористаємося зв'язком між роботою й зміною кінетичної енергії

$$dA = dE_k = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega d\omega = \frac{M}{\mathcal{E}} \omega d\omega = Md\varphi$$

Елементарна робота при обертовому русі $dA = \vec{M} d\vec{\varphi}$

На закінчення відзначимо, що величини, що характеризують динаміку обертального руху, і формули, що описують цей рух, аналогічні відповідним величинам і формулам поступального руху. Ця аналогія простежується в таблиці 1.1.

Таблиця 1.1– Формули динаміки поступального і обертального рухів

Поступовий рух	Обертальний рух
m	$I = \int r^2 dm$
$\vec{F}$	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\vec{P} = m\vec{v}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = I\vec{\epsilon}$
$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
$E_k = \frac{mv^2}{2}$	$E_k = \frac{I\omega^2}{2}$
$dA = \vec{F} d\vec{S}$	$dA = \vec{M} d\vec{\phi}$

1.7 Принцип відносності Галілея

Поняття інерціальних систем відліку вже зустрічалося при розгляді 1–го закону Ньютона. Система, у якій виконуються закони Ньютона, називається інерціальною, а система, у якій не виконуються – називається неінерціальною. Будь-яка система відліку, що рухається щодо деякої інерціальної системи прямолінійно й рівномірно, буде також інерційною.

Експеримент показує, що система відліку, центр якої збігається із Сонцем – інерційна. Систему відліку, пов'язану з поверхнею Землі, можна також uważати практично інерційною.

Часто виникає необхідність переходу з однієї системи відліку в іншу. Розглянемо зв'язок координат, швидкостей і прискорень м.т. у різних системах відліку.

Розглянемо дві системи відліку: K – інерційна система умовно нерухома, а K' – рухається відносно K зі швидкістю v_0 (рис.1.30).

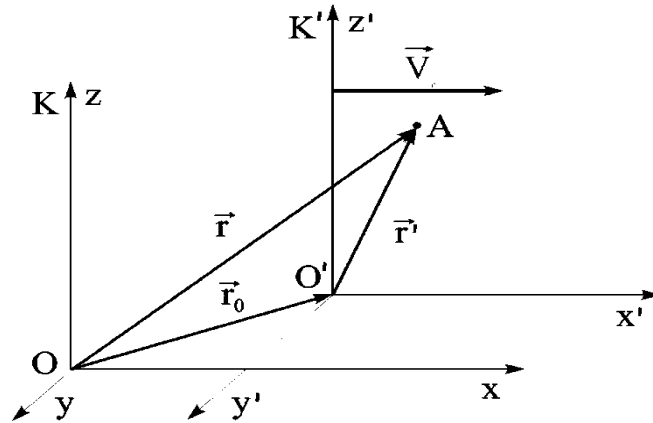


Рисунок 1.30 – Система відліку K' рухається відносно K

Вектор $\vec{r}'$ визначає положення точки A в K' , вектор $\vec{r}$ – положення точки A в K , а вектору $\vec{r}_0$ положення O' відносно O . Із правила додавання векторів випливає

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

Будемо вважати, що час тече однаково у всіх системах відліку, тобто $t=t'$. Тоді про диференціював дане вираження за часом, одержимо

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

або

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$$

де $\vec{v}'$ – відносна швидкість – це швидкість точки A у системі K' ;

$\vec{v}$ – абсолютна швидкість – швидкість точки A у системі K ;

$\vec{v}_0$ – переносна швидкість.

Як бачимо швидкість точки буде різною в різних системах відліку. Очевидно, і кінетична енергія тіла, і імпульс будуть різні в різних системах відліку.

Швидкість, імпульс, кінетична енергія – *неінваріантні* величини (міняються при переході з однієї системи відліку в іншу).

Про диференціював рівняння співвідношення швидкостей у різних системах ще раз за часом, отримаємо:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt}$$

або

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$$

Далі розглянемо два випадки:

1) Якщо $\vec{v}_0 = \text{const}$.

У цьому випадку система відліку K' так само, як і K є інерційною і

$$\frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0.$$

звідки витікає

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

Це значить, що прискорення не змінюється при переході з однієї інерційної системи в іншу. Помножимо обидві частини цього рівняння на масу матеріальної точки m :

$$m\vec{a} = m\vec{a}'$$

Тоді, використовуючи 2 закон Ньютона, напишемо

$$\vec{F} = \vec{F}'$$

Дане вираження показує, що величина сили не міняється (є інваріантною) при переході з однієї інерційної системи в іншу. Або, іншими словами, по дії сили не можна визначити, у якій інерційній системі ми перебуваємо.

Цю ситуацію докладно проаналізував Галілей, провівши найпростіші механічні експерименти в різних інерційних системах відліку: на кораблі, який рухався з постійною швидкістю й на березі. Експерименти були простими: вимірявся час, за який кулька скачувалася з похилої площини, період коливання маятника і т.д. Виявилось, що в інерційних системах відліку механічні явища протікають однаково.

Отже:

1. Рівняння динаміки не змінюються при переході від однієї інерційної системи до іншої.
2. Усі механічні явища у всіх інерціальних системах відліку протікають однаково за однакових початкових умов.

Це твердження зветься *принципом відносності Галілея*.

2) Якщо $\vec{v}_0 \neq 0$, то це означає, що система К' – неінерційна.

У цьому випадку

$$m \vec{a} = m \vec{a}_0 + m \vec{a}'$$

або

$$\vec{F} = \vec{F}_0 + \vec{F}'$$

Останнє рівняння показує, що в неінерційних системах відліку виникає додаткова сила $\vec{F}_0$.

При описі руху в неінерційних системах відліку можна користуватися законами й рівняннями Ньютона, якщо вводити додаткову силу $\vec{F}'$ – силу інерції, яка рівна:

$$\vec{F}_и = -\vec{F}_0 = -(\vec{F} - \vec{F}') = -(m \vec{a} - m \vec{a}'),$$

де a – прискорення тіла у інерційній системі відліку К;

a' – прискорення тіла у неінерційній системі відліку К'.

Перетворення Галілея

Перетворення Галілея являють собою зв'язок між координатами (x, y, z) точки A в системі K та координатами (x', y', z') цієї ж точки в системі K' .

Нехай є дві системи відліку K та K' (рис.1.31). Система K – нерухлива, а система K' – рухається відносно K зі швидкістю V_0 .

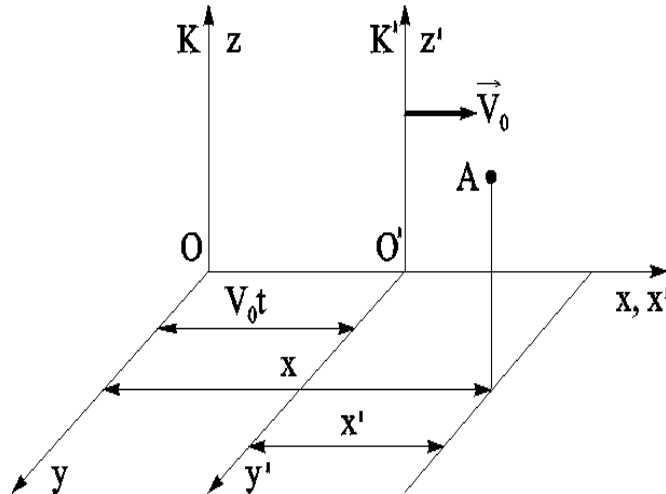


Рисунок.1.31 – Система відліку K' рухається відносно K

У момент часу $t = 0$ початки координат O і O' збігаються. Тоді для довільного моменту часу t

$$x = x' + v_0 t$$

Урахуємо, що для цього випадку $y = y'$ і $z = z'$. Приймаючи до уваги, що час в обох системах тече однаково, напишемо

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Це прямі перетворення Галілея, для переходу з K в K'

$$\begin{cases} x' = x - v_0 t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Це зворотні перетворення Галілея, для переходу з K в K'

1.8 Елементи спеціальної теорії відносності

Постулати спеціальної теорії відносності [5–8]:

В основі спеціальної теорії відносності (СТВ), яку також називають релятивістською теорією, лежать постулати Ейнштейна (1905 р.).

1. Принцип відносності: ніякі досліди (механічні, електричні й ін.) не дають можливості виявити чи спочиває дана інерційна система відліку або рухається рівномірно й прямолінійно; усі фізичні явища протікають однаково в інерційних системах відліку.

2. Принцип сталості швидкості світла: швидкість світла у вакуумі є універсальною фізичною сталою й не залежить ні від швидкості джерела світла, ні від швидкості приймача світла.

Як бачимо, перший постулат є узагальненням принципу відносності Галілея на всі фізичні явища. Згідно із цим принципом усі інерційні системи відліку абсолютно рівноправні, і проводячи будь-які експерименти, ми не можемо визначити, рухається або спочиває наша система відліку.

Другий принцип неодноразово перевірявся експериментально. Ще в 1887г. американський фізики А. Майкельсон і Е. Морлі виміряли швидкість світла за допомогою інтерферометра (інтерферометр Майкельсона) у двох взаємно перпендикулярних напрямках. Один напрямок уздовж – інше поперек зворотного напрямку руху Землі. Майкельсон був впевнений, що до світла вірний класичний принцип додавання швидкостей, і швидкість світла буде різної для обраних напрямків. Він помилявся. Неодноразово проведені експерименти, які потім неодноразово перевірялися іншими дослідниками,

показали, що швидкість світла не залежить від вибору інерційної системи відліку.

Перетворення Лоренца.

Перетворення Галілея не задовольняють другому постулату спеціальної теорії відносності. Швидкості не можна просто складати. Ейнштейн показав, що постулатам СТВ задовольняють перетворення Лоренца (1904 р.). Перетворення Лоренца мають вигляд:

$$\begin{cases} x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{— Це прямі перетворення Лоренца із системи К' у}$$

К

$$\begin{cases} x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \end{cases} \quad \text{— Це зворотні перетворення із системи К в К'.$$

Аналіз перетворень Лоренца показує:

1. При швидкостях $\vec{v}_0 \ll c$ вони переходять у класичні перетворення Галілея.
2. Час тече неоднаково в різних системах відліку.

Наслідки з перетворень Лоренца. Релятивістське додавання швидкостей.

Нехай система К' рухається зі швидкістю $\vec{v}_0$ відносно системи К (рис.1.33) У системі К' швидкість руху матеріальної точки $\vec{v}'$. Визначимо

швидкість точки v у системі K . Для цього, скористаємося прямими перетвореннями Лоренца. Розділивши x на t , одержуємо:

$$v = \frac{v}{t} = \frac{x' + v_0 t}{t' + \frac{v_0}{c^2} t}$$

Розділивши чисельник і знаменник правої частини рівняння на t' одержимо:

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} v'}$$

Отримана формула використовується для додавання швидкостей у релятивістському випадку. Відзначимо, що результуюча швидкість V , навіть якщо V' і V_0 рівні швидкості світла, не перевищить C , що цілком задовольняє другому постулату СТВ.

Скорочення довжини.

Розглянемо дві системи координат K та K' . Система K' рухається відносно K зі швидкістю $\vec{v}_0$. Відрізок AB не рухається в системі K' , і відповідно рухається зі швидкістю $\vec{v}_0$ відносно K (рис.1.32).

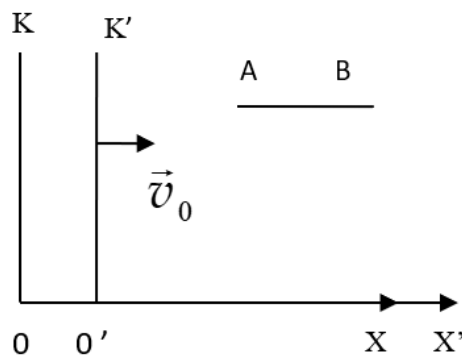


Рисунок 1.32 – Система відліку K рухається відносно K'

Координати кінців відрізка AB у системі K' – x'_1 і x'_2 , його довжина в цій системі:

$$L_0 = x'_2 - x'_1$$

Координати кінців відрізка AB у системі K – x_1 і x_2 , його довжина в цій

системі:

$$L = x_2 - x_1$$

Одержимо формулу, яка зв'язує L_0 і L . Для цього скористаємося зворотними перетвореннями Лоренца

$$x'_2 = \frac{x_2 - v_0 t'_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$
$$x'_1 = \frac{x_1 - v_0 t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Моменти часу t_2 і t_1 відповідають моментам виміру координат x_1 і x_2 у системі K . Ці виміри повинні проводитися одночасно, інакше буде отриманий невірний результат. Тому $t_1 = t_2$. Віднімаючи з одного рівняння інше, одержимо:

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Або

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$$

Отримана формула показує, що розміри тіла в напрямку руху зменшуються, якщо вимір проводить спостерігач в системі K .

Скорочення часу.

Розглянемо, як зв'язані між собою проміжки часу в спочиваючій K та, що рухається зі швидкістю $\vec{v}_0$ K' системах координат.

Нехай спостерігач, який перебуває в системі K' виміряв проміжок часу $\tau_0 = t'_1 - t'_2$ по своєму годинникові. Визначимо, чому рівний проміжок часу $\tau = t_1 -$

t_2 , який виміряв спостерігач у системі К. Скористаємося прямими перетвореннями Лоренца:

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{v_0}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{v_0}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Координати x_1' і x_2' повинні бути рівні тому що годинник спостерігача в К' повинен не рухатись відносно його. Тоді

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Величина τ завжди буде більше τ_0 .

Відносність одночасності.

Розглянемо вагон, який рухається щодо нерухливого спостерігача Х зі швидкістю $\vec{v}$ (рис. 1.33). У центрі вагона перебуває спостерігач Х'. Нехай у момент часу $t=t_0$ наприкінці вагона вдаряють дві блискавки. Нехай це відбувається за спостереженням Х одночасно. Що зафіксує спостерігач Х'? По його спостереженням спочатку спостерігається спалах праворуч, а потім спалах ліворуч. Тому що відстань від нього до кінців вагона однакова, то він робить висновок, що спалахи відбуваються не одночасно.

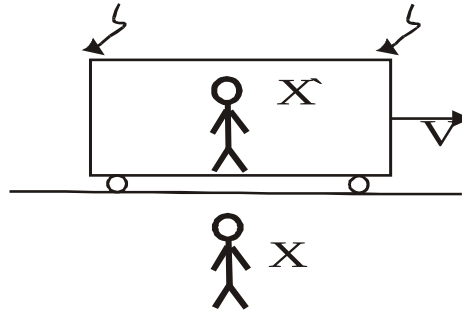


Рисунок 1.33 – Вагон, що рухається щодо нерухливого спостерігача X

Цей приклад ілюструє поняття відносної одночасності: *Події, розділені просторово в різних системах відліку відбуваються не одночасно.*

Динаміка спеціальної теорії відносності. Релятивістський імпульс.

У класичній механіці імпульс визначається як добуток маси матеріальної крапки на швидкість – $p=mv$. І якщо імпульс зберігається в одній системі відліку, то він зберігається й в інших інерційних системах відліку. Однак, використовуючи перетворення Лоренца можна показати, що в релятивістській механіці імпульс не буде змінюватися, за умови, що маса тіла залежить від швидкості його руху.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Величина m_0 називається *масою спокою*.

Тоді релятивістський імпульс визначається як:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Другий закон Ньютона.

У релятивістській механіці другий закон Ньютона записується так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}$$

Зв'язок маси й енергії.

Теорія відносності приводить до важливого виводу: енергія нерухомої частинки рівна

$$E_0 = m_0 c^2$$

E_0 називають *енергією спокою*.

Енергію частинки, що рухається, можна зв'язати з релятивістською масою співвідношенням

$$E = mc^2$$

Ця енергія визначається енергією спокою й кінетичною енергією. Це приводить до співвідношення :

$$E_k = E - E_0, \text{ або}$$

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

В релятивістській механіці це співвідношення використовують для визначення кінетичної енергії.

1.9 Приклади розв'язку завдань

Приклад 1. Рівняння руху матеріальної точки уздовж осі має вигляд: $x = A + Bt^2 + Ct^3$, де $A = 3$ м, $B = 1$ м/с², $C = -2$ м/с³. Знайти координату x , швидкість V_x і прискорення a_x точки в момент часу $t = 2$ с.

Дано:

$$x(t) = A + Bt^2 + Ct^3$$

$$A = 3 \text{ м}$$

$$B = 1 \text{ м/с}^2$$

$$C = -2 \text{ м/с}^3$$

$$t = 2 \text{ с}$$

$$x(2) - ?$$

$$V_x(2) - ?$$

$$a_x(2) - ?$$

Розв'язання:

Координату x знайдемо, підставивши в рівняння руху числові значення коефіцієнтів A , B , C и часу t

$$x = 3 + 1 \cdot 2^2 + (-2) \cdot 2^3 = -9 \text{ м}$$

Миттєва швидкість щодо осі x є перша похідна від координати за часом

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 2Bt + 3Ct^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) \cdot 2^2 = -20 \text{ м/с}$$

Прискорення точки знайдемо, взявши першу похідну

$$\text{від швидкості за часом} \quad a_x = \frac{dV_x}{dt} = 2B + 6Ct = 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) \cdot 2 = -22 \text{ м/с}^2$$

$$\text{Відповідь: } x = -9 \text{ м, } V_x = -20 \text{ м/с, } a_x = -22 \text{ м/с}^2$$

Приклад 2. Точка обертається навколо нерухомої осі за законом $\varphi = A + Bt + Ct^3$, де $A = 5$ рад, $B = 10$ рад/с та $C = -2$ рад/с³. Знайти повне прискорення точки, що перебуває на відстані $r = 0.1$ м від осі обертання для моменту часу $t = 3$ с.

Дано:

$$\varphi = A + Bt + Ct^3$$

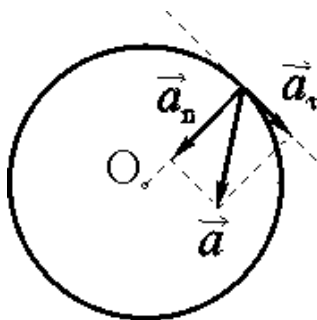
$$A = 5 \text{ рад}$$

$$B = 10 \text{ рад/с}$$

$$C = -2 \text{ рад/с}^3$$

$$t = 3 \text{ с}$$

$$a - ?$$



Розв'язання:

Повне прискорення a точки може бути знайдене як геометрична сума тангенціального прискорення a_τ , спрямованого по дотичній до траєкторії й нормального прискорення a_n , спрямованого до центру кривизни траєкторії

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Тому що вектори $\vec{a}_\tau$ й $\vec{a}_n$ взаємно перпендикулярні, то модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$$

Модулі тангенціального й нормального прискорення точки обертового тіла виражаються формулами

$$a_{\tau} = \varepsilon r \quad \text{і} \quad a_n = \omega^2 r$$

де ω – модуль кутової швидкості точки,

ε – модуль його кутового прискорення.

Підставляючи вираження для a_{τ} й a_n у вираження для повного прискорення, одержимо $a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Кутову швидкість ω знайдемо, взявши першу похідну кута повороту за часом

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3Ct^2$$

У момент часу $t=3$ с модуль кутової швидкості

$$\omega = 10 + 3 \cdot (-2) \cdot 9 = -44 \text{ рад/с}$$

Кутове прискорення знайдемо, взявши похідну від кутової швидкості за часом

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Ct = 6 \cdot (-2) \cdot 3 = -36 \text{ рад/с}^2$$

Підставляючи знайдені значення у вираження для повного прискорення, одержимо

$$a = 0,1\sqrt{(-36)^2 + (-44)^4} = 5,69 \text{ м/с}^2$$

Відповідь: $a=5,69 \text{ м/с}^2$

Приклад 3. По рейках похилої виробки, які прокладені під кутом α до обрію, опускається вагонетка вагою P . Швидкість вагонетки на всьому шляху дорівнює V , а час гальмування перед зупинкою – t . Знайти натяг каната піднімальної машини при гальмуванні, якщо коефіцієнт тертя між вагоном і рейкою – f .

Дано:

P

α

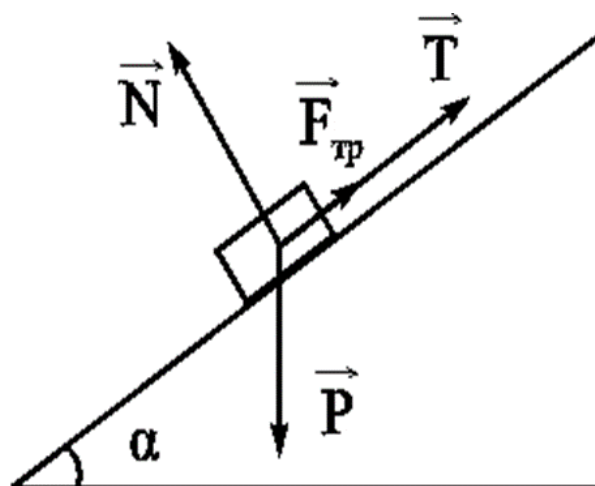
V

t

f

T – ?

Розв'язання:



Рівняння руху вагонетки для моменту гальмування буде мати вигляд

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{\text{тр}}$$

де m – маса вагонетки,

T – сила натягу каната,

N – сила реакції опори,

$F_{\text{тр}}$ – сила тертя катання.

Напрямок спуска вагонетки будемо вважати позитивним. Тоді рівняння проекцій сил на обраний напрямок прийме вид

$$ma = P \sin \alpha - F_{\text{тр}} - T = P \sin \alpha - fP \cos \alpha - T$$

Тому що в цьому випадку прискорення $a = V/t$, таким чином

$$T = P \left(\sin \alpha - f \cos \alpha + \frac{V}{gt} \right)$$

Відповідь: $T = P \left(\sin \alpha - f \cos \alpha + \frac{V}{gt} \right).$

Приклад 4. Маховик у вигляді суцільного диска радіусом $R = 0,5$ м і масою 10 кг розкручений до частоти обертання $n_1 = 240$ об/хв і наданий сам собі. Під дією сил тертя маховик зупинився через $t = 100$ с. Знайти момент M сил тертя.

Дано:	Розв'язання:
$R = 0,5 \text{ м}$	Для розв'язку завдання скористаємося основним
$m = 10 \text{ кг}$	рівнянням динаміки обертового руху у вигляді
$n = 240 \text{ про/хв} = 4\text{с}^{-1}$	$dL_z = M_z dt \quad (1)$
$t = 100 \text{ с}$	де dL_z – зміна проекції на вісь z моменту імпульсу
$M = ?$	маховика, що обертається щодо осі z , співпадаючої з віссю обертання маховика, за інтервал часу dt ;

M_z – момент зовнішніх сил (у цьому випадку момент сил тертя), що діють на маховик щодо осі z .

Момент сил тертя можна вважати не мінливим із часом, тому інтегрування рівняння (1) приведе до вираження $dL_z = M_z dt$

При обертанні твердого тіла щодо нерухливої осі зміна проекції моменту імпульсу

$$\Delta L_z = I_z \Delta \omega$$

де I_z – момент інерції маховика щодо осі z (для суцільного диска $I_z = mr^2/2$), $\Delta \omega$ – зміна кутової швидкості маховика.

Зміна кутової швидкості $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ виразимо через кінцеву n_2 і початкову n_1 частоти обертання, користуючись співвідношенням $\omega = 2\pi n$. Тоді одержимо

$$M_z = \pi m R^2 (n_2 - n_1) / \Delta t$$

Підставляючи у формулу числові значення й роблячи обчислення, одержимо

$$M_z = 3,14 \cdot 10 \cdot 0,25(0 - 4)/100 = -0,314 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Відповідь: $M_z = -0,314 \text{ Н} \cdot \text{м}$

Приклад 5. З рушниць масою $m_1 = 5 \text{ кг}$ вилітає куля масою $m_2 = 5 \text{ г}$ зі швидкістю $V_2 = 600 \text{ м/с}$. Знайти швидкість V_1 віддачі рушниць.

Дано:	Розв'язання:
$m_1 = 5 \text{ кг}$	Тому що в напрямку пострілу на систему «рушниця – куля» не діють зовнішні сили (опором повітря руху кулі зневажаємо), таким чином виконується закон
$m_2 = 5 \text{ г} = 0,005 \text{ кг}$	збереження імпульсу системи в проекції на
$V_2 = 600 \text{ м/с}$	горизонтальний напрямок, тобто
$V_1 = ?$	$m_1 V_1 + m_2 V_2 = 0$

оскільки до пострілу сумарний імпульс рушниці й кулі був нуль. Звідси визначимо величину, що шукаємо

$$V_1 = \frac{-m_2 V_2}{m_1} = -\frac{0,005 \cdot 600}{5} = -0,1 \text{ м/с}$$

Відповідь: $V_1 = -0,1 \text{ м/с}$

Приклад 6. Горизонтальна платформа масою $m = 100 \text{ кг}$ обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, із частотою $n_1 = 10 \text{ об/хв}$. Людина масою $m_0 = 60 \text{ кг}$ знаходиться при цьому на краю платформи. З якою частотою n_2 почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу однорідним диском, а людину – крапковою масою.

Дано:	Розв'язання:
$m = 100 \text{ кг}$	Тому що на платформу, що обертається з людиною не діють зовнішні моменти сил (момент сил тертя вважаємо відсутній), то в цьому випадку виконується закон
$n_1 = 10 \text{ об/хв}$	збереження моменту імпульсу, тобто
$m_0 = 60 \text{ кг}$	$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$
$n_2 = ?$	

де I_1 – момент інерції платформи з людиною, що стоїть на її краї,

I_2 – момент інерції платформи й людину, що стоїть в центрі платформи,

ω_1 і ω_2 – кутові швидкості обертання платформи в першому й у другому положеннях людини. При цьому

$$I_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2 \quad \text{а} \quad I_2 = \frac{mR^2}{2}$$

де R – радіус платформи.

Підставляючи вираження для моментів інерції в рівняння закону збереження моменту імпульсу, і враховуючи, що $\omega = 2\pi n$, де n – частота обертання платформи, одержимо

$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2 \right) 2\pi n_1 = \frac{mR^2}{2} 2\pi n_2$$

Звідки
$$n_2 = n_1 \frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} = n_1 \frac{m + 2m_0}{m} = 22 \text{ об/мин}$$

Відповідь: $n_2 = 22 \text{ об/хв}$

Приклад 7. Знайти лінійну швидкість V центру кулі, що скотилася з похилої площини висотою $h = 1 \text{ м}$.

Дано:

$$h = 1 \text{ м}$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$V = ?$

Розв'язання:

Оскільки в системі діє консервативна сила ваги, а силою опору повітря можна зневажити, то виходячи із закону збереження механічної енергії, можна записати

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

де g – прискорення вільного падіння, m – маса кулі, I – момент інерції кулі, ω – кутова швидкість обертання кулі в основі похилої площини.

Користуючись табличним значенням моменту інерції кулі

$$I = \frac{2mR^2}{5}$$

і враховуючи зв'язок між лінійною швидкістю центру кулі V і її кутовою швидкістю ω

$$V = \omega R$$

остаточно одержимо

$$V = \sqrt{10gh/7} = \sqrt{10 \cdot 9,8 \cdot 1/7} = 3,74 \text{ м/с}$$

Відповідь: $V = 3,74 \text{ м/с}$

Приклад 8. Визначити імпульс P и кінетичну енергію E_k електрона, що рухається зі швидкістю $V = 0,9 c$, де c – швидкість світла у вакуумі.

Дано:

$$V = 0,9 c$$

$$m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$P = ?$

$E_k = ?$

Розв'язання:

Тому що швидкість електрона близька до швидкості світла, то необхідно врахувати залежність маси від швидкості,

обумовлену по формулі $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

де m – маса частинки, що рухається, m_0 – маса частинки, що знаходиться в спокої, $\beta = V/c$ – швидкість частки, що виражена в частках швидкості світла.

Скориставшись визначенням імпульсу $P = mv$ і враховуючи, що $V = \beta c$, одержимо

$$P = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \beta c = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - 0,81}} 0,9 \cdot 3 \cdot 10^8 = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

У релятивістській механіці кінетична енергія частинки визначається як різниця між повною енергією $E = mc^2$ і енергією спокою $E_0 = m_0 c^2$, тобто

$$E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

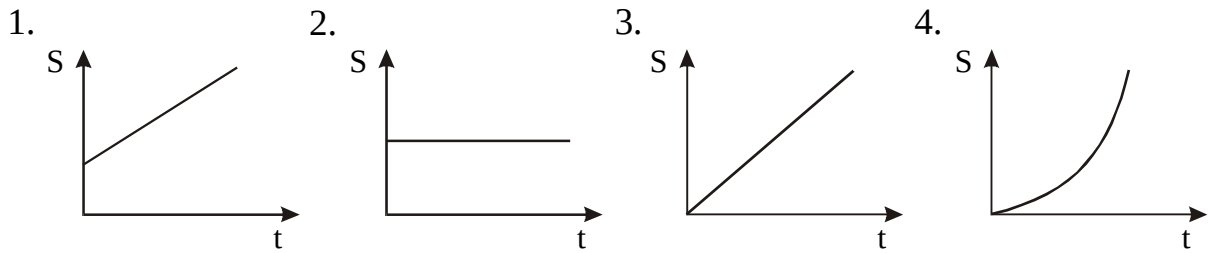
Зробимо обчислення

$$E_k = 9,1 \cdot 10^{-31} (3 \cdot 10^8)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0,81}} - 1 \right) = 1,06 \cdot 10^{-13} \text{ Дж} = 0,66 \text{ МэВ}$$

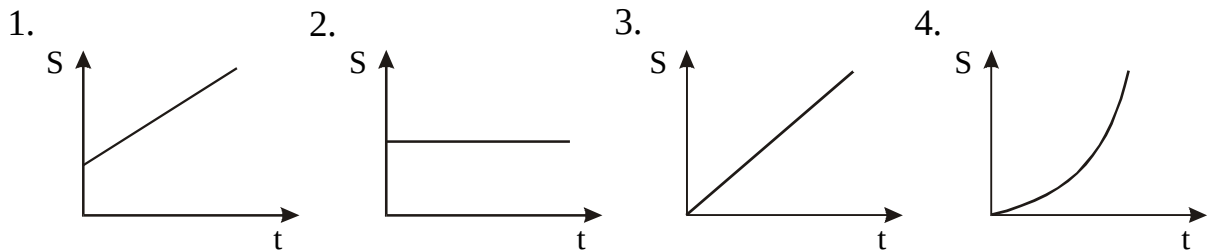
Відповідь: $P = 5,6 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$, $E_k = 0,66 \text{ МэВ}$

1.10 Питання для самоконтролю

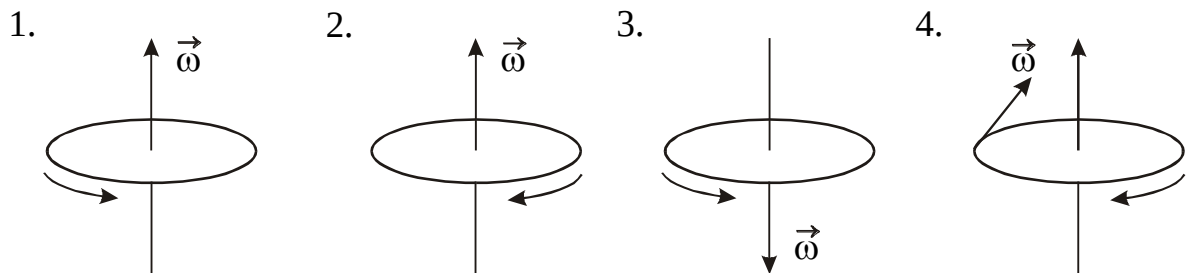
1. Наведіть графік шляху для рівномірного руху, коли $S_0 = 0$?



2. Наведіть графік шляху для рівноприскореного руху , коли $v_0 = 0$.



3. Вкажіть напрям руху вектору кутової швидкості при руху по колу для матеріальної точки .



4. Яке співвідношення відповідає лінійній швидкості?

1. $v = \omega \cdot r$ 2. $a_t = \varepsilon \cdot r$ 3. $a_t = \frac{\varepsilon}{r}$ 4. $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$

5. Залежність швидкості тіла від часу має вигляд $v = 6 - 2t$ (м/с). Знайдіть початкову швидкість і прискорення точки?

1. $v_0 = 6$ м/с 2. $v_0 = 6$ м/с 3. $v_0 = -6$ м/с 4. $v_0 = 6$ м/с
 $a = 1$ м/с² $a = 2$ м/с² $a = -2$ м/с² $a = -2$ м/с²

6. Залежність шляху від часу має вигляд $S = 6t - 2t^2$ (м). Знайдіть початкову швидкість і прискорення точки?

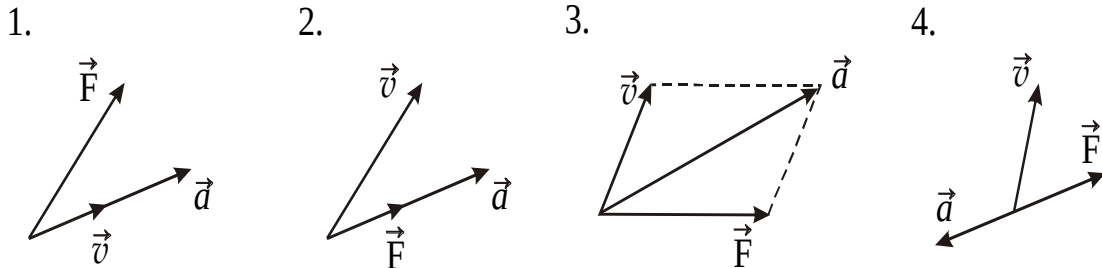
1. $v_0 = 6$ м/с 2. $v_0 = 6$ м/с 3. $v_0 = -6$ м/с 4. $v_0 = 6$ м/с
 $a = 2$ м/с² $a = -4$ м/с² $a = -1$ м/с² $a = 2$ м/с²

7. Наведіть вірний вираз для рівноприскореного руху по колу?

1. $a_n = \text{const}$; $a_\tau = \text{const}$.
2. $a_n \sim t$; $a_\tau = \text{const}$.
3. $a_n = 0$; $a_\tau = \text{const}$.
4. $a_n \sim t^2$; $a_\tau = \text{const}$.

8. Вкажіть правильний напрямок прискорення для точки, яка рухається.

($\vec{v}$ – швидкість, $\vec{F}$ – рівнодіюча прикладених сил).



9. Для другого закону Ньютона напишіть формулу, яка є загальним виразом?

1. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
2. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
3. $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
4. $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

10. Для другого закону Ньютона напишіть формулу, коли $m = \text{const}$?

1. $\vec{F} = m\vec{a}$
2. $Fdt = mdv + vdm$
3. $F = m \frac{dv}{dt} + v \frac{dm}{dt}$
4. $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

11. Для закону динаміки обертального руху напишіть формулу, яка є загальним виразом?

1. $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$
2. $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$
3. $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
4. $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

12. Для основного закону динаміки обертального руху напишіть формулу, коли $J = \text{const}$?

1. $J\vec{\epsilon} = \vec{M}$
2. $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$
3. $M_i = F_i d_i \sin \alpha$
4. $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$

13. Наведіть формулу для моменту імпульсу тіла відносно точки.

1. $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$
2. $\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_i \times \vec{r}_i)$
3. $\vec{L}_i = m\vec{v}_i \times \vec{r}_i$
4. $L_i = \vec{r}_i \times m\vec{v}_i$

14. Поєднання яких двох величин необхідно для визначення моменту імпульсу тіла?

1. J, ω
2. m, ω
3. M, ϵ
4. M, J

15. Найдіть повну кінетичну енергію кулі, яка котиться по горизонтальній поверхні?

1. $W_k = \frac{mv^2}{2}$ 2. $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$ 3. $W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ 4. $W_k = \frac{kx^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$

16. Дайте формулювання закону, який виражає закон збереження імпульсу?

1. $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \text{const}$ 2. $W_k + W_n = \text{const}$
 3. $J_1 \vec{\omega}_1 + J_2 \vec{\omega}_2 + \dots + J_n \vec{\omega}_n = \text{const}$ 4. $\frac{m_1 \vec{v}_1}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2}{2} + \dots + \frac{m_n \vec{v}_n}{2} =$

const

17. Наведіть вірний вираз для закону збереження моменту імпульсу?

1. $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n = \text{const}$ 2. $W_k + W_n = \text{const}$
 3. $J_1 \vec{\omega}_1 + J_2 \vec{\omega}_2 + \dots + J_n \vec{\omega}_n = \text{const}$ 4. $\frac{m_1 \vec{v}_1}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2}{2} + \dots + \frac{m_n \vec{v}_n}{2} = \text{const}$

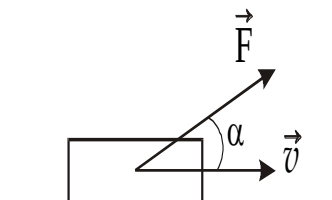
18. Чоловік на круглій горизонтальній платформі, яка обертається розпрямляє руки в сторони. Як в такому випадку зміняться J , ω , L ? (J – момент інерції, ω – кутова швидкість, L – момент імпульсу).

1. $J \uparrow \omega \uparrow L \uparrow$ 2. $J \downarrow \omega \downarrow L \downarrow$ $\uparrow$ – збільшиться
 3. $J \downarrow \omega \uparrow L = \text{const}$ 4. $J \uparrow \omega \downarrow L = \text{const}$ $\downarrow$ – зменшиться

19. Наведіть формулу для механічної роботи?

1. $A = F \cdot S \cos \alpha$ 2. $dA = N \cdot dt$ 3. $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ 4. $A_{12} = K_2 - K_1$

20. На рисунку наведено сили та напрям переміщення тіла, знайдіть силу та прискорення для формули $A = F \cdot S \cdot \cos \alpha$



1. $\vec{F} = \text{const};$
 2. $\vec{F} = f(t);$
 3. $\vec{F} = \text{const};$
 4. $\vec{F} = \text{const};$

21. Наведіть формулу для роботи змінної сили (F) на шляху (S)?

1. $A = \int_0^S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ 2. $A = F \cdot S \cos \alpha$ 3. $\delta A = F \cdot dS$ 4. $A = F \cdot \cos \alpha$

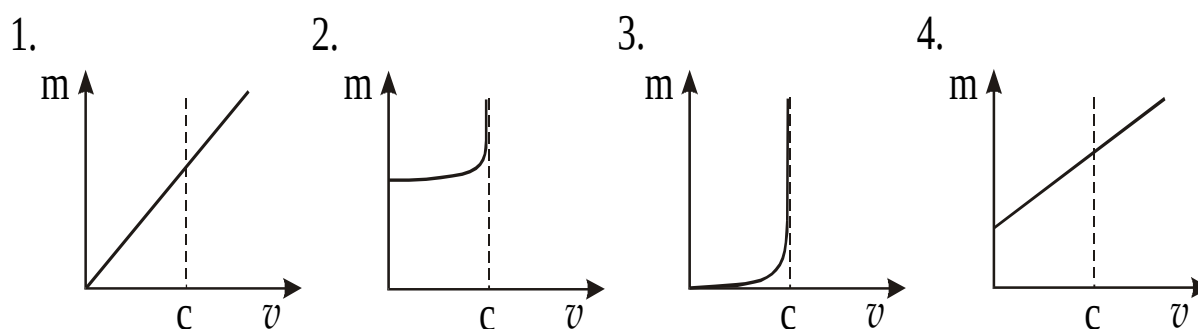
22. Знайдіть роботу для матеріальної точки, яка рівномірно обертається по колу радіуса R .

1. $A = M\phi$; 2. $A = \frac{J\omega^2}{2}$; 3. $A=0$; 4. $A = \frac{mv^2}{R} \cdot 2\pi R$.

23. Наведіть для спеціальній теорії відносності формулу залежності маси від швидкості?

1. $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ 2. $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 3. $m = m_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 4. $m = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

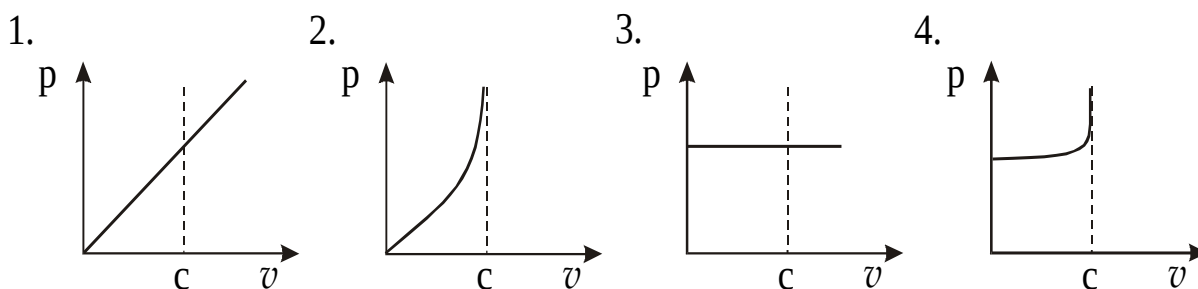
24. Для спеціальній теорії відносності наведіть графік залежності маси від швидкості?



25. В спеціальній теорії відносності наведіть формулу виразу залежності імпульсу частинки від швидкості?

1. $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ 2. $p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 3. $p = m_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$ 4. $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

26. В спеціальній теорії відносності наведіть графік залежності імпульсу від швидкості?



27. Для спеціальній теорії відносності наведіть формулу для кінетичної енергії частинки?

$$1. E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \quad 2. E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right); \quad 3. E_c = \frac{m_0 v^2}{2}; \quad 4. E_k = m_0 c^2$$

Відповіді:

№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді
1	3	11	4	21	1
2	4	12	1	22	3
3	1	13	4	23	2
4	1	14	1	24	2
5	4	15	3	25	4
6	2	16	1	26	2
7	4	17	3	27	2
8	2	18	4		
9	2	19	1		
10	1	20	3		

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ І ТЕРМОДИНАМІКИ

- 2.1 Основи молекулярно–кінетичної теорії
- 2.2 Основне рівняння молекулярно–кінетичної теорії (Рівняння Клаузіуса).
- 2.3 Молекулярно–кінетичне трактування абсолютного нуля.
- 2.4 Середня енергія молекул
- 2.5 Основи статистичної фізики Максвела – Больцмана
- 2.6 Середні швидкості молекул
- 2.7 Розподіл Больцмана
- 2.8 Основи термодинаміки
- 2.9 Внутрішня енергія, теплота та робота газу.
- 2.10 Перший закон термодинаміки
- 2.11 Теплоємність і її трактування молекулярно кінетичною теорією
- 2.12 Застосування першого закону термодинаміки до деяких фізичних процесів (ізопроцесам)
- 2.13 Другий закон термодинаміки
- 2.14 Теплові та холодильні машини
- 2.15 Явища переносу
- 2.16 Приклади розв’язання завдань
- 2.17 Питання для самоконтролю

2.1 Основи молекулярно–кінетичної теорії

Молекулярна фізика – це розділ, який вивчає фізичні властивості і агрегатні стани речовин в залежності від їх молекулярної будови і сил взаємодії між молекулами. Вона базується на трьох основних положеннях:

- всі тіла складаються з молекул і атомів;
- молекули і атоми хаотично рухаються;
- між молекулами і атомами існують сили взаємодії.

Молекулярно–кінетична теорія пояснює властивості тіл виходячи з характеру руху молекул і сил взаємодії між ними. Враховуючи, що кількість молекул дуже велика (в 1см^3 газу при нормальних умовах міститься $2,69 \cdot 10^{19}$ молекул), вивчення систем такої великої кількості частинок не можна звести до вивчення руху кожної молекули. В таких системах проявляються специфічні статистичні закономірності. Наприклад, швидкості молекул можуть бути самими різними і знати всі їх значення неможливо, та і безкорисно, тим більше, що вони весь час змінюються при зіткненнях. А ось середнє значення швидкості залишається сталим і характеризує стан системи.

Термодинаміка – вивчає зв'язок і взаємні перетворення енергії, теплоти і роботи. Термодинаміка наука феноменологічна (описова). Вона не дає пояснення тих чи інших явищ, властивостей на молекулярному рівні, а встановлює зв'язок між параметрами системи, наприклад, тиском, об'ємом, температурою, кількістю теплоти, роботою, ентропією, вільною енергією і т.і.

Стан термодинамічної системи (рідини, газу та інше) описують за допомогою параметрів стану. У якості параметрів стану можна вибрати тиск (P), об'єм (V), температуру (T), масу (m), щільність (ρ), і інші величини, що так або інакше характеризують систему.

Параметри стану можуть бути зв'язані між собою функціональною залежністю, яка називається функцією стану:

$$F(P, V, T, m...) = 0$$

Виберемо наступну модель ідеального газу:

- 1) атоми (молекули) газу – матеріальні точки (маса атомів m , об'єм атома дорівнює 0);
- 2) атоми перебувають у безперервному хаотичному русі;
- 3) потенційна енергія взаємодії атомів дорівнює нулю (рис.2.1).

Така модель добре описує гази з невеликим розміром молекул (кисень, водень, азот і ін.) при невисоких тисках. При збільшенні тиску, середні відстані між атомами зменшуються, і зневажа потенційною енергією взаємодії приведе до збільшення помилки.

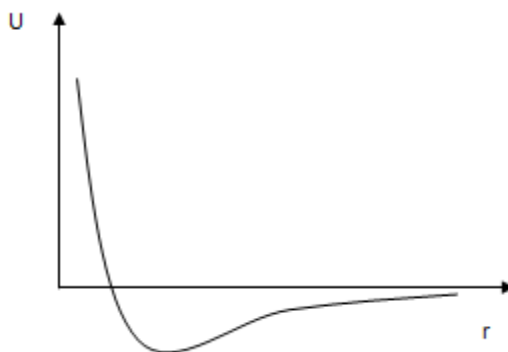


Рисунок 2.1 – Потенційна енергія взаємодії молекул

На графіку (рис. 2.1) наведено залежність потенційної енергії взаємодії молекул U від відстані між молекулами r . Якщо r досить велике, U прагне до нуля.

Для ідеального газу можна одержати рівняння стану (рівняння Клапейрона – Менделєєва).

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \quad (2.1)$$

де m – маса газу,

$R = 8,31$ Дж/мольК – універсальна газова стала;

μ – молярна маса газу (маса одного моля речовини);

$\frac{m}{\mu} = \nu$ – кількість молів речовини.

Модем називається така кількість речовини, яка містить число структурних елементів (атомів, молекул) рівне числу Авогадро:

$$Na = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ л/моль.}$$

Таке число частинок утримується в 12 грамах ізотопу вуглецю C^{12} .

Враховуючи, що число частинок N із загальною масою m дорівнює:

$$N = \frac{m}{\mu} N_a = \nu N_a ,$$

рівняння (2.1) можна записати у вигляді рівняння Больцмана

$$P = nkT, \quad (2.2)$$

де $n = \frac{N}{V}$ – концентрація частинок,

$$k = \frac{R}{N_a} = 1,38 \cdot 10^{23} \text{ Дж/ К} - \text{ стала Больцмана.}$$

Поведінку реальних газів описує рівняння Ван–Дер–Ваальса

$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = \frac{m}{\mu}, \quad (2.3)$$

де величини a та b – константи Ван–Дер–Ваальса, визначаються дослідним шляхом для різних газів.

Величина $\frac{a}{V^2}$ характеризує ту добавку до зовнішнього тиску, яка обумовлена взаємодією молекул .

Величина b характеризує той факт, що реальні молекули мають кінцевий об'єм.

Суміш газів. Часто доводиться мати справу із сумішшю газів. Наприклад, повітря це суміш азоту, кисню, вуглекислого газу, водний пар та інше.

Для суміші газів вірно співвідношення:

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_n, \quad (2.4)$$

де N_n – число молекул n -го компонента;

N – загальне число молекул суміші.

Розділивши (2.4) на об'єм V , що займає суміш газів, одержимо:

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_n, \quad (2.5)$$

де n_n – концентрація n -го компонента.

Помноживши (2.5) на kT , одержимо:

$$nkT = n_1 kT + n_2 kT + \dots + n_n kT \quad (2.6)$$

тоді отримуємо *рівнянням Дальтона* для суміші газів

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (2.7)$$

де P – тиск суміші газів;

P_n – парціальний тиск n -го компонента.

Використовуючи рівняння (2.7) і рівняння Клапейрона – Менделєєва (2.1), можна одержати формулу для розрахунків молярної маси газової суміші:

$$\mu_{см} = \frac{m}{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n},$$

де ν_n – число молів n -го компонента суміші;

$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ – загальна маса компонентів газової суміші.

2.2 Основне рівняння молекулярно–кінетичної теорії (Рівняння Клаузіуса)

Розглянемо газ, молекули якого пружно взаємодіють із плоскою поверхнею. Газ чинить тиск на цю поверхню. Наше завдання – з'ясувати від чого залежить цей тиск.

Розрахунки проведемо із припущень:

1. маси всіх молекул однакові.
2. молекули не випробовують взаємних зіткнень.
3. молекули рухаються тільки уздовж координатних осей, тобто в одному напрямку рухається 1/6 частина всіх молекул.

Виділимо циліндричний об'єм, що прилягає до плоскої поверхні (рис.2.2). Площа основи циліндра – S , його висота – h . У середині циліндра кількість молекул газу $N_0 = nV = nSh$.

Із цих молекул з поверхнею взаємодіють тільки ті, які рухаються до неї перпендикулярно, тобто 1/6 частина. Нехай за час Δt ці молекули проходять відстань h . Тоді число молекул, які провзаємодіяли зі стінкою за час Δt .

$$N = \frac{1}{6}nSh = \frac{1}{6}nSv \cdot \Delta t,$$

де v – швидкість руху молекул.

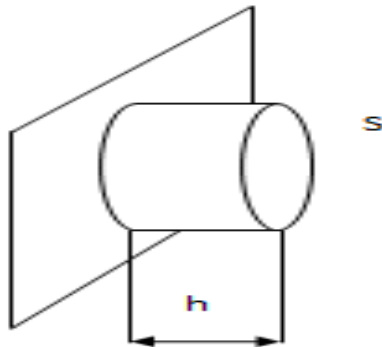


Рисунок 2.2 – Схема поверхні з якою взаємодіють молекули

Зміна імпульсу усіх молекул після взаємодії з поверхнею

$$\Delta P_c = N \cdot 2mv = \frac{1}{3}nmv^2S \cdot \Delta t$$

Враховуючи, що у відповідності з другим законом Ньютона, сила, з якої молекули діють на поверхню дорівнює швидкості зміни імпульсу, знайдемо величину тиску:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta P_c}{S \Delta t} = \frac{1}{3} n m v^2$$

Швидкості руху молекул не однакові. У якості середньої швидкості виберемо середньоквадратичну швидкість руху молекул:

$$v_{\kappa\theta}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N}$$

де v_n – швидкість руху N -ої молекули. Тоді

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\Delta P_c}{S \Delta t} = \frac{1}{3} n m v_{\kappa\theta}^2 \quad (2.9)$$

Рівняння (2.9) називають *основним рівнянням МКТ (рівнянням Клаузиуса)*. Аналіз цього рівняння показує, що тиск, який створює газ на стінки, є результат дії окремих молекул.

Відзначимо, що якщо розглядати більш складну модель газу, наприклад, випадок, коли молекули рухаються у всіх напрямках з однаковою ймовірністю, то результат буде такий же (тобто одержимо рівняння (2.9)).

2.3 Молекулярно–кінетичне трактування абсолютного нуля

З погляду МКТ молекули газу перебувають у безперервному русі. І чим більше швидкість молекул, чим більше їх кінетична енергія, тим вище температура газу.

Покажемо, що середня кінетична енергія поступального руху молекули E_k пропорційна абсолютній температурі.

Запишемо рівняння Больцмана (2.2) і Клаузиуса (2.9)

$$P = nkT \quad - \quad \text{рівняння Больцмана}$$

$$P = \frac{1}{3} n m v_{\text{кв}}^2 \quad - \quad \text{рівняння Клаузиуса}$$

Використовуючи ці рівняння можна одержати формулу залежності кінетичної енергії поступального руху молекули ідеального газу від температури:

$$E_k = \frac{3}{2} kT \quad (2.10)$$

Таким чином, при $T=0$ К швидкість молекул ідеального газу повинна бути рівна 0. Однак, оскільки вічний рух молекул речовини знищити неможливо, то й досягти абсолютного нуля температури теж неможливо. Це твердження називають теоремою Нернста.

2.4 Середня енергія молекул

Формула (2.10) визначає тільки середню кінетичну енергію поступального руху молекул. Однак, поряд з поступальним рухом, можливі обертання й коливання атомів, що входять до складу молекули. Ці види руху також вносять свій внесок у кінетичну енергію молекули. Для того, щоб розібратися в цьому питанні, розглянемо *поняття кількості ступенів вільності*.

Числом ступенів вільності механічної системи називається кількість незалежних величин, за допомогою яких може бути задане положення системи в просторі.

Положення матеріальної точки можна задати за допомогою трьох чисел (декартових координат x, y, z або полярних r, ψ, ϕ). Положення твердого тіла задається координатами його центру інерції (x, y, z) і кутами r, ψ, ϕ , що визначають положення тіла при його повороті щодо нерухливого центру інерції.

Таким чином, тверде тіло має шість ступенів свободи: $i=6$.

Із цих ступенів свободи 3 визначаються поступальним рухом тіла й називаються поступальними, а інші 3 визначають обертовий рух тіла й називаються обертальними.

При визначенні кількості ступенів вільності молекул будемо розглядати атоми як матеріальні точки.

1) *одноатомна молекула* – матеріальна точка, яка має 3 поступальних ступенів вільності.

$$i = i_{noc} = 3$$

2) *двохатомна молекула* – дві матеріальні точки з жорстким зв'язком.

Така молекула має 3 поступальні ступені вільності й 2 обертальні (обертання навколо осей $Z - Z^1$ і $X - X^1$) (рис. 2.3).

$$i = i_{noc} + i_{op} = 3 + 2 = 5$$

Обертання навколо осі $Y - Y^1$ не міняє положення системи й не вносить внеску в кінетичну енергію молекули.

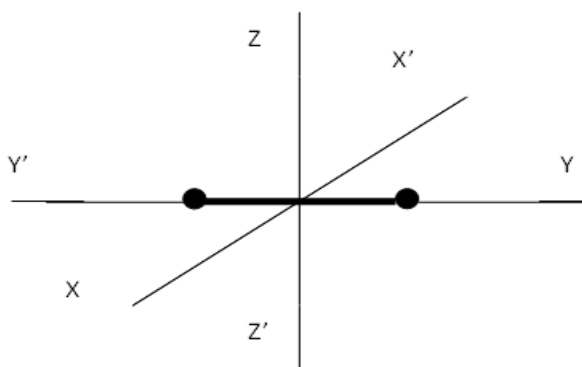


Рисунок 2.3 – Двохатомна молекула

3) *трьохатомна молекула* – три матеріальні крапки, що мають три жорстких зв'язки. Така молекула має три поступальні ступені вільності й три обертальні (обертання навколо осей $Z - Z^1$, $X - X^1$ и $Y - Y^1$) (рис.2.4).

$$i = i_{noc} + i_{ep} = 3 + 3 = 6$$

4) *багатоатомна молекула* має також 6 ступенів вільності.

$$i = i_{noc} + i_{ep} = 3 + 3 = 6$$

Якщо трохи змінити модель молекули й жорсткий зв'язок замінити пружним, то виникають ще додаткові коливальні ступені вільності.

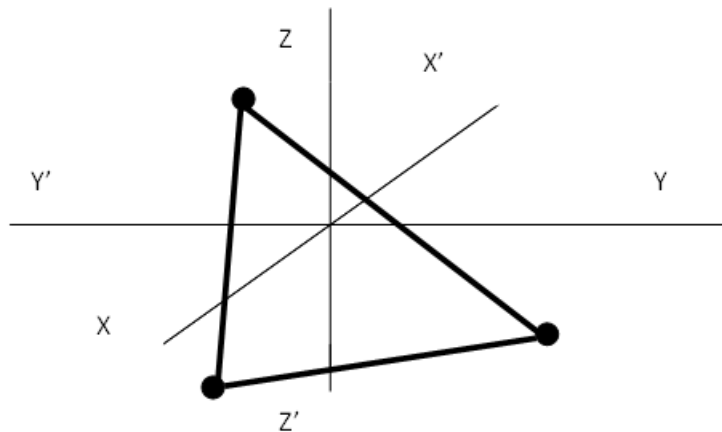


Рисунок 2.4 – Трьохатомна молекула

Можна показати, що на кожний ступінь вільності молекули доводиться в середньому однакова кінетична енергія яка дорівнює рівна $\frac{1}{2} kT$. Таким чином, середня енергія молекули

$$E = \frac{i}{2} kT, \quad (2.11)$$

де i – кількість ступенів вільності молекули, що залежить від її конфігурації.

2.5 Основи статистичної фізики Максвелла – Больцмана

Молекули газу при постійній температурі хаотично рухаються у всіх напрямках з різними значеннями швидкості по модулю. Для визначення кількості (частки) молекул величина швидкості яких попадає в той або інший інтервал швидкостей, використовують функцію розподілу. Розглянемо, що являє собою ця функція.

Розглянемо газ, що складається з N молекул при постійній температурі. Виберемо вісь швидкостей так, що $0 < v < \infty$ і кружечками відзначимо ті значення швидкостей, які мають наші молекули:

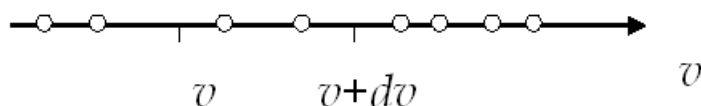


Рисунок 2.5 – Розподілення швидкості

Виберемо на осі інтервал швидкостей $[v; v+dv]$. Нехай dN_v – число молекул, швидкості яких лежать в цьому інтервалі (на рис. 2.5 в цей інтервал попадають дві молекули). Тоді

$\frac{dN_v}{dv}$ – число молекул лежачих в одиничному інтервалі швидкостей поблизу даної швидкості v ;

$\frac{dN_v}{N \cdot dv}$ – частка молекул, що лежать в одиничному інтервалі швидкостей поблизу даної швидкості v .

Функцією розподілу називається:

$$f(v) = \frac{dN_v}{N \cdot dv} \quad (2.12)$$

Функція розподілу визначає частку молекул, швидкості яких лежать в одиничному інтервалі швидкостей поблизу даної швидкості v як функцію швидкості. З (2.12) випливає, що:

$\frac{dN_v}{N \cdot dv} = f(v) \cdot dv$ – частка молекул, швидкості яких лежать в інтервалі dv ;

$dN_v = N \cdot f(v)dv$ – число молекул, швидкості яких лежать в інтервалі dv ;

$\Delta N = \int_{v_2}^{v_1} Nf(v)dv$ – число молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від

v_1 до v_2 .

В інтервал швидкостей від 0 до ∞ попадають усі N молекул і ймовірність цього дорівнює одиниці або 100%. Тоді

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1 \quad (2.13)$$

Формула (2.13) виражає умови нормировки функції розподілу. Інакше кажучи, функція розподілу винна задовольняти умові (2.13).

Розглянемо приклади виду функції розподілу:

1) Якщо функція розподілу має такий вигляд, як на рис.2.6, то швидкості лежать в інтервалі від 0 до v_0 .

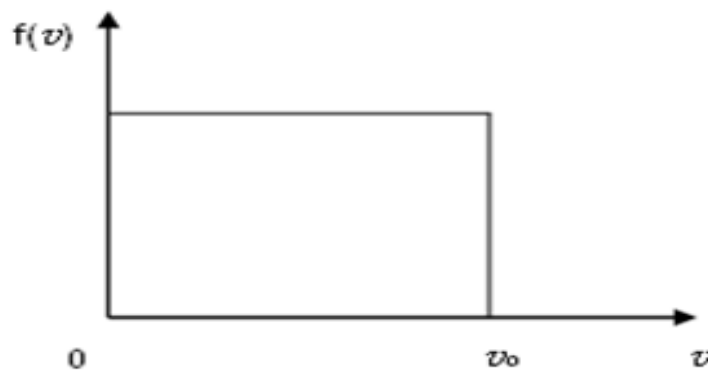


Рисунок 2.6 – Функція розподілу в інтервалі від 0 до v_0

Молекул зі швидкостями $v > v_0$ немає. Крім того, у будь-яких однакових інтервалах швидкостей лежить однакове число молекул.

2) При такій функції розподілу (рис.2.7) швидкості молекул лежать в інтервалі $0 < v < \infty$. Можна відзначити, що в цьому випадку швидких і

повільних молекул менше, чим молекул, швидкості яких мають деяке середнє значення.



Рисунок 2.7 – Функція розподілу в інтервалі $0 < v < \infty$

Функція розподілу Максвела.

В 1856 р. Джеймс Клерк Максвелл використовуючи основні закони класичної механіки й елементи математичної статистики розв'язав статистичне завдання й одержав формулу функції розподілу молекул ідеального газу по швидкостях . При постійній температурі функція має вигляд:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \cdot kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right), \quad (2.14)$$

де m – маса молекули ідеального газу.

Проаналізуємо деякі моменти, що впливають із розподілу (2.14):

1) Функція розподілу є функція від швидкості, температури й маси молекул.

2) Графік функції для $T = \text{const}$ (рис.2.8). Графік має максимум при $v = v_{\text{с}}$ ($v_{\text{с}}$ – найбільш імовірна швидкість). При будь–якій температурі є повільні й швидкі молекули, але більша частина молекул має швидкості, що лежати поблизу найбільш імовірної.

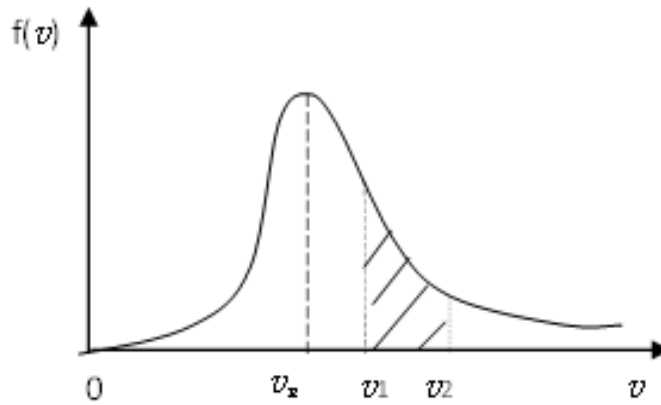


Рисунок 2.8 – Функція розподілу Максвела

Оскільки умова нормировки записується так:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1,$$

То площа під кривою на графіку чисельно дорівнює одиниці.

4) Заштрихована площа під кривою чисельно дорівнює частці молекул, швидкості яких лежать в інтервалі від v_1 до v_2

5) Графіки функції розподілу для різних температур (рис. 2.9)

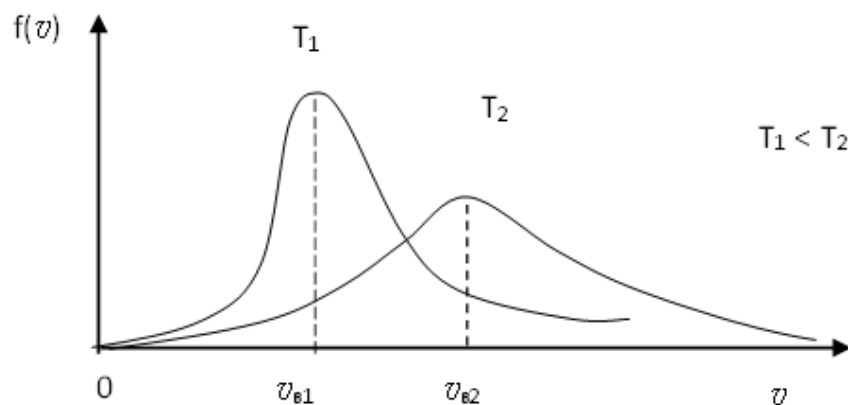


Рисунок 2.9 – Функції розподілу для різних температур

При збільшенні температури найбільш імовірна швидкість молекул зміщується у бік більших значень, а максимальне значення функції

розподілу зменшується. Площі під кривими для T_1 і T_2 однакові й дорівнюють одиниці.

Важливо, що при будь-яких температурах є швидкі молекули, які відіграють важливу роль у різних фізико-хімічних процесах.

6) Одержимо формулу для розрахунків найбільш імовірної швидкості молекул. Вона відповідає екстремуму функції $f(v)$. Дорівняємо похідну $f'(v)$ нулю.

$$f'(v) = A \left[2v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) + v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \left(-\frac{mv^2}{kT}\right) \right] = 0$$

Величина A отут рівна $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \cdot kT}\right)^{\frac{3}{2}}$ (див.(2.14))

Тоді одержимо $2 - \frac{mv^2}{kT} = 0$. Звідси

$$v_g = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (2.15)$$

Виразення (2.15) дозволяє обчислити величину найбільш ймовірної швидкості.

7) Якщо є суміш газів, що перебувають у рівновазі, то в межах молекул одного сорту слухна функція розподілу (2.14) зі своїми значеннями маси молекул m . При цьому, більш важкі молекули будуть рухатися в середньому з меншою швидкістю, чому більш легкі.

Виходячи з розподілу молекул газу по швидкостям, можна одержати формулу розподілу молекул за значеннями енергії поступального руху E . Використовуючи вираження (2.12) і (2.14) і враховуючи що

$$v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad i \frac{dE}{dv} = \frac{d}{dv} \left(\frac{mv^2}{2}\right) = mv = \sqrt{2mE},$$

одержимо

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (2.16)$$

Функція розподілу по енергіям (2.16) має такий же вид і схожі особливості, що й функція розподілу по швидкостям (2.14).

2.6. Середні швидкості молекул

Оскільки швидкості молекул газу при даній температурі мають різні значення по модулю, у статистичній фізиці використовують середні швидкості молекул.

Нехай загальне число молекул газу дорівнює N . ΔN_1 молекул мають швидкість v_1 , ΔN_2 молекул мають швидкість v_2 і т.і.

1. *Середньою арифметичною швидкістю* молекул називається величина:

$$\bar{v} = \frac{v_1 \Delta N_1 + v_2 \Delta N_2 + \dots + v_N \Delta N_N}{N}$$

Сума в чисельнику запишиться у вигляді інтеграла:

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v dN_N}{N}$$

Враховуючи (2.12), можна переписати:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \cdot kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

Інтегрування (заміна змінної й інтегрування вроздріб) дає величину середньої арифметичної швидкості:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m}} \quad , \quad (2.17)$$

де m – маса молекули.

2. *Середньою квадратичною швидкістю* молекул називається величина:

$$v_{\kappa\theta}^2 = \frac{v_1^2 \Delta N_1 + v_2^2 \Delta N_2 + \dots + v_N^2 \Delta N_N}{N}$$

тоді:

$$\bar{v}_{\kappa\theta}^2 = \frac{\int_0^\infty v^2 dN_N}{N}, \quad (2.18)$$

Враховуючи (2.12), можна записати:

$$\bar{v}_{\kappa\theta}^2 = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi \cdot kT} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^4 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv$$

Інтегрування дає величину середньої квадратичної швидкості:

$$\bar{v}_{\kappa\theta}^2 = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (2.19)$$

Порівняння величин найбільш імовірної, середньої й середньої квадратичної швидкостей показує, що $v_e > \bar{v} > v_{\kappa\theta}$.

Експериментальна перевірка розподілу Максвела

Експериментальне визначення швидкостей молекул провів Штерн в 1920 р і більш точно Ламерт в 1929 р. У досвідах (рис.2.10) Ламерта молекулярний пучок пропускався крізь два обертові циліндри зі швидкістю ω диска з радіальними щілинами, зміщеними друг щодо друга на деякий кут ϕ .

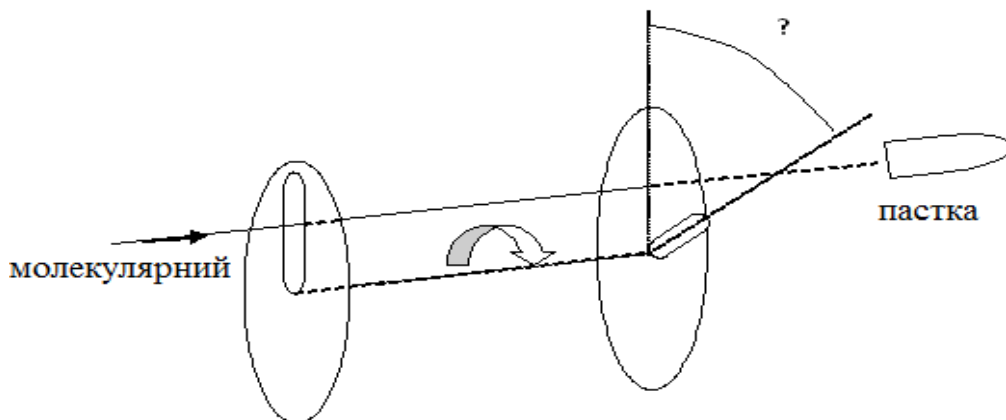


Рисунок 2.10 – Досвіди Ламерта

Із числа молекул, що пролетіли через щілину в першому диску, пролетять через другий тільки ті, які підлетять до нього в тієї момент, коли на шляху пучка встане проріз в іншому диску. Більш швидкі й більш повільні молекули будуть затримані іншим диском.

Це обладнання дозволяє виділити з пучка молекули з певною швидкістю (точніше, молекули швидкості яких лежать в деякому інтервалі швидкостей, який залежить від ширини щілин).

Час $t_1 = l / v$, за яку молекули пролетять.

Відстань l між дисками повинна збігатися згодом до $t_2 = \phi / \omega$, за яку диски повернутися на кут ϕ . Звідси

$$v = \frac{\omega l}{\phi}$$

Міняючи швидкість обертання, можна виділити з пучка молекули, що володіють різними значеннями швидкості. Збираючи молекули в уловлювач, можна визначити їхню відносну кількість у пучку.

Результати дослідів Ламерта повністю підтверджують теоретично отриманий розподіл Максвелла.

Барометрична формула

Наявність атмосфери в Землі визначають два фактори:

1. Усі молекули повітря мають кінетичну енергію й перебувають у безперервному хаотичному русі.
2. Молекули повітря притягаються до Землі.

Дійсно, при відсутності кінетичної енергії молекули, під дією сили ваги впали б на поверхню Землі. Якщо буде відсутнє гравітаційне притягання, тобто володіючи певними швидкостями, молекули розлетяться від планети. Саме взаємодія 1 і 2 факторів приводить до того, що Земля має більш–менш стабільну атмосферу.

Тиск повітря зменшується з висотою . Одержиме формулу, яка дозволить визначити залежність тиску P від висоти над рівнем моря h . Виділимо в атмосфері на висоті h циліндричний об'єм із площею підстави S і висотою dh .

Висоті h відповідає тиск P , висоті $h+dh$ – тиск $P+dp$. На виділений обсяг діє сила ваги $g \cdot dm$, сила тиску на нижню підставу $F_1 = PS$ і сила тиску на верхню підставу $F_2 = (P+dp)S$. Виділений об'єм не переміщається в просторі й сума сил діючих на нього дорівнює нулю:

$$(P+dp)S + dm \cdot g = PS ;$$

$$Sdp + dm \cdot g = 0;$$

$$Sdp + \rho g S \cdot dh = 0,$$

де ρ – густина газу на висоті h .

Виразимо ρ з рівняння Клапейрона – Менделєєва:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT} \quad (2.20)$$

де μ – молярна маса повітря.

Підставивши це вираження в (2.20) одержимо:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dh$$

Проінтегруємо отримане вираження й одержимо:

$$\ln P = -\frac{\mu g h}{RT} + \ln C$$

Потенціюючи це вираження одержимо:

$$P = C \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$$

Знайдемо величину постійної C .

Для $h = 0$, одержуємо $C = P_0$, де P_0 – тиск повітря на рівні моря.

Остаточно напишемо:

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right) \quad (2.21)$$

Вираження (2.21) називають *барометричною формулою*. Воно показує як міняється тиск повітря з висотою над рівнем моря, якщо температура повітря постійна на всіх висотах.

Наведено графік (рис.2.11) залежності $P=f(h)$ для різних температур.

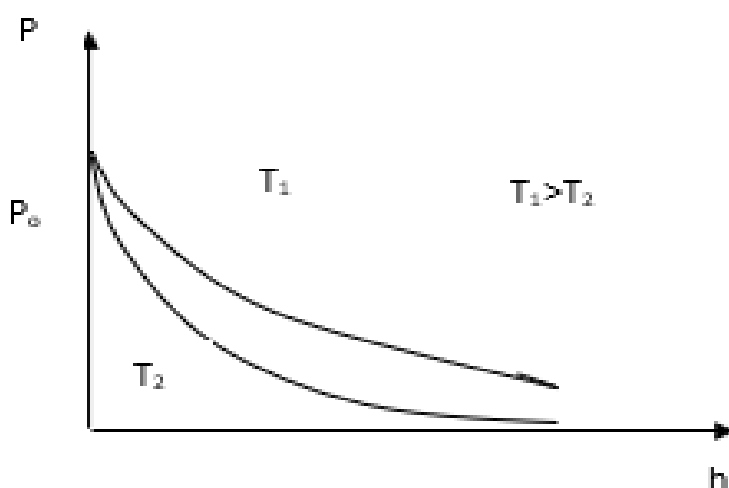


Рисунок 2.11 – Графік залежності $P=f(h)$ для різних температур

2.7 Розподіл Больцмана

Розподіл часток у потенційному полі.

Барометричну формулу можна записати у вигляді

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{m g h}{kT}\right), \quad (2.22)$$

де n – концентрація молекул повітря на висоті h ;

n_0 – концентрація молекул повітря на рівні моря;

m – маса однієї молекули;

k – постійна Больцмана.

Аналізуючи вираження (2.22) можна відзначити, що в показнику експоненти є величина mgh – потенційна енергія молекул ε_n . Визначити розподіл молекул по висоті можна разом із розподілом їх за значеннями потенційної енергії:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_n}{kT}\right)$$

де ε_n – характеризує силу притягання молекул до Землі;

kT – теплова енергія руху молекул.

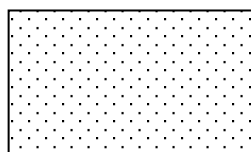
Тому розподіл молекул по висоті визначається дією цих двох факторів.

Больцман показав, що розподіл цей вірний для сукупності будь-яких однакових часток, що перебувають у стані хаотичного теплового руху в будь-якому потенційному полі. Розподіл називається розподілом Больцмана.

2.8 Основи термодинаміки

Поняття про рівновагу термодинамічної системи. Рівноважні процеси.

Термодинамічна система перебуває в рівновазі, якщо всі параметри системи й окремих її частин мають постійну величину. Наприклад, газ, що перебуває в сосуді (рис.2.12):



$P = \text{const}$

$V = \text{const}$

Рисунок 2.12 – Термодинамічна система

Ця система (газ) перебуває в рівновазі. Оскільки параметри стану ідеального газу зв'язані між собою рівнянням стану (рівняння Клапейрона–Менделєєва), то для опису стану газу досить двох параметрів (наприклад, P и V). Стан газу в рівновазі зручно зображувати на діаграмах стану (рис.2.13):

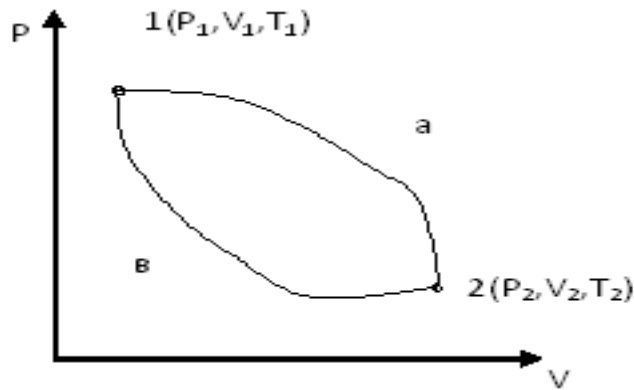


Рисунок 2.13 – Діаграма стану

Крапка 1 відповідає рівноважному стану системи з параметрами P_1, V_1, T_1 . Якщо система переходить з одного рівноважного стану в інше, наприклад, зі стану 1 у стан 2, то параметри стану змінюються й система в процесі переходу буде перебувати в нерівноважному стані. На діаграмі стану такий процес зобразити не можна. Зобразити можна тільки рівноважний процес тобто такий процес при якому параметри стану змінюються нескінченно повільно й тоді процес являє собою сукупність рівноважних станів. На малюнку процес 1 – а – 2 – процес рівноважний.

Якщо по закінченню процесу система може повернутися у вихідний стан через ту ж послідовність станів так, щоб нічого не змінилося в навколишніх тілах, то процес називається *оборотним*. Усі реальні процеси необоротні. До оборотних процесів можна віднести нескінченно повільні (рівноважні) процеси, коли зміни параметрів настільки мало, що неважливо в якому напрямку буде розбудовуватися процес.

2.9 Внутрішня енергія, теплота та робота газу

Під внутрішньою енергією системи розуміють суму кінетичної й потенційної енергії часток системи. У загальному випадку сюди включають енергію всіх видів взаємодії часток системи, обчислити якові досить складно, навіть, мабуть неможливо. Ситуацію спрощує та обставина, що для термодинаміки важливим є не саме значення внутрішньої енергії, а її зміна ΔU , яку можна розрахувати досить точно.

Тому що ідеальний газ складається із часток, які не взаємодіють між собою, ті їх потенційна енергія дорівнює нулю. Тому внутрішня енергія ідеального газу дорівнює кінетичної енергії всіх його молекул (або атомів). Помноживши кінетичну енергію однієї молекули (дів. (2.11)) на число молекул N одержимо *формулу для внутрішньої енергії ідеального газу*:

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT \quad (2.23)$$

Внутрішня енергія є функцією стану системи (газу) і для даного стану має цілком певне значення. Зміна внутрішньої енергії є різниця двох значень внутрішньої енергії, що відповідають кінцевому й початковому стану системи:

$$\Delta U = U_2 - U_1$$

Елементарна зміна внутрішньої енергії ідеального газу:

$$dU = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R dT \quad (2.24)$$

Знайдемо вираження для обчислення роботи, яку виконує ідеальний газ при розширенні. Нехай газ під поршнем площею S ізобарно розширюється (рис.2.14).

Об'єм газу під дією сили $F = P \cdot S$ збільшується на $dv = S \cdot dx$.

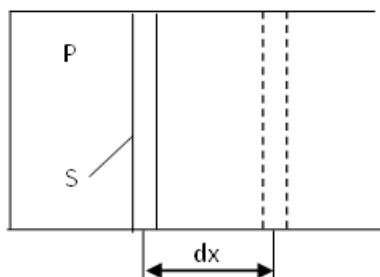


Рисунок 2.14 – Газ під поршнем площею S

Тоді робота газу може бути полічена по формулі:

$$\delta A = F \cdot dx = P \cdot S \cdot dx = P \cdot dV, \quad (2.25)$$

На відміну від внутрішньої енергії робота не є функцією стану а є функцією процесу. Не можна сказати – елементарна зміна роботи. Треба говорити – відбувається елементарна робота. Ця обставина відзначена специфічним знаком δ (дельта) при позначенні елементарної роботи.

Для розрахунків роботи газу при кінцевій зміні об'єму газу, треба вираз (2.25) проінтегрувати:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV \quad (2.26)$$

Із цього рівняння ясно, що робота газу графічно визначається як площа під кривою в координатах P–V (рис.2.15).

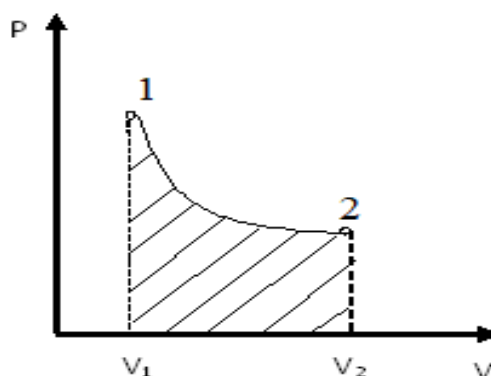


Рисунок 2.15 – Діаграма в координатах P–V

Кількість теплоти або теплота – захід передачі енергії в процесі теплообміну між тілами. Так саме як і робота теплота – функція процесу. Елементарна кількість теплоти позначається δQ .

2.10 Перший закон термодинаміки

Перший закон термодинаміки по суті є законом збереження енергії для випадку, коли істотну роль відіграють процеси теплопередачі. Математичний запис закону:

$$Q = \Delta U + A \quad (2.27)$$

Кількість теплоти, надане системі, витрачається на збільшення внутрішньої енергії й на виконання системою роботи.

Для елементарних процесів перший початок термодинаміки записується так:

$$\delta Q = dU + \delta A \quad (2.28)$$

Розглянемо круговий процес, наприклад, процес 1 – а – 2 – в – 1. У результаті такого процесу зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю тобто $\Delta U = 0$. Тоді перший початок термодинаміки можна записати так:

$$\frac{A}{Q} = 1 \quad (2.29)$$

Це означає що для кругового процесу тепло надане системі дорівнює виконаній роботі. У реальних кругових процесах, а саме такі процеси відбуваються при роботі теплових двигунів, частина енергії яка надана системі може розсіюватися, витрачатися на подолання сили тертя й ін.,тому $Q > A$. У загальному випадку (2.29) запишеться:

$$\frac{A}{Q} \leq 1 \quad (2.30)$$

Вираження (2.30) також є математичним вираженням першого закону термодинаміки, який можна сформулювати так:

Неможливо виготовити вічний двигун першого роду, тобто таке періодично діюче обладнання, яке виконувало роботу більшу, ніж підведена енергія. Іншими словами к.к.д. – теплового двигуна не може бути більше 100%.

2.11 Теплоємність і її трактування молекулярно кінетичною теорією

1. *Теплоємністю тіла* називається величина, рівна кількості тепла, яке потрібно повідомити тілу, щоб підвищити його температуру на один кельвін

$$C_{\text{Тела}} = \frac{\delta Q}{dT} \quad (2.31)$$

2. *Питомаю теплоємністю* називається теплоємність одиниці маси речовини, тобто величина, що чисельно дорівнює кількості тепла, яке необхідно надати одному кілограму речовини, щоб підвищити його температуру на один кельвін::

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta Q}{dT} \quad (2.32)$$

3. *Молярною теплоємністю* називається теплоємність 1 моля речовини, тобто величина, чисельно рівна кількості тепла, яка необхідно надати одному молю речовини, щоб підвищити його температуру на один кельвін::

$$C = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\delta Q}{dT} \quad (2.33)$$

Зв'язок між молярною й питомою теплоємністю має вигляд:

$$C = \mu c \quad (2.34)$$

Теплоємність тіла залежить від маси тіла, його хімічного складу, термодинамічного стану й виду процесу надання тепла. Розрізняють:

- 1) C_T – теплоємність для ізотермічного процесу. З (2.32) випливає, що $C_T = \infty$;
- 2) C_P – теплоємність для ізобарного процесу;
- 3) C_V – теплоємність для ізохорного процесу
- 4) Теплоємність для адіабатного процесу рівна 0, що випливає з (2.33).

Розглянемо від чого залежать молярні теплоємності C_P і C_V ідеального газу.

Для ізохорного процесу перший початок термодинаміки можна записати так:

$$\partial Q = du.$$

Тоді виходячи з визначення

$$C_P = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\delta U}{dT} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{dT} \cdot \left(\frac{i}{2} \nu R T \right) = \frac{i}{2} R, \quad (2.35)$$

Використовуючи перший початок термодинаміки й (2.33), напишемо:

$$C_P = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{dU}{dT} + \frac{P dV}{dT} \right) = \frac{1}{\nu} \cdot \left(\frac{i \nu R dT}{2 dT} + \frac{\nu R dT}{dT} \right) = \frac{i}{2} R + R, \quad (2.36)$$

Аналізуючи вираження (2.35) і (2.36) можна відзначити, що з погляду молекулярно-кінетичної теорії молярні теплоємності C_P і C_V для ідеального газу залежати тільки від кількості ступенів волі молекул газу i . Формулу єднальну C_P і C_V називають *рівнянням Майєра*:

$$C_P = C_V + R \quad (2.37)$$

2.12 Застосування першого закону термодинаміки до фізичних процесів

Ізопроцесами називаються термодинамічні процеси, що протікають при незмінному значенні аби якого параметра. Розрізняють ізотермічний, ізобарний, ізохорний і адіабатний процеси, Розглянемо докладно ці процеси за єдиною схемою:

1. Визначення процесу;
2. Перший закон термодинаміки стосовно до процесу;
3. Теплоємність для процесу;
4. Формула роботи газу для процесу;
5. Рівняння для процесу;
6. Діаграми стану для процесу.

Ізотермічний процес

1. Це процес, що протікає при постійній температурі ($T = \text{const}$).
2. Оскільки при ізотермічному процесі температура постійна, то зміна внутрішньої енергії газу дорівнює нулю $dU = 0$. Тоді

$$\delta Q = PdV$$

При ізотермічному процесі тепло надане системі витрачається тільки на роботу проти зовнішніх сил.

3. З визначення теплоємності (2.32) випливає, що $C_T = \infty$.
4. Одержимо формулу для розрахунків роботи використовуючи (2.26) і рівняння Клапейрона – Менделєєва:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \nu RT \cdot \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (2.38)$$

5. З рівняння Клапейрона – Менделєєва випливає:

$$PV = \text{const}$$

6. Діаграми стану в різних координатах (рис.2.16):

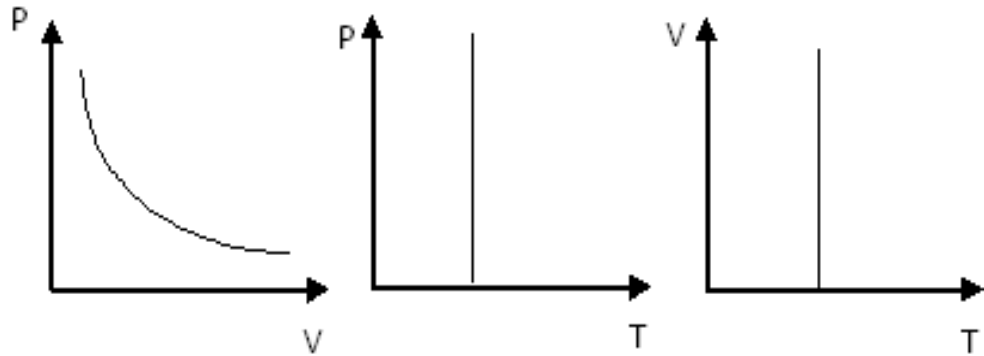


Рисунок 2.16 – Діаграма стану для ізотермічного процесу

Ізобарний процес

1. Це процес, що протікає при постійному тиску. $P = \text{const}$.

2. Перший закон термодинаміки для ізобарного процесу запишеться у вигляді:

$$\delta Q = dU + PdV$$

3. Молярна теплоємність для процесу (дів. (2.35)):

$$C_P = \frac{i}{2}R + R$$

4. Одержимо формулу для розрахунків роботи:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P(V_2 - V_1) \quad (2.39)$$

5. . З рівняння Клапейрона–Менделєєва випливає:

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

6. Діаграми стану в різних координатах (рис.2.17):

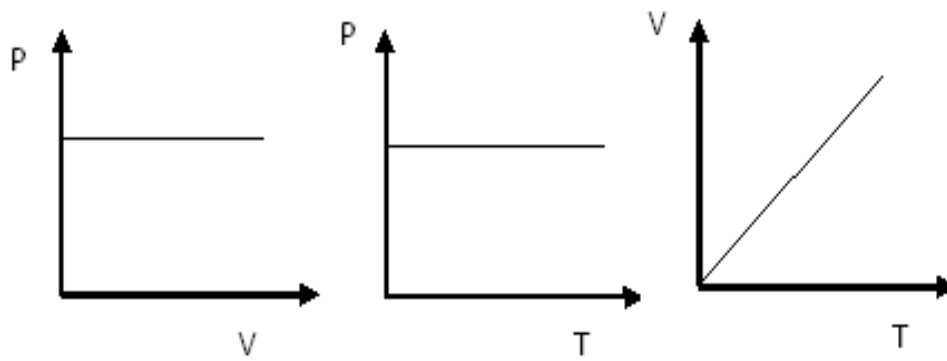


Рисунок 2.17 – Діаграма стану для ізобарного процесу

Ізохорний процес

1. Це процес, що протікає при постійному об'ємі ($V = \text{const}$).
2. При постійному об'ємі робота газу дорівнює нулю. Тоді

$$\delta Q = dU \quad (2.40)$$

3. Теплоємність для процесу (дів, (2.35)):

$$C_V = \frac{i}{2}R$$

4. Робота газу при постійному тиску дорівнює 0:

$$A = 0$$

5. . З рівняння Клапейрона–Менделєєва випливає:

$$\frac{P}{T} = \text{const}$$

6. Діаграми стану в різних координатах (рис.2.18):

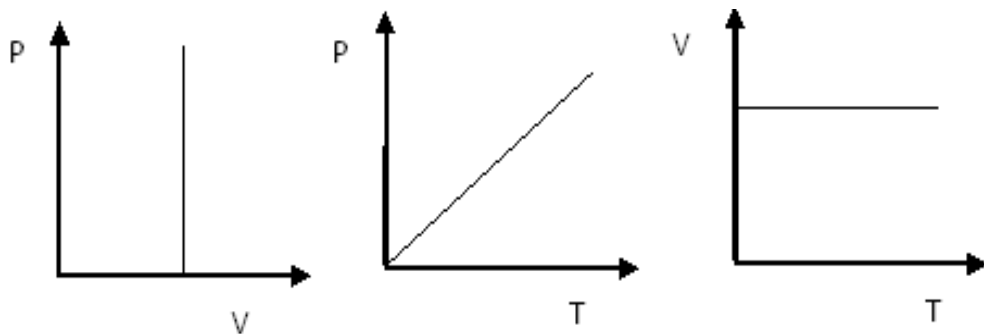


Рисунок 2.18 – Діаграма стану для ізохорного процесу

Адіабатний процес

1. Це процес, здійснюваний системою без теплообміну з навколишніми тілами тобто $\delta Q = 0$.

2. При адіабатному процесі газ виконує роботу за рахунок зменшення внутрішньої енергії:

$$dA = -\delta U$$

Прикладом такого процесу може служити швидке розширення газу в процесі якого теплообмін газу з навколишнім середовищем просто не встигає відбутися..

3. Теплоємність для адіабатного процесу рівна 0, що випливає з (2.32).

4. Одержиме формулу для розрахунків роботи газу скориставшись рівнянням (2.24):

$$A = -\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \nu R (T_1 - T_2) = \frac{i}{2} \cdot (P_1 V_1 - P_2 V_2) \quad (2.41)$$

5. Одержиме рівняння процесу. Для адіабатного процесу перший закон термодинаміки напишемо у вигляді

$$\delta U + PdV = 0$$

або

$$\left(\frac{i}{2} \nu RT\right) + PdV = 0$$

З рівняння Клапейрона – Менделєєва

$$P = \nu RT \cdot \frac{1}{V},$$

тоді

$$\frac{i}{2} \cdot \nu RT + \nu RT \cdot \frac{1}{V} = 0$$

або

$$\frac{i}{2} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (2.42)$$

Проінтегруємо вираження (2.42):

$$\frac{i}{2} \cdot \ln T + \ln V = 0. \quad (2.42a)$$

З рівняння для одного моля газу

$$\frac{PV}{T} = \text{const} \text{ і рівняння (2.42a),}$$

випливає

$$\ln P - \frac{2}{i} \ln V + \ln V = \text{const.}$$

Тоді

$$\ln P - \frac{i+2}{i} \ln V = \text{const.}$$

Позначимо $\gamma = \frac{i+2}{i}$, тоді

$$PV^\gamma = \text{const} \quad (2.43)$$

Це рівняння називається *рівнянням Пуассона* для адіабатного процесу. Величину γ називають *показник адіабати*. Для інших змінних рівняння адіабати записується так:

$$\begin{aligned} T^{\frac{1}{\gamma-1}} V &= \text{const}, \\ T \cdot V^{\gamma-1} &= \text{const}, \\ P^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V &= \text{const}, \\ P^{1-\gamma} \cdot T^\gamma &= \text{const}. \end{aligned}$$

6. Графік процесу в координатах P–V (рис.2.19)



Рисунок 2.19 – Діаграма стану адіабатного процесу

2.13 Другий закон термодинаміки

1) Розглянемо процес розширення газу у вакуум (рис. 2.20):

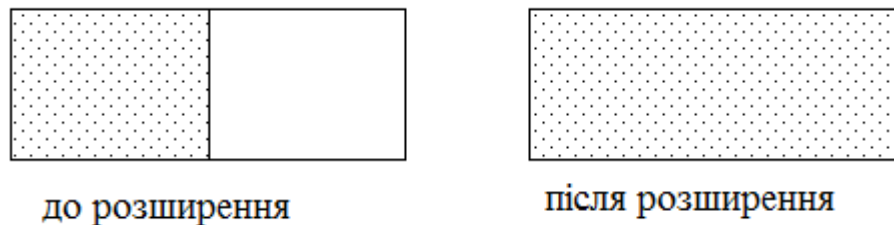


Рисунок 2.20 – Процес розширення газу у вакуум

Якщо забрати перегородку в посудині, газ буде займати весь об'єм. Очевидно, процес розширення буде йти досить швидко тобто процес буде не рівноважним і у зворотному напрямку самотійно не піде.

2) Розглянемо процес вирівнювання температури тіл у замкненій системі (рис. 2.21):

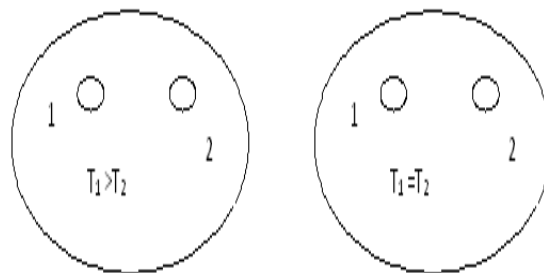


Рисунок 2.21 – Процес вирівнювання температури тіл у замкненій системі

Якщо надати систему самої собі, те згодом температура тіл 1 і 2 стані однаковою й до первісного стану система мимовільно не повернеться. Можна розглянути масу прикладів з яких випливає, що реальні процеси є нерівноважними, необоротними і йдуть в напрямку встановлення рівноваги. Це твердження по суті відбиває зміст другого закону термодинаміки т.е визначає напрямок розвитку процесів у термодинамічній системі.. Завдання полягає в тому, щоб записати цей закон математично. Для цього необхідно ввести деякі поняття.

Микро– і макростан . Термодинамічна ймовірність.

Стан термодинамічної системи можна задати за допомогою параметрів стану (для газу це P , V і T). Охарактеризований в такий спосіб стан називається *макростаном системи*.

Можна задати стан більш докладніше, а саме: пронумерувати всі молекули газу й у цей момент години задати імпульс і координату кожної молекули. Охарактеризований за допомогою такої « миттєвої світлини» стан системи називається макростаном.

Даний макростан може бути реалізовано за допомогою декількох мікростанів. *Термодинамічна ймовірність* (W) – число мікростанів, за допомогою яких реалізується даний макростан.

Ентропія

Л. Больцман дав статистичне тлумачення ентропії (S) – *це скалярна фізична величина яка чисельно дорівнює добутку сталої Больцмана на натуральний логарифм термодинамічної ймовірності*.

$$S = k \ln W, \quad (2.44)$$

де k – стала Больцмана.

W – термодинамічна ймовірність, число мікростанів, за допомогою яких реалізується даний макростан.

Ентропія є заходом безладдя в системі: чим вище ентропія – тим більше ступінь безладдя. Розглянемо це на прикладі.

Нехай у нас є зразок металу при температурі 0 К. У цьому випадку всі атоми розташовані у вузлах кристалічної решітки й нерухливі. Такий макростан системи може бути описане за допомогою одного мікростану (кожний атом у своєму гнізді й система має високий ступінь порядку). Отже, $W=1$ а ентропія дорівнює нулю ($S=0$). З ростом температури атоми одержують рухливість, можуть мінятися місцями, переходити з одного положення в інше. При цьому збільшується W , зростає ступінь безладдя й збільшується ентропія.

Ентропія також як і внутрішня енергія U , є функцією стану системи. Зміна ентропії при переході системи з одного стану в інше можна порахувати по формулі:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T} \quad (2.45)$$

Отут знак « $>$ » слушний для нерівноважних процесів, а знак « $=$ » – для рівноважних.

Використовуючи (2.44), одержимо формули розрахунків зміни ентропії для ізопроцесів.

Ізотермічний процес.

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{P dV}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R T dV}{TV} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.46)$$

Ізохорний процес.

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{i \nu R dT}{2T} = \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.47)$$

Ізобарний процес.

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{PdV}{T} + \int_{U_1}^{U_2} \frac{dU}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{iv \cdot R dT}{2T} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (2.48)$$

Адіабатний процес.

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = 0 \quad (2.49)$$

При адіабатному процесі ентропія не змінюється.

Інше формулювання 2 закону термодинаміки.

Розглянемо замкнену систему (у цьому випадку $Q=0$) і напишемо для неї вираження (2.45):

$$dS \geq 0 \quad (2.50)$$

Ця формула є математичним записом другого закону термодинаміки. *Ентропія замкненої системи збільшується, якщо в ній розвиваються нерівноважні процеси ($\Delta S > 0$) або залишається постійною ($\Delta S = 0$) якщо в системі розвиваються рівноважні процеси або система перебуває в рівновазі..*

Другий закон термодинаміки можна формулювати різними способами й кожне формулювання відбиває ті або інші прояви цього закону.

1. Р. Клаузіус запропонував два формулювання.

1) Ентропія замкненої системи прагне до максимуму.

2) Теплота не може сама собою переходити від холодного тіла до гарячого.

Другу формулювання впливає з того, що при передачі тепла від гарячого тіла до холодного ентропія системи зростає. Зворотний процес приводить до зменшення ентропії, що неможливо, якщо система надана самої собі.

2. Формулювання М.Планка.

Неможливий періодичний процес, єдиним і кінцевим результатом якого було б перетворення тепла в роботи.

Це формулювання стає зрозумілою, при розгляді роботи теплового двигуна. Якщо в результаті роботи теплового двигуна буде спостерігатися тільки процес перетворення тепла в роботу, то температура всіх частин двигуна стане однаковою і його робота припиниться. Щоб цього не відбулося й двигун працював періодично, необхідно ще відводити тепло. Необхідна наявність холодильника.

3. В.Оствальд запропонував формулювання, яке перегукується з формулюванням Планка.

Неможливий вічний двигун іншого роду, тобто таке періодично діюче обладнання, яке б повністю перетворювало тепло в роботу.

Із цього формулювання випливає, що к.к.д. теплового двигуна не може бути рівний 100%.

2.14 Теплові та холодильні машини

Теплова машина – це обладнання, яке перетворює внутрішню енергію одних тіл у механічну енергію інших.

Приведемо принципову схему теплової машини на рис.2.22:

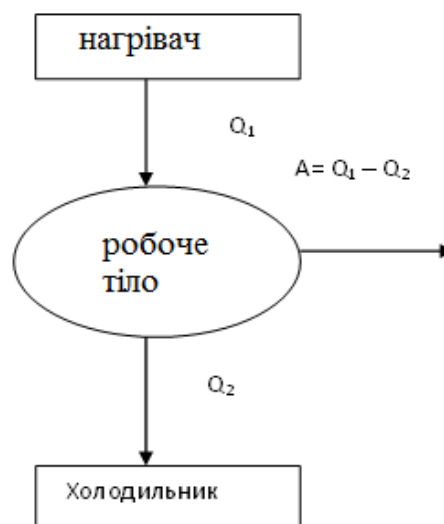


Рисунок 2.22 – Принципова схема теплової машини:

Q_1 – кількість теплоти передане нагрівачем робочому тілу за один цикл.

Q_2 – кількість теплоти передана робочим тілом холодильнику.

A – робота зроблена за один цикл.

У процесі роботи двигуна робоче тіло виконує циклічний процес (див. (2.29)). Тому, зміна його внутрішньої енергії за один цикл дорівнює нулю. Тоді з першого початку термодинаміки випливає, що теплота отримана тілом за один цикл витрачається на здійснення роботи:

$$A = Q_1 - Q_2$$

Звичайно, ефективність роботи теплової машини характеризують коефіцієнтом корисної дії (к.к.д.). К.к.д. визначається як відношення виконаної за один цикл роботи A до кількості тепла, яку робоче тіло одержало від нагрівача Q_1 .

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (2.51)$$

Французький інженер С.Карно показав, що максимальне значення к.к.д. можливо в теплової машини яка працює по циклу, що складається із двох ізотерм (1–2 і 3–4) і двох адіабат (2–3 і 4–1), якщо робоче тіло – ідеальний газ. Такий цикл називають *циклом Карно* (рис.2.23). На ділянці 1–2 робоче тіло одержує від нагрівача кількість тепла Q_1 при температурі T_1 , а на ділянці 3–4 робоче тіло віддає холодильнику кількість тепла Q_2 при температурі T_2 .

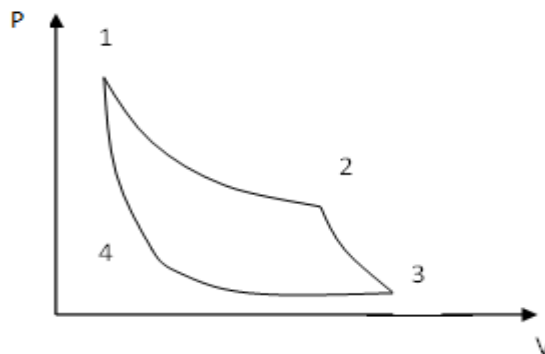


Рисунок 2.23 – Цикл Карно

Порахуємо, як у цьому випадку можна розрахувати к.к.д.

Зміна ентропії за один цикл 1–2–3–4–1 дорівнює нулю. Тоді

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_1} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T_2} + \int_4^1 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$
$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad (2.52)$$

З (2.51) і (2.52) одержимо:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (2.53)$$

Використовуючи формулу (2.53) можна порахувати к.к.д. теплової машини працюючої по циклу Карно, якщо робоче тіло машини – ідеальний газ.

Холодильні машини (холодильники) це обладнання які перекачують тепло з резервуара з меншою температурою в резервуар з більшою температурою. Наприклад, тепло з холодильної камери побутового холодильника перекачується в навколишнє повітря. Щоб зробити це перекачування тепла необхідно затратити певну роботу.

Принципова схема холодильника (рис.2.24) така ж як і в теплової машини, однак, циклічний процес який виконує робоче тіло повинен іти у зворотному напрямку.

Ефективність роботи холодильної машини визначається *холодильним коефіцієнтом*, який дорівнює відношенню тепла яке відбирають у холодильника до витраченої роботи:

$$\eta = \frac{Q_2'}{A'} = \frac{Q_2'}{Q_1' - Q_2'} \quad (2.54)$$

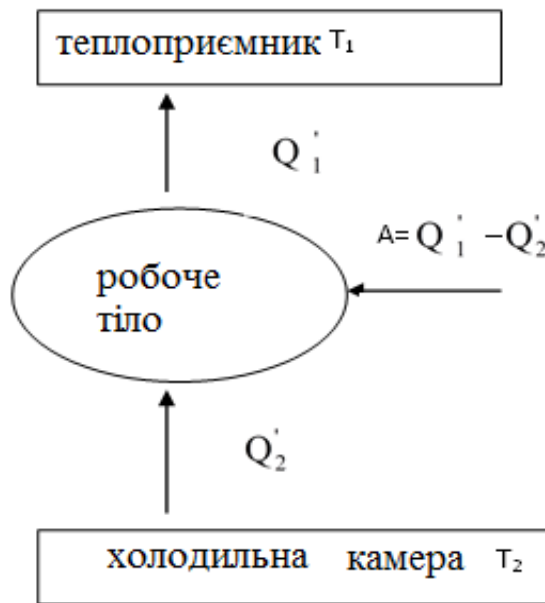


Рисунок 2.24 – Принципова схема холодильника:

Q_2' – теплота яку відбирають у холодильної камери з температурою T_2

Q_1' – теплота передана теплоприймачу з температурою $T_1 > T_2$.

A' – робота яка виконується над робочим тілом.

Якщо холодильна машина працює по циклу Карно, то холодильний коефіцієнт залежить від температур холодильної камери й теплоприймача:

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad (2.55)$$

2.15 Явища переносу

Довжина вільного пробігу молекул [5–6].

У процесі руху молекули газу безупинно зустрічаються, а в проміжках між зіткненнями рухаються прямолінійно й рівномірно. У попередніх моделях ідеального газу ми вважали молекули матеріальними крапками й не враховували зіткнень між ними. Розглянемо нову модель ідеального газу (рис. 2.25) в якій будемо вважати молекули кульками певного діаметра d_{ef} , який залежить від природи газу.

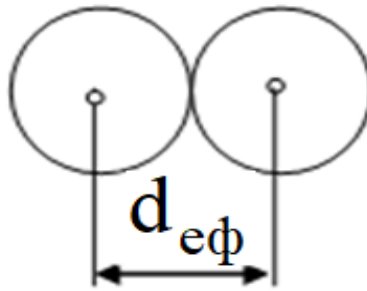


Рисунок 2.25 – Модель ідеального газу

Нехай ефективний діаметр молекули d_{ef} – це найменша відстань, на яку зближаються центри молекул при зіткненні.

Наше завдання – з'ясувати від чого залежить середня довжина вільного пробігу молекул, тобто середня відстань, яка проходить молекула між двома послідовними зіткненнями.

Для спрощення розрахунків, будемо вважати, що в нашому ідеальному газі рухається тільки одна молекула, а інші нерухливі. У цьому випадку в процесі руху молекула зіштовхнеться з тими молекулами, центри яких лежать усередині ламаного циліндра діаметром $2d_{ef}$ (рис 2.26).

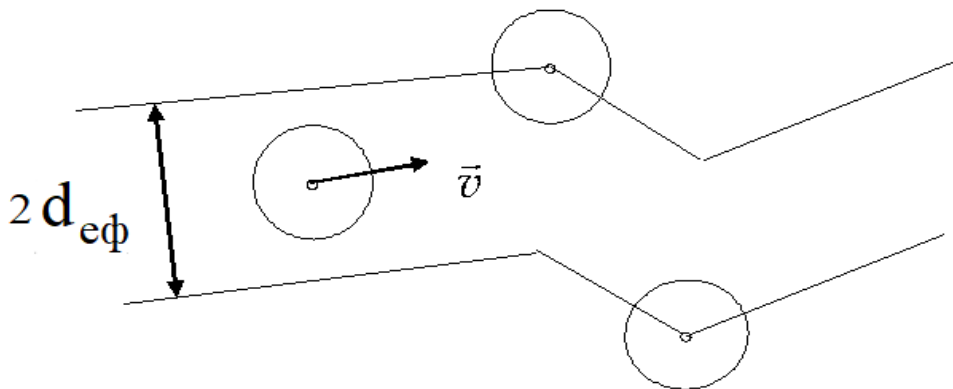


Рисунок 2.26 – Модель ідеального газу усередині ламаного циліндра

Кількість молекул усередині циліндра можна порахувати по формулі:

$$N = n \cdot V = n \cdot \pi \cdot d_{\text{еф}}^2 \cdot \bar{v} \cdot t,$$

де n – концентрація молекул ;

V – об'єм циліндра ;

$\bar{v}$ – середня швидкість руху молекул ;

t – час руху молекули

Число зіткнень в одиницю часу:

$$z = \frac{N}{t} = n \cdot \pi \cdot d_{\text{еф}}^2 \cdot \bar{v} \quad (2.56)$$

Якщо в нашій моделі враховувати, що рухається не одна, а всі молекули, то в (2.56) треба підставляти не середню швидкість молекул, а середню відносну швидкість молекул

$$\bar{v}_{\text{відн}} = \sqrt{2} \cdot \bar{v} \quad .$$

Тоді

$$z = \sqrt{2} \cdot n \cdot \pi \cdot d_{\text{еф}}^2 \cdot \bar{v} \quad (2.57)$$

Формула (2.57) дає число зіткнень молекул в одиницю часу. Середня довжина вільного пробігу буде рівна

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{\bar{v}}{z}$$

Тоді

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d_{\text{еф}}^2 \cdot n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d_{\text{еф}}^2 \cdot P} \quad (2.58)$$

Графік залежності середньої довжини вільного пробігу від тиску має вигляд (рис. 2.27):

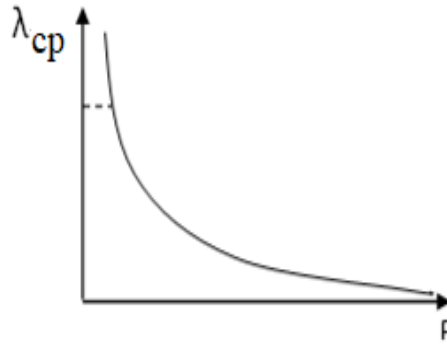


Рисунок 2.27 – Графік залежності середньої довжини вільного пробігу від тиску

При зменшенні тиску, довжина вільного пробігу збільшується доти поки не стане рівною розміру посудини в якому перебуває газ.

Якщо довжина вільного пробігу порівнянна з розмірами посудини L у якому перебуває газ, то стан газу називається *вакуумом*. Розрізняють низький (до 10^{-3} мм.рт.ст.), середній (до 10^{-6} мм.рт ст.) і високий (10^{-9} мм. рт ст. і менш) вакуум.

Дифузія

Явище дифузії обумовлене неоднорідністю концентрації речовини й полягає в переносі речовини з місць із більшою концентрацією, у місця з меншою концентрацією. У випадку однорідної речовини, явище описується законом Фіка:

$$dm = -\frac{d\rho}{dx} dS_{\perp} dt, \quad (2.59)$$

де dm – маса, яка переноситься через переріз $dS_{\perp}$ перпендикулярно напрямку переносу, за час dt при градієнті густини $d\rho/dx$.

Знак «мінус» показує, що маса переноситься убік зменшення густини.

D – коефіцієнт дифузії який чисельно дорівнює масі речовини, що переноситься через одиничний майданчик за одиницю часу при одиничному градієнті щільності.

Можна показати, що коефіцієнт дифузії рівний

$$D = \frac{1}{3} \lambda_{\text{ср}} \cdot \bar{v} , \quad (2.60)$$

де $\lambda_{\text{ср}}$ – середня довжина вільного пробігу молекул;

$\bar{v}$ – середня швидкість молекул.

Використовуючи формулу (2.60) і формули для розрахунків $\lambda_{\text{ср}}$ і $\bar{v}$ (дивися (2.58) і (2.18)), можна проаналізувати залежність коефіцієнта дифузії від тиску:

$$D = \frac{1}{3} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d_{\text{эф}}^2 \cdot P} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$$

Зі зменшенням тиску, D збільшується. Проте, слід зазначити, що при низьких тисках, коли молекули газу практично не взаємодіють один з одним, коли не спостерігається хаотичного руху й взаємодії часток, закони статистичної фізики не працюють, сама дифузія має інший характер і в цих умовах говорити про коефіцієнт дифузії не має змісту.

Теплопровідність

Явище теплопровідності обумовлене неоднорідністю температури й полягає в переносі тепла з місць із більшою температурою в місця з меншою температурою. Процес переносу тепла описується рівнянням Фур'є:

$$\delta Q = -K \frac{dT}{dx} dS_{\perp} \cdot dt , \quad (2.61)$$

де δQ – кількість тепла яке переноситься через майданчик $dS_{\perp}$ за час dt при градієнті температури dt/dx ;

Знак «мінус» показує, що тепло переноситься убік меншої температури;

K – коефіцієнт теплопровідності, чисельно дорівнює кількості тепла, яка переноситься через одиничний майданчик за одиницю часу при одиничному градієнті температури.

Можна показати, що коефіцієнт теплопровідності дорівнює

$$K = \frac{1}{3} \lambda_{\text{ср}} \cdot \bar{v} \cdot \rho \cdot c_v, \quad (2.62)$$

де ρ – густина газу;

c_v – питома теплоємність при постійному об'ємі.

Нескладно показати, що коефіцієнт теплопровідності не залежить від тиску. Проте, при низькому тиску, коли довжина вільного пробігу молекул стає сумірною з розмірами посудини, змінюється механізм теплопередачі і рівняння Фур'є вже не працює. У цих умовах, теплопровідність різко зменшується, що широко використовується в конструкції судин Дьюара, побутових термосів і т.і.

Внутрішнє тертя.

Явище внутрішнього тертя обумовлено наявністю тертя між шарами газу (рідини), які рухаються з різними швидкостями і полягає в перенесенні (передачі) імпульсу від швидких молекул повільним. Явище описується законом Ньютона:

$$dp = -\eta \frac{dv}{dx} dS_{\perp} \cdot dt, \quad (2.63)$$

де dp – імпульс, який переноситься через площадку $dS_{\perp}$ за час dt при градієнті швидкості dv / dt ;

Знак «мінус» показує, що сила внутрішнього тертя протилежна градієнту швидкості, тобто імпульс переноситься в напрямку зменшення швидкості.

η — коефіцієнт в'язкості, чисельно рівний імпульсу, який переноситься через одиничну площадку за одиницю часу при одиничному градієнті швидкості. Можна показати, що коефіцієнт в'язкості дорівнює:

$$\eta = \frac{1}{3} \lambda_{\text{cp}} \cdot \bar{v} \cdot \rho \quad (2.64)$$

Коефіцієнт в'язкості не залежить від тиску. Але в вакуумі внутрішньо тертя відсутнє. Однак тіло, що рухається у вакуумі буде відчувати дію сили тертя, обумовлене взаємодією з молекулами.

Основні позначення, які використовуються в молекулярній фізиці та і термодинаміці наведено в таблиці 2.1

Таблиця 2.1 – Прийняті позначення

Позначення	Назва величини	Одиниці виміру
1	2	3
P	Тиск	Н/м ² , Па
V	Об'єм	м ³
T	Температура	К
μ	Молярна маса	кг/моль
m	Маса	кг
v	Швидкість	м/с ²
U	Внутрішня енергія	Дж
A	Робота	Дж
Q	Кількість теплоти	Дж
C	Молярна теплоємність	Дж/мольК

1	2	3
c	Питома теплоємність	Дж/кгК
i	Кількість ступенів свободи	—
D	Коефіцієнт дифузії	м ² /с
η	Коефіцієнт в'язкості	кг/мс
ДО	Коефіцієнт теплопровідності	кг·м/К·с ³
v	Число молів	моль
γ	Показник адіабати	—
n	Концентрація	1/м ³
N	Число частинок	—
S	Ентропія	Дж/К
$\bar{v}$	Середня арифметична швидкість	м/с
$v_{\text{в}}$	Найбільш імовірна швидкість	м/с
$v_{\text{кв}}$	Середня квадратична швидкість	м/с
W	Термодинамічна ймовірність	

2.16 Приклади розв'язання завдань

Приклад 1. Знайти щільність водню при температурі 20⁰ С и тиску 5 МПа.

Дано:

T=293 К

P=5·10⁶Па

μ= 2·10³ кг/моль

ρ – ?

Розв'язання:

Напишемо рівняння Клапейрона–Менделєєва

$$PV = \frac{m}{\mu} RT$$

Звідси $\rho = \frac{m}{V} = \frac{P\mu}{RT} = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8.31 \cdot 293} = 4.1 \text{ кг/м}^3$

Відповідь: ρ= 4.1 кг/м³ .

Приклад 2. Визначити відношення C_p/C_v для повітря.

Дано:	Розв'язання:
$\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Повітря можна вважати двоатомним газом.
$i = 5$	Кількість ступенів волі i для двоатомного газу рівно 5.
$C_p/C_v = ?$	Тоді
	$C_p = \frac{i+2}{2} R, \quad C_v = \frac{i}{2} R.$ $C_p/C_v = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1.4$

Відповідь: $C_p/C_v = 1.4$

Приклад 3. Скільки електронів утримується в 1 кг міді?

Дано:	Розв'язання:
$\mu = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	Число атомів міді можна порахувати по формулі
$Z = 29$	$N = \frac{m}{\mu} \cdot N_a$
$m = 1$ кг	На кожний атом доводиться таке число електронів, що
$N_e = ?$	дорівнює порядковому номеру міді в таблиці Менделєєва – Z .
	Тоді
	$N_e = \frac{m}{\mu} \cdot N_a \cdot Z = \frac{1}{64 \cdot 10^{-3}} \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \cdot 29 = 2.7 \cdot 10^{26}$

Відповідь: $N_e = 2.7 \cdot 10^{26}$

Приклад 4. Скільки молекул перебуває в кімнаті об'ємом 100 м^3 при температурі 200°C и тиску $0,1 \text{ МПа}$?

Дано:	Розв'язання:
$V = 100 \text{ м}^3$	Напишемо рівняння Больцмана:
$T = 293 \text{ К}$	$P = nkT$
$P = 10^5 \text{ Па}$	де $n = N/V$ – концентрація молекул.
$N = ?$	Тоді
	$N = \frac{PV}{kT} = \frac{10^5 \cdot 100}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 293} = 2.5 \cdot 10^{27}$
Відповідь:	$N = 2.5 \cdot 10^{27}$

Приклад 5. Чому дорівнює енергія обертowego руху молекул, що втримуються в 2 кг водню при температурі 400°C.

Дано:	Розв'язання:
$m = 2 \text{ кг}$	Внутрішню енергію ідеального газу можна
$T = 6273 \text{ К}$	порахувати по формулі: $U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} RT$
$\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	де $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{об}}$ – кількість ступенів свободи.
$E_{\text{об}} - ?$	

Водень – двохатомний газ. Для нього $i=5$.

З п'яти ступенів свободи три припадає на поступальний рух молекул ($i_{\text{пост}} = 3$), а дві – на обертальний ($i_{\text{вр}} = 2$). Тоді

$$E_{\text{об}} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8,31 \cdot 673}{2 \cdot 10^{-3}} = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

Відповідь: $E_{\text{об}} = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$

Приклад 6. Метан, що займав об'єм 10^{-2} м^3 та перебував під тиском $15 \cdot 10^5 \text{ Па}$ був нагрітий від 10°C до 27°C при постійному тиску. Визначити роботу розширення газу, зміну його внутрішньої енергії, кількість тепла повідомленого газу.

Дано:	Розв'язання:
$V_1 = 10^{-2} \text{ м}^3$	Напишемо рівняння Клапейрона – Менделєєва для
$P = 15 \cdot 10^5 \text{ Па}$	газу до та після нагрівання
$T_1 = 283 \text{ К}$	$PV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad PV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2.$
$T_2 = 300 \text{ К}$	Робота розширення газу при постійному тиску
$\mu = 16 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	$A = P (V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) =$
$A - ?$	$= \frac{PV_1}{RT_1} \cdot R(T_2 - T_1) = \frac{15 \cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{283} (300 - 283) = 901 \text{ Дж}$
$\Delta U - ?$	
$Q - ?$	

Зміну внутрішньої енергії порахуємо по формулі:

$$\Delta U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{i}{2} \cdot P(V_2 - V_1) = \frac{i}{2} \cdot A = \frac{6}{2} \cdot 901 = 2703 \text{ Дж}$$

Кількість теплоти Q , що повідомлена газу знайдемо, використовуючи перший початок термодинаміки:

$$Q = \Delta U + A = 901 + 2703 = 3604 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $A = 901 \text{ Дж}$, $\Delta U = 2703 \text{ Дж}$, $Q = 3604 \text{ Дж}$.

Приклад 7. Молекули азоту мають середню арифметичну швидкість 1000 м/с при нормальному тиску. Визначити число зіткнень в 1 с .

Дано:	Розв'язання:
$\bar{v} = 1000 \text{ м/с}$	Середню арифметичну швидкість молекул можна порахувати по формулі:
$P = 10^5 \text{ Па}$	
$d_{\text{эф}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$	$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \quad (1)$
$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	
$z - ?$	Число зіткнень молекул у секунду

$$z = n \cdot \pi \cdot d_{\text{эф}}^2 \cdot \bar{v} \quad (2)$$

$$\text{Напишемо рівняння Больцмана:} \quad P = nkT \quad (3)$$

З (1), (2), (3) одержимо:

$$z = \frac{8\sqrt{2} \cdot P \cdot d_{\text{эф}}^2 \cdot N_a}{\mu \cdot \bar{v}^2} = \frac{8\sqrt{2} \cdot 10^5 \cdot 9 \cdot 10^{-20} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 1000} = 2.19 \cdot 10^9 \text{ 1/с}$$

Відповідь: $z = 2.19 \cdot 10^9 \text{ 1/с}$

Приклад 8. Знайти зміну ентропії при ізобарному розширенні 8 г водню від об'єму $V_1 = 10 \text{ л}$ до об'єму $V_2 = 25 \text{ л}$.

Дано:	Розв'язання:
$\mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	Зміну ентропії порахуємо по формулі
$m = 8 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$	$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1}$
$V_1 = 10^{-2} \text{ м}^3$	Для ізобарного процесу $V_2/V_1 = T_2/T_1$. Тоді
$V_2 = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$	
$\Delta S - ?$	

$$\Delta S = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \ln 2.5 = 5.1 \text{ Дж/К}$$

Відповідь: $\Delta S = 5,1 \text{ Дж/К}$

Приклад 9. ККД ідеальної машини, що працює по циклу Карно, дорівнює 60%. Температура холодильника 70°C. Яка температура нагрівача? Яка робота відбувається за один цикл, якщо нагрівач передає робочому тілу 400 Дж тепла за цикл.

Дано:

$$\eta = 0.6$$

$$T_2 = 280 \text{ К}$$

$$Q_2 = 400 \text{ Дж}$$

$$T_1 = ?$$

$$Q_1 = ?$$

$$A = ?$$

Розв'язання:

ККД теплової машини

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{Звідси}$$

$$T_1 = \frac{T_2}{1 - \eta} = \frac{280}{1 - 0.6} = 700 \text{ К}$$

$$Q_1 = \frac{Q_2}{1 - \eta} = \frac{400}{1 - 0.6} = 1000 \text{ Дж}$$

$$A = Q_1 - Q_2 = 1000 - 400 = 600 \text{ Дж}$$

Відповідь: $T_1 = 700 \text{ К}$, $Q_1 = 1000 \text{ Дж}$, $A = 600 \text{ Дж}$.

Приклад 10. На якій висоті тиск повітря становить 25% від тиску на рівні моря? Температуру вважати постійною та рівної 0°C.

Дано:

$$T = 273 \text{ К}$$

$$P = 0.25 P_0$$

$$h = ?$$

Розв'язання:

Напишемо барометричну формулу

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)$$

$$\text{де } \mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль.}$$

Звідси

$$h = \ln \frac{P_0}{P} \cdot \frac{RT}{\mu g} = \ln 4 \cdot \frac{8.31 \cdot 273}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 11066 \text{ м}$$

Відповідь: $h = 11066 \text{ м}$

2.17 Питання для самоконтролю

1. Як підрахувати загальну кількість молекул для газу в посудині?

$$1. N = \frac{p}{k \cdot T} \quad 2. N = \frac{m}{M} \cdot N_A \quad 3. N = n \cdot \frac{m}{M} \quad 4. N = \frac{m}{M}$$

2. Наведіть формулу для рівняння стану ідеального газу?

$$1. p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} \quad 2. p = \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T}{V} \quad 3. p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot v_{KB}^2 \quad 4. p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot E_{cp}$$

3. Наведіть формулу для рівняння Клаузіуса?

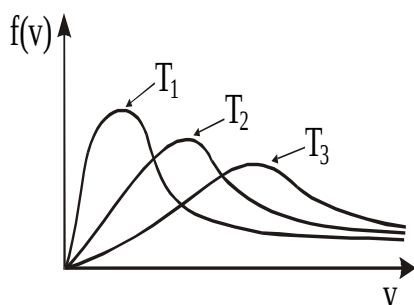
$$1. p = n \cdot k \cdot T \quad 2. p = \frac{m}{M} \cdot \frac{R \cdot T}{V} \quad 3. p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m \cdot v_{KB}^2 \quad 4. p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot \langle \varepsilon \rangle$$

4. Наведіть формулу, яка описує розподіл молекул газу по модулю швидкостей?

$$1. p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} \quad 2. f(v) = A \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot v^2$$

$$3. n = n_0 \cdot e^{-\frac{U(z)}{kT}} \quad 4. p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

5. З графіку розподілу молекул за швидкостями наведіть співвідношення температур газу:



$$1. T_1 < T_2 < T_3$$

$$2. T_1 > T_2 > T_3$$

$$3. T_1 > T_3 > T_2$$

$$4. T_2 > T_1 > T_3$$

6. Наведіть формулу в полі тяжіння Землі, яка описує залежність тиску газу від висоти?

(m – маса молекули, M – молярна маса, ρ – густина газу)

$$1. p = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho g h}{RT}} \quad 2. p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

$$3. p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} \quad 4. p = p_0 \cdot e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

7. Наведіть формулу в полі тяжіння Землі, яка описує розподіл молекул газу по висоті?

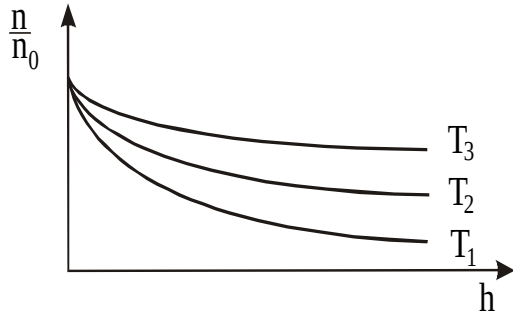
$$1. p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$$

$$2. f(v) = A \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot v^2$$

$$3. W = mgh$$

$$4. n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$$

8. Наведіть вираз для співвідношення температур газу з графіка залежності концентрації молекул газу від висоти в полі тяжіння?



$$1. T_3 < T_2 < T_1$$

$$2. T_1 < T_2 < T_3$$

$$3. T_3 > T_1 > T_2$$

$$4. T_3 < T_1 < T_2$$

9. Наведіть формулу для внутрішньої енергії ідеального газу.

$$1. U = m \cdot \frac{i}{2} R \cdot T$$

$$2. U = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} R \cdot T$$

$$3. U = \frac{m}{M} \cdot \frac{i}{2} N_A \cdot T$$

$$4. U = \frac{m}{M} N_A \cdot k \cdot T$$

10. Визначте як залежить від температури внутрішня енергія ідеального газу?

$$1. U \sim T$$

$$2. U \sim \sqrt{T}$$

$$3. U \sim T^2$$

$$4. U \sim \frac{1}{T}$$

11. Наведіть математичний вираз для першого закону термодинаміки?

$$1. S = k \cdot \ln W$$

$$2. Q = \Delta U + A$$

$$3. dS = \frac{\delta Q}{T}$$

$$4. \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

12. Чому дорівнює при сталому об'ємі молярна теплоємність ідеального газу?

$$1. C_V = \frac{i}{2} \cdot R$$

$$2. C_V = \frac{i+2}{i} \cdot R$$

$$3. C_V = \frac{i+2}{2} \cdot R$$

$$4. C_V = 0$$

13. Чому дорівнює при сталому тиску молярна теплоємність ідеального газу?

$$1. C_P = \frac{i}{2} \cdot R$$

$$2. C_P = \frac{i+2}{i} \cdot R$$

$$3. C_P = \frac{i+2}{2} \cdot R$$

$$4. C_P = 0$$

14. Наведіть формулу для рівняння Роберта Майєра?

$$1. C_p - C_v = R \quad 2. Q = \Delta U + A \quad 3. C_p = \frac{i+2}{2} \cdot R \quad 4. \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

15. Яка з наведених формул пов'язує ентропію з термодинамічної ймовірністю?

$$1. S = k \cdot \ln W \quad 2. S = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad 3. dS = \frac{\delta Q}{T} \quad 4. S = \frac{1}{W}$$

16. Для незмінної маси для якого з процесів виконується рівняння $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$?

1. Ізобарний 2. Адіабатний 3. Ізотермічний 4. Ізохорний

17. Для незмінної маси для якого з процесів виконується рівняння $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$?

1. Ізобарний 2. Адіабатний 3. Ізотермічний 4. Ізохорний

18. Для незмінної маси для якого з процесів виконується рівняння $p_1 V_1 = p_2 V_2$?

1. Ізобарний 2. Адіабатний 3. Ізотермічний 4. Ізохорний

19. Для незмінної маси для якого з процесів виконується рівняння $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$?

1. Ізобарний 2. Адіабатний 3. Ізотермічний 4. Ізохорний

20. Для ізобарного процесу чому дорівнює робота газу?

$$1. A = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \quad 2. A = 0$$

$$3. A = \frac{m}{M} \cdot C_v \cdot (T_1 - T_2) \quad 4. A = p \cdot (V_2 - V_1)$$

21. Для ізохорного процесу чому дорівнює робота газу?

$$1. A = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \quad 2. A = 0$$

$$3. A = \frac{m}{M} \cdot C_v \cdot (T_1 - T_2) \quad 4. A = p \cdot (V_2 - V_1)$$

22. Для ізотермічного процесу чому дорівнює робота газу?

$$1. A = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \quad 2. A = 0$$

$$3. A = \frac{m}{M} \cdot C_v \cdot (T_1 - T_2) \quad 4. A = p \cdot (V_2 - V_1)$$

23. Для адіабатного процесу чому дорівнює робота газу?

$$1. A = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$2. A = 0$$

$$3. A = \frac{m}{M} \cdot C_V \cdot (T_1 - T_2)$$

$$4. A = p \cdot (V_2 - V_1)$$

24. Наведіть для теплової машини формулу для визначення коефіцієнта корисної дії:

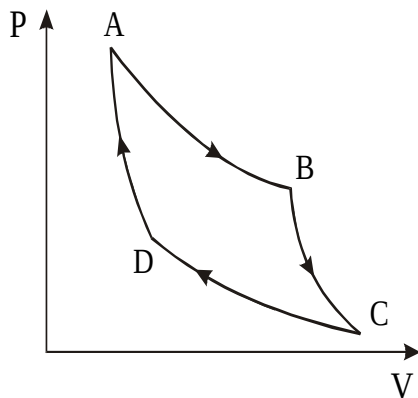
$$1. \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$2. \eta = \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$3. \eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$4. \eta = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

25. Наведіть ділянку для цикла Карно, коли робоче тіло віддає від нагрівача теплоту?



1. AB

2. BC

3. CD

4. DA

26. Наведіть рівняння процесу теплопровідності?

$$1. dm = -D \frac{d\rho}{dx} dS_{\perp} \cdot dt$$

$$2. dp = -\eta \frac{dv}{dx} dS_{\perp} \cdot dt$$

$$3. \delta Q = -K \frac{dT}{dx} \cdot dS_{\perp} \cdot dt$$

$$4. K = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \cdot \rho \cdot C_V$$

27. Наведіть рівняння процесу дифузії?

$$1. dm = -D \frac{d\rho}{dx} dS_{\perp} \cdot dt$$

$$2. dp = -\eta \frac{dv}{dx} dS_{\perp} \cdot dt$$

$$3. \delta Q = -K \frac{dT}{dx} \cdot dS_{\perp} \cdot dt$$

$$4. D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$$

28. Наведіть рівняння процесу внутрішнього тертя?

$$1. dm = -D \frac{d\rho}{dx} dS_{\perp} \cdot dt$$

$$2. dp = -\eta \frac{dv}{dx} dS_{\perp} \cdot dt$$

$$3. \delta Q = -K \frac{dT}{dx} \cdot dS_{\perp} \cdot dt$$

$$4. \eta = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \cdot \rho$$

Відповіді

№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді
1	2	11	2	21	2
2	2	12	1	22	1
3	3	13	3	23	2
4	2	14	1	24	3
5	1	15	1	25	1
6	3,4,2	16	4	26	3
7	4	17	1	27	1
8	2	18	3	28	2
9	2	19	2		
10	1	20	4		

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕКТРОСТАТИКА ТА ПОСТІЙНИЙ СТРУМ

3.1 Електростатика

3.1.1 Електричний заряд. Закон Кулона.

3.1.2 Електричне поле

3.1.3 Теорема Гауса. Використання теореми для розрахунку полів

3.1.4 Робота електричного поля по переміщенню заряду

3.1.5 Потенційна енергія взаємодії точкових зарядів

3.1.6 Потенціал електричного поля. Еквіпотенціальні поверхні

3.1.7 Зв'язок напруженості електричного поля з потенціалом

3.1.8 Діелектрики в електричному полі

3.1.9 Провідники в електричному полі

3.1.10 Електроємність

3.1.11 Конденсатори

3.1.12 Енергія електричного поля

3.2 Постійний електричний струм

3.2.1 Характеристики струму

3.2.2 Електрорушійна сила. Напруга.

3.2.3 Закон Ома для однорідної ділянки ланцюга

3.2.4 Закон Джоуля – Ленца. Робота й потужність струму

3.2.5 Закон Ома для неоднорідної ділянки ланцюга

3.3 Приклади розв'язання завдань

3.4 Питання для самоконтролю

3.1 Електростатика

3.1.1 Електричний заряд. Закон Кулона.

Електростатика вивчає взаємодію нерухомих і не мінливих із часом електричних зарядів.

Що являє собою електричний заряд? Односкладово відповісти на це питання не можна. Однак, відомо, що всі тіла можуть електризуватися, тобто здобувати електричний заряд. Наявність заряду в тілах проявляється в тому, що заряджені тіла взаємодіють один з одним. Вони можуть відштовхуватися або притягатися. Розрізняють позитивні й негативні заряди. Однойменні заряди відштовхуються, різнойменні притягаються.

Електричний заряд квантується. *Елементарний заряд* (найменший квант заряду) дорівнює заряду електрона ($e=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Заряд будь-якого тіла кратний заряду електрона.

$$Q = \pm n \cdot e, \text{ де } n=1, 2, 3, \dots$$

Закон збереження електричного заряду. У замкнутій системі алгебраїчна сума електричних зарядів не змінюється із часом.

$$\sum_{i=1}^n q_i = \text{const} \quad (3.1)$$

Закон Кулона. Однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні заряди притягаються. Сила, з якої взаємодіють два точкових заряди, прямо пропорційний величинам зарядів, та обернено пропорційна відстані між ними, залежить від середовища й спрямована уздовж лінії, що з'єднує ці заряди (рис.3.1):

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3.2)$$

де $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична постійна;

ϵ – діелектрична проникність середовища;

r – відстань між зарядами q_1 та q_2 .

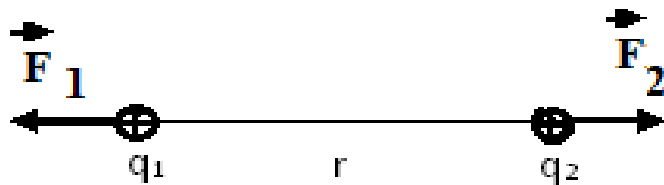


Рисунок 3.1 – Взаємодія зарядів

Для вакууму $\epsilon=1$, для повітря $\epsilon \approx 1$. Діелектрична проникність показує в скільки разів сила взаємодії двох точкових зарядів у вакуумі перевершує силу взаємодії цих зарядів у середовищі. Формулу (3.2) іноді записують у вигляді:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{\epsilon \cdot r^2}$$

$$\text{де } K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ (у СІ).}$$

3.1.2 Електричне поле

Навколо електричних зарядів існує електричне поле – особлива форма існування матерії. Заряди взаємодіють за допомогою поля. Інструментом для вивчення електричного поля є пробний точковий позитивний заряд. Чим більше заряд q , тим більше сила F діюча на заряд, а їхнє відношення характеризує величину поля й називається напруженістю електричного поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad (3.3)$$

Напруженість $\vec{E}$ – векторна фізична величина, силова характеристика електричного поля, чисельно дорівнює силі, що діє на одиничний позитивний заряд, поміщений у дану точку простору (поля). Одиниця виміру напруженості Н/Кл або В/м.

Напруженість електричного поля точкового заряду (рис.3.2). У поле точкового заряду q помістимо пробний заряд q_1 . Відповідно до закону Кулона на заряд q_1 діє сила:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q q_1}{r^2}$$

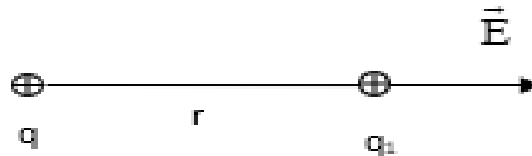


Рисунок 3.2 – Напруженість електричного поля точкового заряду

Виходячи з визначення напруженості електричного поля (3.3) треба, щоб напруженість дорівнювала:

$$E = \frac{F}{q_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Однорідним називають поле, у кожній точці якого напруженість має однакову величину й напрямок. Поле точкового заряду неоднорідно.

Силкові лінії електричного поля – це лінії, дотичні до яких, у кожній точці, збігаються з напрямками векторів напруженості. За допомогою силових ліній графічно зображують електричне поле (рис.3.3). Відзначимо деякі особливості силових ліній.

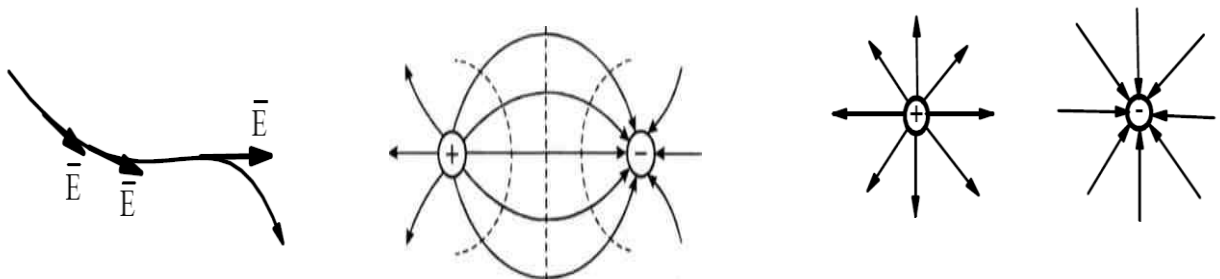


Рисунок 3.3 – Силкові лінії електричного поля

1. Силлові лінії починаються на позитивних зарядах і кінчаються на негативних зарядах або йдуть на нескінченність.
2. Силлові лінії не перетинаються.
3. По густоті силлових ліній можна судити про величину напруженості електричного поля. Чим більше щільність ліній, тим більше величина напруженості.

Силлові лінії поля точкового заряду – промені які виходять з точки розташування заряду.

Принцип суперпозиції. Напруженість результуючого поля в деякій точці дорівнює векторній сумі напруженостей полів створених кожним зарядом.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \quad (3.6)$$

де $\vec{E}_i$ – напруженість поля, створеного i – зарядом.

У загальному випадку;

$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$

Вектор електричного зсуву. При переході з одного середовища в інше вектор напруженості електричного поля, внаслідок зміни діелектричної проникності, змінюється. Уведемо додаткову характеристику поля, що не змінюється при переході з одного середовища в інше – вектор електричного зсуву. *Вектор електричного зсуву* й вектор напруженості електричного поля зв'язані співвідношенням:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.7)$$

Вектор електричного зсуву поля, створюваного точковим зарядом, дорівнює:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

Як бачимо, величина D не залежить від ϵ .

3.1.3 Теорема Гауса. Використання теореми для розрахунку полів

Потік вектору електричного зсуву.

Уведемо поняття вектору елементарної площадки (рис.3.4). Потік вектору електричного зсуву:

$$d\vec{S} = \vec{n}dS, \quad (3.9)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до поверхні.

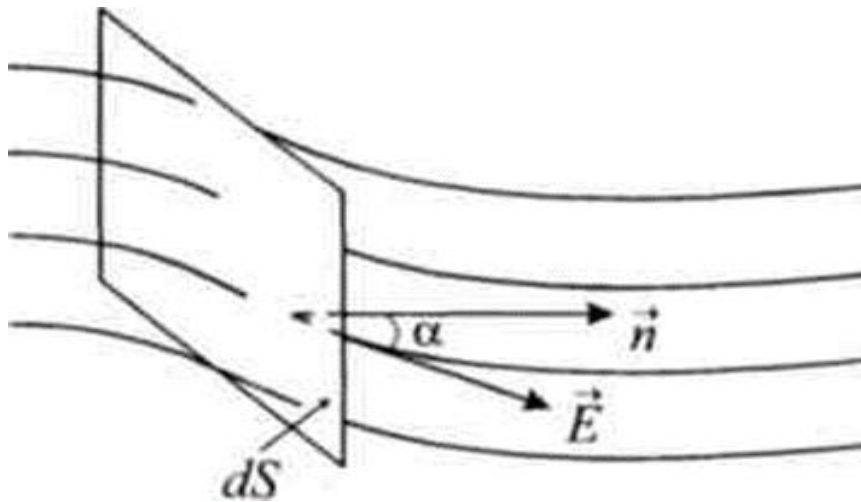


Рисунок 3.4 – Потік вектору електричного зсуву

Спрямовано вектор $d\vec{S}$ також як і $\vec{n}$. Скалярний добуток вектора електричного зсуву на вектор елементарної площадки дає потік вектору електричного зсуву через елементарну площадку:

$$dN = \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.10)$$

$$dN = DdS \cos \alpha \quad (3.11)$$

α – кут між векторами $\vec{D}$ та $d\vec{S}$.

Потік вектору електричного зсуву через площадку скінченної величини S:

$$N = \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.12)$$

Аналіз поняття.

1. N – скалярна величина.
2. N величина алгебраїчна:
 якщо $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $N > 0$,
 якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, то $N < 0$,
 якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $N = 0$.
3. Якщо поле однорідне й площадка плоска, тоді:
- 4.

$$N = \int D dS \cos \alpha = DS \cos \alpha.$$

Теорема Остроградського – Гауса:

Потік вектору електричного зсуву через замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, які охоплюють цю поверхню:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i \quad (3.13)$$

Теорема може бути використана для розрахунку електричних полів, створюваних зарядами різних конфігурацій.

Застосування теореми Остроградського – Гауса до розрахунку електричних полів.

Схема застосування теореми:

1. Вибір охоплюваної поверхні. Звичайно поверхню вибирають так. Щоб кут між векторами $\vec{D}$ й $d\vec{S}$ був дорівнює 0 або $\pi/2$.
2. Виробляється розрахунок потоку вектору електричного зсуву.
3. Підсумуються електричні заряди, охоплювані поверхнею.
4. З математичного вираження, яке витікає з теореми Остроградського–Гауса, визначають величину вектору електричного зсуву.

Розрахунок поля рівномірно зарядженої сфери.

1. Гаусова поверхня – сфера радіусом r (рис.3.5). Вектор електричного зсуву й вектор нормалі збігаються по напрямку, тому $\cos \alpha = 1$.

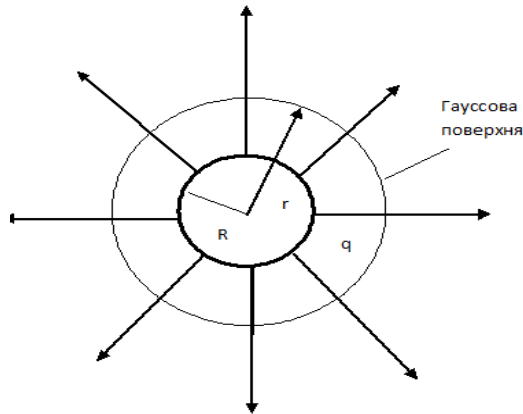


Рисунок 3.5 – До розрахунку поля рівномірно зарядженої сфери

2. З міркувань симетрії величина D постійна в будь - якій точці гаусової поверхні. Тому, потік вектору електричного зсуву через цю поверхню дорівнює:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D dS = DS = D4\pi r^2$$

3. Нехай поверхнева густина заряду дорівнює

$$\sigma = \frac{dq}{dS_R}$$

Тоді заряд сфери:

$$q = \sum_{i=1}^n q_i = \oint_{S_R} \sigma dS = \sigma \cdot 4\pi R^2 \quad (3.14)$$

Розглянемо дві області простору: усередині й зовні зарядженої сфери.

1. Визначимо поле усередині зарядженої сфери.

У цьому випадку $r < R$ і $\sum_{i=1}^n q_i = 0$

З математичного вираження теореми Гауса витікає:

$$D \cdot 4\pi r^2 = 0.$$

Отже, поле усередині зарядженої сфери дорівнює нулю:

$$D = 0 \text{ и } E = 0.$$

2. Визначимо поле поза зарядженою сферою.

У цьому випадку $r > R$ і $\sum_{i=1}^n q_i = \sigma \cdot 4\pi R^2$.

З математичного вираження теореми Остроградського–Гауса витікає:

$$D 4\pi r^2 = q = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

Отже, поле поза зарядженою сферою дорівнює:

$$D = \frac{\sigma \cdot R^2}{r^2}$$

Та

$$E = \frac{\sigma \cdot R^2}{\varepsilon \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

Результати можна представити у вигляді графіка (рис.3.6).

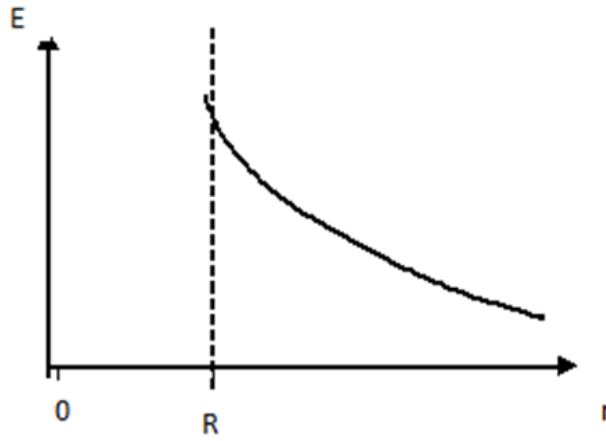


Рисунок 3.6 – Поле рівномірно зарядженої сфери

Розрахунок поля рівномірно зарядженої нескінченно протяжної площини.

1. Гаусова поверхня циліндр із площею основи S . Вектор електричного зсуву й вектор нормалі основ циліндра паралельні, тому $\cos \alpha = 1$ на цих поверхнях. На бічній поверхні ці вектори перпендикулярні й $\cos \alpha = 0$.

2. $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D dS = 2DS$ (з міркувань симетрії величина D постійна на основах)

3. Якщо поверхнева густина заряду дорівнює σ , то $\sum_{i=1}^n q_i = \oint_{S_R} \sigma dS = \sigma S$.

4. З математичного вираження теореми Остроградського–Гауса витікає:

$$2DS = \sigma S \Rightarrow D = \frac{\sigma}{2} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0}.$$

Розрахунок поля двох паралельних різнойменно заряджених площин.

Нехай є дві паралельні площини (рис.3.7). Поверхневі густини заряду площин $+\sigma$ і $-\sigma$. Відстань між площинами – d .

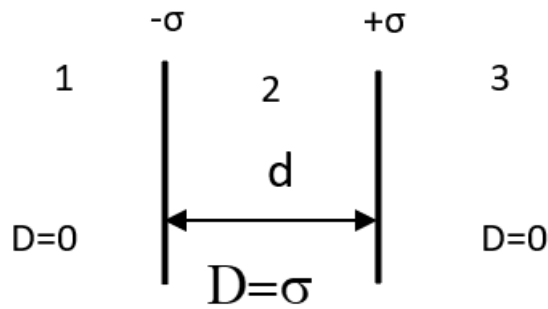


Рисунок 3.7 – Поле двох паралельних різнойменно заряджених площин

Виділимо три області: область 2 між площинами області 1,3 ліворуч і праворуч від площини. Поле, створюване нескінченною площиною однорідне. Тому, поля створені першою й другою площиною в області 2 будуть складатися, а в областях 1 і 3 компенсувати одне одно. Поле між площинками буде однорідним :

$$D = \sigma \quad \text{та} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}, \quad (3.16)$$

Поле в областях 1 і 3 відсутнє.

Розрахунок поля рівномірно зарядженої нескінченно протяжної тонкої нитки.

1. Гаусова поверхня циліндр, вісь якого протяжна тонка нитка. Вектор електричного зсуву й вектор нормалі основ циліндра перпендикулярні й $\cos \alpha = 0$. На бічній поверхні ці вектора паралельні, тому $\cos \alpha = 1$ на цих поверхнях.

2. $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_{S_{бок}} D dS = 2\pi r l D$ (з міркувань симетрії величина D постійна на бічній поверхні), тут l – висота циліндра.

3. Якщо лінійна густина зарядів на нитці дорівнює τ , то $\sum_{i=1}^n q_i = \tau l$.

4. З математичного вираження теореми Остроградського–Гауса витікає:

$$2\pi r l D = \tau l \Rightarrow D = \frac{\tau}{2\pi r} \Rightarrow E = \frac{\tau}{2\pi \epsilon \epsilon_0 r} \quad (3.17)$$

3.1.4 Робота електричного поля по переміщенню заряду

Розглянемо переміщення точкового заряду q' , у полі точкового заряду q (рис.3.8).

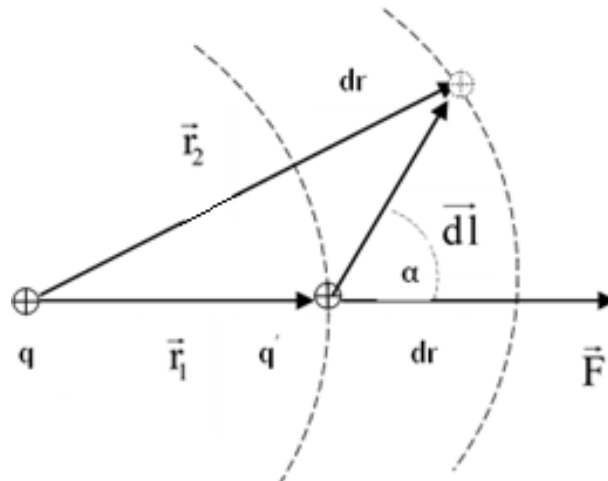


Рисунок 3.8 – Переміщення заряду у електричному полі

Радіус вектори ($\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$), визначають початкове й кінцеве положення заряду q' . При нескінченно малому переміщенні $d\vec{l}$ робота дорівнює:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = F \cdot dl \cos \alpha \quad (3.18)$$

З огляду на те, що для нескінченно малого переміщення, $dl \cos \alpha = dr$, одержуємо:

$$dA = F \cdot dr = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr \quad (3.19)$$

Робота з переміщення заряду q' на кінцевій ділянці шляху:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = - \left(\frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2} - \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1} \right) \quad (3.20)$$

З отриманого вираження витікає, що робота з переміщення точкового заряду залежить від початкового й кінцевого положення заряду й не залежить від форми шляху. Отже, електростатична сила є консервативною силою, а електростатичне поле – потенційне поле. Ми знаємо, що робота консервативних сил уздовж замкнутого контуру дорівнює нулю.

Теорема про циркуляцію вектору напруженості електричного поля.

Виберемо в електричному полі замкнутий контур і порахуємо роботу поля по переміщенню заряду q уздовж його:

$$A = \oint_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Якщо врахувати, що $\vec{F} = q\vec{E}$, то отримуємо:

$$\oint_l \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (3.21)$$

Інтеграл по замкнутому контуру (21) називається циркуляцією вектору $\vec{E}$. Таким чином, *циркуляція вектору $\vec{E}$ напруженості електричного поля дорівнює нулю*. Це і є формулювання теореми.

3.1.5 Потенційна енергія взаємодії точкових зарядів

Як відомо, робота потенційних сил зменшує потенційну енергію системи (дивися розділ механіка):

$$A = -\Delta E_{\Pi} = -(E_{\Pi 2} - E_{\Pi 1}) \quad (3.22)$$

Порівнюючи співвідношення (20) і (22) одержуємо вираження:

$$E_{\Pi} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + const \quad (3.23)$$

Визначимо величину постійної. Коли відстань між зарядами нескінченно велика, сила взаємодії зарядів прагне до нуля, тому розумно покласти, що $E_{\Pi}(\infty) = 0$, отже $const = 0$. Таким чином, потенційна енергія точкового заряду q' , у поле точкового заряду q (або потенційна енергія взаємодії двох точкових зарядів, що перебувають на відстані r друг від друга) дорівнює:

$$E_{\Pi} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \quad (3.24)$$

3.1.6 Потенціал електричного поля. Еквіпотенціальні поверхні

Потенціал електричного поля φ дорівнює роботі яку робить електричне поле по переміщенню одиничного позитивного заряду з даної точки поля на нескінченність.

$$\varphi = \frac{A}{q}$$

З іншого боку, робота A дорівнює потенціальній енергії заряду в даній точці поля. Тому

$$\varphi = \frac{E_{\Pi}}{q'} \quad (3.25)$$

Це вираження може служити визначенням поняття потенціал.

Потенціал скалярна фізична величина, енергетична характеристика поля, чисельно рівна потенційної енергії одиничного позитивного заряду, поміщеного в дану точку поля.

Одиниця виміру потенціалу 1В – це потенціал такої точки поля, у якій, заряд в 1Кл має енергію в 1Дж.

Розглянемо в електричному полі дві крапки з потенціалами φ_1 і φ_2

$$\varphi_1 = \frac{A_1}{q}, \varphi_2 = \frac{A_2}{q}.$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_1 - A_2}{q'} = \frac{A_{12}}{q'}$$

де A_{12} – робота поля по переміщенню заряду із точки 1 у точку 2.

Тоді

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3.26)$$

де $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ називається різницею потенціалів.

Для нескінченно малих переміщень можна записати:

$$dA = -qd\varphi \quad (3.27)$$

Властивості потенціалу:

1. Потенціал скалярна величина;
2. Потенціал – адитивна величина:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \quad (3.28)$$

де φ_i – потенціал поля i -го джерела поля (це можуть бути точкові заряди)

Потенціал поля точкового заряду.

$$\varphi = \frac{E_{\Pi}}{q'} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \quad (3.29)$$

3.1.7 Зв'язок напруженості електричного поля з потенціалом

Нехай заряд q переміщається уздовж осі X на $d\vec{x}$ під дією сили $\vec{F}$ з боку електростатичного поля. Кут між $d\vec{x}$ та $\vec{F}$ – α . Відповідно до співвідношення (3.29) елементарна робота з переміщення заряду q дорівнює

$$dA = -q d\varphi.$$

З іншої сторони

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = F dx \cdot \cos \alpha = qE \cdot dx \cdot \cos \alpha.$$

Дорівнюючи праві частини цих виразів, одержуємо:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx}$$

де $E \cos \alpha = E_x$ – проекція вектора $\vec{E}$ на вісь X .

Міркуючи подібним чином, для випадків переміщення заряду уздовж осей Y і Z можемо одержати вираження:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3.30)$$

Проекції вектору напруженості визначаються частковими похідними потенціалу по відповідних напрямках (координатах). У загальному випадку

$$\vec{E} = -grad\varphi. \quad (3.31)$$

Величина $grad\varphi$ називається градієнт потенціалу (градієнт функції). Це векторна величина, обумовлена вираженням:

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k} \quad (3.32)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, спрямовані уздовж координатних осей (орти).

Знак «мінус» у вираженні (3.31) вказується на те, що вектор напруженості спрямований убік убуття потенціалу.

Для однорідного поля напруженість можна порахувати по формулі:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d}, \quad (3.33)$$

де φ_1 – потенціал поля в точці 1;

φ_2 – потенціал поля в точці 2;

d – відстань між точками в напрямку поля.

Зі співвідношення (3.32) треба формула що дозволяє визначити різницю потенціалів, коли відома напруженість поля:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (3.34)$$

Еквіпотенціальні поверхні – це геометричне місце точок, у кожній з яких потенціал поля однаковий.

Розглянемо таку поверхню. Будемо переміщати по ній із точки 1 у точку 2 заряд q . Робота поля по переміщенню заряду в цьому випадку дорівнює нулю тому що різниця потенціалів дорівнює нулю.

$$A = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos \alpha = q' E dr \cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Висновок – силові лінії електричного поля перпендикулярні еквіпотенціальним поверхням. Графічно електричне поле зображують за допомогою силових ліній і еквіпотенціальних поверхонь. Наприклад, електричне поле точкового заряду зображене на рис.3.9.

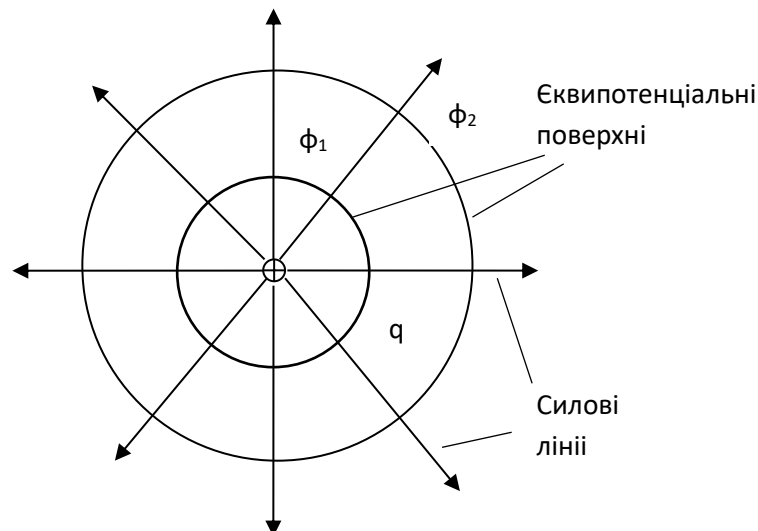


Рисунок 3.9 – Графічне зображення електричного поля

3.1.8 Діелектрики в електричному полі

Залежно від електропровідності всі речовини діляться на три основних типи:

1. Провідники. Це в основному метали й сплави, які добре проводять електричний струм.
2. Діелектрики. Питома електропровідність провідників на 15–20 порядків перевершує питому електропровідність діелектриків. Або, діелектрики практично не проводять електричний струм.
3. Напівпровідники. Електропровідність напівпровідників займає положення між провідниками й діелектриками.

Якщо розташувати ці матеріали в електричному полі, то його величина може змінюватися. Ці зміни відбуваються в результаті структурної перебудови матеріалу. Розглянемо, що ж відбувається усередині зразка, якщо його помістити в електричне поле.

Електричний диполь

Диполь являє собою два однакових різнойменних заряди q розташованих на невеликій відстані l друг від друга. Диполь характеризується електричним дипольним моментом $\vec{p}$:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (3.35)$$

де $\vec{l}$ – вектор проведений від позитивного до негативного заряду

Якщо розміри диполя значно менше відстані від диполя до точки спостереження ($r \gg l$), то диполь називається точковим.

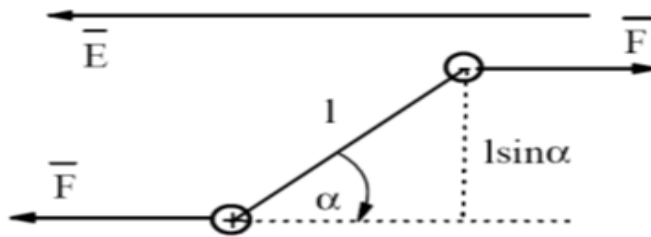


Рисунок 3.10 – Диполь у електричному полі.

Помістимо диполь у зовнішнє електричне поле напруженістю E .

На утворюючий диполь заряди $+q$ і $-q$ будуть діяти рівні по величині, але протилежні по напрямку сили F_1 і F_2 . Модуль кожної сили $F = qE$. Плече цієї пари сил дорівнює $l \sin \alpha$. Обертаючий момент сил F_1 і F_2 прагне розгорнути диполь уздовж поля.

$$M = Fl \sin \alpha = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha \quad (3.36)$$

Якщо врахувати, що момент сили, напруженість поля й електричний момент диполя є векторними величинами, то

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (3.37)$$

Класифікація діелектриків

1. Молекула називається неполярною, якщо вона при відсутності зовнішнього електричного поля не має дипольного моменту. Приклади неполярних молекул: H_2 , N_2 , O_2 . Якщо помістити такі молекули в зовнішнє електричне поле в кожній з таких молекул наводяться дипольні моменти. Чим більше $\vec{E}$, тим більше дипольний момент кожної молекули $\vec{p}$.

2. Молекула називається полярною, якщо вона при відсутності зовнішнього електричного поля має дипольний момент. Приклад полярної молекули – NaCl , H_2O . Сумарний дипольний момент у таких речовин при відсутності електричного поля дорівнює нулю.

В електричному полі в першому типі діелектриків у молекулах наводяться діелектричні дипольні моменти, і виникає результуючий дипольний момент тобто речовина поляризується. У другому типі діелектриків відбувається поворот уже наявних дипольних моментів, настає погоджена орієнтація дипольних моментів і діелектрик також поляризується.

Для кількісного опису поляризації діелектрика вводять векторну величину, що називають поляризованістю.

Поляризованість (P_V) – векторна фізична величина, чисельно рівна дипольному моменту одиниці об'єму діелектрика:

$$\vec{P}_V = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (3.38)$$

де ΔV – нескінченно малий об'єм, що оточує розглянуту точку.

У слабких полях поляризованість ізотропних діелектриків пропорційна напруженості електричного поля (рис. 3.11) у тій же крапці:

$$\vec{P}_V = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

де χ – називається діелектричною сприйнятливістю.

Заряди, які входять до складу діелектрика, називаються зв'язаними. Під дією поля зв'язані заряди можуть небагато зміщатися щодо положень рівноваги. Покинути межі молекули зв'язані заряди не можуть.

Розглянемо, як буде змінюватися електричне поле у разі поляризації діелектрика .

Нехай діелектрик перебуває в зовнішньому електричному полі, напруженість якого $\vec{E}_0$.

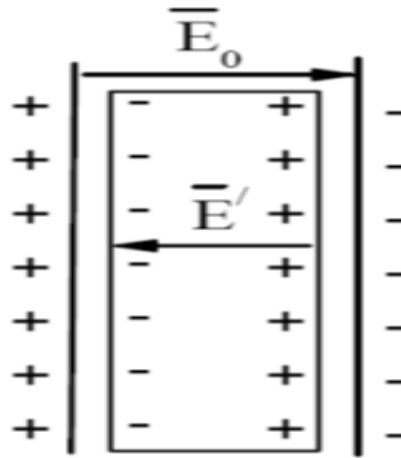


Рисунок 3.11 – Діелектрик у електричному полі

Зовнішнє поле поляризує діелектрик, що приводить до виникнення внутрішнього поля діелектрика напруженістю $\vec{E}'$, що спрямована протилежно вектору $\vec{E}_0$. У результаті накладення цих полів одержуємо результуюче поле:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}' , \quad E = E_0 - E' , \quad (3.39)$$

Із цих міркувань видно, що зменшення поля в діелектрику пов'язане з його поляризацією. Чим краще поляризується діелектрик (більше χ), тим значніше послабляється поле в ньому.

Зв'язок діелектричної проникності й діелектричної сприйнятливості.

Згідно з формулою (16), внутрішнє поле у нашому випадку, дорівнює:

$$E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

тому що поле E' утворюється нібито двома зарядженими площинами. Знайдемо поверхневу щільність σ' зв'язаних зарядів. Повний дипольний момент пластинки діелектрика об'ємом V дорівнює:

$$p = P_V V = P_V S d,$$

де S – площа пластинки;

d – відстань між пластинами.

По визначенню:

$$p = qd = \sigma' S d.$$

Дорівнюємо формули:

$$P_V S d = \sigma' S d.$$

Після скорочення одержимо:

$$P_V = \sigma'$$

Таким чином, поверхнева щільність зв'язаних зарядів дорівнює поляризованості. Зробивши заміну у формулі (3.39), одержимо:

$$E = E_0 - \frac{P_V}{\varepsilon_0} = E_0 - \frac{\chi \varepsilon_0 E}{\varepsilon_0}$$

$$E = E_0 - \chi E$$

$$\frac{E_0}{E} = 1 + \chi$$

З огляду на те, що відношення напруженостей електричного поля у вакуумі й у середовищі – діелектрична проникність середовища ε :

$$\varepsilon = 1 + \chi \quad (3.40)$$

3.1.9 Провідники в електричному полі

Провідники – це речовини, у яких є вільні заряди, здатні переміщатися по всьому об'ємі. Носії заряду в провіднику можуть переміщатися під дією як завгодно малої сили. Тому для рівноваги зарядів необхідне виконання наступних умов:

1. Напруженість поля всюди усередині провідника повинна бути дорівнює нулю:

$$\vec{E} = 0.$$

Тому що $\vec{E} = -grad\varphi$, те $\varphi=0$. Це значить, що $E = const$. Потенціал усередині провідника повинен бути постійним.

2. Напруженість поля на поверхні провідника повинна бути в кожній точці спрямована по нормалі до поверхні (рис.3.12).

Лінії напруженості перпендикулярні поверхням рівного потенціалу, тому у випадку рівноваги зарядів поверхня провідника буде еквіпотенціальною (рис.3.12).

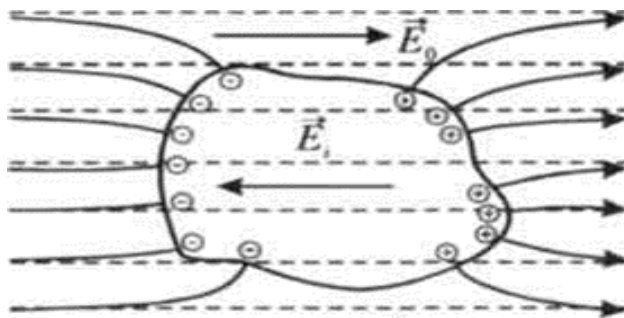


Рисунок 3.12 – Провідник в електричному полі

Таким чином, потенціал ϕ у всіх точках провідника буде мати те саме значення, тобто еквіпотенціальна поверхня вироджується в еквіпотенціальний об'єм. Внесемо провідник в електричне поле. Носії заряду в провіднику починають рухатися: позитивні – у напрямку вектору E , негативні – у протилежному. У кінців провідника виникають заряди протилежного знаку. Їх називають індукованими. Поле індукованих зарядів E_1 протилежно напрямку зовнішнього поля E_0 . Перерозподіл зарядів відбувається доти, поки напруженість поля усередині провідника не стане рівної нулю

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1,$$

$$E = E_0 - E_1.$$

Лінії напруженості поза провідником стануть перпендикулярними до поверхні. Індуковані заряди розподіляються по зовнішній поверхні провідника. Якщо усередині провідника зробити порожнина, то напруженість поля в цій порожнині дорівнює нулю, незалежно від того, яке поле є зовні.

На цьому принципі засноване явище електростатичного захисту. Коли прилад хочуть захистити від зовнішніх полів, його оточують провідним екраном. Зовнішнє поле компенсується усередині екрана виникаючими на його поверхні індукованими зарядами. Екран діє й у тому випадку, якщо він не суцільний, а виконаний у вигляді сітки.

3.1.10 Електроємність

Електроємність відокремленого провідника. Якщо відокремленого провідника повідомити заряд dq , то потенціал цього провідника зміниться. Зміна потенціалу $d\phi$ пропорційна повідомленому заряду:

$$dq = C d\phi,$$

де C – коефіцієнт пропорційності, називаний електричною ємністю.

Електрична ємність (електроємність) – це скалярна фізична величина, що характеризує здатність провідника накопичувати електричний заряд і чисельно рівна заряду, повідомлення якого провіднику змінює його потенціал на один вольт:

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (3.41)$$

Одиниця виміру ємності – фарад(Ф). Фарад – це дуже більша величина. Такою ємністю володів би кулю радіуса $9 \cdot 10^9$ м, або радіуса в 1500 раз більше радіуса Землі.

На практиці ємність вимірюють в мілі– фарадах (мФ), мікро–фарадах (мкФ), нано–фарадах (нФ) и піко–фарадах (пФ).

Електроємність залежить від геометрії провідника, діелектричної проникності середовища, що оточує провідник, від наявності поблизу даного провідника інших заряджених тіл.

Приклад. Розрахуємо електроємність відокремленої провідної сфери (рис.3.13).

Якщо повідомити сферу заряд q , то для крапки, вилученої від її центра на відстань $r \geq R$, потенціал визначається співвідношенням:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

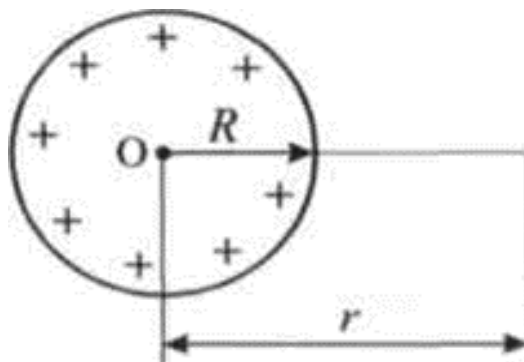


Рисунок 3.13 – Провідна сфера

На поверхні сфери, тобто при $r = R$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R}$$

Таким чином, одержуємо формулу для обчислення електроємності сфери:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R \quad (3.42)$$

3.1.11 Конденсатори

Відокремлені провідники мають невелику ємність. Наприклад, куля розміром із Землю має ємність 700 мкФ. На практиці необхідні пристрої, здатні накопичувати на собі («конденсувати») більші заряди. Їх називають конденсаторами.

Конденсатор – це система із двох провідників, розташованих близько друг до друга й розділених діелектриком.

Умовна позначка на схемах: $-||-$

Утворюючий конденсатор провідники називають обкладками. Щоб зовнішні тіла не робили впливу на ємність конденсатора, обкладкам надають таку форму й так їх розташовують, щоб поле було зосереджено усередині конденсатора. Цій умові відповідають:

1. дві пластини, розташовані близько друг до друга;
2. два коаксіальних циліндри;
3. дві концентричні сфери.

Відповідно, конденсатори бувають:

1. плоскі;
2. циліндричні;
3. сферичні.

Основною характеристикою конденсатора є електроємність C . По визначенню, електроємність дорівнює відношенню заряду на конденсаторі до різниці потенціалів між обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}, \quad (3.43)$$

де $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – напруга між обкладками;

q – заряд позитивної обкладки.

Величина електроємності конденсатора визначається формою й розмірами обкладок і величиною зазору між ними, а також діелектричними властивостями середовища, що заповнює простір між обкладками.

Приведемо приклади формул розрахунку електроємності деяких видів конденсаторів.

1. Плоский конденсатор (рис.3.14).

У цьому випадку ємність дорівнює:

$$2. \quad C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

де S – площа обкладки;

d – відстань між обкладками;

ε – діелектрична проникність середовища (діелектрика), що перебуває між обкладками.

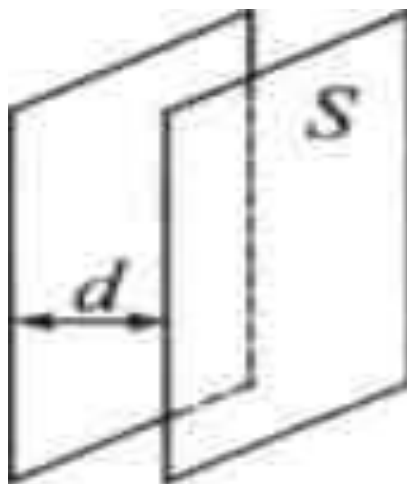


Рисунок 3.14 – Плоский конденсатор

2. Циліндричний конденсатор (рис.3.15)

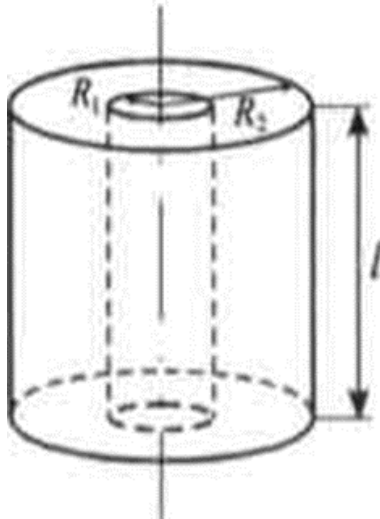


Рисунок 3.15 – Циліндричний конденсатор

У цьому випадку ємність дорівнює

$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

де l – довжина конденсатора;

R_1 і R_2 – радіуси внутрішньої й зовнішньої обкладок.

3. Сферичний конденсатор:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$$

де R_1 і R_2 – зовнішній та внутрішній радіус обкладок.

Крім ємності кожний конденсатор характеризується граничною напругою U_{max} , яких можна прикладати до обкладкам конденсатора, не побоюючись пробоя. При перевищенні цієї напруги між обкладками проскакує іскра, у результаті чого руйнується діелектрик і конденсатор виходить із ладу.

Конденсатори можна з'єднувати в батареї різними способами.

При послідовній сполуці конденсаторів виконуються наступні співвідношення:

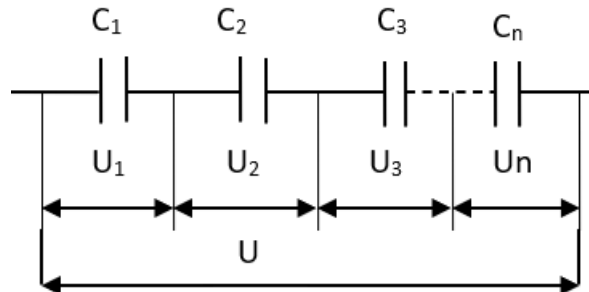


Рисунок 3.16 – Послідовна сполука конденсаторів

$$\begin{aligned}
 q_{\text{общ}} &= q_1 = q_2 = \dots = q_n \\
 U &= U_1 = U_2 = \dots = U_n \\
 \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

Паралельна сполука конденсаторів :

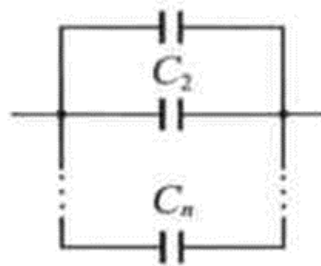


Рисунок 3.17 – Паралельне з'єднання конденсаторів

При цьому виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}
 q_{\text{общ}} &= q_1 + q_2 + \dots + q_n \\
 U &= U_1 = U_2 = \dots = U_n \\
 C &= C_1 + C_2 + \dots + C_n
 \end{aligned}
 \tag{3.46}$$

3.1.12 Енергія електричного поля

Енергія зарядженого відокремленого провідника. Нехай є відокремлений провідник. Збільшимо заряд цього провідника на dq . При перенесенні заряду dq з нескінченності на відокремлений провідник потрібно зробити елементарну роботу проти сил поля:

$$dA = qd\varphi = C\varphi dq$$

Для збільшення заряду провідника від 0 до q (для збільшення потенціалу від 0 до φ), необхідно зробити роботу A :

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi$$

Ця робота буде дорівнює енергії зарядженого провідника W :

$$A = W = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}$$

Таким чином, енергія зарядженого тіла дорівнює

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (3.47)$$

Що являє собою ця енергія ? Електростатика на це питання не може дати відповідь. Однак, використовуючи закони електродинаміки, можна показати, що W – це *енергія електричного поля нашого зарядженого тіла*.

Енергія зарядженого конденсатора. Як усякий заряджений провідник, конденсатор має енергію . Це енергія електричного поля конденсатора, що укладене між його обкладками. По антології з (3.48) напишемо:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} \quad (3.48)$$

Формулу для енергії поля конденсатора можна перетворити, використовуючи величини, що характеризують електричне поле. Використовуємо наступні співвідношення:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \text{ і } U = Ed$$

Підстановка у формулу для енергії поля конденсатора дає:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V,$$

де $V = Sd$ – об'єм конденсатора.

Величина, рівна енергії одиниці об'єму поля, *називається об'ємною щільністю енергії*.

$$\omega = \frac{W}{V}$$

Для електричного поля об'ємна щільність енергії дорівнює:

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}, \quad (3.49)$$

де E – напруженість електричного поля;

D – електричний зсув.

Електростатика не може відповісти на запитання, про те, що є носієм енергії – заряд або поле? В електростатиці поля і їхніх зарядів, що обумовили, невіддільні друг від друга. Подальший розвиток теорії й експерименту показало, що змінні в часі електричні й магнітні поля можуть існувати незалежно від їхніх зарядів, що збудили, і поширюватися в просторі у вигляді електромагнітних хвиль, що переносять енергію. Це означає, що носієм енергії є поле.

3.2 Постійний електричний струм

3.2.1 Характеристики струму

Електричним струмом називається впорядкований рух електричних зарядів. Якщо струм виникає в провіднику, то його називають струмом провідності. Для протікання току необхідна наявність у провіднику (або в даному середовищі) заряджених часток, які можуть переміщатися в межах усього провідника. Такі частки називаються *носіями струму (або носії заряду)*. Ними можуть бути електрони, іони або макроскопічні частки, що несуть на собі заряд, наприклад, заряджені порошини.

Струм виникає за умови, що усередині провідника існує електричне поле. Це поле може бути створене за рахунок різниці потенціалів на кінцях провідника.

Кількісною характеристикою електричного току є сила струму. *Сила струму* I – скалярна фізична величина, інтегральна характеристика струму, чисельно рівна заряду, стерпному через поперечний переріз провідника за одиницю часу.

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (3.50)$$

Одиниця виміру сили струму – ампер А.

За напрямок струму приймається напрямок переміщення позитивних зарядів. Якщо сила струму і його напрямок не змінюються, то струм називається постійним. Для постійного струму:

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Диференціальною характеристикою струму є густина струму.

Густина струму $\vec{j}$ – векторна фізична величина, чисельно рівна електричному заряду, що протікає за одиницю часу через одиничну площадку, розташовану перпендикулярно напрямку руху носіїв струму.

$$j = \frac{dq}{dt dS_{\perp}} = \frac{dI}{dS_{\perp}} \quad (3.51)$$

За напрямком вектору густини струму приймається напрямок руху позитивних носіїв струму. Для випадку, коли густина струму однакова в будь-якій точці

$$j = \frac{I}{S}$$

Одиниця виміру густини струму А/м².

Якщо струм створюється носіями обох знаків, тоді

$$\vec{j} = e_+ n_+ \vec{v}_+ + e_- n_- \vec{v}_-$$

де n_+ і n_- – концентрації позитивних і негативних носіїв заряду;

$\vec{v}_+$ і $\vec{v}_-$ – їхні середні швидкості.

У скалярному виді:

$$j = e_+ n_+ v_+ + e_- n_- v_-$$

Знаючи вектор густини струму в кожній крапці простору, можна знайти силу струму через будь-яку поверхню S :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

3.2.2 Електрорушійна сила. Напруга

Причиною впорядкованого руху зарядів можуть бути:

Електростатичні (кулонівські) сили, під дією яких позитивні заряди рухаються уздовж поля, негативні – проти. Поле цих сил називають кулонівськими, напруженість поля позначають $E_{кул}$.

$$\vec{E}_{кул} = \frac{\vec{F}_{кул}}{q}$$

Сили не електростатичного походження. Їх називають *сторонніми*, а поле цих сил – полем сторонніх сил. Напруженість цього поля позначають $\vec{E}_{стор}$:

$$\vec{E}_{стор} = \frac{\vec{F}_{стор}}{q}$$

Сторонні сили можуть бути обумовлені хімічними процесами, дифузією носіїв струму в неоднорідному середовищі, електричними (але не електростатичними) полями, породжуваними мінливими в часі магнітними полями. Розглянемо замкнуте коло (рис.3.18.), що складається із джерела струму й провідника.

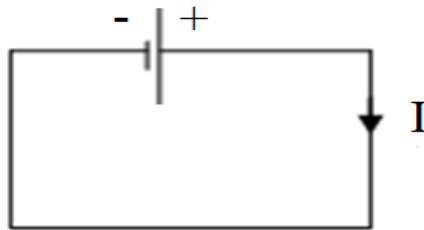


Рисунок 3.18 – Замкнуте коло

Джерело струму створює на кінцях провідника різницю потенціалів і відповідно усередині провідника виникає електричне поле, що переміщає заряди. Роботу з переміщення зарядів по провіднику виконують кулонівські сили. Усередині джерела струму роботу з переміщення зарядів виконують сторонні сили.

Повна робота з переміщення заряду уздовж контуру:

$$A = A_{кул} + A_{стор} = \oint \vec{F}_{кул} \cdot d\vec{l} + \oint \vec{F}_{стор} \cdot d\vec{l}$$

Робота кулонівських сил уздовж замкнутого контуру дорівнює 0. Тоді

$$A_{стор} = q \oint \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l}$$

Величина, рівна відношенню роботи, чиненої сторонніми силами при переміщенні заряду, до величини цього заряду називається *електрорушійною силою* (е.р.с.):

$$\varepsilon = \frac{A_{стор}}{q} = \oint \vec{E}_{стор} \cdot d\vec{l} \quad (3.52)$$

Розглянемо ділянку кола (рис.3.19), на кінцях якого потенціали приймають значення φ_1 і φ_2 .

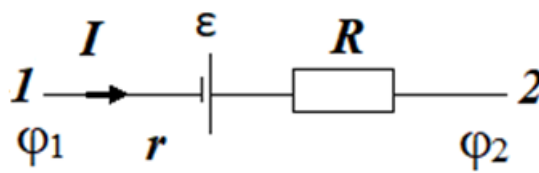


Рисунок 3.19 – Ділянка кола

Робота по переміщенню заряду q уздовж ділянки дорівнює

$$A = A_{кул} + A_{стор} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q \cdot \varepsilon.$$

Розділимо обидві частини на величину заряду q :

$$\frac{A}{q} = \frac{A_{\text{кул}}}{q} + \frac{A_{\text{стор}}}{q}$$

Нагадаємо, що

$$\frac{A_{\text{кул}}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi$$

Величина, рівна відношенню сумарної роботи, чиненою електростатичними й сторонніми силами при переміщенні заряду, до величини заряду називається *напругою* на даній ділянці.

$$U = \frac{A}{q} = \varepsilon + \varphi_1 - \varphi_2 \quad (3.53)$$

Ділянку кола, на якому не діють сторонні сили, називають *однорідним*. Ділянка, на якому на носії струму діють сторонні сили, називають *неоднорідним*. Для однорідної ділянки $\varepsilon = 0$:

$$U = -\Delta\varphi,$$

або напруга на однорідній ділянці дорівнює різниці потенціалів на кінцях ділянки зі знаком мінус.

Відзначимо деякі важливі моменти.

1. Різниця потенціалів визначає роботу кулонівських сил на ділянці кола:

$$A_{\text{кул}} = -q \cdot \Delta\varphi$$

2. Електрорушійна сила визначає роботу сторонніх сил усередині джерела струму:

$$A_{\text{стор}} = q \cdot \varepsilon$$

3. Напруга визначає роботу кулонівських і сторонніх сил:

$$A = q(\varepsilon + \varphi_1 - \varphi_2).$$

3.2.3 Закон Ома для однорідної ділянки кола

В 1827 році німецький учений Георг Симон Ом експериментально встановив закон, відповідно до якого *сила струму, що тече по однорідному металевому провіднику, пропорційна напрузі на цьому провіднику:*

$$I = \frac{U}{R} \quad (3.54)$$

де R – електричний опір. Одиниця виміру опору Ом.

Електричний опір (R) – скалярна фізична величина, що характеризує властивість провідника протидіяти пропущенню електричного струму й рівна відношенню напруги U на кінцях провідника до сили струму I , що протікає по ньому:

$$R = \frac{U}{I}$$

Опір провідників, наявність електричного струму в які приводить до виділення тепла, називається *омічним* або *активним*. Опір однорідного провідника залежить від матеріалу провідника і його геометричних розмірів і може бути розраховане по формулі:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3.55)$$

де l – довжина провідника;

S – площа поперечного перерізу провідника;

ρ – питомий електричний опір, що характеризує матеріал провідника.

Електричний опір металів пов'язане з розсіюванням електронів провідності на теплових коливаннях кристалічної решітки й структурних дефектах. Тому опір металів залежить від температури. З великим ступенем точності можна вважати, що залежність опору металів від температури є лінійною:

$$R = R_0(1 + \alpha t) \quad (3.56)$$

де R – опір при температурі t ;

R_0 – опір при 0°C ;

α – температурний коефіцієнт опору.

Для чистих металів температурний коефіцієнт представляє величину порядку $\alpha = 0,0043\text{K}^{-1}$. Для деяких електротехнічних сплавів (манганін, константан) є настільки мало, що їм можна зневажити й у досить широкому інтервалі температур уважати опір незалежної від температури.

Величина G , зворотна опору, називається *провідністю*.

$$G = \frac{1}{R}$$

Одиниця виміру провідності См – сименс.

При розгляді фізичної природи питомого електричного опору використовують поняття питомої електропровідності σ . Питома електропровідність пов'язана з питомим електричним опором ρ співвідношенням:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

Залежність сили струму від напруги називається *вольт–амперною характеристикою* (ВАХ). Для металів ця залежність має лінійний характер. Для неомічних пристроїв ВАХ має нелінійний характер.

При *послідовному з'єднанні* провідників кінець попереднього провідника з'єднується з початком наступного й між провідниками струм не розгалужується (рис. 3.19)

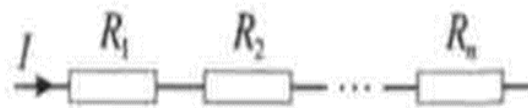


Рисунок 3.19 – Послідовне з'єднання провідників

Якщо n провідників опором $R_1, R_2, \dots, R_n$ з'єднані між собою послідовно, то через провідники тече однаковий струм і напруга на кінцях з'єднання дорівнює сумі напруги на окремих провідниках:

$$\begin{aligned} I &= I_1 = I_2 = \dots = I_n \\ U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n \\ R &= R_1 + R_2 + \dots + R_n \end{aligned} \quad (3.57)$$

Якщо початки провідників з'єднані в одній точці (вузлі), а кінці в іншій (рис.3.20), то з'єднання називають паралельним.

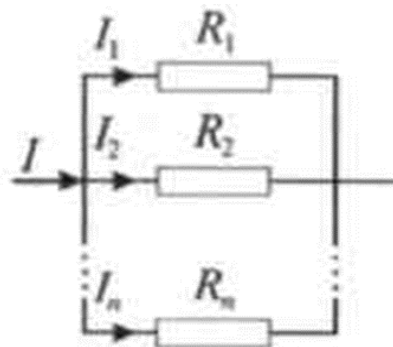


Рисунок 3.20 – Паралельне з'єднання провідників.

При паралельній з'єднанні провідників виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n, \\ U &= U_1 = U_2 = \dots = U_n, \\ \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Закон Ома в диференціальній формі

Напишемо кілька рівнянь, справедливих для провідника з незмінним перерізом, довжиною l і площею поперечного перерізу S :

$$\begin{aligned} U &= IR, \\ R &= \rho \frac{l}{S}, \\ j &= \frac{I}{S}, \\ E &= \frac{U}{l}. \end{aligned}$$

Використовуючи ці формули, можна одержати:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \cdot \vec{E} \quad (3.59)$$

Це вираження являє собою закон Ома в диференціальній формі. Щільність струму пропорційна напруженості поля в даній крапці провідника.

3.2.4 Закон Джоуля – Ленца. Робота й потужність струму

Розглянемо провідник, до кінців якого прикладена різниця потенціалів. Електричне поле, переміщаючи заряди по провіднику робить роботу A :

$$A = -q \cdot \Delta\varphi = q \cdot U$$

З огляду на те, що $U = IR$, а $q = I \cdot t$, одержимо:

$$A = I^2 R t = U I t = \frac{U^2}{R} t \quad (3.60)$$

Робота електричного поля по переміщенню заряду уздовж провідника називається *роботою струму* та чисельно дорівнює кількості тепла, що виділяється в провіднику при проходженні по ньому струму:

$$Q = I^2 R t, \quad (3.61)$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється в провіднику опором R за час t .

Вираження (3.61) називається *законом Джоуля–Ленца*.

Потужність – це робота, чинена за одиницю часу. *Потужність струму* можна порахувати по формулах:

$$P = \frac{A}{t} = I^2 R = U I = \frac{U^2}{R} \quad (3.62)$$

3.2.5 Закон Ома для неоднорідної ділянки кола

Розглянемо ділянку електричного кола 1–2, що складається із джерела струму з е.р.с. рівної ε і опору R (рис.3.21). Джерело струму володіє внутрішнім опором r .

Потенціали на кінцях провідника мають значення φ_1 і φ_2 .

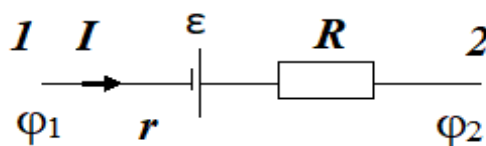


Рисунок 3.21 – Ділянка електричного кола

Робота з переміщення заряду q із точки 1 у точку 2 дорівнює роботі кулонівських і сторонніх сил):

$$A = q \cdot (\varepsilon + \varphi_1 - \varphi_2).$$

З іншого боку, ця робота дорівнює роботі струму:

$$A = I^2 \cdot (R + r)t.$$

Дорівнюючи праві частини цих рівнянь, одержимо:

$$I^2 \cdot (R + r)t = q \cdot (\varepsilon + \varphi_1 - \varphi_2).$$

Звідки

$$I = \frac{\varepsilon + \varphi_1 - \varphi_2}{R + r}, \quad (3.63)$$

Виразення (3.63) називається *законом Ома для неоднорідної ділянки кола*.

Розглянемо деякі окремі випадки цього закону.

1. *Однорідна ділянка кола*. У цьому випадку, джерела струму ні, е.р.с. і внутрішній опір дорівнюють нулю. Тоді виразення (3.63) прийме вид:

2. Ми одержали закон Ома для однорідної ділянки кола.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}$$

3. Замкнуте коло(рис.3.18). У цьому випадку $\varphi_1 = \varphi_2$ і закон Ома для неоднорідної ділянки кола прийме вид:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

де r – опір джерела (внутрішній опір) струму;

R – опір навантаження (зовнішній опір);

$(R+r)$ – повний опір ланцюга.

Це вираження називається законом Ома для замкнутого кола.

Якщо опір навантаження (зовнішній опір) буде дорівнює нулю, одержимо *коротке замикання*. При цьому сила струму в колі зростає. Струм короткого замикання дорівнює:

$$I_{кз} = \frac{\varepsilon}{r}$$

На зовнішньому й внутрішньому опорі замкнутого ланцюга виділяється певна потужність. Потужність, виділювана на зовнішньому опорі, є корисною потужністю, виділювана у всьому ланцюзі – повної (витраченої). З огляду на це, можна порахувати коефіцієнт корисної дії ланцюга:

$$\eta = \frac{P_{пол}}{P_{зат}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{R + r} = \frac{U}{\varepsilon}$$

де $U = IR$ – падання напруги на зовнішній ділянці кола.

3.3 Приклади розв'язання завдань

Приклад 1. Два точкових заряди $q_1 = 1,5 \text{ нКл}$ і $q_2 = 2,8 \text{ нКл}$ перебувають на відстані $4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ друг від друга. Знайти напруженість електричного поля в точці, що лежить посередині між зарядами.

Дано:

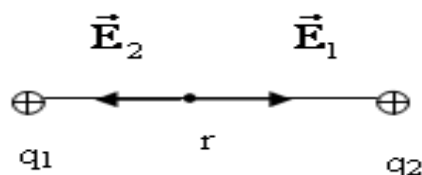
$$q_1 = 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$q_2 = 2,8 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$$

$$r = 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$E = ?$

Розв'язання:



Напруженість електричного поля, яку створює в точці, що шукаємо перший заряд, дорівнює:

$$E_1 = k \cdot \frac{q_1}{(r/2)^2}$$

Напруженість електричного поля, яку створює в точці, що шукаємо другий заряд, дорівнює:

$$E_2 = k \cdot \frac{q_2}{(r/2)^2}$$

У відповідності із принципом суперпозиції полів

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E = E_1 - E_2$$

$$E = k \cdot \frac{q_1}{(r/2)^2} - k \cdot \frac{q_2}{(r/2)^2} = \frac{k}{(r/2)^2} \cdot (q_1 - q_2)$$

$$E = \frac{9 \cdot 10^9}{(2 \cdot 10^{-2})^2} \cdot (1,5 \cdot 10^{-9} - 2,8 \cdot 10^{-9}) = -2,9 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Знак «мінус» говорить про те, що результуючий вектор E , спрямований до першого заряду.

Відповідь: $E = -2,9 \cdot 10^4 \frac{\text{В}}{\text{м}}$

Приклад 2. Яку роботу треба зробити, щоб два точкові заряди 8 нКл і 9 нКл зблизити від відстані 5 см до 3 см ?

Дано:	Розв'язання:
$q_1 = 8 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$	Робота, що йде на збільшення потенційної енергії взаємодії
$q_2 = 9 \cdot 10^{-9} \text{ Кл}$	двох електричних зарядів:
$r_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$A = E_2 - E_1 = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2} - k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1}$
$r_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$	$A = k \cdot q_1 q_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right);$
A – ?	$A = 9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-9} \cdot 9 \cdot 10^{-9} \left(\frac{1}{0.03} - \frac{1}{0.05} \right) = 8.6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$
Відповідь: $A = 8.6 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}$	

Приклад 3. Знайти швидкість електрона, прискореного різницею потенціалів 100 В.

Дано:	Розв'язання:
$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$	Робота електричного поля, що йде на збільшення
$m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$	кінетичної енергії електрона:
$\Delta\varphi = 100 \text{ В}$	$e \cdot \Delta\varphi = \frac{mv^2}{2}. \quad \text{Тоді}$
$v - ?$	

$$v = \sqrt{\frac{2e \cdot \Delta\varphi}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{9.1 \cdot 10^{-31}}} = 5.9 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Відповідь: $v = 5.9 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$

Приклад 4. Скільки надлишкових електронів має мідна кулька радіусом 2 см, якщо її потенціал дорівнює – 1,3 В ?

Дано:	Розв'язання:
$r=0,02\text{м}$	Потенціал кульки дорівнює:
$\varphi=-1,3\text{ В}$	$\varphi = \frac{q}{C},$
$e=1,6\cdot 10^{-19}\text{Кл}$	де $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$ – ємність кулі.
$N - ?$	Звідси
	$q = \varphi C = \varphi 4\pi\epsilon\epsilon_0 r.$

Будь-який заряд кратний заряду електрона.

$$\text{Тоді } N = \frac{q}{e} = \frac{\varphi 4\pi\epsilon\epsilon_0 r}{e}$$

Підставимо величини:

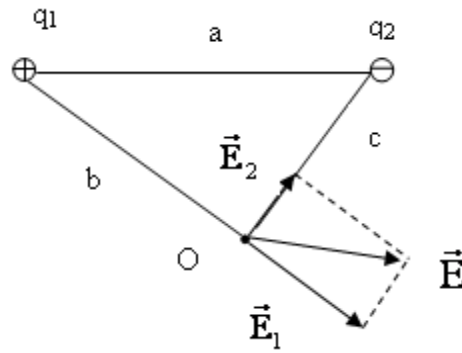
$$N = \frac{1,3 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,02}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 1,8 \cdot 10^7$$

Відповідь: $N=1,8 \cdot 10^7$ шт.

Приклад 5. Два точкових заряди $q_1 = 5,2\text{нКл}$ і $q_2 = -2\text{нКл}$ перебувають на відстані 5 см друг від друга. Знайти напруженість електричного поля в крапці, вилученої на відстань 4 см від першого заряду й на 3 см від другого.

Дано:	Розв'язання:
$q_1 = 5,2 \cdot 10^{-9}\text{ Кл}$	Напруженість електричного поля, яку створює в крапці 0 перший заряд, дорівнює:
$q_2 = -2 \cdot 10^{-9}\text{ Кл}$	$E_1 = k \cdot \frac{q_1}{b^2}$
$a = 0,05\text{м}$	Напруженість електричного поля, яку створює в крапці 0 другий заряд, дорівнює:
$b = 0,04\text{м}$	$E_2 = k \cdot \frac{q_2}{c^2}$
$c = 0,03\text{м}$	
$E - ?$	

Представимо усе схематично:



У відповідності із принципом суперпозиції полів і враховуючи, що трикутник q_1q_2O є прямокутним, одержимо:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Тоді

$$E = \sqrt{\left(k \cdot \frac{q_1}{b^2}\right)^2 + \left(k \cdot \frac{q_2}{c^2}\right)^2} = kq_2 = k \cdot \sqrt{\left(\frac{q_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{c^2}\right)^2} 3$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \sqrt{\left(\frac{5.2 \cdot 10^{-9}}{0.04^2}\right)^2 + \left(\frac{2 \cdot 10^{-9}}{0.03^2}\right)^2} = 1.3 \cdot 10^3 \frac{B}{m}$$

Відповідь: $E = 1,3 \cdot 10^3 \frac{B}{m}$

Приклад 6. До джерела з $\varepsilon = 1,7$ В підключено два опори в 4,5 і 6 Ом, з'єднані паралельно. Внутрішній опір джерела 0,2 Ом. Знайти силу струму в колі, силу струму, який іде через перший і другий опір, спадання напруги в зовнішньому колі, ККД кола, потужність, яка виділяється в зовнішньому колі.

Дано :

$$\varepsilon = 1,7 \text{ В}$$

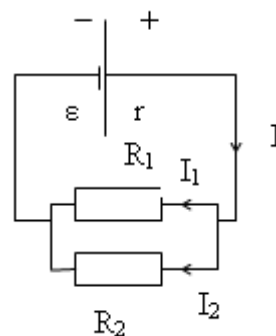
$$R_1 = 4,5 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 6 \text{ Ом}$$

$$r = 0,2 \text{ Ом}$$

$$I, I_1, I_2, U, P, \eta - ?$$

Розв'язання:



Знайдемо загальний зовнішній опір. При паралельному підключенні

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4.5 \cdot 6}{4.5 + 6} = 2.6 \text{ Ом}$$

Використовуючи закон Ома для замкненого кола, знайдемо силу струму в колі:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} = \frac{1.7}{2.6 + 0.2} = 6.1 \text{ А}$$

Використовуючи закон Ома для однорідної ділянки кола, знайдемо спадання напруги на зовнішньому опорі R:

$$U = IR = 6.1 \cdot 2.6 = 1.6 \text{ В}$$

Потужність у зовнішньому колі дорівнює:

$$P = IU = 6.1 \cdot 1.6 = 9.76 \text{ Вт}$$

Знайдемо силу струму через перший і другий опір. Для цього напишемо перший закон Кирхгофа й закон Ома для R_1 і R_2 :

$$I = I_1 + I_2$$

$$U = I_1 R_1$$

$$U = I_2 R_2$$

Вирішуючи систему рівнянь, знайдемо:

$$I_1 = I_2 \frac{R_2}{R_1} = 1.33 I_2$$

$$I = 1.33 I_2 + I_2$$

$$I_2 = \frac{I}{1.33 + 1} = \frac{6.1}{2.33} = 2.62 \text{ А}$$

$$I_1 = I - I_2 = 6.1 - 2.62 = 3.48 \text{ А}$$

Знайдемо к.к.д. кола:

$$\eta = \frac{R}{R + r} = \eta = \frac{R}{R + r} = \frac{2.6}{2.6 + 0.2} = 0.93$$

Відповідь: $I = 6,1 \text{ А}$, $I_1 = 3,48 \text{ А}$, $I_2 = 2,62 \text{ А}$, $P = 9,76 \text{ Вт}$, $U = 1,6 \text{ В}$, $\eta = 0,93$.

3.4 Питання для самоконтролю

1. Для того щоб сила взаємодії між точковими зарядами зменшилася в 2 рази на скільки треба змінити відстань?

1. Збільшити в $\sqrt{2}$ раз
2. Зменшити в $\sqrt{2}$ раз
3. Збільшити в 4 рази
4. Збільшити у $\sqrt{4}$ раз

2. Навести формулу для визначення напруженості електричного поля?

$$1. \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad 2. \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad 3. \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n$$

3. Навести формулу для визначення напруженості електричного поля для точкового заряду?

$$1. \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \quad 2. \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon \cdot r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad 3. \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_n$$

4. Навести формулу для визначення напруженості електричного поля для нескінченно довгої зарядженої нитки?

$$1. E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r} \quad 2. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon \cdot r^2} \quad 3. E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

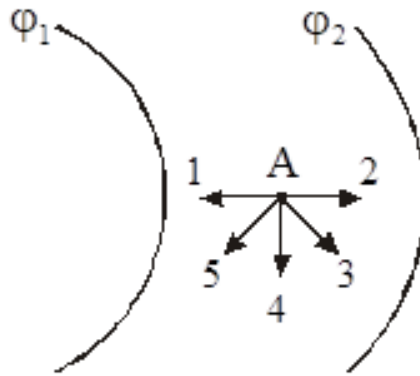
5. Навести формулу для визначення напруженості електричного поля для нескінченно рівномірної зарядженої площини?

$$1. E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r} \quad 2. E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon \cdot r^2} \quad 3. E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

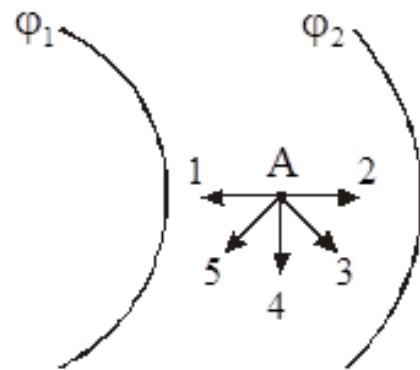
6. Навести формулу для визначення потенціалу електричного поля точкового заряду?

$$1. \varphi = \frac{q}{C} \quad 2. \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon \cdot r} \quad 3. \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\epsilon \cdot r^2} \quad 4. \varphi = const$$

7. На рисунку зображені кривими лініями екіпотенціальні поверхні з потенціалами $\varphi_1 = 4$ В и $\varphi_2 = 3$ В. Вкажіть для точки А правильний напрямок вектору напруженості електростатичного поля.



8. На рисунку зображені кривими лініями екіпотенціальні поверхні з потенціалами $\varphi_1 = 4$ В и $\varphi_2 = 3$ В. Вкажіть напрям вектору $\text{grad}\varphi$.



9. Навести формулу для звязку напруженості та потенціалу?

1. $\vec{E} = \frac{\phi}{r^2}$ 2. $E_l = -\frac{d\phi}{dl}$ 3. $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ 4. $E = \frac{\Delta\phi}{d}$

10. Навести формулу для електроємності плоского конденсатору?

1. $C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}$ 2. $C = \frac{\phi}{q}$ 3. $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$ 4. $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 d}{S}$

11. Для відокремлених шарів з радіусом (R) та з радіусом (2R) знайдіть електроємність?

1. $\frac{C_1}{C_2} = 1$ 2. $\frac{C_1}{C_2} = 1$ 3. $\frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{2}$ 4. $\frac{C_1}{C_2} = \frac{1}{4}$ 5. $\frac{C_1}{C_2} = 4$

12. Навести рівняння, які використовують для розрахунку для трьох послідовно з'єднаних конденсаторів з однаковою ємністю?

1.) $q_0 = q_1 + q_2 + q_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, C_0 = C_1 + C_2 + C_3$

2.) $q_0 = q_1 + q_2 + q_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, C_0 = C_1 + C_2 + C_3$

3.) $q_0 = q_1 = q_2 = q_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, \frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$

$$4.) q_0 = q_1 + q_2 + q_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, \frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

13. Навести рівняння, які використовують для розрахунку для трьох паралельно з'єднаних конденсаторів з однаковою ємністю?

$$1.) q_0 = q_1 + q_2 + q_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, C_0 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$2.) q_0 = q_1 + q_2 + q_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, C_0 = C_1 + C_2 + C_3$$

$$3.) q_0 = q_1 = q_2 = q_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, \frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$4.) q_0 = q_1 + q_2 + q_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, \frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

14. Навести формулу для енергії поля плоского конденсатора?

$$1. W = (CU^2)/2 \quad 2. W = (qU^2)/2 \quad 3. W = (\epsilon\epsilon_0 E^2)/2 \quad 4. W = q^2/2C$$

15. Навести формулу для об'ємної щільності енергії електричного поля?

$$1. \omega = \frac{CU^2}{2} \quad 2. \omega = \frac{qU^2}{2} \quad 3. \omega = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} \quad 4. \omega = \frac{q^2}{2C}$$

16. Наведіть формулу для визначення сили струму ?

$$1. i = \frac{dq}{dt} \quad 2. i = \frac{U}{R} \quad 3. i = \frac{\epsilon}{R+r} \quad 4. i = \int_S j dS$$

17. Наведіть формулу для визначення щільності струму ?

$$1. i = \frac{dq}{dt} \quad 2. j = \frac{di}{dS} \quad 3. j = \frac{1}{\rho E} \quad 4. j = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$$

18. Наведіть формулу для визначення електрорушійної сили ?

$$1. \mathcal{E} = -L \frac{di}{dt} \quad 2. \mathcal{E} = \frac{A^{\text{стоп}}}{q} \quad 3. \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad 4. \mathcal{E} = \frac{1}{ne} \frac{B \cdot i}{a}$$

19. Наведіть вірний вираз основного закону Ома для замкнутого кола з джерелом?

$$1. i = \frac{dq}{dt} \quad 2. i = \frac{U}{R} \quad 3. i = \frac{\epsilon}{R+r} \quad 4. P = i^2 R$$

20. Яка з формул є вірним виразом для закону Ома в диференціальній формі?

$$1. i = \frac{dq}{dt} \quad 2. j = \frac{di}{dS} \quad 3. \vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad 4. P = j^2 R$$

21. Яка з формул є вірним виразом для закону Ома для однорідної ділянки кола?

1. $i = \frac{dq}{dt}$ 2. $i = \frac{U}{R}$ 3. $i = \frac{\varepsilon}{R+r}$ 4. $P = i^2 R$

22. Навести рівняння, які використовують для розрахунку для трьох послідовно з'єднаних провідників з опором R_1, R_2, R_3 ?

1.) $I_0 = I_1 + I_2 + I_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

2.) $I_0 = I_1 + I_2 + I_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

3.) $I_0 = I_1 + I_2 + I_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

4.) $I_0 = I_1 = I_2 = I_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

23. Навести рівняння, які використовують для розрахунку для трьох паралельно з'єднаних провідників з опором R_1, R_2, R_3 ?

1.) $I_0 = I_1 + I_2 + I_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

2.) $I_0 = I_1 + I_2 + I_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

3.) $I_0 = I_1 + I_2 + I_3, U_0 = U_1 = U_2 = U_3, \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

4.) $I_0 = I_1 = I_2 = I_3, U_0 = U_1 + U_2 + U_3, R_0 = R_1 + R_2 + R_3$

24. Вкажіть формулу залежності опору провідника від температури

1. $R = \frac{U}{I}$ 2. $R = R_0(1 + \alpha \cdot t)$ 3. $R = R_0 \cdot e^{\alpha t}$ 4. $R = R_0 \alpha \cdot t$

25. Вкажіть формулу для розрахунку опору провідника.

1. $R = \rho \frac{l}{S}$ 2. $R = R_0(1 + \alpha \cdot t)$ 3. $R = \frac{l}{U}$ 4. $R = UI$

26. Вкажіть формулу для залежності питомого електроопору провідника від температури.

1. $\rho = \frac{1}{\sigma}$ 2. $\rho = \rho_0(1 + \alpha \cdot t)$ 3. $\rho = \rho_0 \cdot e^{\frac{\Delta E}{2kT}}$ 4. $\rho = \rho_0 \alpha \cdot t$

27. Які з наведених нижче формул дозволяють розрахувати потужність електричного струму?

1. $P = IU$ 2. $P = \frac{U^2}{R}$ 3. $P = j^2 \rho$ 4. $P = I^2 R$

28. Які з наведених нижче формул висловлюють закон Джоуля – Ленца?

$$1. Q = I^2 R t \quad 2. Q = \int_0^t i^2(t) R dt \quad 3. i = \frac{\varepsilon}{R+r} \quad 4. Q = \Delta U + A$$

Відповіді

№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді.
1	1	11	3	21	2
2	1	12	3	22	4
3	2	13	1	23	1
4	1	14	1,4	24	2
5	3	15	3	25	1
6	2	16	1	26	2
7	2	17	2	27	1,2,4
8	1	18	2	28	1,2
9	3	19	3		
10	3	20	3		

РОЗДІЛ 4. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

4.1 Магнітне поле в вакуумі

4.1.1 Вектор індукції магнітного поля

4.1.2 Закон Біо–Савара–Лапласа. Магнітне поле рухомого заряду

4.1.3 Магнітне поле прямого струму

4.1.4 Магнітне поле на осі кругового струму

4.1.5 Циркуляція вектору індукції магнітного поля. Закон повного струму для вакууму

4.1.6 Магнітне поле соленоїда і тороїда

4.1.7 Сила, що діє на елемент струму в магнітному полі. Закон Ампера

4.1.8 Сила Лоренца. Рух заряджених частинок в магнітному полі.

4.1.9 Контур зі струмом в магнітному полі

4.1.10 Магнітний потік. Теорема Гаусса–Остроградського для магнітного поля.

4.1.11 Робота по переміщенню провідника з струмом в магнітному полі.

4.2 Магнітне поле в речовині

4.2.1 Теорема Гаусса–Остроградського для магнітного поля в речовині. Вектор намагніченості

4.2.2 Вектор напруженості магнітного поля. Закон повного струму для магнетиків

4.2.3 Магнітна сприйнятливість і магнітна проникність речовини

4.2.4 Магнітне поле на межі двох магнетиків

4.2.5 Класифікація магнетиків. Магнітні моменти атомів і молекул

4.2.6 Елементарна теорія діа– і парамагнетизму

4.2.7 Феромагнетизм. Доменна структура феромагнетиків

4.3 Явище електромагнітної індукції

4.3.1 Потокозчеплення. Струми Фуко

4.3.2 Явище самоіндукції. Індуктивність. Струми при розмиканні і замиканні ланцюга

4.3.3 Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії магнітного поля

4.3.4 Явище взаємної індукції. Енергія системи провідників зі струмом

4.4 Приклади розв'язання завдань

4.5 Питання для самоконтролю

4.6 Тестові завдання

4.1 МАГНІТНЕ ПОЛЕ В ВАКУУМІ

У 1820 році Ампер встановив закон взаємодії двох довгих паралельних провідників зі струмом. Провідники взаємодіють з силою прямо пропорційною добутку струмів на довжину провідників і обернено пропорційною відстані між провідниками.

$$F = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot L}{2\pi \cdot d},$$

де μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

I_1, I_2 – сила струму в 1 та 2 провіднику, А;

d – діаметр провідника, А;

L – довжина провідника, м.

Ампер встановив, що якщо струми в провідниках течуть в одному напрямі, то провідники притягуються, якщо в протилежних, то провідники відштовхуються.

Прикладом дії сили Ампера може служити проходження блискавки по трубчастому блискавковідводу. При цьому виникають гігантські сили стиснення, що призводять до зменшення діаметра громовідводу.

Взаємодія струмів відбувається наступним чином: кожен з струмів створює навколо себе поле, яке називається магнітним, а інший струм взаємодіє безпосередньо з цим полем.

4.1.1 Вектор індукції магнітного поля

Магнітне поле характеризується вектором індукції магнітного поля $\vec{B}$.

В електростатиці для дослідження властивостей електричного поля використовується пробний заряд, в магнітній статистиці для дослідження властивостей магнітного поля використовується пробний круговий струм, що циркулює в контурі малих розмірів. Введемо поняття магнітного моменту кругового струму p_m (рис.4.1).

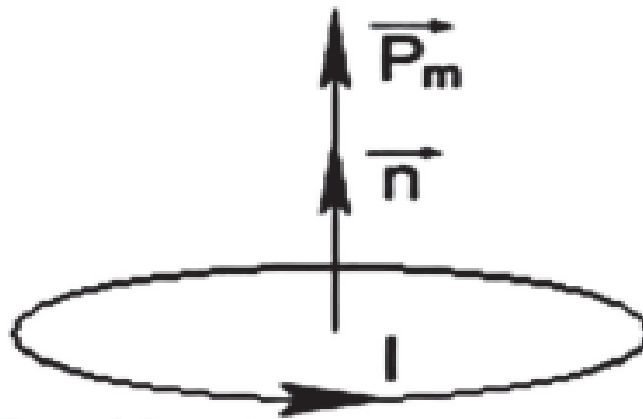


Рисунок 4.1 – Магнітний момент кругового струму

Модуль магнітного моменту кругового струму дорівнює:

$$p_m = I \cdot S,$$

де S – площа контуру.

Вектор $\vec{S}$ модуль якого дорівнює площі контуру S , а напрямок задається правилом правого гвинта по відношенню до напрямку струму в контурі і

збігається з напрямком одиничного вектору $\vec{n}$, нормального до поверхні контуру:

$$\vec{S} = S \cdot \vec{n},$$

тоді

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}.$$

Якщо ввести контур зі струмом в магнітне поле, то на нього буде діяти момент сил:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}]$$

або по модулю

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

спрямований так, щоб повернути магнітний момент контуру зі струмом у напрямку магнітного поля. За напрямку вектору індукції магнітного поля $\vec{B}$ в даній точці приймається напрямку вектору магнітного моменту орієнтованого полем пробного кругового струму, поміщеного в дану точку.

Момент сил досягає свого максимального значення $M_{\max}$, в разі коли магнітний момент P_m перпендикулярний вектору магнітної індукції $\vec{B}$, тобто при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Тоді

$$M_{\max} = p_m \cdot B$$

та модуль вектору магнітної індукції дорівнює:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}.$$

Отримана формула використовується для визначення індукції магнітного поля в даній точці. Модуль вектору магнітної індукції в даній точці дорівнює відношенню максимального крутного моменту сил, що діє на помещений у

дану точку пробний круговий струм, до величини магнітного моменту цього кругового струму.

4.1.2 Закон Біо–Савара–Лапласа. Магнітне поле рухомого заряду

Введемо поняття елемента струму. Елементом струму називається похідна сили струму I на довжину $d\vec{l}$ нескінченно малої частини провідника зі струмом $I d\vec{l}$. Напрямок вектору $d\vec{l}$ збігається з напрямком струму I .

На основі аналізу результатів численних дослідів, проведених Біо і Савара в 1820 році, Лаплас встановив що, магнітне поле, яке створює елемент струму $I d\vec{l}$ в довільній точці з радіусом–вектора $\vec{r}$ дорівнює

$$\vec{dB} = \frac{I \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{r}] \cdot \mu_0}{4\pi \cdot r^3}$$

Вектор $d\vec{B}$ виходить внаслідок векторного добутку векторів $d\vec{l}$ та $\vec{r}$, його напрямок визначається правилом правого гвинта (рис. 4.2).



Рисунок 4.2 – Магнітне поле елемента струму

У скалярному вигляді закон Біо–Савара–Лапласа має вигляд:

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{4\pi \cdot r^2}.$$

Для визначення магнітного поля, створюваного системою провідників зі струмом використовується принцип суперпозиції полів, який може бути записаний в наступному вигляді:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n (\vec{B}_i),$$

де $\vec{B}_i$ – магнітне поле, створюване i -тим елементом струму.

Розглянемо заряд dq , який рухається зі швидкістю $\vec{V}$.

Його можливо уявити як елемент струму, тобто

$$dq \cdot \vec{V} = I \cdot d \cdot \vec{l}.$$

Дійсно

$$I \cdot dl = jSdl = e \cdot n \cdot V \cdot S \cdot dl = d \cdot qV,$$

тоді як $n \cdot S \cdot dl$ дорівнює кількості носіїв заряду e .

Підставляючи цю формулу до закону Біо–Савара–Лапласа, отримаємо індукцію магнітного поля, створюваного рухомим зарядом dq :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot dq \cdot [\vec{V} \cdot \vec{r}]}{4\pi \cdot r^3}$$

Отже, q – точковий заряд, що рухається та утворює магнітне поле:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 \cdot q \cdot [\vec{V} \cdot \vec{r}]}{4\pi \cdot r^3}$$

Зауважимо, що швидкість руху заряду повинна бути значно меншою швидкості світла, тобто $V \ll c$, інакше необхідно враховувати запізнювання, пов'язане з кінцевою швидкістю поширення магнітного поля.

4.1.3 Магнітне поле прямого струму

Розглянемо прямий провідник зі струмом. Довільно виберемо на провіднику елемент зі струмом (рис. 4.3), тоді індукція магнітного поля, створюваного цим елементом, дорівнює:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I \cdot [d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

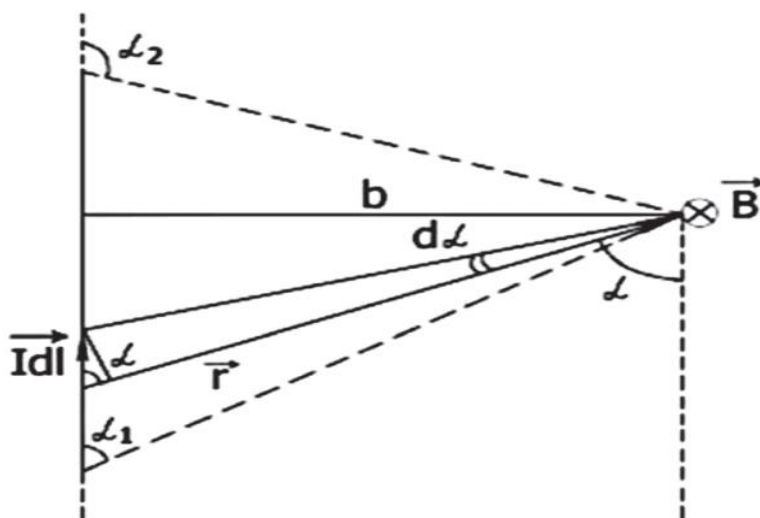


Рисунок 4.3 – Магнітне поле прямого струму

На якій би ділянці прямолінійного провідника ми не обирали елемент зі струмом, напрямок вектору $d\vec{B}$, буде одним і тим же, тому можна використовувати закон Біо–Савара–Лапласа в скалярній формі:

$$dB = \frac{\mu_0 Idl \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

або з урахуванням $d\sin\alpha=r d\alpha$ отримаємо:

$$dB = \frac{\mu_0 I d\alpha}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{4\pi b}.$$

Проведемо інтегрування:

$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{4\pi b} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Таким чином індукція магнітного поля прямого провідника зі струмом дорівнює

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Якщо провідник зі струмом має нескінченну довжину, тоді $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, отже, магнітна індукція нескінченного прямого провідника зі струмом дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi b}.$$

Магнітне поле можна задати, вказавши для кожної точки простору величину і напрямок вектору магнітної індукції $\vec{B}$. Графічно магнітне поле зручно зображати за допомогою ліній магнітної індукції $\vec{B}$.

Силкові лінії проводяться таким чином, щоб дотична до силової лінії в кожній точці співпадала з напрямком вектору магнітної індукції $\vec{B}$. Густота ліній обирається так, щоб кількість ліній, які пронизують перпендикулярну до них поверхню одиничної площі, були рівні модулю вектора магнітної індукції. На рис.4.4 зображені силкові лінії вектору магнітної індукції нескінченного прямого провідника зі струмом, вони мають вигляд концентричних кіл.

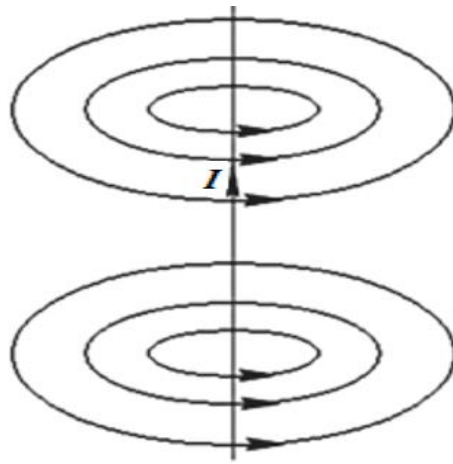


Рисунок 4.4 – Силові лінії магнітного поля нескінченного прямого провідника зі струмом

4.1.4 Магнітне поле на осі кругового струму

Розглянемо круговий провідник зі струмом (рис. 4.5).

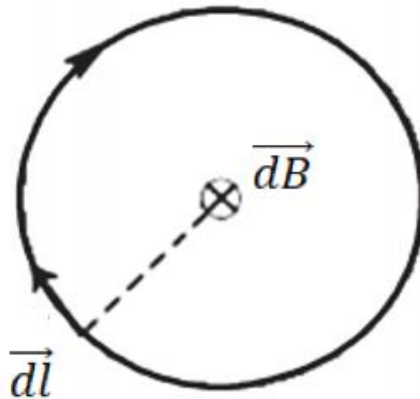


Рисунок 4.5 – Силові лінії магнітного поля нескінченного прямого провідника зі струмом

Модуль вектору магнітної індукції в центрі кругового провідника, який створюється елементом струму довжиною dl дорівнює:

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin 90}{4\pi r^2}.$$

Інтегруємо по всій довжині кругового провідника:

$$B = \int dB = \int_L \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Отже, модуль вектору магнітної індукції в центрі кругового провідника із струмом дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Розрахуємо індукцію магнітного поля на осі кругового струму (рис. 4.6)

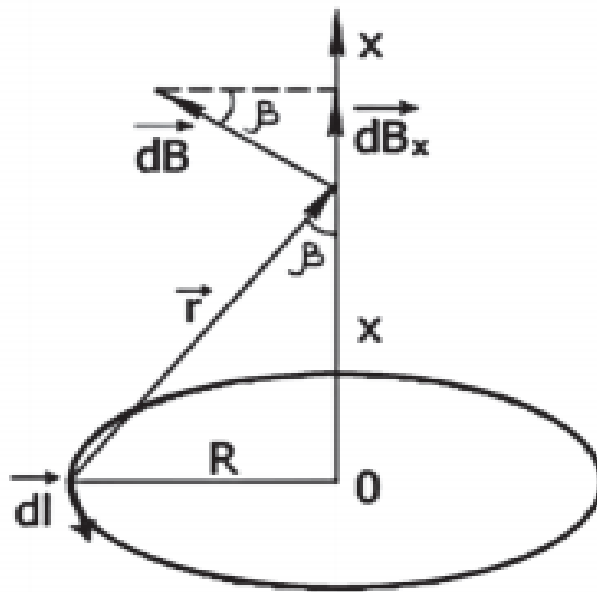


Рисунок 4.6 – Магнітне поле на осі кругового струму

Як бачимо

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3}.$$

Тоді як $d\vec{l} \perp \vec{r}$, таким чином $\sin \alpha = 1$, тоді

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}.$$

В силу симетрії, при підсумовуванні складових вектору $d\vec{B}$, перпендикулярні осі OX , дадуть нуль, отже, досить врахувати проекцію вектора $d\vec{B}$ на ось OX :

$$B_x = \frac{\mu_0 I dl \sin \beta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dl R}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Інтегруємо по всій довжині кругового провідника:

$$B = \int_L dB_x = \int_L \frac{\mu_0 I R dl}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I R \cdot 2\pi R}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\mu_0 \cdot p_m}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Якщо точка знаходиться далеко від контуру ($x \gg R$), то величиною R можна знехтувати в порівнянні з x .

Тоді отримаємо

$$B \approx \frac{\mu_0 \cdot p_m}{2\pi x^2},$$

або у векторному вигляді:

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 \cdot \vec{p}_m}{2\pi x^3}.$$

Можна показати, що при $x \gg R$ та довільному розташуванні точки відносно центру контуру, формула для розрахунку магнітного поля кругового струму в точці, що задається радіус-вектор $\vec{r}$ має вигляд:

$$B = \frac{\mu_0 p_m \sqrt{1 + \cos^2 \theta}}{4\pi r^3},$$

де θ — кут між радіус-вектором $\vec{r}$ та магнітним моментом кругового струму $\vec{p}_m$.

Формула для розрахунку магнітного поля кругового струму (магнітного диполя) подібна формулі для розрахунку електричного поля електричного диполя.

4.1.5 Циркуляція вектору індукції магнітного поля. Закон повного струму для вакууму

Циркуляцією вектору $\vec{B}$ по замкнутому контуру L називається інтеграл $\oint \vec{B} d\vec{l}$. Розрахуємо циркуляцію вектору $\vec{B}$ по замкнутому контуру L в найпростішому випадку (рис. 4.7).

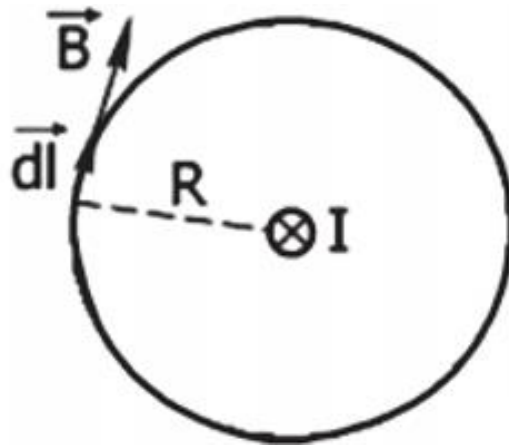


Рисунок 4.7 – Прямий провідник зі струмом в центрі кругового контуру

Візьмемо контур L у вигляді кола, в центр якого помістимо нескінченно довгий прямий провідник зі струмом. В цьому випадку циркуляція вектору $\vec{B}$ по контуру дорівнює:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

Розглянемо нескінченно довгий провідник зі струмом I , що пронизує контур довільної форми (рис. 4.8).

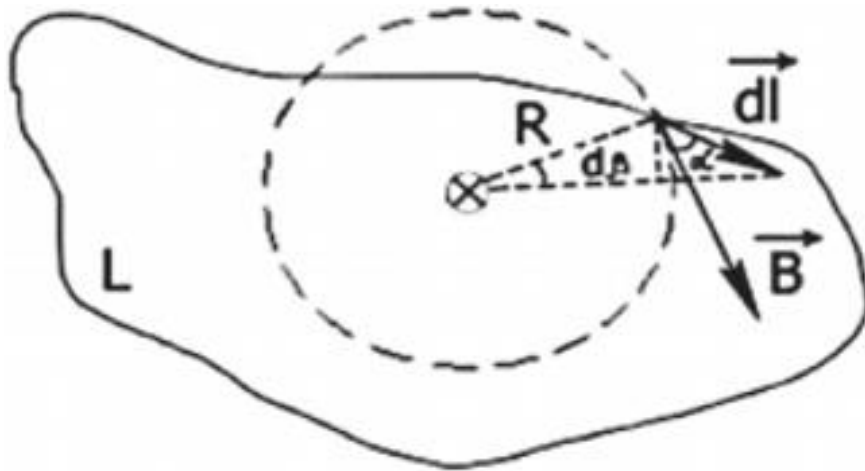


Рисунок 4.8 – Прямий провідник зі струмом, який пронизує контур довільної форми

Циркуляція вектору $\vec{B}$ за таким контуру дорівнює: :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L B \cos \alpha dl = \oint_L B R d\beta = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R} R d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot 2\pi = \mu_0 I.$$

При виводі цієї формули було враховано, що $dl \cdot \cos \alpha = R \cdot d\beta$.

Можна показати, що отримана формула: :

$$\int_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

справедлива для провідника зі струмом будь-якої форми.

Розглянемо випадок, коли провідник зі струмом знаходиться поза контуром (рис. 4.9).

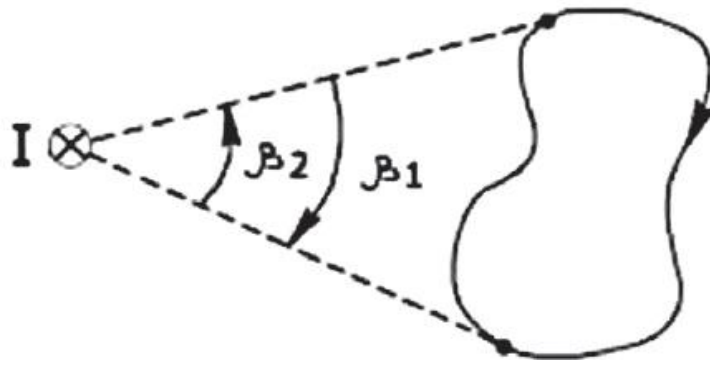


Рисунок 4.9 – Прямий провідник зі струмом, ззовні контуру

Циркуляція вектору магнітної індукції в цьому випадку буде дорівнювати нулю, так як при інтегруванні по куту β верхній і нижній межі інтегрування між собою рівні.

Розглянемо n -ну кількість провідників, які пронизують контур довільної форми (рис. 4.10):

$$\oint_L B dl = 0$$

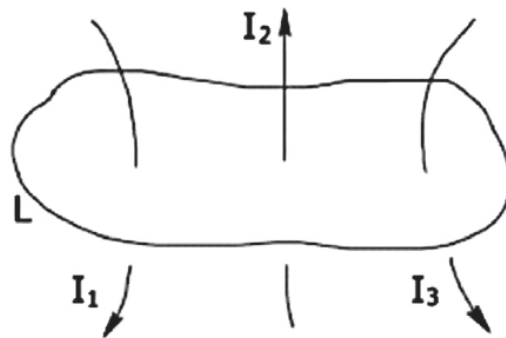


Рисунок 4.10 – Система провідників зі струмом, що пронизують контур

Використовуючи принцип суперпозиції полів, отримаємо:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \sum_{i=1}^n \vec{B}_i d\vec{l} = \sum_L \int \vec{B}_i d\vec{l} = \sum \mu_0 I_i.$$

Таким чином, ми отримали закон повного струму для магнітного поля в вакуумі. Сформулюємо його: циркуляція вектору магнітної індукції по замкненому контуру дорівнює добутку магнітної постійної на алгебраїчну суму струмів, які пронизують контур:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=0}^n I_i.$$

В алгебраїчну суму струмів зі знаком плюс входять струми, що пронизують контур зверху вниз, і зі знаком мінус входять струми, що пронизують контур в протилежному напрямку.

Порівняємо властивості електростатичного та магнітного полів. Для електростатичного поля циркуляція вектору $\vec{E}$ дорівнює нулю $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, отже, електростатичне поле є потенційним.

Для магнітного поля циркуляція вектору $\vec{B}$ відмінна від нуля :

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=0}^n I_i.$$

Звідси випливає, що магнітне поле не є потенційним, поля такого типу називаються вихровими і мають особливість — силові лінії вихрового поля завжди замкнені.

Соленоїд є циліндричною котушкою з щільно намотаним дротом. Розглянемо магнітне поле нескінченно довгого соленоїда (рис. 4.11).

Для цього скористаємося законом повного струму:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=0}^n I_i.$$

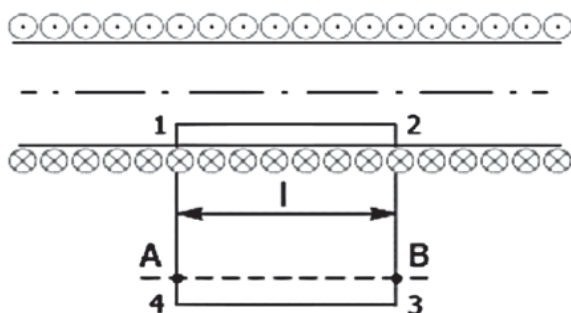


Рисунок 4.11 – До розрахунку поля нескінченного соленоїда

Замкнутий контур виберемо у вигляді прямокутника 1–2–3–4, сторона 1–2 якого, знаходиться всередині соленоїда і паралельна його осі, тоді інтеграл по контуру можна уявити як суму чотирьох інтегралів по сторонам прямокутника:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Якщо вибрати контур дуже довгим, то сторона 3–4 буде нескінченно далека від осі соленоїда. Індукція магнітного поля на нескінченності дорівнює нулю, тому

$$\int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Індукція магнітного поля в точці А в силу симетрії дорівнює індукції магнітного поля в точці В, тому на ділянках 2–3 і 4–1 підінтегральні функції рівні, а інтегрування на цих ділянках ведеться в протилежних напрямках, отже

$$\int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Крім того, із-за симетрії всюди на стороні 1–2 індукція магнітного поля не може змінюватися. Таким чином:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 B_i dl = B_i l = \mu_0 N I.$$

Усередині нескінченно довгого соленоїда із-за симетрії вектор магнітної індукції повинен бути паралельний осі соленоїда $B_i = B$.

Тоді

$$B = \frac{N \cdot I \cdot \mu_0}{l},$$

де $n = \frac{N}{l}$ – кількість витків на одиницю довжини.

Тоді поле всередині нескінченно довгого соленоїда дорівнює:

$$B = n \cdot I \cdot \mu_0.$$

В отриманій формулі відсутня залежність від відстані до осі соленоїда, отже, магнітне поле всередині нескінченно довгого соленоїда є однорідним.

Якщо вибрати прямокутник 1–2–3–4 так, щоб сторона 1–2 виявилася поза соленоїдом, то провівши ті ж міркування, отримаємо:

$$\int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 B_l dl = B_l l = 0.$$

Тому такий контур не охоплює струми. Отже, поле поза соленоїдом відсутнє. Поле на краю нескінченного соленоїда вдвічі менше поля всередині нескінченного соленоїда і дорівнює:

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I.$$

Розглянемо магнітне поле, створюване тороїдом (рис. 4.12).

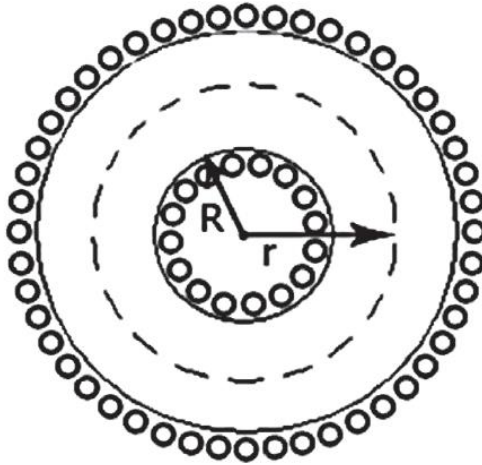


Рисунок 4.12 – До розрахунку поля тороїду

Виберемо замкнутий контур у вигляді кола радіуса r , центр якої збігається з центром тороїда. В силу симетрії $B_l = \text{const}$ всюди на цій окружності, тому:

$$\oint_L B_l dl = B_l l = B_l \cdot 2\pi r = \mu_0 N I,$$

тоді

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

Число витків тороїда:

$$N = n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R,$$

отже, індукція магнітного поля всередині:

$$B = \frac{\mu_0 I n R}{r}.$$

Якщо тороїд дуже вузький, то $R \approx r$, поле такого тороїда:

$$B \approx \mu_0 I n.$$

Поле поза тороїдом дорівнює нулю, щоб довести це, потрібно вибрати замкнутий контур у вигляді кола, центр якого збігається з центром тороїда, а радіус r більше зовнішнього радіуса тороїда або менше внутрішнього радіуса тороїда, тоді алгебраїчна сума струмів, які пронизують такий контур буде дорівнювати нулю.

4.1.7 Сила, що діє на елемент струму в магнітному полі. Закон Ампера

Дослідним шляхом Ампер встановив, що на елемент струму в магнітному полі діє сила рівна, яка представлена на рис. 4.13.

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}]$$

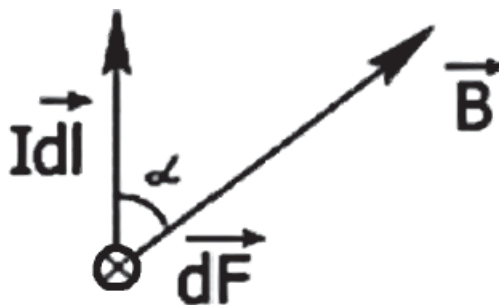


Рисунок 4.13 – Сила, що діє на елемент струму у магнітному полі

У скалярному вигляді сила Ампера дорівнює:

$$dF = IdlB = \sin\alpha.$$

З властивостей векторного добутку випливає, що $dF \perp dl$ та $dF \perp dB$.

Використовуючи формулу Ампера розрахуємо силу, діючу на елемент струму в магнітному полі, яка створена прямим нескінченним провідником зі струмом (рис. 4.14).

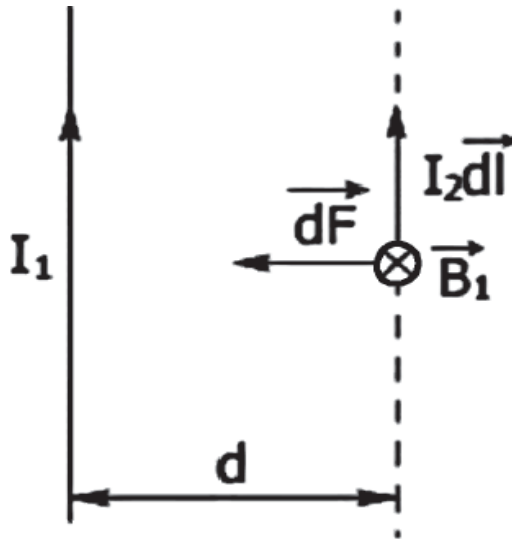


Рисунок 4.14 – Елемент струму у полі нескінченного прямого провідника

Індукція магнітного поля нескінченно довгого прямого провідника зі струмом дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi d}.$$

Тоді сила, що діє на елемент струму в магнітному полі дорівнює:

$$dF = I_2 B dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl.$$

Отримана формула відома нам як закон Ампера.

4.1.8 Сила Лоренца. Рух заряджених частинок в магнітному полі

Сила Лоренца має ту ж природу, що і сила Ампера. Раніше було показано, що заряду dq , який рухається зі швидкістю V еквівалентний елементу струму:

$$I \cdot d\vec{l} = dq \cdot \vec{V}$$

Підставивши цей вираз в формулу для сили Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \cdot \vec{B}],$$

отримаємо

$$d\vec{F} = dq[\vec{V} \cdot \vec{B}].$$

Тоді сила Лоренца $\vec{F}$, що діє в магнітному полі на рухомий точковий заряд q дорівнює:

$$\vec{F} = q[\vec{V} \cdot \vec{B}].$$

Сила Лоренца в скалярному вигляді дорівнює:

$$F = qVB\sin\alpha.$$

Сила Лоренца роботи не робить і потужність сили Лоренца дорівнює нулю

$$N = \vec{F} \cdot \vec{V} = 0, \text{ так як } \vec{F} \perp \vec{V}.$$

Отже модуль швидкості зарядженої частинки при її русі в магнітному полі не змінюється ($V = const$).

Розглянемо заряджену частинку, яка влітає в однорідне магнітне поле, зі швидкістю V , яка спрямована перпендикулярно силовим лініям магнітного поля (рис. 4.15).

В цьому випадку сила Лоренца буде грати роль доцентрової сили, а частка буде рухатися по колу. Використовуємо для опису руху матеріальної точки другий закон Ньютона:

$$m \cdot a_n = qV \cdot B \cdot \sin 90^\circ.$$

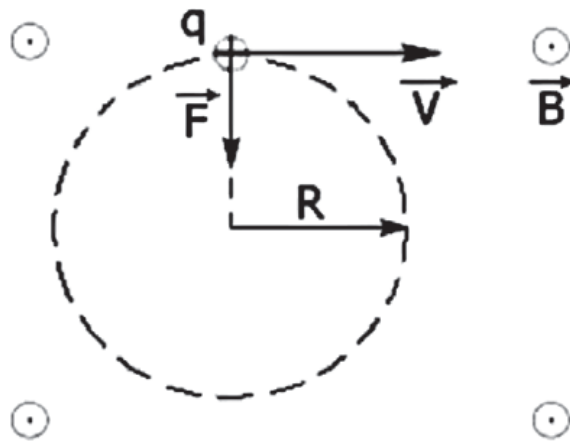


Рисунок 4.15 – Заряджена частка в однорідному магнітному полі

Виразивши нормальне прискорення, отримаємо:

$$\frac{m \cdot V^2}{R} = qV \cdot B,$$

або

$$\frac{2\pi m}{T} = qB.$$

Період обертання дорівнює:

$$T = \frac{2\pi \cdot m}{qB}.$$

Знайдемо радіус кола:

$$R = \frac{mV}{qB}.$$

Розглянемо заряджену частинку, влітає під кутом до силових ліній однорідного магнітного поля (рис. 4.16).

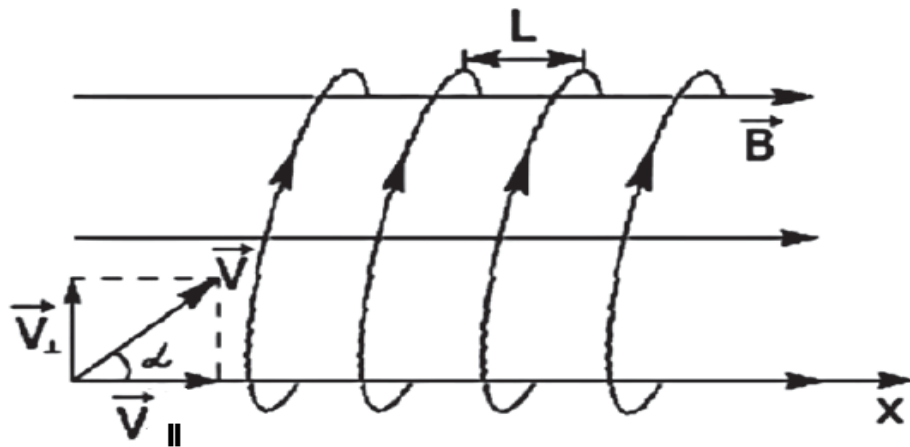


Рисунок 4.16 – Траєкторія зарядженої частинки в однорідному магнітному полі

У напрямку силових ліній магнітного поля складова сили Лоренца дорівнює нулю, тому в напрямку осі x частка буде рухатися рівномірно і прямолінійно.

У площині, перпендикулярній осі x , частка буде рухатися по колу

$$ma_n = qVB\sin\alpha,$$

або

$$\frac{mV^2 \sin^2 \alpha}{R} = qVB \sin \alpha.$$

Перетворивши, отримаємо:

$$\frac{mV}{R} = qB$$

або

$$m\omega = qB$$

Тоді

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

Радіус кола дорівнює

$$R = \frac{mV_{\perp}}{qB}$$

В результаті одночасного прямолінійного і рівномірного руху по осі x , і обертання по колу в перпендикулярній осі x площині, частка буде рухатися по складній траєкторії, яка являє гвинтову лінію.

Крок гвинтової лінії L можна знайти в такий чином:

$$L = V_{\parallel} T = \frac{V_{\parallel} 2\pi m}{qB}.$$

Знайдемо відношення кроку гвинтової лінії L до її радіусу R :

$$\frac{L}{R} = \frac{V_{\parallel} 2\pi m q B}{q B m V_{\perp}} = 2\pi \frac{V_{\parallel}}{V_{\perp}} = 2\pi \operatorname{ctg} \alpha.$$

Розглянемо рухому заряджену частинку в неоднорідному магнітному полі, яке спостерігається, наприклад, у полюсів Землі. Силкові лінії поля згущуються (рис. 4.17) при наближенні до полюса.

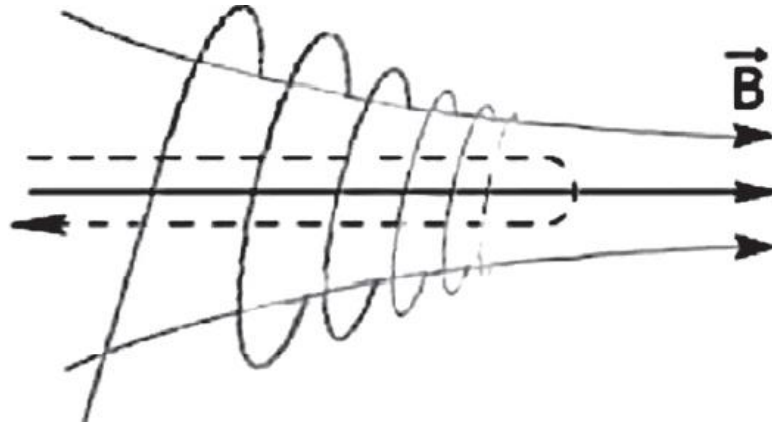


Рисунок 4.17 – Траєкторія зарядженої частинки у неоднорідному магнітному полі

Складова швидкості частинки, спрямована уздовж поля, безперервно зменшується аж до нуля. У цій точці відбувається поворот частки і рух відбувається як би назад. Траєкторією руху частинки є спіраль. У цьому випадку спостерігаються великі прискорення частинки, так як

$$a_n = \frac{V^2}{R},$$

а радіус спіралі

$$R = \frac{mV}{qB}$$

в міру наближення до точки повороту зменшується.

Рухомі з великими прискореннями заряджені частинки випромінюють у видимому діапазоні. Це призводить до появи північних сяйв, характерні саме для полярних областей, де відбувається згущення силових ліній магнітного поля Землі. Частинки, що випускаються Сонцем, потрапляють у полюсів Землі в так звану магнітну пастку, рухаються в ній по спіралі в результаті чого виділяється енергія у вигляді електромагнітного випромінювання у видимому діапазоні, це явище і призводить до появи північних сяйв.

4.1.9 Контур зі струмом в магнітному полі

Розглянемо прямокутний контур зі струмом, поміщений в однорідне магнітне поле (рис. 4.18).

Якщо контур орієнтований так, що вектор $\vec{B}$ паралельний площині контуру, то сила Ампера $d\vec{F} = I [d\vec{l} \cdot \vec{B}]$, діюча на будь-який елемент струму, паралельний B , дорівнює нулю. Тоді сили, які діють на елементи струмів, що належать двом перпендикулярним полю сторонам контуру рівні:

$$F = IaB.$$

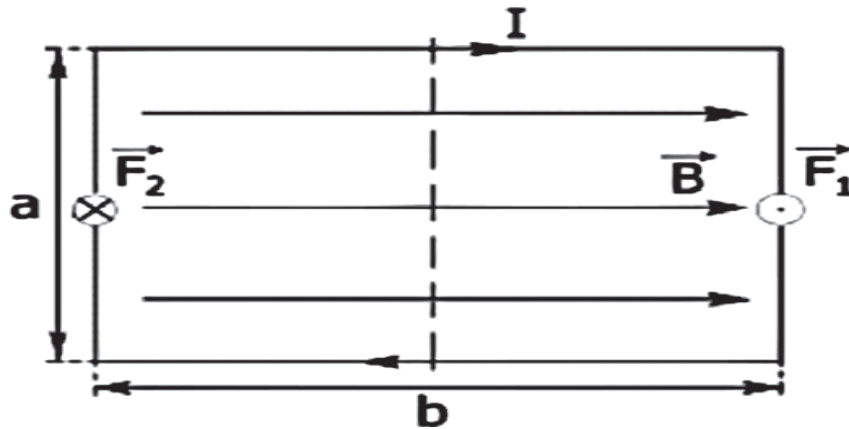


Рисунок 4.18 – Прямокутний контур зі струмом у магнітному полі

Момент сил, що діє на контур дорівнює:

$$M = F \cdot \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = F \cdot b = IaBb = p_m B.$$

Момент сил прагне повернути контур так, щоб магнітний момент контуру зі струмом був орієнтований по полю.

Розглянемо сили, які діють на орієнтований полем прямокутний контур (рис. 4.19).

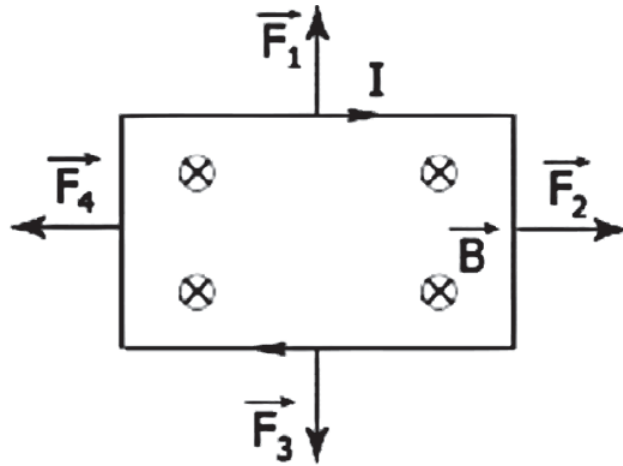


Рисунок 4.19 – Сили, що розтягують орієнтований магнітним полем контур

Так як сили діють на протилежні сторони контуру рівні за величиною і протилежні за напрямком, то їх результуюча дорівнює нулю, також як і момент сил $M = 0$.

Якщо магнітний момент $\vec{p}_m$ спрямований так само як і вектор магнітної індукції $\vec{B}$, то сили поля розтягують контур. Якщо магнітний момент контуру $\vec{p}_m$ спрямований протилежно вектору магнітної індукції $\vec{B}$, то сили поля стискають контур.

У разі контуру довільної форми, розташованого в площині паралельної вектору $\vec{B}$, площина контуру можна розбити на вузькі смужки (рис. 4.20) так, щоб їх довгі сторони були паралельні вектору $\vec{B}$.

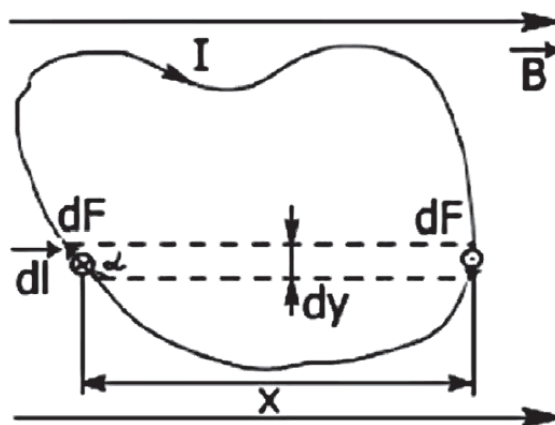


Рисунок 4.20 – Довільний контур форми в магнітному полі

Тоді момент сил, що діє на окрему смужку дорівнює:

$$dM = dF \cdot x = IBdl \sin \alpha \cdot x = IBdy \cdot x = IBdS$$

Моменти сил, що діють на всі смужки, мають однаковий напрямок. Отже, момент сил, що діють на контур в цілому, дорівнює:

$$M = \int IBdS = IB S = p_m B.$$

Розглянемо контур довільної форми поміщений в однорідне магнітне поле, таким чином, щоб вектор магнітної індукції був направлений під кутом до магнітного моменту контуру.

У цьому випадку вектор магнітної індукції $\vec{B}$ можна розкласти на складові:

- паралельну площині контуру $B_{\parallel} = B \sin \alpha$ (створює крутний момент);
- перпендикулярну площині контуру $B_{\perp} = B \cos \alpha$ (призводить до стиснення або розтягування контуру).

Тоді, момент сил, що діє на контур, дорівнює $M = p_m B_{\parallel} = p_m B \sin \alpha$ або у векторному вигляді $\vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}]$.

Таким чином, магнітне поле прагне орієнтувати магнітний момент контур з струмом по полю.

Максимальний крутний момент досягається при $\vec{p}_m \perp \vec{B}$ і дорівнює:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m}$$

Остання формула і служить для визначення вектора магнітної індукції $\vec{B}$ в довільній точці поля.

Для цього в дану точку поміщають пробний круговий струм з магнітним моментом $\vec{p}_m$ і вимірюють діючий на нього максимальний крутний момент M_{max} .

Для повороту контуру зі струмом в магнітному полі (рис. 4.21) обчислимо роботу, яку необхідно зробити:

$$dA = M d\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha = -p_m B d(\cos \alpha).$$

Проінтегруємо:

$$A = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_m B d(\cos \alpha) = p_m B \cos \alpha_1 - p_m B \cos \alpha_2.$$

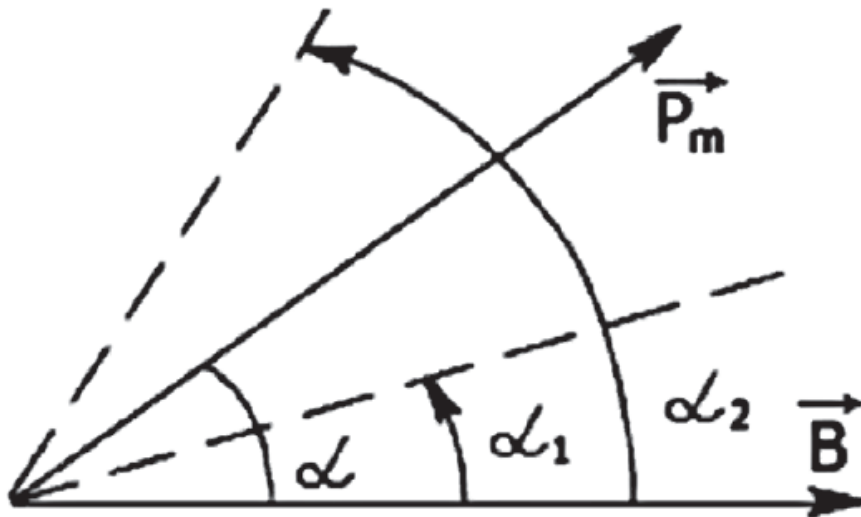


Рисунок 4.21 – До розрахунку роботи, необхідної для повороту контуру зі струмом у магнітному полі

Робота сил поля при цьому дорівнює:

$$A_{12} = -A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p_m B d(\cos \alpha) = -p_m B \cos \alpha_1 + p_m B \cos \alpha_2 = U_1 - U_2.$$

Тоді потенційна енергія контуру зі струмом в магнітному полі дорівнює:

$$U = -p_m B \cos \alpha = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$$

У неоднорідному магнітному полі крім моменту сил на контур зі струмом діє сила, яка прагне перемістити контур в область поля, де силові лінії згущуються (рис. 4.22):

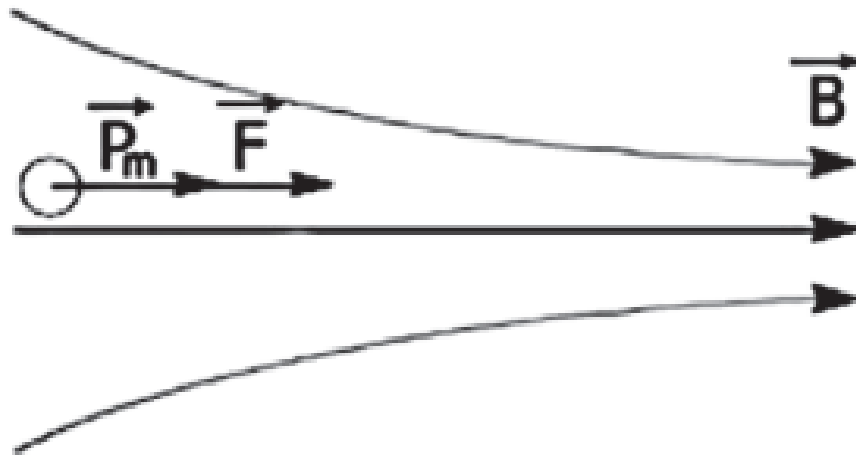


Рисунок 4.22 – До розрахунку роботи, необхідної для повороту контуру зі струмом у магнітному полі

$$\vec{F} = -\text{grad}U = \text{grad}(\vec{p}_m \cdot \vec{B}) \text{ або } \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p}_m \cdot \vec{B}).$$

Якщо магнітне поле однорідне, то $\vec{F} = 0$. Якщо магнітне поле неоднорідне, то $\vec{F} \neq 0$.

Порівняємо формули, які описують поведінку електричного диполя в електричному полі і контуру зі струмом в магнітному полі:

$$\vec{M} = [\vec{p} \cdot \vec{E}] \text{ і } U = -\vec{p} \cdot \vec{E} \text{ (для електричного поля);}$$

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}] \text{ і } U = -\vec{p}_m \cdot \vec{B} \text{ (для магнітного поля).}$$

Контур зі струмом в магнітному полі поводить себе подібно до електричного диполя в електричному полі. Тому контур з струмом малих розмірів часто називають магнітним диполем.

4.1.10 Магнітний потік. Теорема Гаусса–Остроградського для магнітного поля

Введемо поняття магнітного потоку Φ_m через поверхню S . Розглянемо спочатку однорідне магнітне поле і плоску поверхню (рис. 4.23).

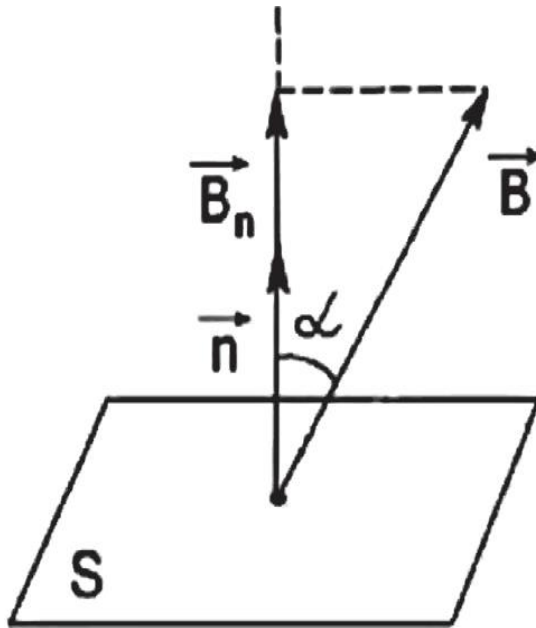


Рисунок 4.23 – Магнітний потік через плоску поверхню

Потік вектору магнітної індукції в цьому випадку дорівнює:

$$\Phi_m = BS \cos \alpha = B_n S.$$

У разі неоднорідного поля можна вибрати нескінченно малу поверхню (рис. 4.24), так щоб в її межах поле було однорідним, тоді магнітний потік через нескінченно малу поверхню дорівнює:

$$d\Phi_m = BndS$$

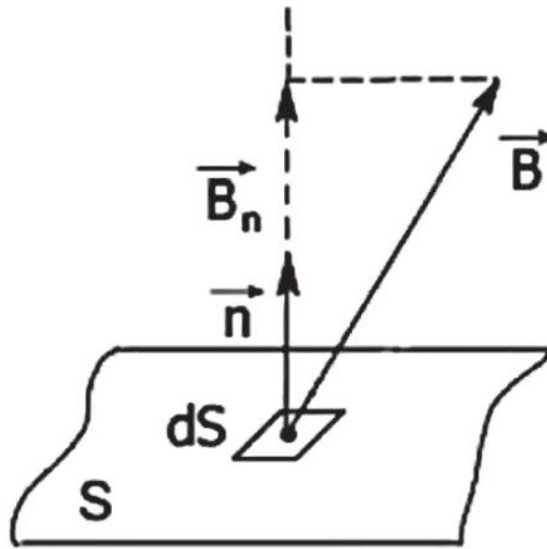


Рисунок 4.24 – Магнітний потік через довільну поверхню

Для розрахунку магнітного потоку через всю поверхню, необхідно взяти інтеграл по цій поверхні:

$$\Phi_m = \int_S B n \, dS = \int_S \vec{B} \, d\vec{S}.$$

Вектор $d\vec{S}$ уведений для зручності, його модуль дорівнює площі нескінченно малої поверхні, а напрямок збігається з нормаллю до поверхні $d\vec{S} \uparrow \vec{n}$. З визначення випливає, що магнітний потік через поверхню чисельно дорівнює числу силових ліній, які пронизують цю поверхню, тобто Φ_m чисельно дорівнює N .

Розглянемо магнітний потік через довільну замкнуту поверхню (рис. 4.25), він чисельно дорівнює числу силових ліній, які пронизують поверхню, але силові лінії вектору магнітної індукції завжди замкнуті, отже, кожна з силових ліній пронизує замкнуту поверхню двічі, один раз в напрямку зовнішньої нормалі і вдруге в протилежному напрямку, тому число ліній вектору магнітної індукції, що пронизують будь-яку замкнену поверхню, дорівнює нулю, отже дорівнює нулю і магнітний потік через довільну замкнуту поверхню. Це твердження відомо, як теорема Гаусса–

Остроградського для магнітного поля: потік вектору магнітної індукції через довільну замкнуту поверхню дорівнює нулю

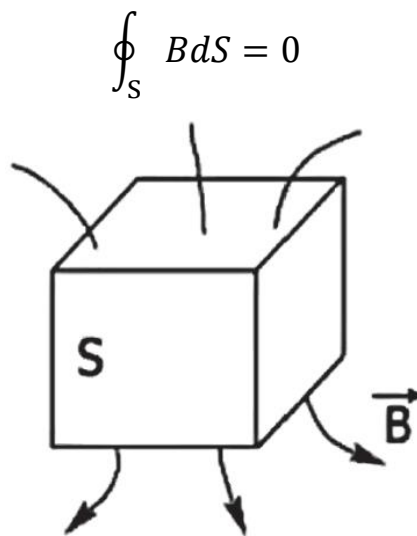


Рисунок 4.25 – Магнітний потік через замкнуту поверхню

Для електричного поля теорема Гаусса–Остроградського має вигляд:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n q_i -$$

потік вектору електричної індукції через довільну замкнуту поверхню дорівнює алгебраїчній сумі сторонніх зарядів всередині цієї поверхні.

Рівність нулю потоку вектору магнітної індукції через довільну замкнуту поверхню є наслідком відсутності в природі магнітних зарядів.

4.1.11 Робота по переміщенню провідника з струмом в магнітному полі

Розглянемо розташований перпендикулярно до магнітного поля контур зі струмом, що має одну здатну вільно рухатися убік довжиною a (рис. 4.26).

У магнітному полі на рухому сторону буде діяти сила Ампера $F_A = IaB \sin 90 = IaB$. Якщо під дією сили Ампера рухома сторона буде зміщена на dx , то при цьому буде здійснена елементарна робота:

$$dA = F_A dx = IaB \sin 90 dx = IaB dx = IBdS = Id\Phi.$$

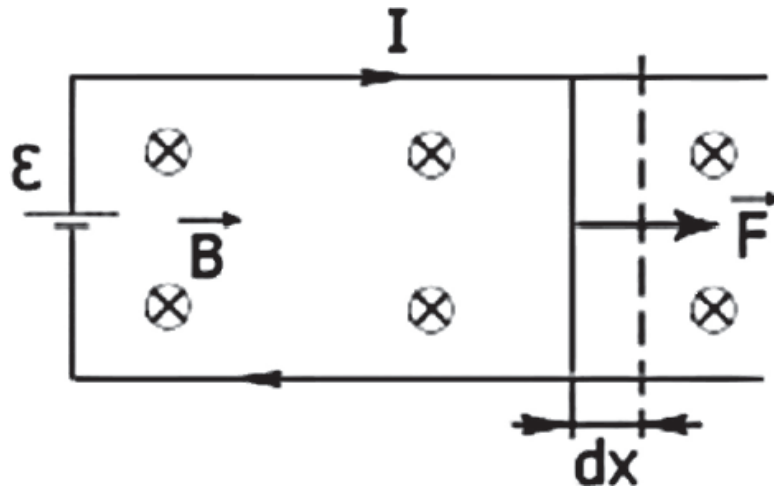


Рисунок 4.26 – Контур з рухомою стороною

Таким чином при зміні магнітного потоку через контур з струмом, над ним відбувається елементарна робота

$$dA = Id\Phi$$

Розглянемо випадок, коли вектор магнітної індукції $\vec{B}$ знаходиться під кутом до нормалі контуру зі струмом.

У цьому випадку напрямок дії сили Ампера складе з напрямком переміщення кут α і елементарна робота по переміщенню контуру зі струмом дорівнює:

$$dA = IBa \cos \alpha \cdot dx = B_n I a dx = B_n I dS = Id\Phi.$$

Таким чином отримана формула $dA = Id\Phi$ вірна для довільної взаємної орієнтації вектора магнітної індукції і контуру зі струмом. При незмінній силі струму в контурі робота при зміні магнітного потоку через контур дорівнює:

$$d = I(\Phi_2 - \Phi_1)$$

4.2 Магнітне поле в речовині

4.2.1 Теорема Гаусса–Остроградського для магнітного поля в речовині. Вектор намагніченості

Якщо провідники зі струмом знаходяться не в вакуумі, а в який–небудь середовищі, то магнітне поле навколо них буде відрізнятися від магнітного. Контур з рухомою стороною поля, створюваного цієї ж системою провідників в вакуумі. Будь–яка речовина є магнетиком, тобто під впливом магнітного поля воно здатне набувати магнітний момент (намагнічуватися). Намагнічене речовина створює магнітне поле $\vec{B}'$, яке накладається на створене провідниками з струмом магнітне поле $\vec{B}_0$. В результаті в навколишньому просторі створюється магнітне поле $\vec{B}$, рівне

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

Істинне (мікроскопічне) поле в речовині дуже сильно змінюється в межах міжмолекулярних відстаней. Під полем в магнетиках $\vec{B}$ розуміють усереднене (макроскопічне) поле, саме воно взаємодіє з макроскопічними струмами.

Для пояснення намагнічування тіл, Ампер припустив, що всередині молекул речовини циркулюють кругові мікроскопічні струми. Кожен

мікроскопічний струм має магнітним моментом і створює в навколишньому просторі магнітне поле, яке на осі струму дорівнює:

$$\vec{B}_i' = \frac{\mu_0 \cdot \vec{p}_{m_i}}{2\pi x_i^3},$$

де x_i – довжина від i -го молекулярного струму до даної точки на осі;

$\vec{B}'$ – магнітне поле всієї сукупності молекулярних струмів в цій точці.

Розглянемо потік вектору магнітної індукції через довільну замкнуту поверхню:

$$\Phi_m = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S \vec{B}_0 d\vec{S} + \oint_S \vec{B}' d\vec{S}.$$

Цей потік дорівнює числу ліній вектору магнітної індукції:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

пронизують поверхню і, отже, дорівнює нулю, так як лінії вектора магнітної індукції завжди замкнуті. Таким чином:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S \vec{B}_0 d\vec{S} + \oint_S \vec{B}' d\vec{S} = 0.$$

Отже, теорема Гаусса–Остроградського справедлива як для магнітного поля у вакуумі, так і для магнітного поля в речовині:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Характеристикою ступеня намагніченості речовини служить вектор намагніченості:

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_m}{\Delta V}.$$

Вектор намагніченості дорівнює відношенню векторної суми магнітних моментів молекул в фізично нескінченно малому обсязі до величини цього обсягу.

У відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти молекул орієнтовані хаотично, внаслідок цього вектор намагніченості дорівнює нулю (рис. 4.27).

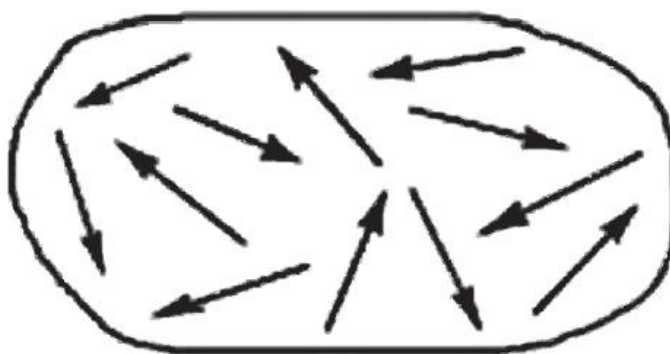


Рисунок 4.27 – Магнітні моменти молекул у відсутності магнітного поля

Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається орієнтація магнітних моментів молекул і вектор намагніченості стає відмінний від нуля (рис. 4.28).

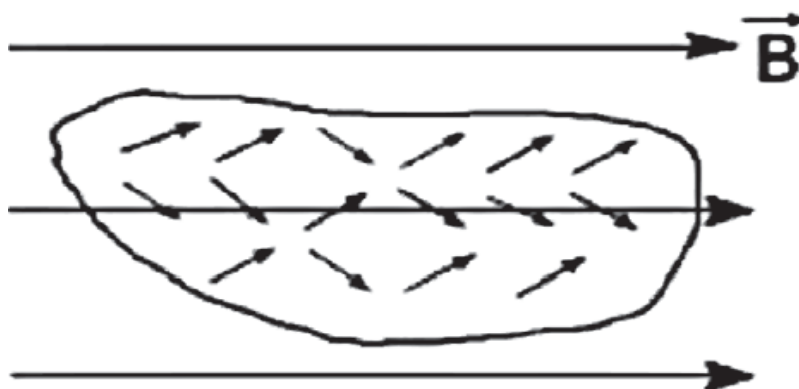


Рисунок 4.28 – Орієнтація магнітних моментів молекул в магнітному полі

4.2.2 Вектор напруженості магнітного поля. Закон повного струму для магнетиків

Розглянемо циркуляцію вектору магнітної індукції по вільному замкнутому контуру (рис. 4.29):

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_0 + \vec{B}') d\vec{l}$$

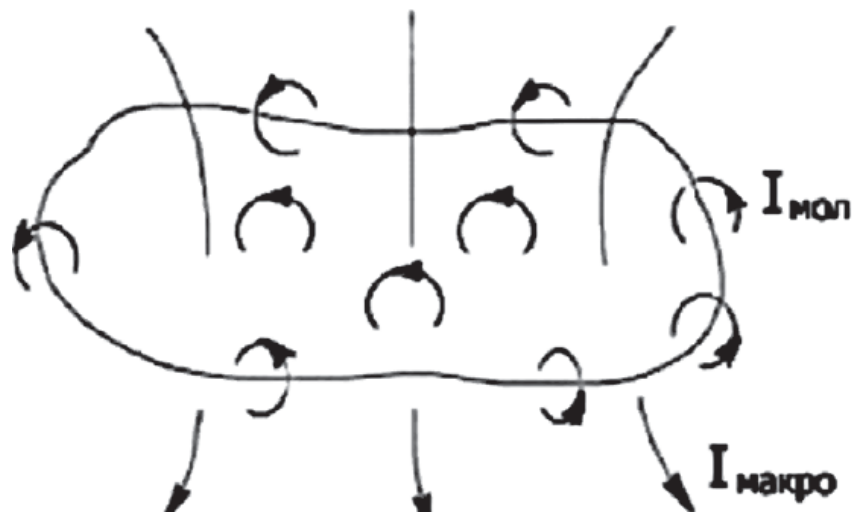


Рисунок 4.29 – Макроскопічні та молекулярні струми, які пронизують замкнутий контур

Раніше був отриманий закон повного струму для поля в вакуумі:

$$\oint_L \vec{B}_0 d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=0}^n I_i.$$

Абсолютно аналогічна формула для циркуляції по замкнутому контуру вектору $\vec{B}'$, тільки в алгебраїчну суму замість макроскопічних струмів входять молекулярні струми, які охоплюються контуром:

$$\oint_L \vec{B}' d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=0}^{n_1} I_k^{\text{мол.}}$$

Підставивши отримаємо:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L (\vec{B}_0 + \vec{B}') d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_i + \mu_0 \sum_{k=1}^{n_1} I_k^{\text{мол.}}$$

Користуватися отриманою формулою вкрай незручно, так як дуже складно розрахувати кількість молекулярних струмів, які пронизують контур. Але можна знайти таку допоміжну векторну фізичну величину $\vec{H}$, яка пов'язана з індукцією магнітного поля $\vec{B}$ і визначається тільки макроскопічними струмами.

Векторна величина $\vec{H}$, називається напруженістю магнітного поля. Розрахуємо алгебраїчну суму молекулярних струмів, що перетинаються елементом контуру довгою dl (рис. 4.30).

Розглянемо випадок, коли магнітні моменти всіх молекул рівні за величиною і однаково направлені $\vec{p}_{m_i} = \vec{p}_m$. Тоді вектор намагніченості дорівнює:

$$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m N}{\Delta V} = \vec{p}_m n,$$

де n – концентрація молекул.

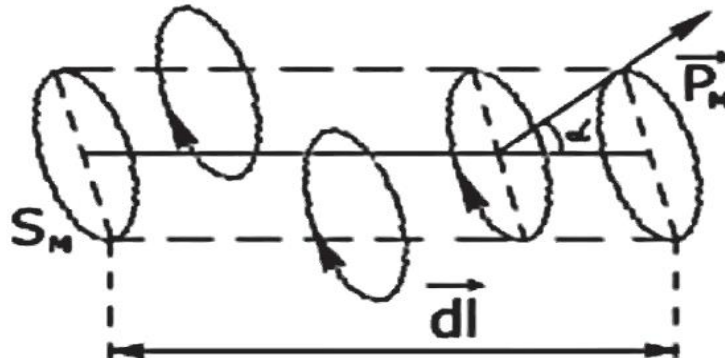


Рисунок 4.30 – Молекулярні струми, що перетинаються елементом контуру

Таким чином, в цьому випадку вектор намагніченості дорівнює магнітному моменту одиниці об'єму магнетика. Тоді сума молекулярних струмів, що перетинаються елементом контуру довжиною dl , дорівнює числу молекулярних струмів, що потрапили всередину косоного циліндра з площею основи S_m :

$$N \cdot I^{\text{мол}} = nVI^{\text{мол}} = nS_m dl \cdot \cos\alpha \cdot I^{\text{мол}} = p_m n \cdot dl \cdot \cos\alpha = J \cdot dl \cdot \cos\alpha = \vec{J} d\vec{l}$$

Щоб розрахувати алгебраїчну суму молекулярних струмів, пронизують контур, потрібно взяти інтеграл по замкнутому контуру, так як внесок в алгебраїчну суму дають тільки молекулярні струми пронизані контуром, інші молекулярні струми пронизують контур двічі і їх внесок дорівнює нулю, тобто

$$\sum_k I_k^{\text{мол}} = \oint_L \vec{J} d\vec{l}.$$

Тоді циркуляція вектору магнітної індукція за довільним замкнутому контуру дорівнює:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i + \mu_0 \oint_L \vec{J} d\vec{l}.$$

Перетворимо отриману формулу до вигляду:

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_i.$$

Векторна величина $\vec{H}$, що стоїть під знаком інтеграла, називається напруженістю магнітного поля і тотожно дорівнює:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

Розміреність напруженості магнітного поля збігається з розміреністю намагніченості і дорівнює $[H] = [J] = \text{А/м}$. У вакуумі $\vec{J} = 0$ і напруженість магнітного поля в вакуумі дорівнює

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$$

Остання формула показує, що вектор $\vec{H}$, характеризує поле, створюване провідниками з струмом в вакуумі (зовнішнє поле). Вектор $\vec{B}$ характеризує поле, створюване цими ж провідниками з струмом в речовині (внутрішнє поле).

4.2.3 Магнітна сприйнятливість і магнітна проникність речовини

Вектор намагніченості може бути виражений через вектор напруженості магнітного поля. Досвід показує, що для ізотропного магнетика виконується рівність

$$\vec{J} = \chi \cdot \vec{H},$$

де χ – безрозмірна фізична величина, яка називається магнітною сприйнятливістю речовини.

Використовуючи формулу $\vec{J} = \chi \cdot \vec{H}$,

і формулу для вектору напруженості $\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$

отримаємо:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi \cdot \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi) \cdot \vec{H}$$

Безрозмірна фізична величина μ , тотожно рівна $\mu \equiv (1 + \chi)$, називається магнітною проникністю речовини. Тоді

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Магнітна проникність μ дорівнює відношенню індукції магнітного поля в речовині до індукції магнітного поля, що створюється цими ж провідниками зі струмами в вакуумі:

$$\mu = \frac{B}{B_0}.$$

Це твердження справедливо для однорідного магнетика, повністю заповнює обсяг, обмежений силовими лініями зовнішнього поля $\vec{B}_0$.

4.2.4 Магнітне поле на межі двох магнетиків

Розглянемо дві паралельні пластини з однорідних магнетиків, що знаходяться в зовнішньому магнітному полі. Виберемо замкнуту поверхню у вигляді дуже тонкого циліндра, підстави якого па-паралельно поверхні розділу магнетиків і знаходяться всередині цих магнетиків (рис. 4.31). Використовуємо для обраної циліндричної поверхні теорему Гаусса для магнетиків:

$$\oint B_n dS = 0$$

Потоком вектору $\vec{B}$ через бічну поверхню циліндра можна знехтувати, так як циліндр обраний дуже тонким, підстави циліндра виберемо досить малі, тоді магнітне поле в межах підстав можна вважати однорідним. Після інтегрування отримаємо:

$$-B_{1n}S + B_{2n}S = 0$$

(знак мінус виник через напрямку вектору нормалі і вектору магнітної індукції).

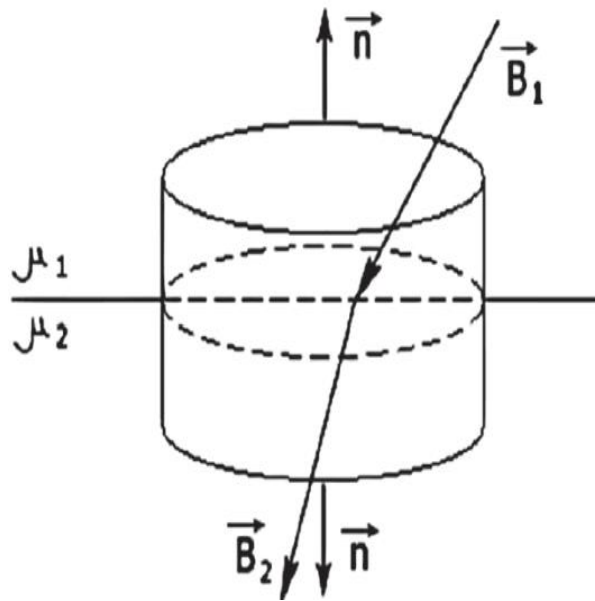


Рисунок 4.31 – Індукція магнітного поля на межі розділу двох магнетиків

Отже, на межі поділу двох магнетиків:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

Таким чином, вектор магнітної індукції не терпить розриву на границі двох магнетиків, а тільки заломлюється. Використовуючи зв'язок

$$B = \mu_0 \mu H,$$

отримаємо

$$\mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}$$

Отже, вектор напруженості терпить розрив на межі поділу двох магнетиків. Досліджуємо поведінку на кордоні розділу тангенціальних

складових напруженості магнітного поля, для цього розглянемо сильно витягнутий прямокутний контур L дуже малого розміру, розташований так, щоб довгі сторони контуру були б паралельні межі поділу (рис. 4.32).

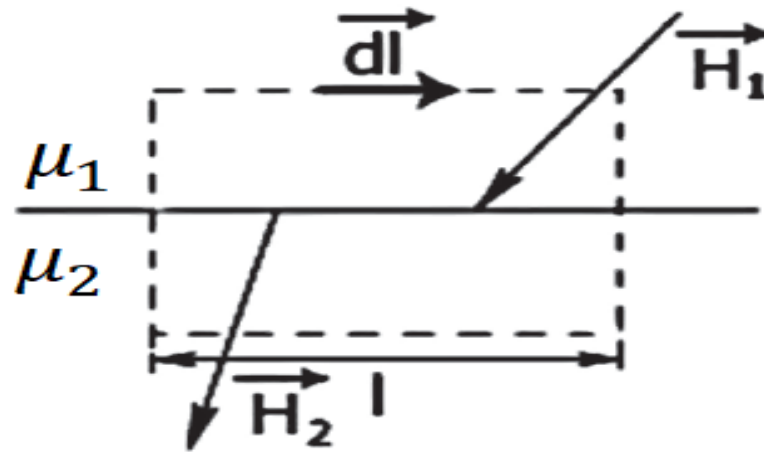


Рисунок 4.32 – Напруженість магнітного поля на межі розділу двох магнетиків

Застосуємо до вибраного контуру закон повного струму для магнітного поля в магнетиках:

$$\oint_L H_l dl = 0.$$

Нуль в правій частині є наслідком відсутності в магнетиках макроскопічних струмів. Після інтегрування отримаємо:

$$H_{1\tau} \cdot l - H_{2\tau} \cdot l = 0$$

або

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0.$$

При виведенні цього співвідношення можна розглядати поле в межах довгих сторін прямокутника як однорідне і знехтувати довжиною коротких сторін.

Отримаємо співвідношення для тангенціальних складових вектору магнітної індукції:

$$\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}.$$

4.2.5 Класифікація магнетиків. Магнітні моменти атомів і молекул

Магнітні моменти атомів і молекул

Природа молекулярних струмів Ампера стала зрозумілою після дослідів Резерфорда, встановив наявність в центрі атома масивного позитивно зарядженого ядра і обертових навколо нього по замкнутих орбітах електронів. Круговий струм, створюваний в атомі електроном дорівнює:

$$I^{\text{мол}} = \frac{e}{T}.$$

Орбітальний магнітний момент такого струму дорівнює:

$$p_m = I^{\text{мол}} \cdot S = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2 = \frac{eVr}{2},$$

де r – радіус орбіти електрона.

Електрон в атомі має моментом імпульсу L рівним (рис. 4.33):

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}].$$

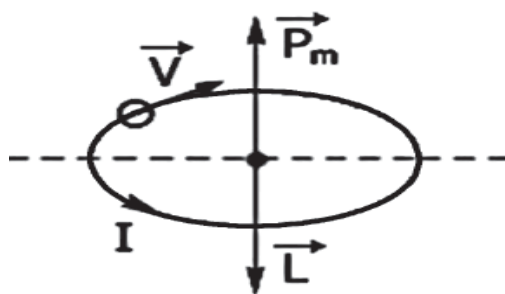


Рисунок 4.33 – Орбітальний магнітний момент електрона

Модуль моменту імпульсу електрона дорівнює:

$$L = mVr,$$

так як радіус кругової орбіти перпендикулярний імпульсу електрона:

$$\vec{r} \perp \vec{p}.$$

Ставлення орбітального магнітного моменту до моменту імпульсу електрона називається гіромагнітного відношення, яке дорівнює

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}.$$

Крім орбітального магнітного моменту p_m , електрони володіють власним магнітним моментом p_{ms} і власним моментом імпульсу L_s , які не пов'язані з рухом електрона по орбіті

$$\frac{p_{ms}}{L} = -\frac{e}{m}.$$

Повний магнітний момент атома складається з орбітального і власного магнітних моментів електронів:

$$\vec{p}_{\text{повн}} = \vec{p}_m + \vec{p}_{ms}.$$

Під час відсутності зовнішнього магнітного поля у атомів деяких елементів повний магнітний момент дорівнює нулю $\vec{p}_{\text{атом}} = 0$; у атомів інших елементів повний магнітний момент відрізняється від нуля $\vec{p}_{\text{атом}} \neq 0$.

Класифікація магнетиків

Все магнетики можна поділити на три великі групи:

1. Діамагнетик (інертні гази: *He, Ar*; багато металів: *Cu, Ag, Au, Zn, Hg*, вода, скло та деякі органічні сполуки). До діамагнетика відносяться речовини, у яких магнітна сприйнятливість негативна ($\chi < 0$); а магнітна проникність трохи менше одиниці $0 < \mu \leq 1$. Під час відсутності зовнішнього магнітного поля повний магнітний момент атома діамагнетиком дорівнює нулю: $\vec{p}_{m_{\text{атом}}} = 0$;

2. Парамагнетики (O_2 , *Al*, лужні метали та інші). До парамагнетикам відносяться речовини, у яких магнітна сприйнятливість позитивна ($\chi > 0$), а магнітна проникність більше одиниці $\mu > 1$. Під час відсутності зовнішнього магнітного поля повний магнітний момент атома парамагнетика відмінний від нуля $\vec{p}_{m_{\text{атом}}} \neq 0$.

3. Феромагнетики (*Fe, Co, Ni*, ферити, чавун, сталь, деякі сплави). До феромагнетиків відносяться речовини, у яких магнітна сприйнятливість і магнітна проникність значно більше одиниці $\chi \gg 1$, $\mu \gg 1$. У середині феромагнетиків існують домени – максимально намагнічені області, магнітні моменти атомів всередині кожного домена мають однакову спрямованість.

4.2.6 Елементарна теорія діа– і парамагнетизму

Під дією зовнішнього магнітного поля виникає додаткове обертання орбіти електрона навколо напрямку цього поля – прецесія. Описується явище подібно прецесії гіроскопа в поле сил тяжіння. Момент сил, що діє в зовнішньому магнітному полі на що знаходиться на орбіті електрон, дорівнює:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \cdot \vec{B}].$$

Під дією моменту сил $\vec{M}$, вектори $\vec{L}$ і $\vec{p}_m$ обертаються навколо напрямку вектору $\vec{B}$ (рис. 4.34). За час dt площа, в якій лежить вектор $\vec{L}$ повернеться навколо напрямку вектору $\vec{B}$ на кут α :

$$d\theta = \frac{dL}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{p_m \cdot B \sin \alpha \cdot dt}{L \sin \alpha} = \frac{p_m}{L} \cdot B dt = \frac{e}{2m} \cdot B dt.$$

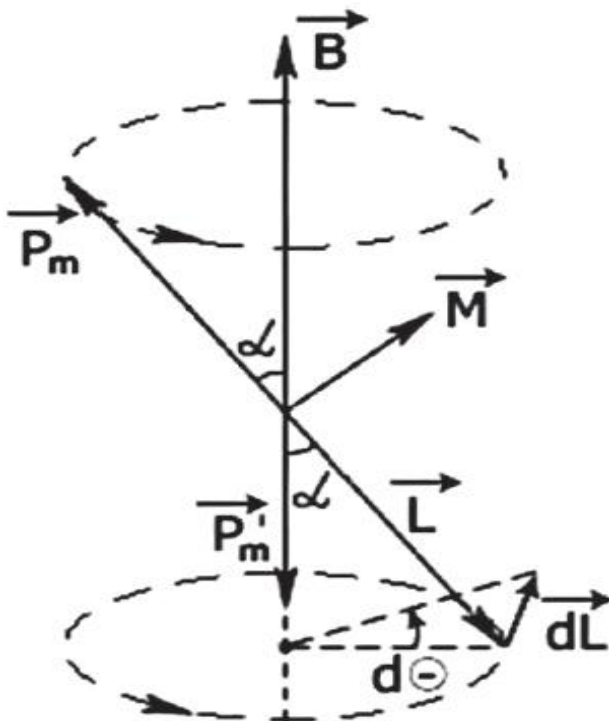


Рисунок 4.34 – Прецесія орбіти електрона в магнітному полі

Кутова швидкість обертання орбіти електрона дорівнює:

$$\Omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{eB}{2m}$$

і називається Ларморовою частотою прецесії орбіти електрона в магнітному полі. Вона не залежить від радіуса орбіти, швидкості електрона, кута між $\vec{p}_m$ і $\vec{B}$. Отже, Ларморова частота постійна для всіх електронів в атомі.

Під дією зовнішнього магнітного поля відбувається прецесія електронних орбіт з однаковою для всіх електронів кутовий швидкістю:

$$\Omega = \frac{eB}{2m}.$$

Обумовлений прецесією додатковий рух електронів призводить до виникнення індукованого магнітного моменту атома $\vec{p}'_m$, спрямованого проти поля.

Індукований магнітний момент виникає у всіх атомів.

У діамagnetиків повний магнітний момент атома дорівнює нулю

$$\vec{p}_m + \vec{p}_{ms} = 0.$$

За рахунок прецесії електронних орбіт виникає індукований магнітний момент $\vec{p}'_m$, спрямований проти поля, який дорівнює:

$$p'_m = I'S' = \frac{e}{T'} \pi r'^2 = \frac{e \cdot r'^2 \Omega}{2},$$

де T' — період прецесії;

r' — радіус кола, по якій відбувається прецесія електронної орбіти.

При відсутності зовнішнього магнітного поля намагніченість діамagnetика відсутня, так як дорівнюють нулю повні магнітні моменти атомів:

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=0}^n \vec{p}_{m_i}}{\Delta V} = 0$$

При включенні зовнішнього магнітного поля у атомів діамagnetика виникає індукований магнітний момент, спрямований проти поля, в результаті вектор намагніченості діамagnetика спрямований проти поля $\vec{J} \downarrow \vec{H}$. Так як $\vec{J} = \chi \vec{H}$, отже $\chi < 0$.

Повний магнітний момент атома парамагнетика відрізняється від нуля і значно більше, ніж спрямований проти поля індукований магнітний момент, тому в атомах парамагнетиків індукованим магнітним моментом можна

знехтувати. Магнітне поле прагне встановити магнітні моменти p_m атомів парамагнетика по полю, але тепловий рух молекул перешкоджає вибудовуванню по полю магнітних моментів.

За відсутності зовнішнього магнітного поля магнітні моменти атомів парамагнетика орієнтовані хаотично, через що намагніченість парамагнетика відсутня

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=0}^n \vec{p}_{m_i}}{\Delta V} = 0.$$

При включенні зовнішнього магнітного поля магнітні моменти атомів прагнуть орієнтуватися по полю і парамагнетик намагнічується

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=0}^n \vec{p}_{m_i}}{\Delta V} \neq 0.$$

Вектор намагніченості парамагнетика сонаправлений вектору напруженості магнітного поля $\vec{J} \uparrow \vec{H}$. Так як $\vec{J} = \chi \vec{H}$, отже $\chi > 0$.

Кюрі встановив, що магнітна сприйнятливість парамагнетика обернено пропорційна температурі пари $\chi = \frac{c}{T}$ (закон Кюрі).

Класична теорія парамагнетизму була розвинена Ланжевенем в 1905 році, він показав, що

$$\chi = \frac{\mu_0 p_m^2}{kT}.$$

Формула справедлива а для не дуже сильних полів $p_m B \ll kT$, так як в сильних полях виникає явище насичення, коли всі магнітні моменти атомів шикуються по полю.

Залежність намагніченості J – і парамагнетиків від напруженості зовнішнього поля показана на рис. 4.35.

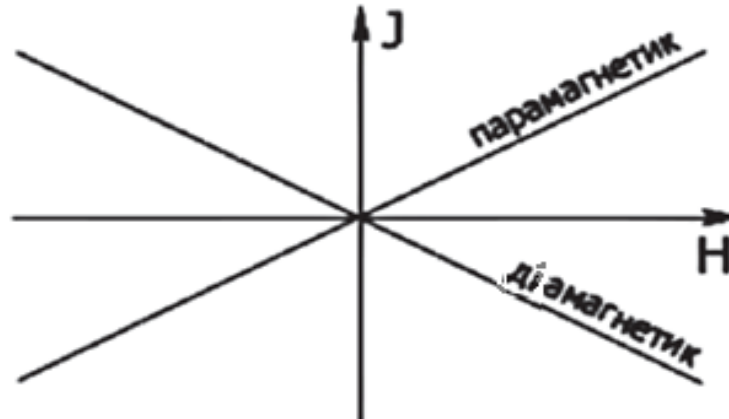


Рисунок 4.35 – Залежності намагніченості J – і парамагнетиків від напруженості поля

4.2.7 Феромагнетизм. Доменна структура феромагнетиків

Теорія феромагнетизму створена Я.І. Френкелем і В. Гейзенбергом у 1928 році. Вони показали, що феромагнетизм обумовлений спіновими магнітними моментами електронів. При певних умовах в кристалі феромагнетика можуть виникати обмінні сили, які призводять до орієнтації магнітних моментів електронів паралельно певному напрямку. В результаті виникають області спонтанного намагнічування, які називаються доменами. В межах кожного домену феромагнетик намагнічений до насичення і володіє максимальним магнітним моментом. Напрямок магнітних моментів доменів різне, і у відсутності зовнішнього поля сумарний магнітний момент феромагнетика може дорівнювати нулю. Розміри доменів лежать в межах 10^{-6} – 10^{-5} м. Наявність доменів призводить не тільки до дуже великих значень магнітної проникності феромагнетиків, наприклад, для заліза $\mu = 5000$, для супермаллоя $\mu = 800000$, але і до нелінійної залежності магнітної проникності від напруженості зовнішнього поля.

Дія зовнішнього магнітного поля на домени при різних стадіях намагнічування різна. Спочатку в слабких полях спостерігається зміщення меж доменів, відбувається збільшення тих доменів, магнітний момент яких становить із зовнішнім полем менший кут. При подальшому збільшенні поля домени з такою орієнтацією (їх енергія в зовнішньому полі мінімальна) цілком поглинають енергетично менш вигідні домени. На наступній стадії відбувається поворот магнітних моментів доменів по полю. Ці процеси і служать причиною гістерезису (рис. 4.36).

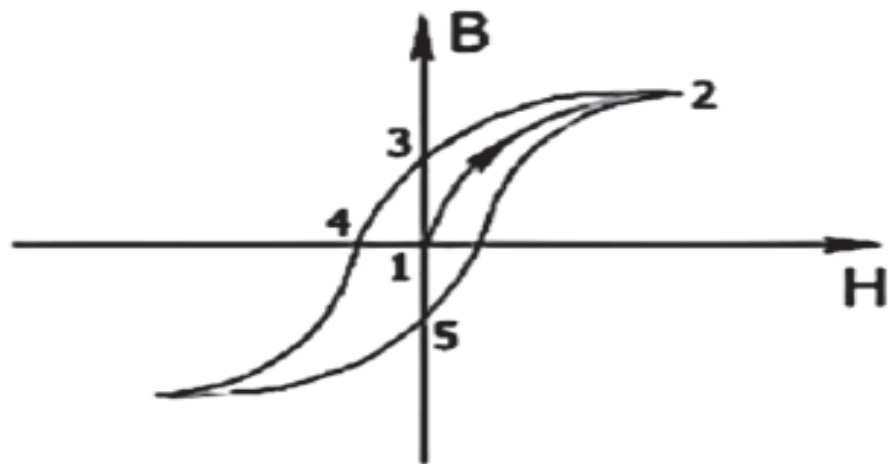


Рисунок 4.36 – Петля гістерезису

Залежність магнітної індукції від напруженості зовнішнього поля у феромагнетиків нелінійна, причому якщо довести феромагнетик до насичення, коли всі магнітні моменти доменів будуть орієнтовані по полю, а потім зменшувати напруженість зовнішнього поля, то магнітна індукція всередині феромагнетика буде зменшуватися повільніше ніж при зростанні (ділянка 1-2).

При зменшенні напруженості зовнішнього поля до нуля у феромагнетика спостерігається залишкова намагніченість (точка 3), щоб довести індукцію магнітного поля в феромагнетик до нуля (точка 4), необхідно докласти зовнішнє магнітне поле протилежної спрямованості величина напруженості цього поля називається коерцитивною силою H_c . Феромагнетики, що мають

великі значення H_c , називаються жорсткими і використовуються для виготовлення постійних магнітів. Феромагнетики, що мають малі значення H_c , називаються м'якими і використовуються для виготовлення сердечників трансформаторів.

При дії на феромагнетик змінного зовнішнього магнітного поля, індукція магнітного поля всередині феромагнетика змінюється відповідно до кривої, зображеної на рис. 4.36, яка називається петлею гістерезису.

Явище гістерезису призводить до неоднозначної залежності індукції магнітного поля всередині феромагнетика від напруженості зовнішнього поля, тому поняття магнітної проникності феромагнетика може бути застосовано лише до основної кривої намагнічування (ділянка 1–2). У відсутності зовнішнього магнітного поля феромагнетик може мати довільне значення індукції магнітного поля в межах ділянки 3–5. Процес намагнічування феромагнетиків супроводжується їх механічною деформацією, це явище отримало назву магнітоскрипції. Для кожного феромагнетика існує температура Кюрі T_c , вище якої доменна структура феромагнетиків руйнується і він переходить в парамагнетик, магнітна сприйнятливість якого підкоряється закону Кюрі–Вейсса:

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}.$$

У деяких випадках обмінні сили призводять до спонтанної орієнтації магнітних спінових моментів електронів антипаралельно один одному. Така орієнтація охоплює попарно сусідні атоми. Це явище називається антиферомагнетизмом. Антиферомагнетики поведуться в зовнішньому полі як вкрай слабкі парамагнетики. Для них існує T_N (температура Нееля або антиферомагнітна точка Кюрі). У деяких антиферомагнетиків є дві точки Нееля (єрбій, диспрозій, сплави марганцю і міді), причому вище верхньої точки Нееля речовина поводить себе як парамагнетик, нижче нижньої точки як феромагнетик, між точками як антиферомагнетик. Існування

антиферомагнетиків передбачив Л.Д. Ландау в 1933 році. Типовими антиферомагнетиками є хром, марганець.

4.3 Явище електромагнітної індукції

У 1831 році Фарадей відкрив явище електромагнітної індукції, що полягає в тому, що при зміні магнітного потоку через поверхню, обмежену провідним контуром, у провідному контурі виникає індукційний струм (рис. 4.37).

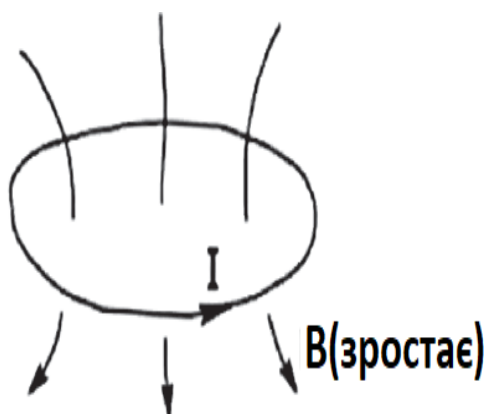


Рисунок 4.37 – Петля гістерезису

Викликає його електрорушійна сила називається ЕРС індукції і, як показує досвід, дорівнює

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Фізичний сенс знака «мінус» в цій формулі пояснює правило Ленца–індукційний струм в контурі виникає в такому напрямку, щоб своїм магнітним полем перешкоджати причини його викликає.

Виведемо цю формулу для випадку, коли змінюється площа контуру. Для цього розглянемо контур, який знаходиться у магнітному полі з однією рухомою стороною, яка переміщається зовнішньою силою зі швидкістю V (рис. 4.38).

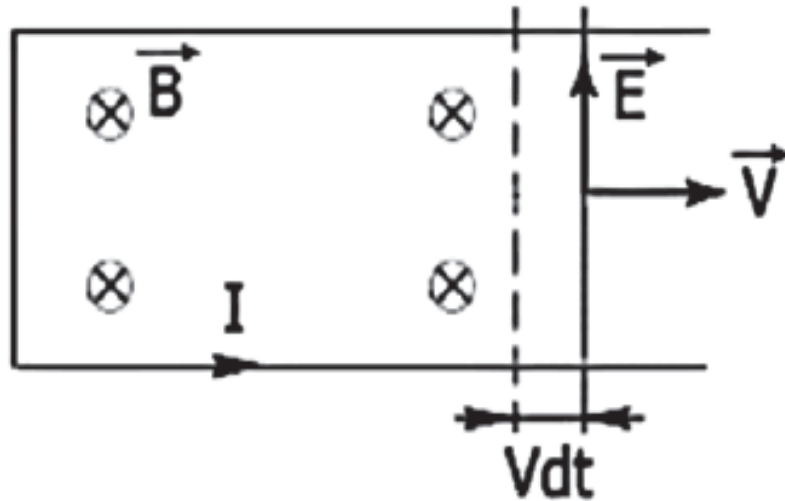


Рисунок 4.38 – Індукційний струм в контурі з рухомою стороною

На кожен електрон, що належить рухомій стороні, діє сила Лоренца

$$F = qvB,$$

дія якої еквівалентно в даному випадку дії електричного поля напруженістю

$$E = vB.$$

Це поле має електростатичне походження. ЕРС в такому контурі дорівнює:

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = vBl.$$

Так як зміна площі контуру за час dt дорівнює $dS = lvdt$, то

$$|\varepsilon| = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = B \frac{dS}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} \frac{d\Phi}{dt}.$$

У розглянутому випадку роль сторонньої сили виконує складова сили Лоренца, під дією якої електрон переміщається по проволу.

4.3.1 Потокозчеплення. Струми Фуко

Якщо контур складається з декількох витків (катушка), то ЕРС виникає в контурі дорівнює сумі ЕРС індукції, що виникає в кожному витку:

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i = - \sum_i \frac{d\Phi_i}{dt} = - \frac{d}{dt} \sum_i \Phi_i.$$

Для однакових витків зручно ввести нову фізичну величину, яка називається потокозчепленням або сумарним магнітним потоком:

$$\psi = N\Phi = \sum_{i=0}^n \Phi_i.$$

Тоді ЕРС виникає в котушці дорівнює:

$$\varepsilon = - \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^n \Phi_i = - \frac{d\psi}{dt}.$$

Визначимо заряд, який пройде через катушку з опором R , якщо потокозчеплення змінюється від ψ_1 до ψ_2 . Виникає в котушці індукційний струм дорівнює:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = - \frac{1}{R} \cdot \frac{d\psi}{dt}.$$

Тоді заряд, який пройшов через катушку:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I dt = \oint_{\psi_1}^{\psi_2} \left(-\frac{1}{R} \right) d\Phi,$$

Отож

$$q = \frac{\psi_1 - \psi_2}{R}.$$

Струми Фуко

У провідниках, що рухаються в магнітному полі, виникають кругові індукційні струми, які називаються струмами Фуко. Ці струми призводять до гальмування провідників в магнітному полі, описане явище використовується, наприклад, для демпфірування масивних маятникових сейсмографів.

4.3.2 Явище самоіндукції. Індуктивність. Струми при розмиканні і замиканні ланцюга

Явище самоіндукції є окремим випадком явища електромагнітної індукції. Що йде по замкнутому контуру струм створює магнітне поле, а, отже, і повний магнітний потік $\psi = N\Phi$ через контур, пропорційний току $\psi = LI$, де коефіцієнт пропорційності L називається індуктивністю контуру. Розмірність цієї величини: $[L] = 1 \text{ Гн}$.

При зміні поточного по контуру струму в ньому за законом електромагнітної індукції виникає ЕРС, яка називається ЕРС самоіндукції:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Розрахуємо індуктивність соленоїда. Повний магнітний потік через соленоїд дорівнює:

$$\psi = N\Phi = NBS = N\mu\mu_0 nIS,$$

тоді

$$L = \frac{\psi}{I} = N\mu\mu_0 nS = \mu\mu_0 n^2 V,$$

де V — обсяг соленоїда.

Струм при розмиканні ланцюга

Застосуємо друге правило Кірхгофа, який зображений на рис. 4.39 електричного кола (ключ до в положенні 1)

$$IR = \varepsilon_s,$$

або більш детально

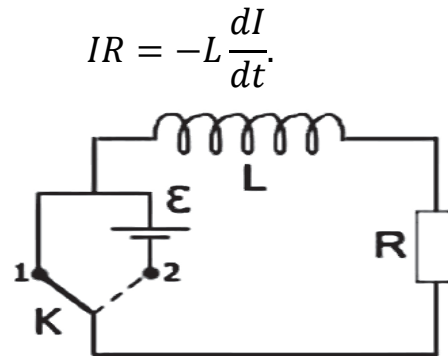


Рисунок 4.39 – Електричний ланцюг, який містить індуктивність

Розділимо рівняння на L і перенесемо всі члени в ліву частину, тоді отримаємо:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0.$$

Проведемо поділ змінних:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt$$

про інтегруємо:

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L}t,$$

або

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Таким чином, струм при розмиканні ланцюга змінюється за законом:

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Струм при замиканні ланцюга

Застосуємо друге правило Кірхгофа до зображеної на рис. 4.39 електричного кола (ключ до в положенні 2)

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_s, \text{ або } IR = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}.$$

Розв'язок рівняння:

$$L \frac{dI}{dt} + IR = \varepsilon \quad I = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right),$$

де $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ – сила струму.

На рис. 4.40 зображені графіки зміни струму при замиканні і розмиканні електричного кола, що містить індуктивність.

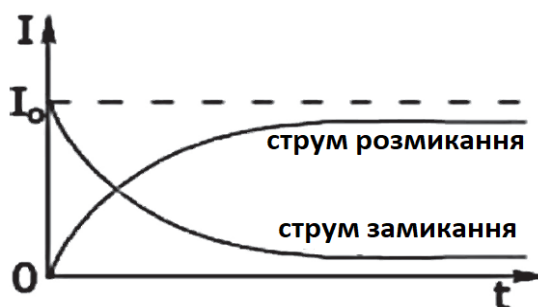


Рисунок 4.40 – Графіки зміни струму при розмиканні і замиканні ланцюга

4.3.3 Енергія магнітного поля. Об'ємна густина енергії магнітного поля

Розрахуємо енергію, яка є в котушці зі струмом (рис. 4.41). Елементарна робота ЕРС самоіндукції при перемиканні ключа К із положення 1 в положення 2 дорівнює:

$$dA = \varepsilon_s I dt = -L \frac{dI}{dt} \cdot I dt.$$

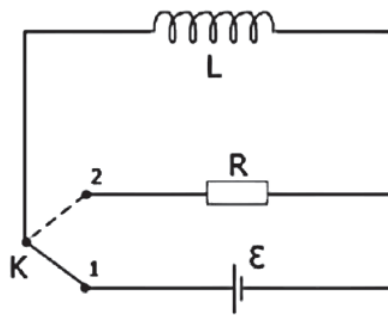


Рисунок 4.41 – До розрахунку енергії магнітного поля котушки

Тоді повна робота при зміні сили струму в котушці від I до нуля дорівнює:

$$A = - \int_I^0 L I dt = \frac{LI^2}{2}.$$

Ця робота йде на нагрівання зовнішнього опору R і сполучних проводів і відбувається за рахунок енергії магнітного поля котушки зі струмом:

$$U = \frac{LI^2}{2}.$$

Розрахуємо об'ємну густину енергії магнітного поля нескінченного соленоїда:

$$w_m = \frac{U}{V} = \frac{LI^2}{2V} = \frac{\mu\mu_0 n^2 V I^2}{2V} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2}.$$

Дана формула виведена для однорідного магнітного поля, але вона вірна і в загальному випадку.

4.3.4 Явище взаємної індукції. Енергія системи провідників зі струмом

Розглянемо два близько розташованих контури зі струмом (рис. 4.42.).

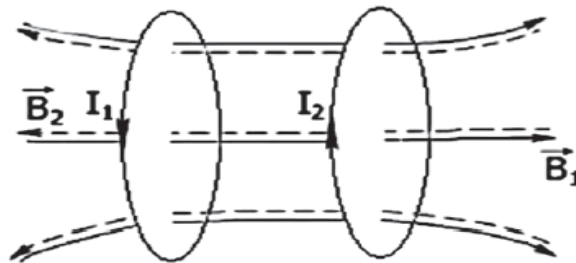


Рисунок 4.42 – Явище взаємної індукції

Такі контури називають пов'язаними, так як поточний в першому контурі струм I_1 створює магнітне поле, повний магнітний потік якого через другий контур пропорційний току I_1 в першому контурі:

$$\psi_2 = L_{21}I_1,$$

а поточний у другому контурі струм I_2 створює магнітне поле, повний магнітний потік якого через перший контур дорівнює:

$$\psi_1 = L_{12}I_2.$$

При зміні струму I_1 в першому контурі, у другому контурі виникає ЕРС індукції:

$$\varepsilon_2 = -L_{21} \frac{dI_1}{dt},$$

при зміні струму I_2 у другому контурі, у першому контурі виникає ЕРС індукції:

$$\varepsilon_1 = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

де L_{12} і L_{21} – коефіцієнти взаємної індукції, які рівні між собою.

Розглянуте явище називається явищем взаємної індукції.

Розрахуємо роботу, яку здійснюють електрорушійні сили при зміні струму від I_1 до нуля в першому контурі і від I_2 до нуля в другому контурі, для цього необхідно врахувати крім ЕРС взаємної індукції виникає в контурах ЕРС самоіндукції.

Елементарна робота dA_1 ЕРС в першому контурі дорівнює:

$$dA_1 = (\varepsilon_{s1} + \varepsilon_1)I_1 dt = \left(-L_1 \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} \right) I_1 dt = -L_1 I_1 dI_1 - L_{12} I_1 dI_2.$$

Елементарна робота dA_2 ЕРС у другому контурі дорівнює:

$$dA_2 = (\varepsilon_{s2} + \varepsilon_2)I_2 dt = \left(-L_2 \frac{dI_2}{dt} - L_{21} \frac{dI_1}{dt} \right) I_2 dt = -L_2 I_2 dI_2 - L_{21} I_2 dI_1.$$

Сумарна елементарна робота ЕРС $dA = dA_1 + dA_2$ дорівнює:

$$\begin{aligned} dA &= -L_1 I_1 dI_1 - L_{12} I_1 dI_2 - L_2 I_2 dI_2 - L_{21} I_2 dI_1 = \\ &= -d\left(\frac{L_1 I_1^2}{2}\right) - d\left(\frac{L_2 I_2^2}{2}\right) - d(L_{12} I_1 I_2). \end{aligned}$$

Після інтегрування отримаємо:

$$A = -\frac{1}{2} \int_{I_1}^0 d(L_1 I_1^2) - \frac{1}{2} \int_{I_2}^0 d(L_2 I_2^2) - \int_{I_1 I_2}^0 L_{12} d(I_1 I_2) = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2.$$

Ця робота відбувається за рахунок енергії U , запасеної в двох пов'язаних між собою контурах:

$$U = A = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2 = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_1 I_2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 L_{ij} I_i I_j$$

Узагальнимо отриману формулу на k пов'язаних контурів:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k L_{ij} I_i I_j.$$

Зауважимо, що L_{ii} є індуктивністю i контуру $L_{ii} = L_i$, а $L_{ij} L_{ji}$ — коефіцієнт взаємної індукції i і j контурів.

Розрахуємо коефіцієнт взаємної індукції двох котушок, намотаних на загальний вузький тороїдальний сердечник (рис. 4.43).

Нехай магнітне поле створюється струмом I_1 , що йде по першій обмотці, що має N_1 витків, тоді за законом повного струму

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = I_1 N_1,$$

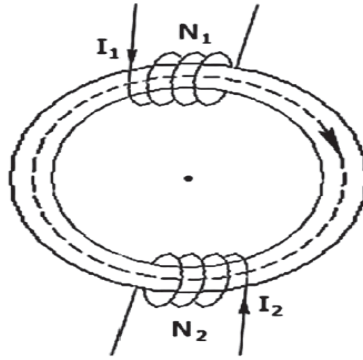


Рисунок 4.43 – Дві котушки на тороїдальному сердечнику

у всіх точках контуру, що має форму кола, центр якої збігається з центром тороїда, напруженість магнітного поля постійна і спрямована по дотичній до контуру, отже, H можна винести з під знака інтеграла

$$Hl = I_1 N_1,$$

тоді напруженість магнітного поля всередині тороїда дорівнює:

$$H = \frac{I_1 N_1}{l}.$$

Повний магнітний потік, зчеплений з другою обмоткою дорівнює:

$$\psi = N_2 \Phi = N_2 BS = N_2 \mu \mu_0 HS = \frac{N_2 \mu \mu_0 N_1 I_1 S}{l}.$$

Повний магнітний потік ψ_2 через другу обмотку створюється струмом I_2 , отже

$$\psi_2 = L_{12} I_1.$$

З двох вищенаведених формул випливає, що коефіцієнт взаємної індукції двох котушок дорівнює:

$$L_{12} = \frac{\mu\mu_0 N_1 N_2 S}{l}.$$

На основі явища взаємної індукції заснований принцип роботи трансформаторів.

4.4 Приклади розв'язання завдань

Приклад 1. На рисунку зображені перерізи двох прямолінійних нескінченно довгих провідників зі струмом. Відстань між провідниками $AB=10$ см, $I_1=20$ А та $I_2=30$ А. Знайти напруженості H магнітного поля, викликаного струмами I_1 та I_2 в точках M_1, M_2, M_3 . Відстань $M_1A=2$ см, $AM_2=4$ см, $BM_3=3$ см.

Дано:

$$AB=0,1 \text{ м}$$

$$I_1=20 \text{ А}$$

$$I_2=30 \text{ А}$$

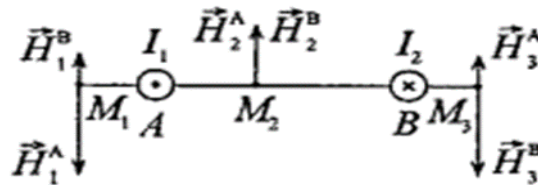
$$M_1A=0,02 \text{ м}$$

$$AM_2=0,04 \text{ м}$$

$$BM_3=0,03 \text{ м}$$

$$H_1 = ? \quad H_2 = ? \quad H_3 = ?$$

Рішення:



Напруженість магнітного поля: $H = \frac{1}{2\pi a},$

де a — відстань від провідника зі струмом до точки, в якій визначається напруженість.

Згідно з принципом суперпозиції напруженості $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ та $\vec{H}_3$ магнітного поля в точках M_1, M_2, M_3 складаються з напруженості у створюваних точках I_1 та I_2 :

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_1^A + \vec{H}_1^B,$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_2^A + \vec{H}_2^B,$$

$$\vec{H}_3 = \vec{H}_3^A + \vec{H}_3^B.$$

Тоді

$$H_1^A = \frac{I_1}{2\pi \cdot M_1 A} = 159,2 \text{ А/м};$$

$$H_1^B = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB + M_1 A)} = 39,8 \text{ А/м};$$

$$H_2^A = \frac{I_1}{2\pi \cdot M_2 A} = 79,6 \text{ А/м};$$

$$H_2^B = \frac{I_2}{2\pi \cdot (AB - M_2 A)} = 79,6 \text{ А/м};$$

$$H_3^A = \frac{I_3}{2\pi \cdot (AB + M_3 B)} = 24,5 \text{ А/м};$$

$$H_3^B = \frac{I_2}{2\pi \cdot M_3 B} = 159,2 \text{ А/м};$$

Звідси, з урахуванням рисунка,

$$H_1 = H_1^A - H_1^B = 119,4 \text{ А/м};$$

$$H_2 = H_2^A + H_2^B = 159,2 \text{ А/м};$$

$$H_3 = H_3^B - H_3^A = 134,7 \text{ А/м};$$

Відповідь: $H_1 = 119,4 \text{ А/м}$, $H_2 = 159,2 \text{ А/м}$, $H_3 = 134,7 \text{ А/м}$

Приклад 2. Два кругових витки розташовані в двох взаємно перпендикулярних площинах так, що центри цих витків збігаються. Радіус кожного витка $R = 2 \text{ см}$, струми в вітках $I_1 = I_2 = 5 \text{ А}$. Знайти напруженість H магнітного поля в центрі цих витків.

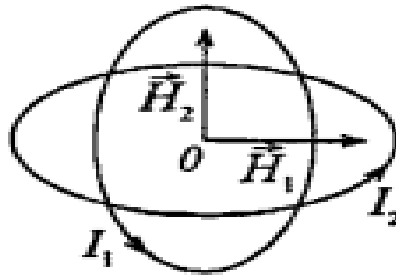
Дано:

$$I_1 = I_2 = 5 \text{ А}$$

$$R = 0,02 \text{ м}$$

$H = ?$

Рішення:



Напруженість магнітного поля в центрі колового витка зі струмом

$$H = \frac{I}{2R}.$$

На рис. видно, що вектори $\vec{H}_1$ та $\vec{H}_2$ взаємно перпендикулярні.

Згідно з принципом суперпозиції результатом напруженості

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 \text{ або}$$

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2}.$$

Оскільки $I_1 = I_2 = I$ й $R_1 = R_2 = R$, то $H_1 = H_2 = \frac{I}{2R}$.

$$\text{Тоді } H = \frac{I}{2R} \sqrt{2} = 177 \text{ А/м}.$$

Відповідь: $H = 177 \text{ А/м}$

Приклад 3. В однорідному магнітному полі напруженістю $H = 79,6 \text{ кА/м}$ поміщена квадратна рамка, площа якої становить з напрямком магнітного поля кут $\alpha = 45^\circ$. Сторона рамки $a = 4 \text{ см}$. Знайти магнітний потік Φ , що пронизує рамку.

Дано:

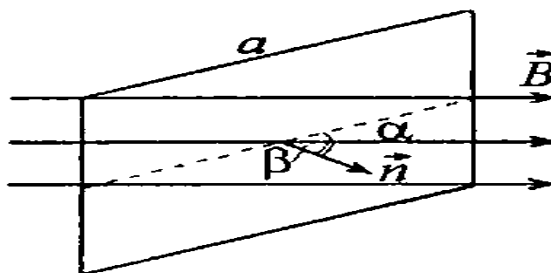
$$H = 79,6 \cdot 10^3 \text{ А/м}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$a = 0,04 \text{ м}$$

$\Phi - ?$

Рішення:



Магнітний потік

$$\Phi = \vec{B} \vec{S} = BS \cos \beta,$$

де β — кут між напрямком магнітного поля і нормаллю до площини рамки.

$$\text{Маємо } S = a^2; \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad B = \mu\mu_0 H.$$

$$\text{Звідси } \Phi = \mu\mu_0 a^2 \cos 45^\circ = 113 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}.$$

$$\text{Відповідь: } \Phi = 113 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$$

Приклад 4. Котушка гальванометра, з $N = 400$ витків тонкого дроту, намотаною на прямокутний каркас довжиною $l = 3 \text{ см}$ і шириною $b = 2 \text{ см}$, підвішена на нитку в магнітнім полі з індукцією $B = 0,1 \text{ Тл}$. По котушці тече струм. Знайти момент обертання, діючий на котушку гальванометра, якщо площа котушки а) паралельна напрямку магнітного поля; б) становить кут $\alpha = 60^\circ$ з напрямком магнітного поля.

Дано:

$$N = 400$$

$$l = 0,03 \text{ м}$$

$$b = 0,02 \text{ м}$$

$$B = 0,1 \text{ Тл}$$

Рішення:

На кожен виток котушки діє обертовий момент

$$M_0 = BIS \sin \alpha.$$

Тоді на всю котушку діє обертовий момент

$\alpha = 60^\circ$	$M = NBIS \sin \alpha.$
а) М– ?	Площа одного витка $S = lb.$
б) М– ?	а) $M = BIlbN \sin \frac{\pi}{2} = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м};$ б) $M = BIlbN \sin 60^\circ = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}.$
Відповідь: а) $M = 2,4 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м};$ б) $M = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}.$	

Приклад 5. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U = 1 \text{ кВ}$, влітає в однорідне магнітне поле, напрямом якого перпендикулярно його руху. Індукція магнітного поля $B = 1,19 \text{ мТл}$. Знайти радіус R кола, по якому рухається електрон, період обертання T і момент імпульсу M електрона.

Дано:	Рішення:
$U = 1000 \text{ В}$	З боку магнітного поля на електрон діє сила
$B = 1,19 \cdot 10^{-6} \text{ Тл}$	Лоренца $\vec{F}_L = -e[\vec{v}, \vec{B}]$. Напрям сили Лоренца
R–?	визначають за правилом векторного добутку векторів. У
T–?	скалярному вигляді $F_L = evB \sin \alpha = evB$, т.к. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
M–?	Оскільки початкова швидкість електрона
	перпендикулярна $\vec{B}$, то

його траєкторія лежить в одній площині.

Робота сили Лоренца дорівнює нулю, з цього $v = \text{const}$. Електрон рухається з постійною по модулю прискоренням $a = \frac{F_0}{m} = \frac{eBv}{m} - (1)$, яке перпендикулярно швидкості. Радіус кривизни траєкторії електрона можна знайти із співвідношення $a = \frac{v^2}{R} - (2)$.

Прирівнявши (1) й (2) отримаємо $\frac{eBv}{m} = \frac{v^2}{R}$, звідси $R = \frac{mv}{eB}$.

Період обертання електрона по колу не залежить від швидкості

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{vB}.$$

Момент імпульсу електрона $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$ або, оскільки вектори $\vec{v}$ й $\vec{R}$ перпендикулярні, $M = mvR$.

Швидкість електрона знайдемо із співвідношення

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

$$\text{звідки } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

$$\text{Звідси } M = R\sqrt{2eUm}.$$

Підставляючи числові дані отримаємо

$$R=0,09 \text{ м}; T = 30 \cdot 10^{-9} \text{ с}; M = 1,5 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

$$\text{Відповідь: } R=0,09 \text{ м}; T = 30 \cdot 10^{-9} \text{ с}; M = 1,5 \cdot 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}.$$

Приклад 6. Скільки витків дроту діаметром $d=0,6$ см має одношарова обмотка котушки, індуктивність якої $L=1$ мГн і діаметр $D=4$ см? Витки щільно прилягають один до одного.

Дано:

$$d=0,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$L=1 \cdot 10^{-6} \text{ Гн}$$

$$D=0,04 \text{ м}$$

$N - ?$

Рішення:

$$\text{Маємо } L = \mu\mu_0 \frac{\pi N^2 D^2}{4l}.$$

$$\text{Тут довжина котушки } l = dN.$$

$$\text{Отже, } L = \mu\mu_0 \frac{\pi N D^2}{4d}, \text{ відкіля } N = \frac{4dL}{\mu\mu_0 \pi D^2} = 380.$$

$$\text{Відповідь: } N = 380.$$

Приклад 7. Електрична лампочка, опір якої в гарячому стані $R=10$ Ом, підключена через дросель до 12-вольтового акумулятору. Індуктивність дроселя $L=2$ Гн, опір $r = 1$ Ом. Через який час t після включення лампочка загориться, якщо вона починає помітно світити при напрузі на ній $U=6$ В?

Дано:

$$R=10 \text{ Ом}$$

$$L=2 \text{ Гн}$$

$$r = 1 \text{ Ом}$$

$$U=6 \text{ В}$$

$$\varepsilon=12 \text{ В}$$

$t - ?$

Рішення:

Внаслідок явища самоіндукції при включенні е.д.с. сила струму в лампочці наростає за законом $I = I_0 \left(1 - \exp \left(-\frac{R+r}{L} t \right) \right) - (1).$

За законом Ома для ділянки цепі початковий і кінцевий

струми відповідно рівні

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

та

$$I = \frac{U}{R + r}.$$

Тоді рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$U = \varepsilon \left(1 - \exp \left(-\frac{R+r}{L} t \right) \right) \text{ або } 1 - \frac{U}{\varepsilon} = \exp \left(-\frac{R+r}{L} t \right) - (2).$$

Пролагарифміруємо рівняння (2), тоді

$$\ln \left(1 - \frac{U}{\varepsilon} \right) = -\frac{R + r}{L} t$$

звідки час, через який загориться лампочка після вмикання:

$$t = -\frac{L}{R + r} \ln \left(1 - \frac{U}{\varepsilon} \right) = 126 \text{ мс.}$$

Відповідь: $t = 126 \text{ мс.}$

4.5 Питання для самоконтролю

Розрахунки полів

1. По двом довгим паралельним проводам течуть у протилежних напрямках струми силою $I_1 = I_2 = I = 10 \text{ А}$. Відстань між проводами $a = 0,30 \text{ м}$. Визначити магнітну індукцію в крапці А, вилученої від першого й другого проводів відповідно на відстані $a_1 = 0,15 \text{ м}$, $a_2 = 0,20 \text{ м}$.

2. По двом довгим прямолінійним проводам, що перебувають на відстані 5 см друг від друга, течуть струми по 10 А в кожному. Визначити напруженість магнітного поля, створюваного струмами в крапці, що лежить посередині між проводами, у випадках, коли:

- проводи паралельні, та струми течуть в одному напрямку;
- проводи паралельні, але струми течуть у різних напрямках;

– проводи перпендикулярні.

3. По відрітку прямого проводу довжиною 10 см тече струм 2 А. Визначити напруженість магнітного поля, створюваної струмом, у крапці, що лежить на перпендикулярі до середини відрізка й вилученої від нього на 6 см.

4. Визначити напруженість магнітного поля в центрі квадрата зі стороною 10 см, утвореного провідником зі струмом силою 5 А. Чому дорівнює магнітний момент цього контуру?

5. Нескінченно довгий провід утворює кругову петлю, дотичну проводу. По проводу йде струм силою 5 А. Знайти радіус петлі, якщо відомо, що напруженість магнітного поля в центрі петлі дорівнює 41 А/м.

6. Два кругові витки розташовані у двох взаємно перпендикулярних площинах так, що центри цих витків збігаються. Радіус кожного витка 2 см і струми, що течуть по витках $I_1 = I_2 = 5$ А. Знайти напруженість магнітного поля в центрі цих витків.

7. Визначити індукцію магнітного поля в центрі дротового прямокутника зі сторонами 10 см і 20 см, по якому протікає струм 12 А. Чому дорівнює магнітний момент цього контуру?

8. Електрон, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів 500 В, влетів в однорідне магнітне поле, вектор індукції якого перпендикулярний швидкості його руху. Напруженість магнітного поля $3 \cdot 10^3$ А/м. Визначити: 1) радіус окружності, по якій рухається електрон; 2) момент кількості руху електрона.

9. α - частка влітає в однорідне магнітне поле перпендикулярно лініям індукції. Швидкість α – частки $2 \cdot 10^5$ м/с, індукція магнітного поля 0,5 Тл. Чому дорівнює робота сили, що діє на α – частку, а також її тангенціальне й нормальне прискорення?

10. Електрон, прискорений різницею потенціалів 300 В, рухається паралельно прямолінійному довгому проводу на відстані 4 мм від нього. Яка сила подіє на нього (електрон), якщо по провідникові пустити струм 5 А?

11. Електрон енергією 300 еВ влетів в однорідне магнітне поле та описав окружність радіусом 5 мм. Визначити індукцію магнітного поля й період обертання електрона.

4.6 Тестові завдання

1. Які з перерахованих процесів призводять до виникнення магнітного поля?

1. Рух заряджених частинок.
2. Електризація тіл.
3. Зміна в часі електричного поля.
4. Прохід струму по провіднику.

2. Магнітне поле у вакуумі може бути створено:

1. Нерухомими електричними зарядами;
2. Намагніченими тілами;
3. Рухомими електричними зарядами;
4. Електричним струмом;
5. Змінними електричними полями.

3. Вкажіть формулу, що виражає закон Біо–Савара–Лапласа:

$$1. d\vec{F} = Id\vec{l} \cdot \vec{B}; \quad 2. d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{Id\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3}; \quad 3. d\vec{H} = \frac{Id\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

4. Вкажіть формулу, що виражає закон повного струму.

$$1. \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^n q_k; \quad 2. \oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k; \quad 3. d\vec{H} = \frac{Id\vec{l} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

5. Вкажіть формулу, що виражає напруженість магнітного поля, створеного провідником кінцевої довжини.

$$1. H = \frac{nI}{2} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2); \quad 2. H = nI; \quad 3. H = \frac{I}{2\pi R}; \quad 4. H = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

6. Вкажіть формулу, що виражає напруженість магнітного поля, створеного нескінченно довгим провідником зі струмом.

$$1. H = \frac{B}{\mu\mu_0}; \quad 2. H = nI; \quad 3. H = \frac{I}{2\pi R}; \quad 4. d\vec{H} = \frac{Id\vec{l} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3}.$$

7. Вкажіть формулу, що виражає напруженість магнітного поля,

створеного круговим струмом на його осі.

1. $H = \frac{I}{2R}$; 2. $H = nI$; 3. $H = \frac{IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$; 4. $H = \frac{I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

8. Вкажіть формулу, яка виражає напруженість магнітного поля, створеного круговим струмом в центрі контуру.

1. $H = \frac{I}{2R}$; 2. $H = nI$; 3. $H = \frac{I}{2\pi R}$; 4. $H = \frac{I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

9. Вкажіть формулу, яка виражає напруженість магнітного поля, створеного соленоїдом кінцевої довжини.

1. $H = \frac{nI}{2}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$; 2. $H = nI$;
3. $H = \frac{I}{2\pi R}$; 4. $H = \frac{I}{4\pi r_0}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

10. Вкажіть формулу, яка виражає напруженість магнітного поля, створеного нескінченно довгим соленоїдом.

1. $H = \frac{B}{\mu\mu_0}$; 2. $H = nI$; 3. $H = \frac{I}{2\pi R}$; 4. $d\vec{H} = \frac{Id\vec{l}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3}$.

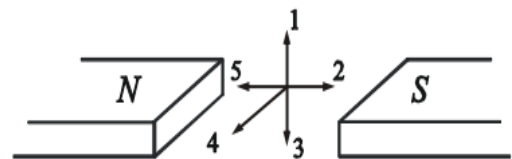
11. Які з формул визначають силу дії магнітного поля на провідник зі струмом (сила Ампера)?

1. $F = IBlsin\alpha$; 2. $d\vec{F} = Id\vec{l} \cdot \vec{B}$; 3. $\vec{F} = q\vec{v} \cdot \vec{B}$; 4. $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l$.

12. Яка з формул визначає силу взаємодії провідників зі струмом у вакуумі?

1. $F = IBlsin\alpha$; 2. $d\vec{F} = Id\vec{l} \cdot \vec{B}$; 3. $\vec{F} = q\vec{v} \cdot \vec{B}$; 4. $F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l$.

13. Вкажіть напрямок індукції магнітного поля в точці, розташованій між полюсами магніту.

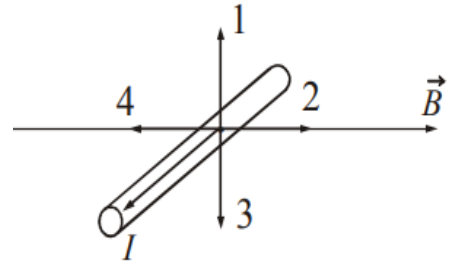


14. Чим визначається значення магнітного моменту контуру зі струмом?

1. Добутком сили струму на довжину контуру $\vec{p}_m = \vec{I} \cdot \vec{l}$.
2. Добутком сили струму на площу контуру $\vec{p}_m = IS\vec{n}$.
3. Множенням магнітної індукції на площу контуру $\vec{p}_m = \vec{B} \cdot \vec{S}$.

4. Множенням магнітної індукції на силу струму $\vec{p}_m = \vec{B} \cdot I$.

15. Яке із зазначених на малюнку напрямків збігається з напрямком сили Ампера, яка діє на прямолінійний провідник зі струмом, розташований в магнітному полі індукцією $\vec{B}$?



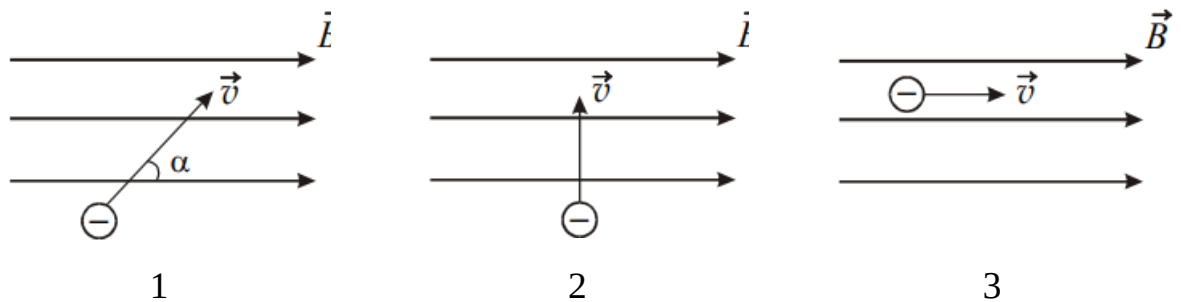
16. Контур зі струмом знаходиться в однорідному магнітному полі. Чому дорівнює крутний момент, що діє на рамку зі струмом з боку поля?

1. $\vec{p}_m = IS\vec{n}$; 2. $\vec{M} = \vec{p}_m \cdot \vec{B}$; 3. $\vec{W}_m = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}$; 4. $\vec{p}_m = \vec{B} \cdot \vec{S}$.

17. Яка формула визначає силу Лоренца?

1. $F = IBlsin\alpha$; 2. $d\vec{F} = Id\vec{l} \cdot \vec{B}$; 3. $\vec{F} = q\vec{v} \cdot \vec{B}$; 4. $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

18. В якому з наведених на малюнку випадків електрон, який влітає в однорідне магнітне поле, буде рухатися по гвинтовій лінії?



19. В якому з наведених на малюнку випадків електрон, який влітає в однорідне магнітне поле, буде рухатися прямолінійно?

20. В якому з наведених на малюнку випадків електрон, який влітає в однорідне магнітне поле, буде рухатися по колу?

21. Які з перерахованих формул визначають холловську різницю потенціалів?

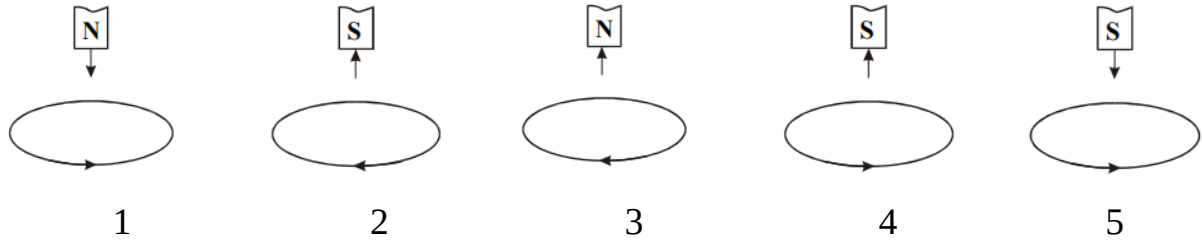
1. $U_H = \frac{1}{ne} \cdot \frac{BI}{b}$; 2. $U_H = \frac{1}{ne} \cdot \frac{I}{Ba}$; 3. $U_H = R_H \cdot a \cdot j \cdot B$; 4. $U_H = \frac{1}{ne} \cdot \frac{a}{BI}$.

22. Яка з формул є виразом закону Фарадея для електромагнітної індукції?

1. $\varepsilon = I(R + r)$; 2. $\varepsilon = \frac{A_{\text{стоп}}}{q}$; 3. $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$; 4. $\varepsilon = \frac{1}{ne} \cdot \frac{BI}{b}$.

23. На яких рисунках правильно вказаний напрям індукційного

струму у витку щодо якого переміщається магніт (напрямок переміщення магніту показаний стрілками)?



24. Яка з формул виражає ЕРС самоіндукції, якщо контур не має феромагнітного сердечника?

1. $\varepsilon = -L \cdot \frac{dI}{dt}$; 2. $\varepsilon = \frac{A^{\text{стоп}}}{q}$; 3. $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$; 4. $\varepsilon = \frac{1}{ne} \cdot \frac{BI}{b}$.

25. Яка формула виражає енергію магнітного поля, створюваного струмом?

1. $W_M = \frac{BH}{2}$; 2. $W_M = \frac{q^2}{2C}$; 3. $W_M = \frac{LI^2}{2}$; 4. $W_M = -L \cdot \frac{dI}{dt}$.

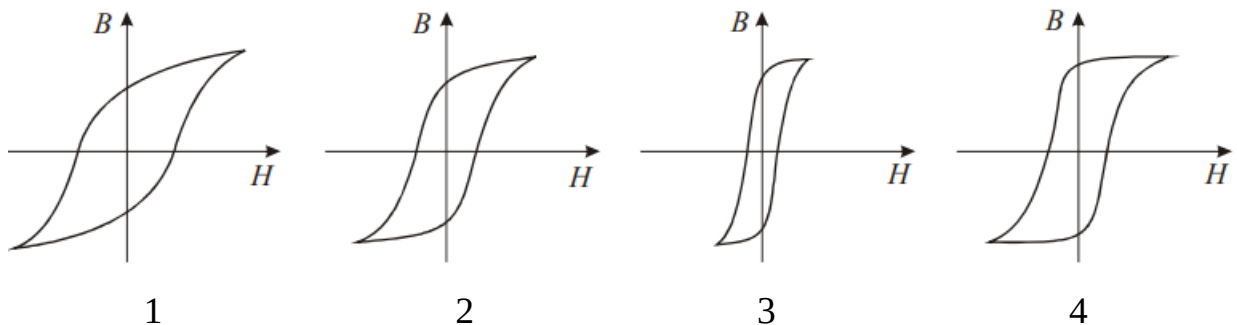
26. Які формули дозволяють розрахувати щільність енергії магнітного поля??

1. $w_M = \frac{BH}{2}$; 2. $w_M = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$; 3. $w_M = \frac{LI^2}{2}$; 4. $w_M = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$.

27. Для якого типу магнетиків залежність магнітної сприйнятливості від температури описується формулою $\chi = \frac{C}{T}$?

1. Парамагнетик; 2. Феромагнетики; 3. Діамагнетики; 4. Антиферомагнетики.

28. Який з феромагнетиків, петлі гістерезису яких наведені на малюнку, є найбільш магнітно-м'яким?



Відповіді

№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді	№ питання	Код відповіді
1	1,3,4	11	1,2	21	1
2	2,3,4,5	12	4	22	3
3	2,3	13	2	23	1,3,4
4	2	14	2	24	1
5	4	15	1	25	3
6	3	16	2	26	1,2
7	1,3	17	3	27	2
8	1	18	1	28	3
9	1	19	3	29	
10	2	20	2	30	

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Волькенштейн, В.С. Збірник завдань за загальним курсом фізики : учеб. пособие / В.С. Волькенштейн. – 11-е изд., перераб. – М. : Наука, 1985. – 381с.
2. Фізика: Методичні вказівки й контрольні Задача для студентів–заочників інженерно–технічних спеціальностей вузів (включаючи сільськогосподарські вузи) / А.А. Воробйов, В.П. Іванов, В.Г. Кондакова, А.Г. Чортовий. – М. : Высш. шк., 1987. – 208с.
3. Гофман, Ю.В. Закони, формули, Задача фізики: довід. / Ю.В.Гофман. – К. : Наук. думка, 1977. – 576с.
4. Савельєв, І.В. Курс загальної фізики. Механіка. Молекулярна фізика / І.В.Савельєв. – М. : Наука, 1982. – 432 с.
5. Чолпан, П.Ф. Основи фізики / П.Ф.Чолпан . – К. : Вищ. шк., 1985 . – 431 с.
6. Беликов, Б.С. Розв'язок завдань по фізиці. Загальні методи: учеб. посіб. для вузів / Б.С.Беликов. – М. : Высш. шк., 1985 . – 255 с.
7. Чертов, А.Г. Единицы физических величин / А.Г. Чертов . – М. : Высшая школа, 1977. – 288 с.
8. Волков, О.Ф. Курс фізики: В 2-х т. Т.1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електростатика. Постійний струм. Електромагнетизм: навч. посіб. для студ. інжен.–техн. спец. вищ. навч. закл. / О.Ф.Волков,Т.П.Лумпієва. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – 224 с.
9. Волков, О.Ф. Курс фізики: В 2-х т. Т.2. Коливання і хвилі. Хвильова і квантова оптика. Елементи квантової механіки. Основи фізики твердого тіла. Елементи фізики атомного ядра : навч. посіб. для студ. інжен.–техн. спец. вищ. навч. закл. / О.Ф. Волков,Т.П.Лумпієва. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – 224 с.

ДОДАТКИ

Додаток А. Поняття про вимірювання. Інтернаціональна система одиниць вимірювання (СІ)

Вимірювання – це процес порівняння фізичної величини з відповідним їй еталоном, який називається одиницею вимірювання цієї фізичної величини.

Основні одиниці вимірювання встановлюються міжнародними угодами. Інші одиниці, які виражаються через них називаються неосновними. Сукупність основних і неосновних одиниць вимірювання складають систему одиниць. До інтернаціональної системи (СІ) відносяться 7 основних одиниць і 2 додаткові.

Основні одиниці:

а) метр (м) – одиниця довжини, дорівнює 1 650 763,73 довжин хвиль випромінювання, яке виникає при переході електрона між рівнями $2p_{10}$ і $5d_5$ атома криптону-86;

б) кілограм (кг) – одиниця маси, дорівнює масі міжнародного прототипу кілограма;

в) секунда (с) – одиниця часу, дорівнює 9 192 631 770 періодам випромінювання, яке виникає при електронному переході між двома надтонкими рівнями основного стану атома цезія-133;

г) Ампер (А) – одиниця сили струму, дорівнює силі постійного струму, який при проходженні по двом паралельним прямолінійним провідникам нескінченної довжини і мізерною площею перерізу, які розміщені у вакуумі на відстані 1 м один від другого, викликає на відрізку провідника довжиною 1 м силу взаємодії $2 \cdot 10^{-7}$ Н;

д) Кельвін (К) – одиниця термодинамічної температури, дорівнює $1/273,16$ частини термодинамічної температури потрійної точки води;

е) моль (моль) – одиниця кількості речовини, дорівнює кількості речовини, що містить стільки ж структурних елементів, скільки атомів містить 0,012 кг вуглецю–12 ($\sim 6,02 \cdot 10^{23}$);.

ж) кандела (кд) – одиниця сили світла, дорівнює силі світла, яке випромінюється з площі $1/600\,000\text{ м}^2$ в перпендикулярному напрямку при температурі затвердіння платини при тиску 101 325 Па.

Додаткові одиниці:

а) радіан (рад) – одиниця плоского кута, дорівнює куту між двома радіусами кола, довжина дуги між яким дорівнює радіусу;

б) стерadian (ср) – одиниця просторового кута, дорівнює просторовому куту с вершиною в центрі сфери, який вирізає на її поверхні площу, рівну площі квадрата із стороною, яка дорівнює радіусу сфери.

Додаток Б. Деякі числа, що часто зустрічаються

$\pi = 3,141593$	$\sqrt{\pi} = 1,77245$	$1^\circ = 0,01745\text{ рад}$
$4\pi = 12,56637$	$e = 2,718282$	$1' = 0,00029\text{ рад}$
$2/\pi = 0,63662$	$\sqrt{2} = 1,41421$	$\lg e = 0,43429$
$\pi^2 = 9,86960$	$\sqrt{3} = 1,73205$	$\ln 2 = 0,69315$

Додаток В. Формули для наближених обчислень

$\frac{1}{1+x} = 1 - x$	$-0,031 < x < 0,031$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x$	$-0,085 < x < 0,093$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x$	$-0,052 < x < 0,052$
$\sin x = x$	$-0,077 < x < 0,077$
$e^x = 1 + x$	$-0,045 < x < 0,045$
$\ln(1+x) = x$	$-0,066 < x < 0,066$

Додаток Г. Основні тригонометричні формули

$$\sin \alpha = a/c; \quad \cos \alpha = b/c; \quad \operatorname{tg} \alpha = a/b; \quad \operatorname{ctg} \alpha = b/a$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

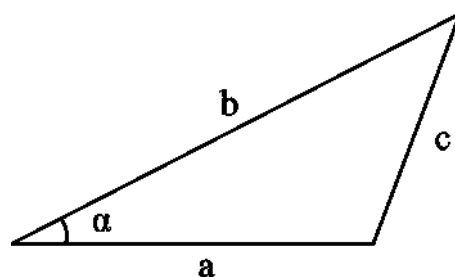
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Теорема косинусів

$$C = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha}$$



Додаток Д. Таблиця похідних

$$(x)' = 1$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(1/x)' = -1/x^2$$

$$(1/x^n)' = -n/x^{n+1}$$

$$(\sqrt{x})' = 1/2\sqrt{x}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = 1/n \sqrt[n]{x^{n-1}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{nx})' = ne^{nx}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^{nx})' = na^{nx} \ln a$$

$$(\ln x)' = 1/x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$$

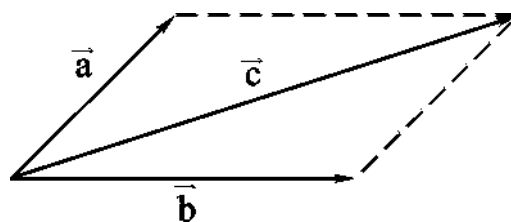
$$(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

Додаток Е. Деякі відомості про вектори

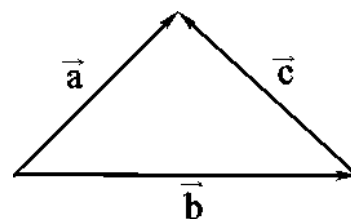
Сума векторів

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



Різниця векторів

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$



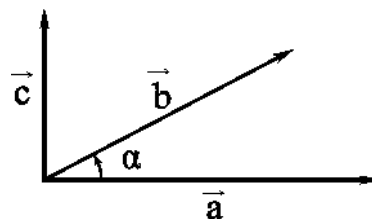
Скалярний добуток векторів

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

де α – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Векторний добуток векторів

$$\vec{c} = [\vec{a} \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$



Вектор $\vec{c}$ спрямований перпендикулярно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ убік, обумовлену за правилом правого гвинта (буравчика). Так, на малюнку вектор $\vec{c}$ спрямований нагору, оскільки вектор $\vec{a}$ множиться на вектор $\vec{b}$, а не навпаки. Модуль векторного добутку векторів $c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$

Операція розподілу векторів не визначена.

Додаток Ж. Приставки до позначень одиниць

Піко (п)	10^{-12}	Деци (д)	10^{-1}
Нано (н)	10^{-9}	Кіло (к)	10^3
Мікро (мк)	10^{-6}	Мега (М)	10^6
Мілі (м)	10^{-3}	Гіга (Г)	10^9
Сант (с)	10^{-2}	Тера (Т)	10^{12}

Додаток З. Основні фізичні константи

Нормальне прискорення вільного падіння

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2$$

Гравітаційна стала

$$G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^{-2})$$

Універсальна газова стала

$$R = 8,314510 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}$$

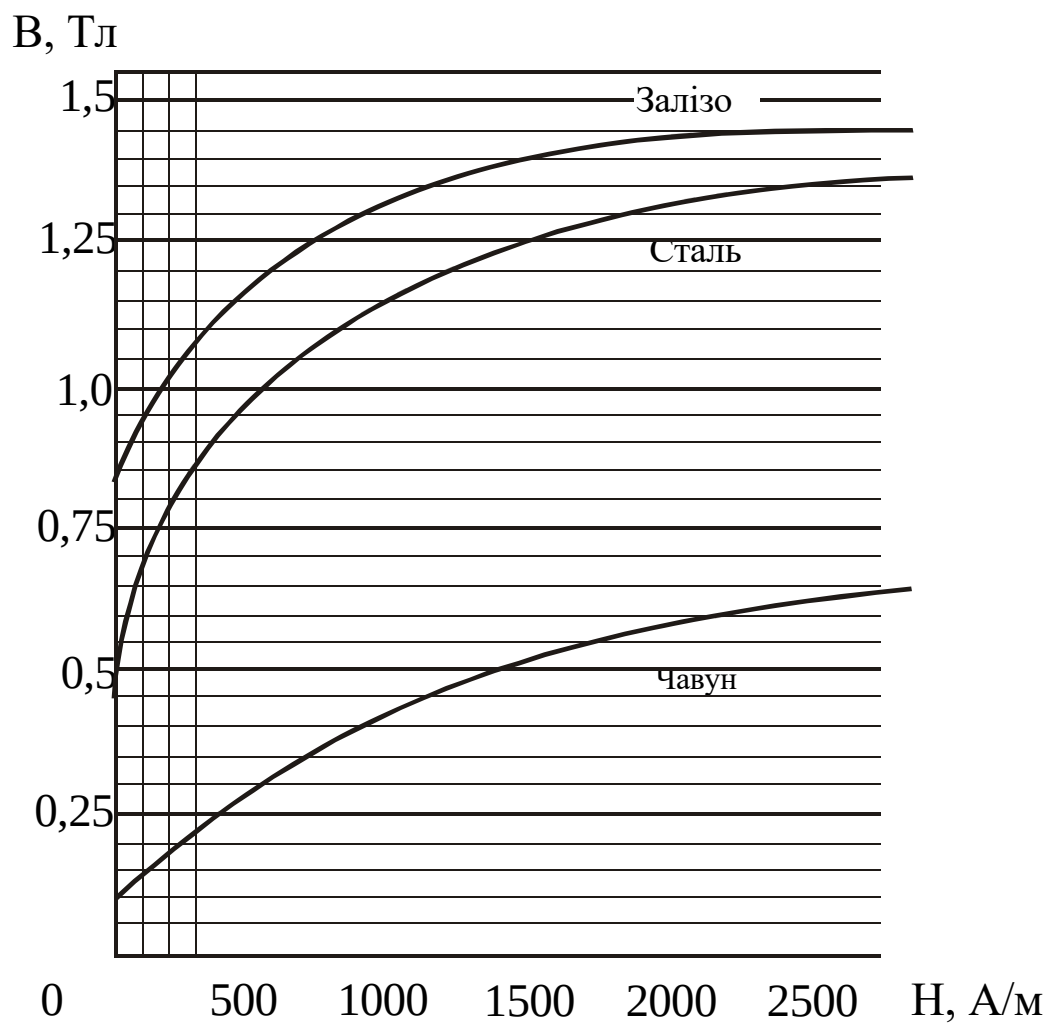
Молярний об'єм ідеального газу за нормальних розумів ($T = 273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$, $p = 101325\text{ Па}$)	$V_0 = RT/p = 22,414102 \cdot 10^{-3}\text{ м}^3/\text{моль}$
Число Авогадро	$N_A = 6,0221367 \cdot 10^{23}\text{ моль}^{-1}$
Число Лошмідта	$n_0 = N_A/V_0 = 2,686763 \cdot 10^{25}\text{ м}^{-3}$
Стала Больцмана	$k = R/N_A = 1,380658 \cdot 10^{-23}\text{ Дж/К}$
Число Фарадея	$F = 96485,309\text{ Кл/моль}$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 299792458\text{ м/с}$
Магнітна стала (абсолютна магнітна проникність)	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12,566370 \cdot 10^{-7}\text{ Н/А}^2$
Електрична стала (абсолютна діелектрична проникність)	$\epsilon_0 = (\mu_0 c^2)^{-1} = 8,854188 \cdot 10^{-12}\text{ Н/А}^2$
Атомна одиниця маси	$1\text{ а.о.м.} = 1,660540 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$
Елементарний заряд	$e = 1,602177 \cdot 10^{-19}\text{ Кл}$
Маса спокою електрона	$m_e = 9,109389 \cdot 10^{-31}\text{ кг}$
з атомних одиниць маси	$m_e = 5,485799 \cdot 10^{-4}\text{ а.о.м.}$
Енергія спокою електрона	$m_e c^2 = 0,510999\text{ МеВ}$
Питомий заряд електрона	$-e/m_e = -1,758819 \cdot 10^{11}\text{ Кл/кг}$
Класичний радіус електрона	$r_e = 2,817941 \cdot 10^{-15}\text{ м}$
Маса спокою протона	$m_p = 1,672623 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$
в атомних одиниць маси	$m_p = 1,007276\text{ а.о.м.}$
Енергія спокою протона	$m_p c^2 = 938,27231\text{ МеВ}$
Питомий заряд протона	$e/m_p = 9,578831 \cdot 10^7\text{ Кл/кг}$
Відношення маси протона до маси електрона	$m_p/m_e = 1836,152701$
Маса спокою нейтрона	$m_n = 1,674929 \cdot 10^{-27}\text{ кг}$
в атомних одиниць маси	$m_n = 1,008665\text{ а.о.м.}$
Енергія спокою нейтрона	$m_n c^2 = 939,56563\text{ МеВ}$
Відношення маси нейтрона до маси	

електрона	$m_n/m_e = 1838,683662$
Відношення маси нейтрона до маси протона	$m_n/m_p = 1,001378$
Стала Планка	$h = 6,626075 \cdot 10^{-34} \text{Дж}\cdot\text{с}$ $\hbar = h/2\pi = 1,054572 \cdot 10^{-34} \text{Дж}\cdot\text{с}$
Стала Стефана–Больцмана	$\sigma = 5,67051 \cdot 10^{-8} \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Стала в законі зміщення Віна	$b = 2,897756 \cdot 10^{-3} \text{м} \cdot \text{К}$
Стала Рідберга	$R_\infty = 10973731,534 \text{м}^{-1}$
Комптонівська довжина хвилі:	
електрона	$\lambda_0 = h/m_e c = 2,426310 \cdot 10^{-12} \text{м}$
протона	$\lambda_0 = h/m_p c = 11,321410 \cdot 10^{-15} \text{м}$
нейтрона	$\lambda_0 = h/m_n c = 1,319591 \cdot 10^{-15} \text{м}$
Радіус першої борівської орбіти	$r_1 = 0,529177 \cdot 10^{-10} \text{м}$
Магнетон Бору	$\mu_B = e\hbar / 2m_e = 9,274015 \cdot 10^{-24} \text{Дж}/\text{Тл}$
Ядерний магнетон	$\mu_N = e\hbar / 2m_p = 5,050787 \cdot 10^{-27} \text{Дж}/\text{Тл}$

8. ПЕРІОДИЧНА СИСТЕМА ЕЛЕМЕНТІВ Д.І.МЕНДЕЛІЄВА

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
1	H 1,0079 Водород								He 4,0026 Гелій
2	Li 6,941 Літій	Be 9,012 Берилій	B 10,811 Бор	C 12,011 Углерод	N 14,0067 Азот	O 15,999 Кислород	F 18,998 Фтор		Ne 20,179 Неон
3	Na 22,990 Натрій	Mg 24,305 Магній	Al 26,982 Алюміній	Si 28,086 Кремній	P 30,974 Фосфор	S 32,066 Сера	Cl 35,453 Хлор		Ar 39,948 Аргон
4	K 39,098 Калій	Ca 40,078 Кальцій	Sc 44,956 Скандій	Ti 47,88 Титан	V 50,942 Ванадій	Cr 51,996 Хром	Mn 54,938 Марганец	Fe 55,847 Железо	Ni 58,69 Нікель
	Zn 65,39 Мідь	Ga 69,723 Галій	Ge 72,59 Германій	As 74,922 Арсен	Se 78,96 Селен	Br 79,904 Бром			Kr 83,80 Криптон
5	Rb 85,468 Рубідій	Sr 87,62 Стронцій	Y 88,906 Іттрій	Zr 91,224 Цирконій	Nb 92,906 Ніобій	Mo 95,94 Молибден	Tc [99] Технецій	Ru 101,07 Рутеній	Rh 102,905 Родій
	Ag 107,868 Срібло	Cd 112,41 Кадмій	In 114,82 Індій	Sn 118,71 Олово	Sb 121,75 Сур'яма	Te 127,60 Телур	I 126,904 Йод		Pd 106,42 Палладій
6	Cs 132,91 Цезій	Ba 137,33 Барій	La* 138,905 Лантан	Hf 178,49 Гафній	Ta 180,948 Тантал	W 183,85 Вольфрам	Re 186,207 Реній	Os 190,20 Осній	Pt 195,08 Платина
	Au 196,967 Золото	Hg 200,59 Ртуть	Pb 207,20 Свинець	Rf [261] Резерфордій	Bi 208,98 Висмут	Po [209] Полоній	At [210] Астат		Rn [222] Радон
7	Fr [223] Францій	Ra 226,025 Радій	Ac** [227] Актиній	Rd [261] Резерфордій	Du [262] Дубній	Sg [263] Сінборгій	Bh [262] Борній	Hs [265] Хасній	Mt [266] Мейтнерій
									Uun [272] Унунілій
*.Лантано-ида	58 Ce 140,12 Церій	59 Pr 140,908 Прозерм	60 Nd 144,24 Неодим	61 Pm [147] Прометій	62 Sm 150,36 Самарій	63 Eu 151,96 Європій	64 Gd 157,25 Гадоліній	65 Tb 158,925 Тербій	66 Dy 162,50 Диспроцій
**Актиніо-ида	90 Th 232,04 Торій	91 Pa 231,036 Протактиній	92 U 238,029 Уран	93 Np 237,048 Нептуній	94 Pu [244] Плутоній	95 Am [243] Америцій	96 Cm [247] Кюрий	97 Bk [247] Берклій	98 Cf [251] Каліфорній
									Es [252] Енштейній
									Fm [257] Фермій
									Mendelevium [258] Менделєєвій
									No [259] Нобелій
									Lr [260] Лоренцій
									Lu 174,967 Лютецій

**Додаток Й. Зв'язок між магнітною індукцією B поля в феромагнетику і
напруженість H намагнічуючого поля**



Конспект лекцій
з курсу «Фізика. Частина 1»

для студентів денної та заочної форми навчання
технічних спеціальностей

Укладачі:

Любименко О.М., доц., к.ф.–м.н., доц
Артеменко Ю.А., доц., к.т..н., доц

Донецький національний технічний університет
85300, м. Покровськ, пл. Шибанкова, 2.