

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕХНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання
лабораторних і практичних робіт та індивідуального завдання
з дисципліни
«Кваліметричний аналіз інформаційно-вимірювальних систем»
для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей

ЛУЦЬК – 2022

УДК 621.38:519.2(072)

М 54

Методичні вказівки до виконання лабораторних і практичних робіт та індивідуального завдання з дисципліни «Кваліметричний аналіз інформаційно-вимірювальних систем» для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей [Електронний ресурс] / уклад. О.В. Вовна, Г.О. Шеїна. – Луцьк : ДонНТУ, 2022. – 71 с.

Методичні вказівки є лабораторним практикумом з дисципліни «Кваліметричний аналіз інформаційно-вимірювальних систем», у них викладено необхідні положення під час підготовки до лабораторних робіт і практичних занять, порядок виконання та завдання до лабораторних робіт, практичних занять та індивідуальних завдань, зміст звіту та контрольні запитання.

Укладачі: Вовна О.В. – професор, д.т.н., зав. каф. електронної техніки.

Шеїна Г.О. – доцент каф. електронної техніки.

Рецензент Лактіонов І.С. – професор, д.т.н., зав. каф. автоматики та телекомунікацій.

Відповідальний за випуск: Вовна О.В. – завідувач кафедри електронної техніки, д.т.н., професор.

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ,
протокол № 10 від 31.05.2022 р.

Розглянуто на засіданні кафедри електронної техніки,
протокол № 11 від 30.05.2022 р.

© ДонНТУ, 2022 рік

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1 – Оцінка методів виключення грубих помилок	6
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2 – Дослідження показників статистичної обробки даних	22
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3 – Дослідження трансформаторів струму і трансформаторів напруги	34
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4 – Дослідження мостових схем	43
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	71

ВСТУП

Кваліметрія – наукова галузь [1, 2], яка об'єднує кількісні методи вимірювання та оцінки якості будь-яких об'єктів, предметів і процесів, використовувані для обґрунтування рішень, що приймаються при стандартизації та управління якістю продукції. Методи кваліметрії – це кількісні методи оцінки якості, спрямовані на забезпечення якості та технології якості різної продукції. Метрологія визначає кількісні характеристики об'єктів, а кваліметрія, ґрунтуючись на цих характеристиках, розробляє керуючі та управлінські рішення.

Кваліметрія здійснює кваліметричні оцінки вимірюванням і порівнянням фізичних, економічних та інших показників з еталоном. На відміну від метрології кваліметричні еталони є змінними у функції часу, природного чи соціального середовища.

Мета та завдання кваліметрії, як навчальної дисципліни: підготовка майбутнього фахівця, здатного вирішувати організаційні, наукові, технічні і правові задачі інженерної діяльності при проведенні вимірювань і контролю якості.

Знання, які студент набуває під час вивчення кваліметрії, як навчальної дисципліни:

- основні поняття і методи кваліметрії;
- професійно орієнтовані математичні, фізичні, метрологічні методи аналізу, синтезу й оптимізації процесів вимірювання і контролю якості будь-яких об'єктів, предметів і процесів;
- системи контролю якості;
- принципи і практику міжнародної співпраці в галузі кваліметрії, контролю якості.

Уміння, які студент набуває під час вивчення кваліметрії, як навчальної дисципліни:

- вибирати (формулювати) показники якості будь-яких об'єктів, предметів і процесів;
- вимірювати показники якості будь-яких об'єктів, предметів і процесів інструментальними і експериментальними методами;
- проводити суцільний і виробничий контроль якості будь-яких об'єктів, предметів і процесів;
- будувати контрольні карти, організовувати роботу за всіма напрямками діяльності (забезпеченням, керуванням, покращенням) якості в умовах конкретного виробництва;
- розробляти методику обробки результатів вимірювань, контролю якості.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1

ОЦІНКА МЕТОДІВ ВИКЛЮЧЕННЯ ГРУБИХ ПОМИЛОК

Мета роботи: дослідити математичні методи та способи обробки результатів вимірювань фізичних величин із багаторазовими спостереженнями та засвоїти методи виключення грубих помилок за допомогою програми MS Excel.

Теоретична частина

В результаті багаторазового вимірювання (табл. 1.1) одержуємо ряд результатів експериментальних спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Результат будь-якого i -того спостереження x_i відрізняється від дійсного значення x_0 вимірюваної ФВ на величину похибки Δ_i :

$$\Delta_i = x_i - x_0$$

За характером зміни похибки розрізняють систематичні та випадкові.

Систематичні похибки виявляються та виключаються або за допомогою поправок на зовнішні фактори (температуру, тиск, вологість); або за рахунок урахування класу точності вимірювальних приладів; або шляхом аналізу математичної моделі, що закладена в об'єкт дослідження.

Випадкові похибки виявляються шляхом повторних вимірювань за умови однакових умов проведення досліджень.

До оцінки похибки Δ_i вимірюваної фізичної величини за експериментальними даними висуваються вимоги:

- спроможності – наближення до дійсного значення вимірюваної фізичної величини при збільшенні кількості експериментальних даних;
- незміщеності – рівності її математичного очікування вимірювань

величині;

– ефективності – коли її середнє квадратичне відхилення менше ніж середнє квадратичне відхилення будь-якої іншої оцінки цієї вимірюваної величини.

Для визначення похибок визначаються:

- середнє арифметичне результатів n -спостережень:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.1)$$

- середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} \quad (1.2)$$

Критерії виявлення грубих помилок.

Критерій Ірвіна.

Рівень значущості визначає рівень появи грубої помилки: q .

В свою чергу, довірча імовірність:

$$p = 1 - q$$

Для визначення використовуємо вбудовані функції MS Excel, приклад їх застосування показаний на рис. 1.1.

Результати експериментальних спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ сортуються за зростанням.

Розрахункове значення критерію Ірвіна

$$\lambda = \frac{x_{n+1} - x_n}{\sigma}$$

$x_{n+1} = x_{\max}$ – максимальне значення випадкової величини; x_n – попереднє значення величини у ряду випадкових чисел.

Значення $x_{n+1} = x_{\max}$ є викидом (грубою помилкою), якщо

$$\lambda \geq \lambda_q \quad (1.3)$$

Граничне значення критерію Ірвіна визначається в залежності від рівня значущості q і кількості вимірювань n .

Якщо $q=0,01$

$$\lambda_q = -104,84 \cdot n^{-3} + 257,04 \cdot n^{-2,5} - 249,02 \cdot n^{-2} + 114,69 \cdot n^{-1,5} - 29,78 \cdot n^{-1} + 6,217 \cdot n^{-0,5} + 1,0504$$

Якщо $q=0,05$

$$\lambda_q = -89,417 \cdot n^{-3} + 165,87 \cdot n^{-2,5} - 143,77 \cdot n^{-2} + 67,727 \cdot n^{-1,5} - 17,755 \cdot n^{-1} + 4,323 \cdot n^{-0,5} + 0,711$$

На основі критерію (1.3) коригуються експериментальні дані.

Для подальшої обробки результатів залишаються експериментальні дані, які задовольняють умові:

$$\lambda < \lambda_q \quad (1.4)$$

Критерій Романовського

Область застосування: кількість експериментальних досліджень не

повинна перевищувати 20 ($n \leq 20$).

Спочатку результати експериментальних спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ сортуються за зростанням: $x_{\min} = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_{\max}$.

Розрахункове значення критерію Романовського:

$$\beta = \left| \frac{\bar{X} - x_i}{\sigma} \right|$$

x_i – максимальне або мінімальне значення випадкової величини, яке перевіряють на належність до грубої помилки; $\bar{X}$, σ – середнє арифметичне і середнє квадратичне значення, які перераховуються без значення, яке перевіряють на належність до грубої помилки.

Значення x_i є викидом (грубою помилкою), якщо

$$\beta \geq t_p \quad (1.5)$$

Граничне значення коефіцієнту Ст'юдента t_p , яке, так само, визначається в залежності від рівня значущості q і кількості вимірювань n .

На основі критерію (1.5) коригуються експериментальні дані.

Для подальшої обробки результатів залишаються експериментальні дані, які задовольняють умові:

$$\beta < t_p \quad (1.6)$$

Таблиця 1.1 – Вихідні дані

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
1	1,3511	1,3306	1,3316	1,3435	1,3338	1,3349	1,3468	1,3478	1,3468	1,3165	1,3262	1,4656	1,3511	1,3306
2	1,3295	1,3543	1,3273	1,3435	1,3381	1,3576	1,3187	1,3219	1,3165	1,3187	1,4353	1,3478	1,3414	1,3273
3	1,3306	1,3208	1,3262	1,3640	1,3370	1,3478	1,3306	1,3100	1,3046	1,3090	1,3370	1,4548	1,4072	1,3640
4	1,3208	1,3522	1,3684	1,3630	1,3360	1,3381	1,3532	1,3306	1,3144	1,2982	1,4332	1,3673	1,3111	1,3360
5	1,3327	1,3403	1,3565	1,3187	1,3457	1,3370	1,3651	1,3511	1,3457	1,3306	1,3133	1,4526	1,3662	1,3370
6	1,3662	1,3630	1,3554	1,3306	1,3446	1,3586	1,3446	1,2982	1,3554	1,3532	1,4634	1,3435	1,3673	1,3446
7	1,3565	1,3424	1,3651	1,3208	1,3327	1,3468	1,3241	1,3100	1,3543	1,3435	1,3543	1,4278	1,3252	1,3100
8	1,3468	1,3543	1,3748	1,3327	1,3208	1,3457	1,3468	1,3327	1,3424	1,3554	1,4288	1,3316	1,3478	1,3424
9	1,3478	1,3662	1,3414	1,3446	1,3090	1,3554	1,3694	1,3230	1,3306	1,3457	1,3198	1,4375	1,3381	1,3457
10	1,3381	1,3025	1,3295	1,3241	1,3079	1,3327	1,3813	1,3349	1,3511	1,4310	1,4375	1,3057	1,3100	1,4375
11	1,3636	1,3418	1,3429	1,3331	1,3451	1,3789	1,3690	1,3592	1,3603	1,3505	1,3592	1,4552	1,3440	1,3418
12	1,3429	1,3669	1,3331	1,3647	1,3527	1,3756	1,3549	1,3669	1,3789	1,3145	1,4464	1,3603	1,3178	1,3331
13	1,3440	1,3396	1,3385	1,3810	1,3690	1,3680	1,3778	1,3876	1,3538	1,3418	1,3876	1,4759	1,3789	1,3810
14	1,3560	1,3560	1,3767	1,3756	1,3309	1,3429	1,3331	1,3451	1,3571	1,3363	1,4464	1,3603	1,3178	1,3309
15	1,3462	1,3505	1,3494	1,3483	1,3581	1,3571	1,3451	1,3331	1,3211	1,3200	1,3407	1,4813	1,4257	1,3571
16	1,3472	1,3701	1,3603	1,3505	1,3494	1,3712	1,3592	1,3581	1,368	1,3451	1,4530	1,3538	1,3527	1,3592
17	1,3592	1,3309	1,3429	1,3658	1,3778	1,3571	1,3363	1,3592	1,3821	1,3941	1,3603	1,4780	1,4007	1,3592
18	1,3603	1,3342	1,3222	1,3429	1,3636	1,3102	1,3222	1,3451	1,3353	1,3472	1,4573	1,3603	1,3287	1,3353
19	1,3592	1,3287	1,3167	1,3265	1,3581	1,3680	1,3669	1,3549	1,3429	1,3636	1,3429	1,4421	1,4214	1,3636
20	1,3287	1,3309	1,3211	1,3102	1,3429	1,3658	1,3560	1,3680	1,3581	1,4443	1,3549	1,4846	1,3527	1,3549

Критерій Діксона (Q-критерій)

Виконується перевірка належності розподілу даних до нормального закону розподілу.

Виконується сортування результатів експериментальних спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ за зростанням: $x_{\min} = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_{\max}$.

Розрахункове значення критерію Діксона визначається при кількості викидів (грубих помилок) один (коефіцієнти r_{10} і r_{11}), або два і більше (коефіцієнти r_{21} і r_{22}) для значень $x_{\min}$ і $x_{\max}$ (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Розрахункове значення критерію Діксона

Кількість вимірювань n	$x_{\min}$	$x_{\max}$
Один викид		
$3 \div 7$	$r_{10}^{\min} = \frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$r_{10}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
$8 \div 10$	$r_{11}^{\min} = \frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$r_{11}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
$11 \div 13$	$r_{21}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$r_{21}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
$14 \div 30$	$r_{22}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$r_{22}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$
Два і більше викидів		
$3 \div 7$	$r_{20}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$	$r_{20}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$
$8 \div 10$	$r_{20}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_n - x_1}$	$r_{20}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_1}$
$11 \div 13$	$r_{21}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$r_{21}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
$14 \div 30$	$r_{22}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$r_{22}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Значення x_i є викидом (грубою помилкою), якщо

$$r \geq r_q \quad (1.7)$$

Граничне значення коефіцієнту Діксона r_q (табл. 1.3), так само, визначається в залежності від рівня значущості q і кількості вимірювань n .

На основі критерію (1.7) коригуються експериментальні дані.

Для подальшої обробки результатів залишаються експериментальні дані, які задовольняють умові:

$$r < r_q \quad (1.8)$$

Таблиця 1.3 – Граничне значення коефіцієнту Діксона r_q

r	Кількість вимірювань n	Рівень значущості q		
		0,1	0,05	0,01
r_{01}	3	0,886	0,941	0,988
	4	0,679	0,765	0,899
	5	0,557	0,642	0,780
	6	0,482	0,560	0,698
	7	0,434	0,507	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,683
	9	0,441	0,512	0,636
	10	0,409	0,477	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,679
	12	0,490	0,546	0,642
	13	0,467	0,521	0,615
r_{22}	14	0,462	0,546	0,641
	15	0,472	0,525	0,616
	16	0,452	0,507	0,595
	17	0,438	0,490	0,577
	18	0,424	0,475	0,561
	19	0,412	0,462	0,547
	20	0,401	0,450	0,535
	21	0,391	0,444	0,524
	22	0,382	0,430	0,514
	23	0,374	0,421	0,505
	24	0,367	0,413	0,497

Критерій 3σ ($n = 20 \div 50$)

Умова відсутності грубої помилки:

$$(x_i - \bar{X}) < 3 \cdot \sigma \quad (1.9)$$

Критерій Смірнова ($n \geq 25$)

Квантиль розподілу:

$$\beta = \frac{\max |x_i - \bar{X}|}{\sigma} \quad (1.10)$$

Умова відсутності грубої помилки (табл. 1.4):

$$\beta < \beta_{\kappa} \quad (1.11)$$

Таблиця 1.4 – Граничний квантиль розподілу β_{κ}

Кількість вимірювань n	Рівень значущості β_{κ}		
	0,1	0,05	0,01
3	1,818	2,121	2,712
4	1,943	2,234	2,806
5	2,036	2,319	2,877
6	2,111	2,386	2,934
7	2,172	2,442	2,981
8	2,224	2,490	3,022
9	2,269	2,531	3,057
10	2,309	2,568	3,089
15	2,457	2,705	3,207
20	2,559	2,799	3,289
25	2,635	2,870	3,351
30	2,696	2,928	3,402
40	2,792	3,015	3,480
50	2,860	3,082	3,541

Практична частина

Вихідні дані до лабораторної роботи визначаються у відповідності із варіантом – табл. 1.1.

Завдання до лабораторної роботи:

1) Виявити грубі помилки з імовірною вірогідністю $P=0,95$ за трьома критеріями:

- парні варіанти – за критеріями Ірвіна, Діксона та Смірнова;
- непарні варіанти – за критеріями Романовського, Ірвіна та 3σ .

2) Викладачем задаються додатково два варіанти вихідних даних. Для цих даних виявлення грубих помилок повторюється за одним з критеріїв пункту 1.

Роздивимось приклад виконання лабораторної роботи.

У Microsoft Excel різні операції з даними виконуються за допомогою формул, які вводяться до комірок робочого листа.

Формула в Microsoft Excel – це комбінація постійних значень, знаків арифметичних дій, адрес комірок, імен і функцій. Формула вводиться до активної комірки і визначає правила обчислень в ній.

Для введення формули необхідно:

- зробити активною комірку, до якої необхідно вводити формулу;
- введення формули *завжди* починається зі знаку рівності “=”;
- у формулах можна використовувати знаки арифметичних дій “+”, “-”, “/”, “*”, показник степеню “^”, знаки порівняння “>”, “<”, і також “%”;
- будь-яку частину формули можна замінити на адресу комірки (натиснути на комірці);
- для закінчення введення формули натиснути Enter, або натиснути кнопку з зеленою галочкою у рядку формул (рис. 1.1).

Рядок формул – це панель у верхній частині вікна Microsoft Excel, яка використовується для введення або змінення формул. Вона відображає постійне значення або формулу, яка використовується в активній комірці.



Рисунок 1.1 – Приклад введення формул

Таблиця 1.5 – Способи введення формул

Для того, щоб	необхідно
ввести формулу через <i>Поле функцій</i> Рядка формул	натиснути кнопку Переліку функцій, яка розташована справа від поля Функції, в Рядку формул (рис.1.1, а), вибрати необхідну функцію і натиснути Enter.
ввести формулу через кнопку <i>Вставка функції</i> Рядка формул	натиснути кнопку “Вставка функції” (рис.1.1, б), вибрати необхідну функцію і натиснути Enter.
Скоректувати формулу	натиснути на комірці → натиснути на рядку формул → скоректувати формулу → натиснути Enter

Абсолютні і відносні посилання.

Відносні посилання – визначають положення комірки відносно положення комірки формули. Відносні посилання автоматично коректуються при їх копіювання. В формулі, яка копіюється, у відповідності з її новим положенням вказується адреса інших комірок.

Абсолютні посилання – завжди вказують на конкретні комірки. Якщо перед буквою або номером стоїть знак долара, наприклад, \$A\$1, то посилання

на стовбець або строку є абсолютне. Абсолютні посилання – посилання, які не змінюються при копіюванні формули в іншу комірку. Для швидкого позначення абсолютного посилання необхідно натиснути F4.

Для прикладу, \$A1 – незмінний рядок, A\$1 – незмінний стовбець.

У табл. 1.6 показаний приклад визначення вихідних даних – адреси комірок: D4÷P4.

У табл. 1.7 показаний перший спосіб визначення середнє арифметичного результатів спостережень за допомогою формули (1.1).

У табл. 1.8 показаний другий спосіб визначення середньо арифметичного результатів спостережень за допомогою вбудованої функції СР.ЗНАЧ (діапазон значень).

У наведеному прикладі (табл. 1.6):

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i = 1,2485.$$

У табл. 1.9 показаний перший спосіб визначення середньоквадратичного результатів спостережень за допомогою формули (1.2).

У табл. 1.10 показаний другий спосіб визначення середньоквадратичного результатів спостережень за допомогою вбудованої функції СТАНДОТКЛОН.В (діапазон значень).

У даному прикладі:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = 0,0296.$$

Визначення грубої помилки за критерієм Ірвіна.

На першому етапі виконується сортування вихідних даних (табл. 1.11): визначається діапазон вихідних даних, обирається формат сортування

(збільшення/зменшення). На наступному кроці в параметрах сортування визначаються формат сортування за стовбцями або за рядками.

Далі визначається максимальне значення: $x_{n+1} = x_{\max} = 1,331$, і попереднє значення: $x_n = 1,268$.

Розрахункове значення критерію Ірвіна:

$$\lambda = \frac{x_{n+1} - x_n}{\sigma} = 2,1284.$$

Приймаємо $q=0,05$, визначаємо $n=13$, тому граничне значення критерію Ірвіна визначається:

$$\begin{aligned} \lambda_q = & -89,417 \cdot n^{-3} + 165,87 \cdot n^{-2,5} - 143,77 \cdot n^{-2} + 67,727 \cdot n^{-1,5} - \\ & - 17,755 \cdot n^{-1} + 4,323 \cdot n^{-0,5} + 0,711 = 1,3699 \end{aligned}$$

Виконується умова (1.3):

$$\lambda = 2,1284 \geq \lambda_q = 1,3699.$$

Отже значення $x_{n+1} = x_{\max} = 1,331$ є викидом (грубою помилкою).

Робиться висновок, що для коригування експериментальних даних значення $x_{n+1} = x_{\max} = 1,331$ виключається з ряду даних, як груба помилка.

У даному прикладі новий ряд даних приведений в комірках J15÷U15 (табл. 1.12).

На другому етапі максимальне значення: $x_{n+1} = x_{\max} = 1,268$, і попереднє значення: $x_n = 1,265$.

Наступне розрахункове значення критерію Ірвіна:

$$\lambda = \frac{x_{n+1} - x_n}{\sigma} = 0,1775.$$

Для $q=0,05$ і $n=12$ нове граничне значення критерію Ірвіна:

$$\begin{aligned} \lambda_q = & -89,417 \cdot n^{-3} + 165,87 \cdot n^{-2,5} - 143,77 \cdot n^{-2} + 67,727 \cdot n^{-1,5} - \\ & - 17,755 \cdot n^{-1} + 4,323 \cdot n^{-0,5} + 0,711 = 1,3910 \end{aligned}$$

Виконується умова (1.4):

$$\lambda = 0,1775 < \lambda_q = 1,3910.$$

Висновок: в остаточно отриманому ряду експериментальних даних не міститься грубих помилок.

Таблиця 1.6 – Приклад визначення вихідних даних

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3																
4	вихідні дані:			1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239

Таблиця 1.7 – Перший спосіб визначення середньо арифметичного результатів спостережень

Ім'я активної комірки: D11

Рядок формул: =ОКРУГЛ(СУММ(D4:P4)/E6;4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3																
4	вихідні дані:			1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
5																
6	кількість комірок:		n=		13											
7																
8	середнє арифметичне результатів спостережень															
9																
10																
11																1,2485
12																

Активна комірка: D11

Формула: $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$

Таблиця 1.8 – Другий спосіб визначення середньо арифметичного результатів спостережень

Р11 X ✓ fx =ОКРУГЛ(СРЗНАЧ(D4:P4);4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3																
4	вихідні дані:			1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
5																
6	кількість комірок:	n=		13												
7																
8	середнє арифметичне результатів															
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																
17																
18																

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$
1,2485

Аргументы функции

СРЗНАЧ

Число1: D4:P4 = {1,248;1,265;1,242;1,245;1,212;1,255;1,268;1,225;...}

Число2: = число

= 1,248461538

Возвращает среднее арифметическое своих аргументов, которые могут быть числами, именами, массивами или ссылками на ячейки с числами.

=(D4:P4);4)

Ім'я активної комірки

Вбудована функція

Р11 X ✓ fx =ОКРУГЛ(СРЗНАЧ(D4:P4);4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3																
4	вихідні дані:			1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
5																
6	кількість комірок:	n=		13												
7																
8	середнє арифметичне результатів															
9																
10																
11																
12																
13																
14																
15																
16																
17																
18																

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$
1,2485

Аргументы функции

СРЗНАЧ

Число1: D4:P4 = {1,248;1,265;1,242;1,245;1,212;1,255;1,268;1,225;...}

Число2: = число

= 1,248461538

Возвращает среднее арифметическое своих аргументов, которые могут быть числами, именами, массивами или ссылками на ячейки с числами.

=(D4:P4);4)

Опис вбудованої функції

Активна комірка

Таблиця 1.9 – Перший спосіб визначення середньоквадратичного результатів спостережень

відносне посилання абсолютне посилання Рядок формул

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3																
4	вихідні дані:			1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
5																
6	кількість комірок:	n=			13											
7																
8	середнє арифметичне результатів спостережень															
9																
10																
11																
12																
19	с.к.в. результатів спостережень															
20																
21																
22																
23																
24																
25																

Рядок формул: $= (D4 - \$D\$11)^2$

Активна комірка: $= (D4 - \$D\$11)$

Активна комірка: $= \text{ОКРУГЛ}(\text{КОРЕНЬ}(\text{СУММ}(\text{D21:P21})/(\text{E6}-1));4)$

Рядок формул

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3																
4	вихідні дані:			1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
5																
6	кількість комірок:	n=			13											
7																
19	с.к.в. результатів спостережень															
20																
21																
22																
23																
24																
25																

Рядок формул: $= \text{ОКРУГЛ}(\text{КОРЕНЬ}(\text{СУММ}(\text{D21:P21})/(\text{E6}-1));4)$

Активна комірка: $= \text{ОКРУГЛ}(\text{КОРЕНЬ}(\text{СУММ}(\text{D21:P21})/(\text{E6}-1));4)$

Таблиця 1.10 – Другий спосіб визначення середньоквадратичного результатів спостережень

Ім'я активної комірки: P25

Вбудована функція: =СТАНДОТКЛОН.В(D4:P4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
3																
4	вихідні дані:			1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
5																
6	кількість комірок:	n=		13												
7																
8	середнє арифметичне результатів спостережень															
9																
10	$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$			1,2485												1,2485
11																
12																
13																
14																
15																
16																
17																
18																
19	с.к.в. результатів спостережень															
20																
21																
22																
23	$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$			0,0296												
24																
25																
26																

Опис вбудованої функції:

Аргументы функции

СТАНДОТКЛОН.В

Число1: D4:P4 = {1,248;1,265;1,242;1,245;1,212;1,255;1,268;1,225;...}

Число2: = число

= 0,029596214

Оценивает стандартное отклонение по выборке. Логические и текстовые значения игнорируются.

Число1: число1;число2;... от 1 до 255 значений, составляющих выборку из генеральной совокупности; допускаются числовые значения и ссылки на числовые значения.

Значение: 0,0296

Справка по этой функции

OK Отмена

{D4:P4}

Таблиця 1.11 – Сортуння результатів вимірювання

Вибір формату сортуння

Диазон вихідних даних

Вихідні дані:	1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
1 Етап:	1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239

Сортировка

Сортировать по: Строка 5

Порядок: Значения

Сортировать: ☒ столбцы диапазона

Параметры сорти...

Вихідні дані:	1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
1 Етап:	1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239

Таблиця 1.12 – Приклад використання критерію Ірвіна

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1																						
2						Вихідні дані:				1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
3						1 Етап:																
4						Сортування попередніх результатів:				1,212	1,222	1,225	1,232	1,239	1,242	1,245	1,246	1,248	1,255	1,265	1,268	1,331
5																						
6						Середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини:																
7																						
8																						
9						Розрахункове значення критерію:																
10																						
11																						
12																						
13						2 Етап:																
14						Коригування експериментальних даних: виключення грубої помилки																
15										1,212	1,222	1,225	1,232	1,239	1,242	1,245	1,246	1,248	1,255	1,265	1,268	
16																						
17						Середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини:																
18																						
19						Розрахункове значення критерію:																
20																						
21																						
22																						
23						Табличні дані для критерію Ірвіна:																
24							Об'єм виборки	n=	13	12	11	10										
25						Рівень значимості:	q=	0,01		Lq=	1,831	1,848	1,865	1,883								
26																						
27																						
28																						
29																						
30																						
31																						

Визначення грубої помилки за критерієм Романовського.

На першому етапі, як і в першому випадку, виконується сортування вихідних даних (див. табл. 1.11):

$$x_{\min} = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_{\max}.$$

Для заданих даних:

$$x_{\min} = 1,212; x_{\max} = 1,331; \bar{X} = 1,2485; \sigma = 0,0296.$$

Розрахункове значення критерію Романовського буде складати:

$$\beta_{x_{\min}} = \left| \frac{\bar{X} - x_i}{\sigma} \right| = \left| \frac{1,2485 - 1,212}{0,0296} \right| = 1,2331$$
$$\beta_{x_{\max}} = \left| \frac{\bar{X} - x_i}{\sigma} \right| = \left| \frac{1,2485 - 1,331}{0,0296} \right| = 2,7872$$

Для рівня значущості $q=0,05$ і кількості вимірювань $n=13$, граничне значення коефіцієнту Ст'юдента $t_p=2,16$.

Для $x_{\min}$ виконується умова (1.6):

$$\beta_{x_{\min}} = 1,2331 < t_p = 2,16.$$

Для $x_{\max}$ виконується умова (1.5):

$$\beta_{x_{\max}} = 2,7872 \geq t_p = 2,16.$$

Отже значення $x_{\max} = 1,331$ є викидом (грубою помилкою), а значення $x_{\min} = 1,212$ є допустимим значенням.

На другому етапі коригуються експериментальні дані:

$$x_{\min} = 1,212; x_{\max} = 1,268; \bar{X} = 1,2416; \sigma = 0,0169.$$

Нові розраховані значення критерію Романовського:

$$\beta_{x_{\min}} = \left| \frac{\bar{X} - x_i}{\sigma} \right| = \left| \frac{1,2416 - 1,212}{0,0169} \right| = 1,7515$$

$$\beta_{x_{\max}} = \left| \frac{\bar{X} - x_i}{\sigma} \right| = \left| \frac{1,2416 - 1,268}{0,0169} \right| = 1,5621$$

Для рівня значущості $q=0,05$ і кількості вимірювань $n=12$, граничне значення коефіцієнту Ст'юдента $t_p = 2,18$.

Для $x_{\min}$ і $x_{\max}$ виконується умова (1.6):

$$\beta_{x_{\min}} = 1,7515 < t_p = 2,18;$$

$$\beta_{x_{\max}} = 1,5621 \geq t_p = 2,18.$$

Отже значення $x_{\min} = 1,212$ і $x_{\max} = 1,268$ є допустимими значеннями.

У табл. 1.10 наведений приклад розрахунку в Microsoft Excel.

Висновок: в остаточно отриманому ряду експериментальних даних не міститься грубих помилок.

Таблиця 1.13 – Приклад розрахунку за критерієм Романовського

Вихідні дані:

1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1 Етап:

Сортування попередніх результатів:

1,212	1,222	1,225	1,232	1,239	1,242	1,245	1,246	1,248	1,255	1,265	1,268	1,331
13												

Середнє арифметичне результатів - n -спостережень

$\bar{X}$	1,2485	1,2485										
-----------	--------	--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

0,0296												
--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

макс

x_i

1,331												
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

мін

x_i

1,212												
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Розрахункове значення критерію:

$$\beta = \left| \frac{\bar{X} - x_i}{\sigma} \right|$$

t-Student

Для максимуму даних:

2,7872	>	2,1600	наявність грубої помилки
--------	---	--------	--------------------------

Для мінімуму даних:

1,2331	<	2,1600	відсутність грубої помилки
--------	---	--------	----------------------------

2 Етап:

Відкореговані експериментальні дані:

1,212	1,222	1,225	1,232	1,239	1,242	1,245	1,246	1,248	1,255	1,265	1,268	
12												

Середнє арифметичне результатів - n -спостережень

$\bar{X}$	1,2416	1,2416										
-----------	--------	--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$$

0,0169												
--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

макс

x_i

1,2680												
--------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

мін

x_i

1,212												
-------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Розрахункове значення критерію:

$$\beta = \left| \frac{\bar{X} - x_i}{\sigma} \right|$$

t-Student

Для максимуму даних:

1,5621	<	2,1800	відсутність грубої помилки
--------	---	--------	----------------------------

Для мінімуму даних:

1,7515	<	2,1800	відсутність грубої помилки
--------	---	--------	----------------------------

Визначення грубої помилки за критерієм Діксона (Q -критерій).

На першому етапі виконується сортування результатів експериментальних спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$ за зростанням:

$$x_{\min} = x_1 < x_2 < \dots < x_n = x_{\max} \text{ (табл.1.14).}$$

Далі визначаються:

$$x_{\min} = x_1 = 1,212; x_2 = 1,222; x_3 = 1,225; x_{n-2} = 1,265; x_{n-1} = 1,268; x_{\max} = x_n = 1,331.$$

Кількість вимірювань $n=13$, тому для будь-якої кількості викидів (табл. 1.2) маємо:

$$r_{21}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1} = \frac{1,225 - 1,212}{1,268 - 1,212} = 0,2321;$$

$$r_{21}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2} = \frac{1,331 - 1,265}{1,331 - 1,222} = 0,6055.$$

Для рівня значущості $q=0,05$ і кількості вимірювань $n=13$, граничне значення коефіцієнту Діксону $r_q = 0,521$.

Значення $x_{\min} = 1,212$ задовольняє умові (1.8):

$$r_{21}^{\min} = 0,2321 < r_q = 0,521.$$

отже мінімальне значення не є грубим викидом.

Значення $x_{\max} = 1,331$ задовольняє умові (1.7):

$$r_{21}^{\max} = 0,6055 > r_q = 0,521.$$

отже максимальне значення є грубим викидом, і виключається з експериментальних даних.

Після коригування експериментальних даних:

$$x_{\min} = x_1 = 1,212; \quad x_2 = 1,222; \quad x_3 = 1,225; \quad x_{n-2} = 1,255; \quad x_{n-1} = 1,265; \quad x_{\max} = x_n = 1,268.$$

Кількість вимірювань $n=12$, тому для будь-якої кількості викидів (табл. 1.2) маємо:

$$r_{21}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1} = \frac{1,225 - 1,212}{1,265 - 1,212} = 0,2453;$$

$$r_{21}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2} = \frac{1,268 - 1,255}{1,268 - 1,222} = 0,2826.$$

Для рівня значущості $q=0,05$ і кількості вимірювань $n=12$, граничне значення коефіцієнту Діксону $r_q = 0,546$.

Значення $x_{\min} = 1,212$ і $x_{\max} = 1,268$ задовольняють умові (1.8):

$$r_{21}^{\min} = 0,2453 < r_q = 0,546;$$

$$r_{21}^{\max} = 0,2826 < r_q = 0,546.$$

Висновок: в остаточно отриманому ряду експериментальних даних не міститься грубих помилок.

Таблиця 1.11 – Приклад розрахунку за критерієм Діксона

Вихідні дані:	1,248	1,265	1,242	1,245	1,212	1,255	1,268	1,225	1,232	1,246	1,222	1,331	1,239
---------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1 Етап:

Сортування попередніх результатів:	1,212	1,222	1,225	1,232	1,239	1,242	1,245	1,246	1,248	1,255	1,265	1,268	1,331
------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

для $n=13$

для рівня значущості $q=0,05$: $r_q = 0,521$

для двох викидів (максимального та мінімального)

Розрахунковий коефіцієнт

$$r_{21}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1} = 0,2321 < 0,521 \quad \text{відсутність грубої помилки}$$

$$r_{21}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2} = 0,6055 > 0,521 \quad \text{наявність грубої помилки}$$

$x1=$	1,212
$x2=$	1,222
$x3=$	1,225
$x_{n-2}=$	1,265
$x_{n-1}=$	1,268
$xn=$	1,331

2 Етап:

Відкореговані експериментальні дані:	1,212	1,222	1,225	1,232	1,239	1,242	1,245	1,246	1,248	1,255	1,265	1,268
--------------------------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

для $n=12$

для рівня значущості $q=0,05$: $r_q = 0,546$

для двох викидів (максимального та мінімального)

Розрахунковий коефіцієнт

$$r_{21}^{\min} = \frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1} = 0,2453 < 0,546 \quad \text{відсутність грубої помилки}$$

$$r_{21}^{\max} = \frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2} = 0,2826 < 0,546 \quad \text{відсутність грубої помилки}$$

$x1=$	1,212
$x2=$	1,222
$x3=$	1,225
$x_{n-2}=$	1,255
$x_{n-1}=$	1,265
$xn=$	1,268

Питання для самоперевірки

1. Чи розрізняють похибки за характером змін?
2. Як виявляються та виключаються систематичні похибки?
3. Як виявляються випадкові похибки?
4. Поясніть різницю між похибкою вимірювання та оцінкою похибки вимірювання?
5. Назвіть вимоги до оцінки похибки вимірюваної фізичної величини?
6. Наведіть критерії оцінки грубих похибок.
7. Наведіть алгоритм критерію Ірвіна.
8. Наведіть алгоритм критерію Романовського.
9. Наведіть алгоритм критерію Діксона.
10. Наведіть алгоритм критерію 3σ .
11. Наведіть алгоритм критерію Смірнова.

Література

[3, 4].

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОКАЗНИКІВ СТАТИСТИЧНОЇ ОБРОБКИ ДАНИХ

Мета роботи: дослідити математичні методи та способи статистичної обробки даних за допомогою програми MS Excel.

Теоретична частина

В результаті багаторазового вимірювання одержуємо ряд результатів експериментальних спостережень $x_1, x_2, \dots, x_n$, з якого за допомогою критерієм, які існують (лабораторна робота №1) виключені грубі помилки.

Показники центру статистичного розподілу.

Центр статистичного розподілу характеризується:

- математичним сподіванням, яке визначається як центр тяжіння розподілу

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (2.1)$$

де $f(x)$ – щільність розподілу.

- середнім значенням, яке, в свою чергу, може визначатися різними способами, в залежності від початкових заданих даних:

1) у випадку для дискретних випадкових величин

$$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} x_i \cdot p_i, \quad (2.2)$$

де x_i – значення, яких випадкова величина, розподілена на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ набуває з імовірностями p_i .

2) у випадку для вибірки:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.3)$$

де x_i ($i=1, 2, \dots, n$) – значення результатів спостережень, n – обсяг вибірки.

3) у випадку, коли вихідні дані подано як емпіричні частоти ν_i розподілу випадкової величини за інтервалами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k b_i \nu_i. \quad (2.4)$$

Крім середнього арифметичного використовують інші види середніх величин:

– середнє гармонічне:

$$h = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad (2.5)$$

– середнє геометричне (середнє пропорційне):

$$g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \prod_{i=1}^n \sqrt[n]{x_i} \quad (2.6)$$

– степеневе середнє:

$$\omega_\alpha = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (2.7)$$

– зважені степеневі середні:

$$\Omega_{\alpha} = \sqrt[\alpha]{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i^{\alpha}}{\sum_{i=1}^n w_i}}, \quad \alpha > 0, \quad (2.8)$$

де w_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – вагові коефіцієнти.

Для розглянутих величин виконується нерівність

$$h \leq g \leq \bar{x} \leq \omega_{\alpha}. \quad (2.9)$$

Вибіркова медіана – це числова характеристика неперервно розподіленої випадкової величини x , яка визначається умовою, що з імовірністю 0,5 випадкова величина може набувати значення як більші за медіану, так і менші за неї:

$$\int_{-\infty}^m f(x) dx = \int_m^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2}. \quad (2.10)$$

Для інтервального варіаційного ряду вибірккову медіану визначають в залежності від парності чи непарності чисельності варіаційного ряду як середньо арифметичне двох середніх варіант:

$$me_x = \begin{cases} X_{(m)}, & n = 2k + 1; \\ \frac{1}{2} [X_{(m-1)} + X_{(m)}], & n = 2k \end{cases} \quad (2.11)$$

де $X_{(m)}$ – елементи варіаційного ряду, n – його чисельність.

Модою m_x називають точку максимуму емпіричної функції щільності розподілу. Як характеристику центру, моду m_x можна використовувати лише для розподілів із симетричною кривою щільності розподілу.

Мода (типовість) m_x - значення в безлічі спостережень, яке зустрічається найчастіше.

Співвідношення між середнім арифметичним, медіаною та модою розподілу залежить від знаку коефіцієнта асиметрії розподілу.

Якщо він додатний, то $m_x < me_x < \bar{x}$, якщо від'ємний, то: $\bar{x} < me_x < m_x$.

Дисперсія характеризує ступінь відхилення елементів сукупності від середнього в одиницях вимірювання відповідної ознаки.

Дисперсію визначають:

– для неперервного випадку

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2; \quad (2.12)$$

– для дискретного випадку

$$\sigma^2 = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 p_i - \mu^2; \quad (2.13)$$

Якщо середнє значення сукупності відоме, то:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2. \quad (2.14)$$

Якщо середнє значення оцінюють за самою вибіркою, то для розрахунку дисперсії використовують скореговану формулу:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n \cdot (n-1)}. \quad (2.15)$$

Середнє квадратичне (стандартне) відхилення (похибка):

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (2.16)$$

Практична частина

Завдання до лабораторної роботи № 2 є результатом, отриманим при виконанні лабораторної роботи № 1.

Після виключення грубої помилки отримали ряд даних (n=10):

$x_i = 1,222; 1,225; 1,232; 1,239; 1,242; 1,245; 1,246; 1,248; 1,255; 1,265$.

Середнє значення у випадку для вибірки (2.3):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} 1,222 + 1,225 + 1,232 + 1,239 + 1,242 + 1,245 + 1,246 + 1,248 + 1,255 + 1,265 = \\ &= 1,2419 \end{aligned}$$

Так само, інші види середніх величин:

– середнє гармонічне (2.5):

$$\begin{aligned} h &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \\ &= \frac{10}{\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{1,222} + \frac{1}{1,225} + \frac{1}{1,232} + \frac{1}{1,239} + \frac{1}{1,242} + \frac{1}{1,245} + \frac{1}{1,246} + \frac{1}{1,248} + \frac{1}{1,255} + \frac{1}{1,265}} = \\ &= 1,24178 \end{aligned}$$

– середнє геометричне (середнє пропорційне) (2.6):

$$\begin{aligned}
 g &= \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \\
 &= \sqrt[10]{\prod_{i=1}^{10} (1,222 \cdot 1,225 \cdot 1,232 \cdot 1,239 \cdot 1,242 \cdot 1,245 \cdot 1,246 \cdot 1,248 \cdot 1,255 \cdot 1,265)} = \\
 &= 1,24184
 \end{aligned}$$

– степеневе середнє (2.7):

$$\begin{aligned}
 \omega_2 &= \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha} = \\
 &= \sqrt[2]{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (1,222^2 + 1,225^2 + 1,232^2 + 1,239^2 + 1,242^2 + \\
 &\quad \sqrt{+1,245^2 + 1,246^2 + 1,248^2 + 1,255^2 + 1,265^2})} = 1,24196 \\
 \omega_3 &= \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^\alpha} = \\
 &= \sqrt[3]{\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (1,222^3 + 1,225^3 + 1,232^3 + 1,239^3 + 1,242^3 + \\
 &\quad \sqrt{+1,245^3 + 1,246^3 + 1,248^3 + 1,255^3 + 1,265^3})} = 1,24203
 \end{aligned}$$

Для розглянутих величин виконується нерівність (2.9)

$$h = 1,24178 \leq g = 1,24184 \leq \bar{x} = 1,2419 \leq \omega_2 = 1,24196 \leq \omega_3 = 1,24203.$$

Вибіркова медіана для інтервального варіаційного ряду (2.11):

$$me_x = \begin{cases} X_{(m)}, n = 2k + 1; \\ \frac{1}{2} [X_{(m-1)} + X_{(m)}], n = 2k \end{cases} = \frac{1}{2} [1,242 + 1,245] = 1,2435.$$

Вбудована функція: МЕДИАНА (діапазон даних).

За можливістю, визначається мода m_x , як точку максимуму емпіричної функції щільності розподілу. Для даного прикладу m_x не визначається.

Як відомо, співвідношення між середнім арифметичним, медіаною та модою розподілу залежить від знаку коефіцієнта асиметрії розподілу. Так як він від'ємний, то: $\bar{x} = 1,2419 < me_x = 1,2435$.

Дисперсія характеризує ступінь відхилення елементів сукупності від середнього в одиницях вимірювання відповідної ознаки.

Середнє квадратичне (стандартне) відхилення (похибка) (2.16):

$$s = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^n \left[(1,222 - 1,2419)^2 + (1,225 - 1,2419)^2 + \right. \\ \left. \sqrt{+(1,232 - 1,2419)^2 + (1,239 - 1,2419)^2 + (1,242 - 1,2419)^2 + (1,245 - 1,2419)^2 +} \right. \\ \left. \sqrt{+(1,246 - 1,2419)^2 + (1,248 - 1,2419)^2 + (1,255 - 1,2419)^2 + (1,265 - 1,2419)^2} \right]} = \\ = 1,3153 \cdot 10^{-2}$$

І останньою визначаємо дисперсію (2.15):

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^n \left[(1,222 - 1,2419)^2 + (1,225 - 1,2419)^2 + \right. \\ \left. + (1,232 - 1,2419)^2 + (1,239 - 1,2419)^2 + (1,242 - 1,2419)^2 + (1,245 - 1,2419)^2 + \right. \\ \left. + (1,246 - 1,2419)^2 + (1,248 - 1,2419)^2 + (1,255 - 1,2419)^2 + (1,265 - 1,2419)^2 \right] = \\ = 1,7299 \cdot 10^{-4}$$

У відповідності з отриманими даними наводяться висновки.

Питання для самоперевірки

1. Показники, які характеризують центр статистичного розподілу.

2. Показники, які характеризують ширину статистичного розподілу.
3. Для якої характеристики використовується вибіркова медіана.
4. Для якої характеристики використовується мода.

Література

[4, 5].

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3
ДОСЛІДЖЕННЯ ТРАНСФОРМАТОРІВ СТРУМУ І
ТРАНСФОРМАТОРІВ НАПРУГИ

Мета роботи: дослідити трансформатори струму і трансформатори напруги, як технічні засоби інформаційно-вимірювальних систем енергосистем.

Теоретична частина

Як добре відомо, для розширення меж вимірювання струмів використовують шунти або трансформатори струму (ТС), а для розширення меж вимірювання напруги – додатковий резистор або трансформатор напруги (ТН). Якщо амперметр з внутрішнім опором R_A має границю вимірювання I_A , то для отримання нової границі вимірювання $I_{Aш}$, необхідно паралельно амперметру включити шунт з опором

$$R_{ш} = \frac{R_A}{k_{ш} - 1},$$

де $k_{ш} = \frac{I_{Aш}}{I_A}$ – коефіцієнт шунтування.

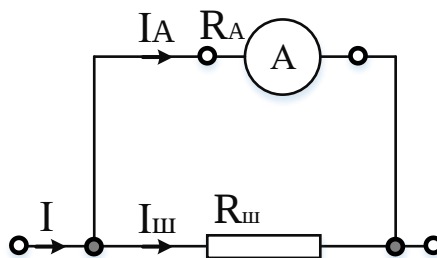


Рисунок 3.1 – Схема включення шунта

Вимірювальні трансформатори струму та напруги застосовуються в ланцюгах змінного струму, коли безпосереднє включення до первинних

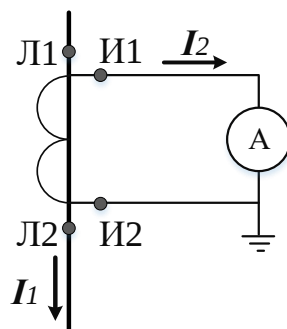
ланцюгів контрольно-вимірювальних приладів, реле та приладів автоматики технічно неможливе, нераціонально та неприпустимо за умовами безпеки.

Первинні обмотки вимірювальних трансформаторів струму включаються до електричних ланцюгів установок послідовно. У вторинну обмотку також послідовно включаються вимірювальні прилади та прилади релейного захисту.

Перетин первинної обмотки ТС обирається за струмом $I_{1,\text{розр}}$ первинного ланцюга, ізоляція – за напругою первинного ланцюга $U_{1,\text{ном}}$. Схема включення трансформаторів струму – рис. 3.2. Номінальний струм вторинної обмотки $I_{2,\text{ном}}$ зазвичай становить 5 А, іноді 1 А.

Через значний струм первинної обмотки $I_{1,\text{ном}}$ ТС, коли $I_{1,\text{ном}} \gg I_{2,\text{ном}}$, і умову постійності сили, що намагнічує, $I_{1,\text{ном}} \cdot w_1 = I_{2,\text{ном}} \cdot w_2$ очевидним є співвідношення між кількістю витків: $w_1 \ll w_2$ та перетином витків $F_1 > F_2$.

Оскільки опір обмоток приладів, включених у вторинний ланцюг ТС невеликий, трансформатори струму працюють у режимі, близькому до режиму короткого замикання. При цьому магнітний потік Φ у сердечнику, компенсований вторинним потоком, невеликий, напруга на затискачах вторинної обмотки невелика $U_{2,\text{ном}}$, одиниці вольт. При розмиканні вторинного ланцюга магнітний потік Φ різко збільшується, що призводить до сильного нагрівання магнітопроводу, напруга на затискачі вторинної обмотки U_2 зростає до тисячі вольт і стає небезпечною. Важливо: треба остерігатися помилкового чи випадкового розмикання вторинних ланцюгів трансформаторів струму.



а

Рисунок 3.2 – Схеми включення ТС

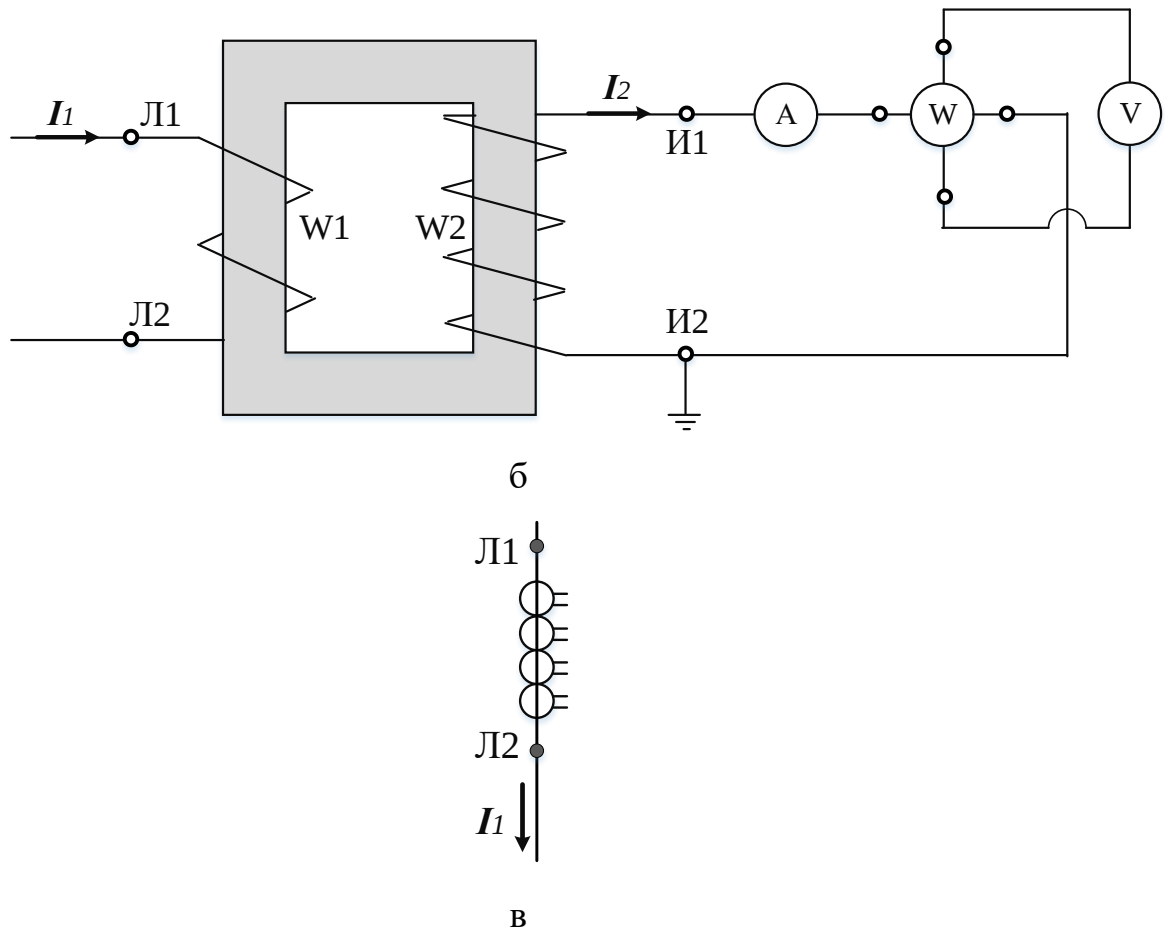
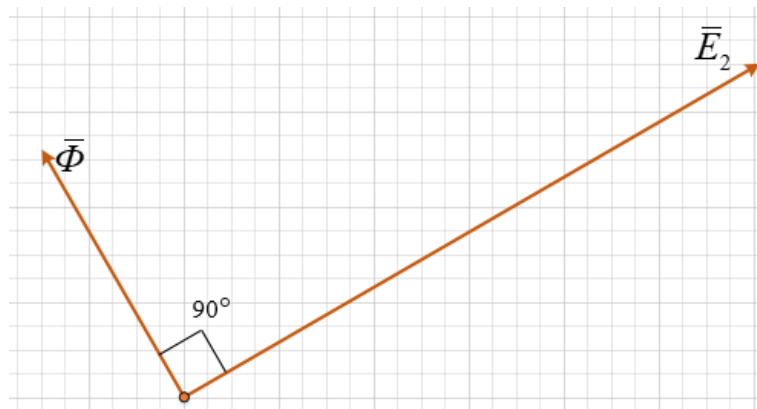


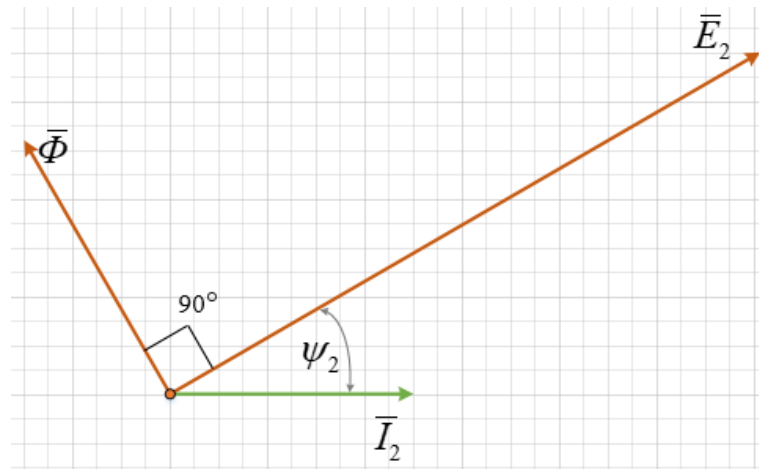
Рисунок 3.2 – Схеми включення ТС

Для аналізу режимів роботи й дослідження похибок будуються векторні діаграми ТС (рис. 3.3). При їх побудові враховується схема заміщення ТС (рис. 3.4).

Потік намагнічування $\bar{\Phi}$ трансформатора створює ЕРС $\bar{E}_2$, яка відстає на 90 електричних градусів:



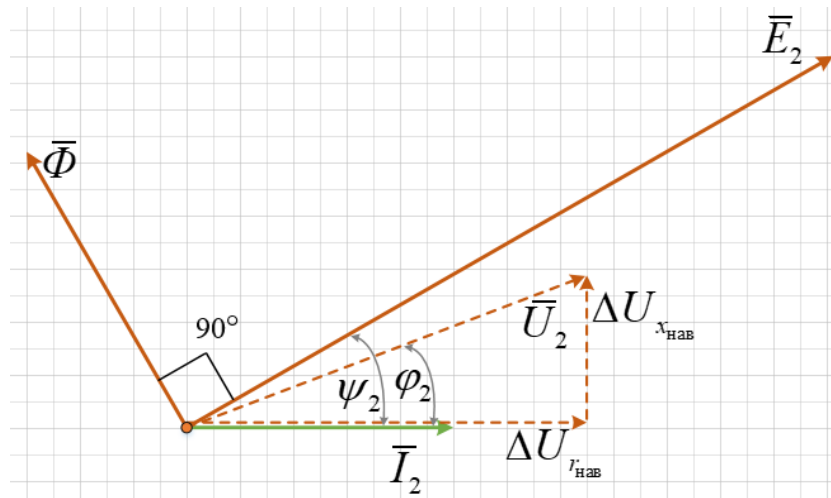
Під дією ЕРС $\bar{E}_2$ виникає струм у вторинній обмотці $\bar{I}_2$, який за фазою відстає від ЕРС $\bar{E}_2$ на кут ψ_2 :



Струм вторинної обмотки $\bar{I}_2$ створює падіння напруги в активному $r_{\text{наб}}$ та індуктивному $x_{\text{наб}}$ опорах навантаження:

$$\bar{U}_2 = \bar{I}_2 \cdot \bar{z}_{\text{наб}} = \bar{I}_2 \cdot (r_{\text{наб}} + j x_{\text{наб}}) = \underbrace{\bar{I}_2 \cdot r_{\text{наб}}}_{\Delta U_{r_{\text{наб}}}} + j \underbrace{\bar{I}_2 \cdot x_{\text{наб}}}_{\Delta U_{x_{\text{наб}}}},$$

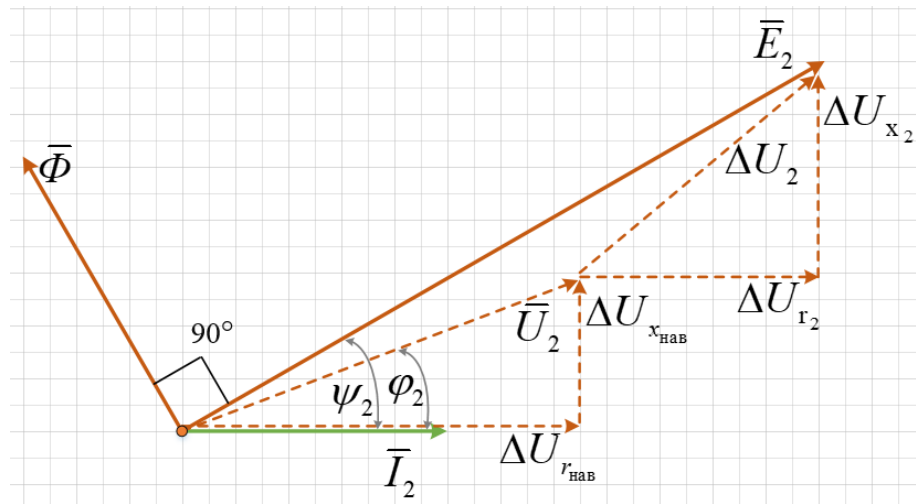
яке визначає кут зміщення φ_2 між напругою $\bar{U}_2$ і струмом навантаження $\bar{I}_2$.



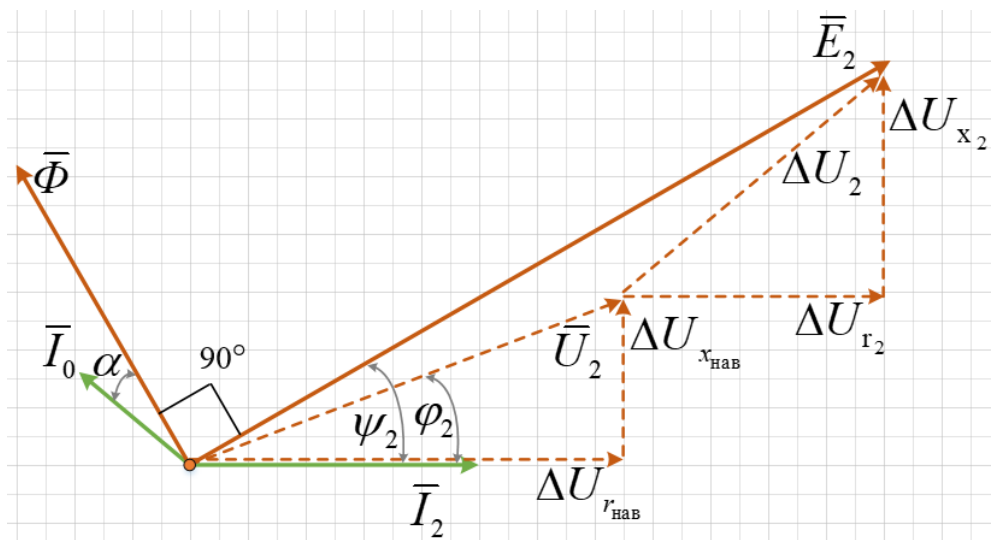
Струм $\bar{I}_2$ створює також падіння напруги в активному r_2 та індуктивному x_2 опорах вторинної обмотки трансформатора струму

$$\Delta \bar{U}_2 = \bar{I}_2 \cdot \bar{z}_2 = \bar{I}_2 \cdot (r_2 + j x_2) = \underbrace{\bar{I}_2 \cdot r_2}_{\Delta U_{r_2}} + j \underbrace{\bar{I}_2 \cdot x_2}_{\Delta U_{x_2}}$$

яке визначає кут зміщення ψ_2 між ЕРС $\bar{E}_2$ і струмом навантаження $\bar{I}_2$.



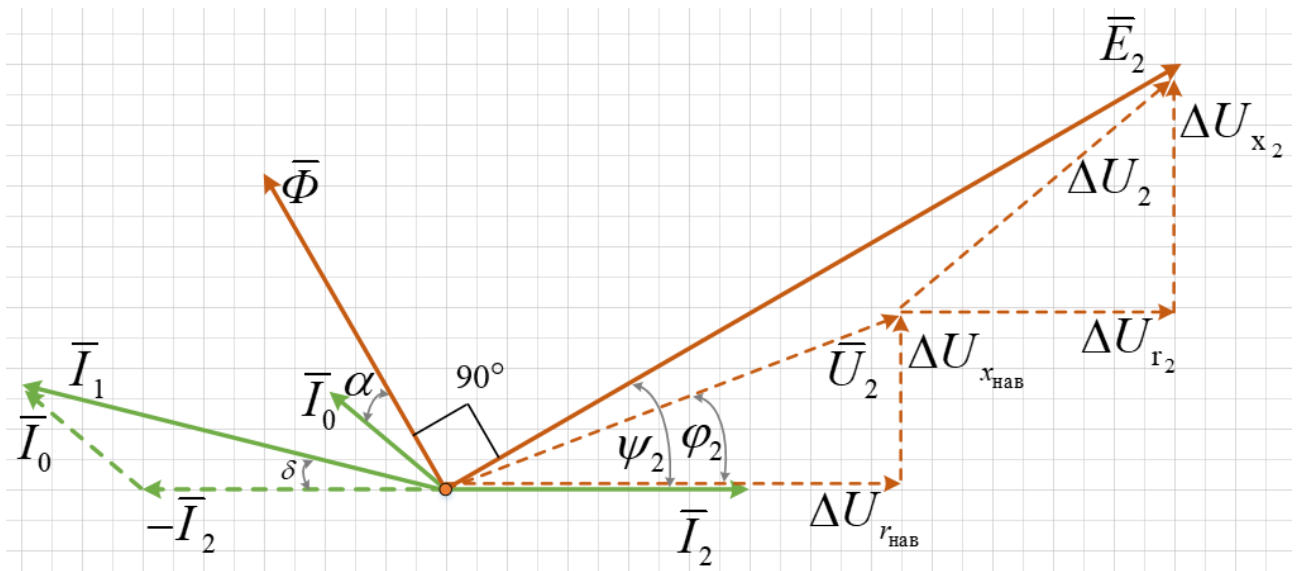
Струм намагнічення $\vec{I}_0$ обумовлює наявність втрат в осерді магнітопроводу. Він випереджає за фазою вектор потоку $\vec{\Phi}$ на кут α :



Струм навантаження $\vec{I}_2$ має розмагнічуючу дію, тому:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_0 - \vec{I}_2$$

Кут δ між векторами первинного $\vec{I}_1$ і вторинного $\vec{I}_2$ струму визначає кутову похибку:



Струм $\bar{I}_1$ створює також падіння напруги в активному r_1 та індуктивному x_1 опорах первинної обмотки трансформатора струму

$$\Delta \bar{U}_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{z}_1 = \bar{I}_1 \cdot (r_1 + j x_1) = \underbrace{\bar{I}_1 \cdot r_1}_{\Delta U_{r_1}} + j \underbrace{\bar{I}_1 \cdot x_1}_{\Delta U_{x_1}}$$

і визначає напругу первинної обмотки

$$\bar{U}_1 = -\bar{E}_2 + \Delta \bar{U}_1$$

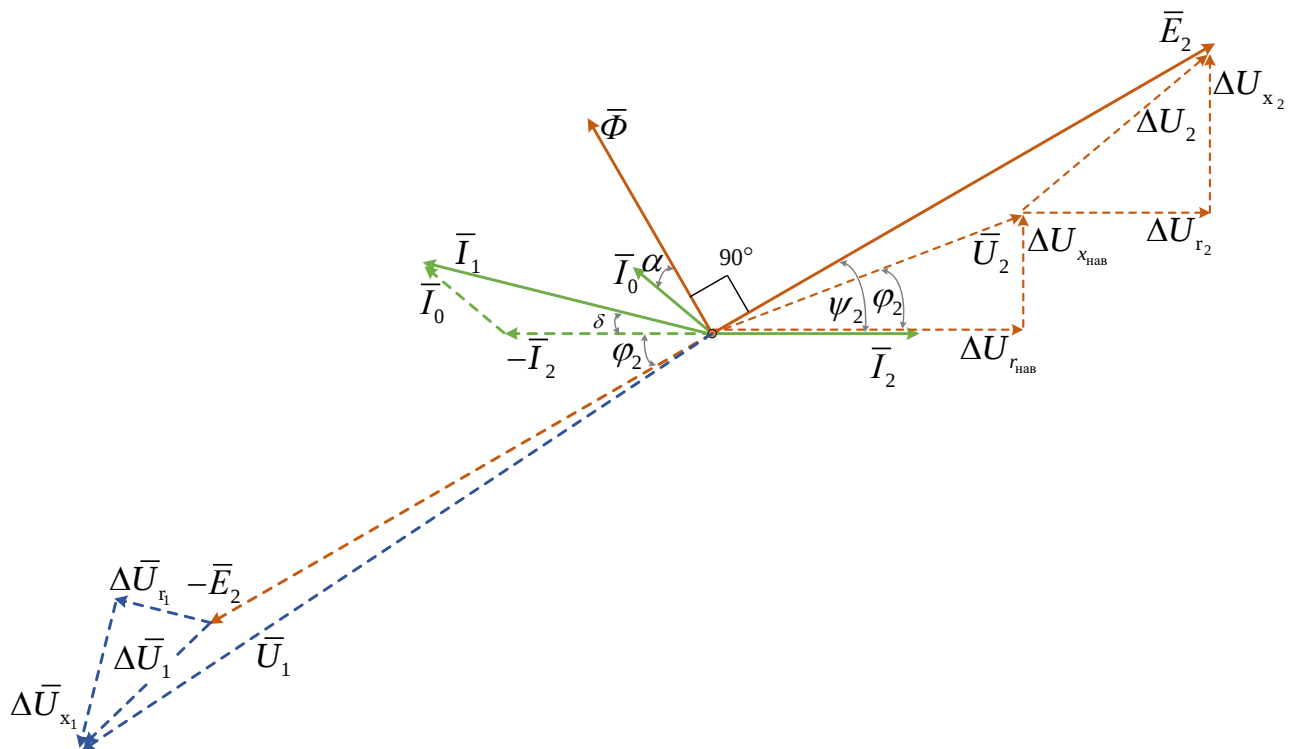


Рисунок 3.3 – Векторна діаграма ТС

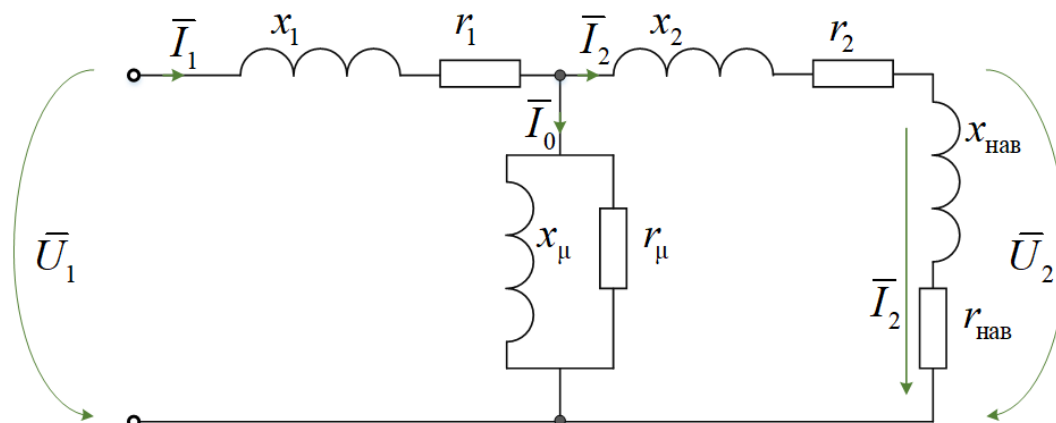


Рисунок 3.4 – Схема заміщення ТС

Коефіцієнт трансформації ТС: $k_{\text{ном}} = \frac{I_{1.\text{ном}}}{I_{2.\text{ном}}}$. Для ідеального ТС: $I_0 \approx 0$.

В реальному ТС через недосконалість конструкції та втрат в осерді та обмотках виникають похибки, які знижують точність вимірювань.

Розрізняють:

- похибку струму ТС: $\Delta I_{\%} = \frac{k_{\text{ном}} \cdot I_2 - I_1}{I_1} \cdot 100$;

- кутову похибку ТС $\delta \approx \text{tg} \delta \approx \frac{I_0 \cdot w_2 \cdot \cos \psi_2}{I_1 \cdot w_1}$;

- повну похибку ТС.

На значення похибок ТС впливає переважно:

- струм намагнічування сталі осердя I_0 ;
- переріз магнітопроводу;
- зміна магнітної проникності проводу;
- величина вторинного навантаження ТС $z_2 \leq z_{2.\text{ном}}$;
- опір контактів та обладнання;
- кратність первинного фактичного струму до номінального значення.

Наприклад, ТС типу ТФЗМ-220Б-1 має чотири варіанти виконання вторинних обмоток: 0,5/10Р/10Р/10Р, і відповідає схемі рис. 3.2, в.

Трансформатори струму класу 0,2 застосовуються для точних

вимірювань, електротехнічних лабораторій; 0,5 та 1,0 – вимірювальних приладів розподільчих пристроїв, приладів обліку; 3,0 та 10 – для схем релейного захисту та автоматики.

Схеми з'єднання вимірювальних ТС в трифазній мережі:

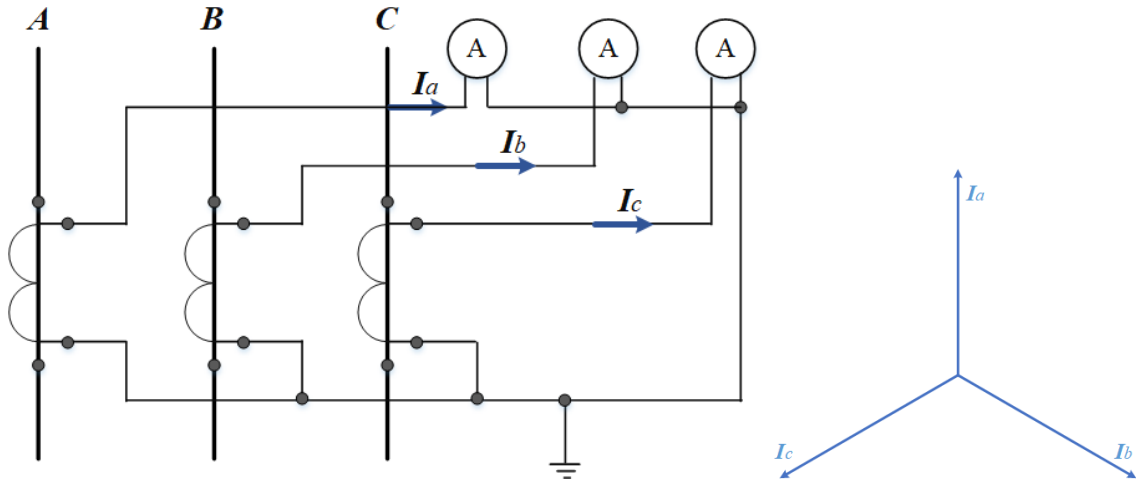


Схема повної зірки

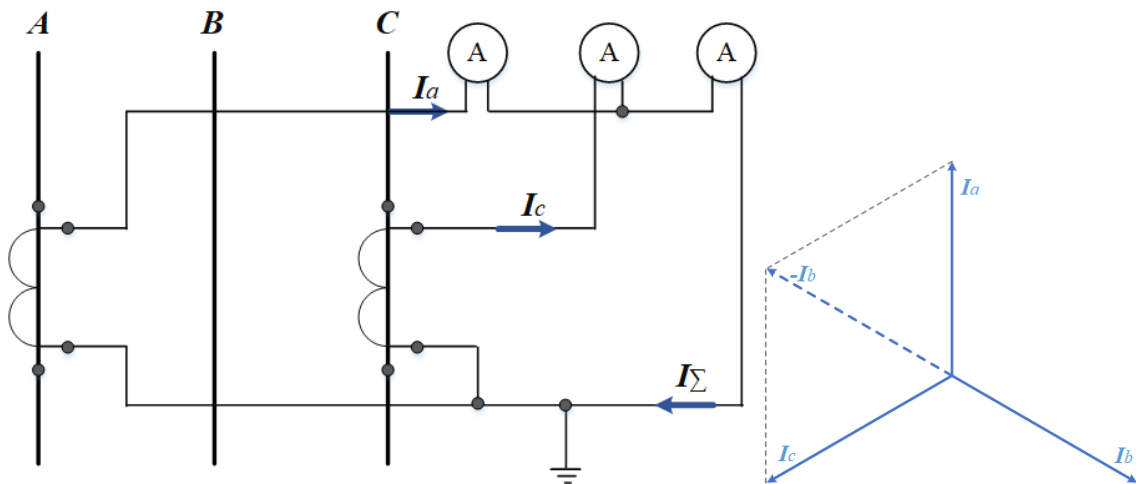
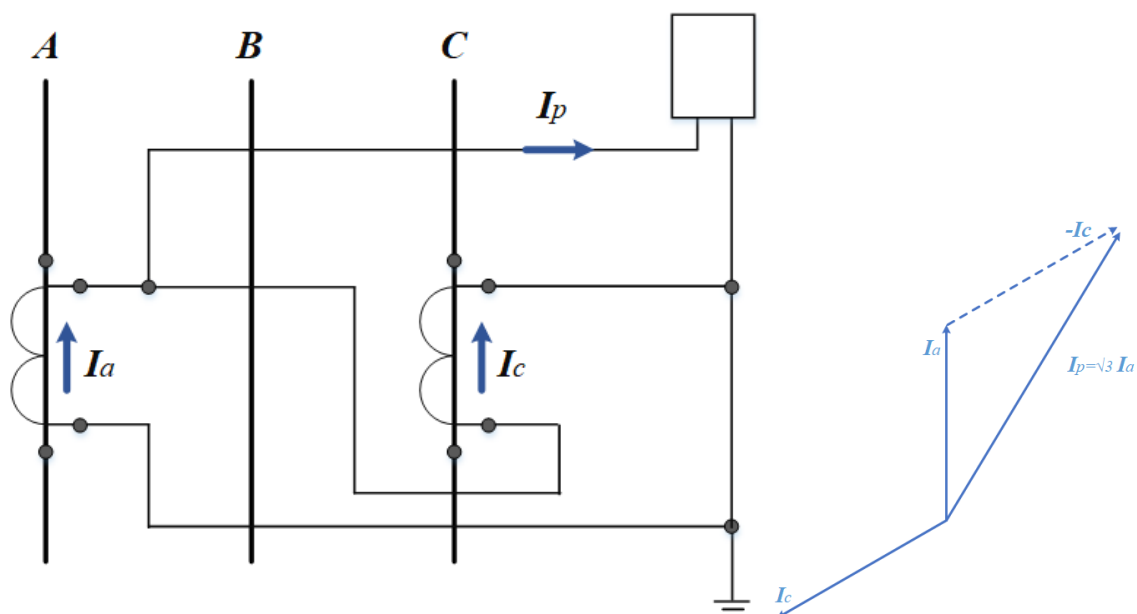


Схема неповної зірки



Двофазна схема з включенням реле на різницю струмів двох фаз

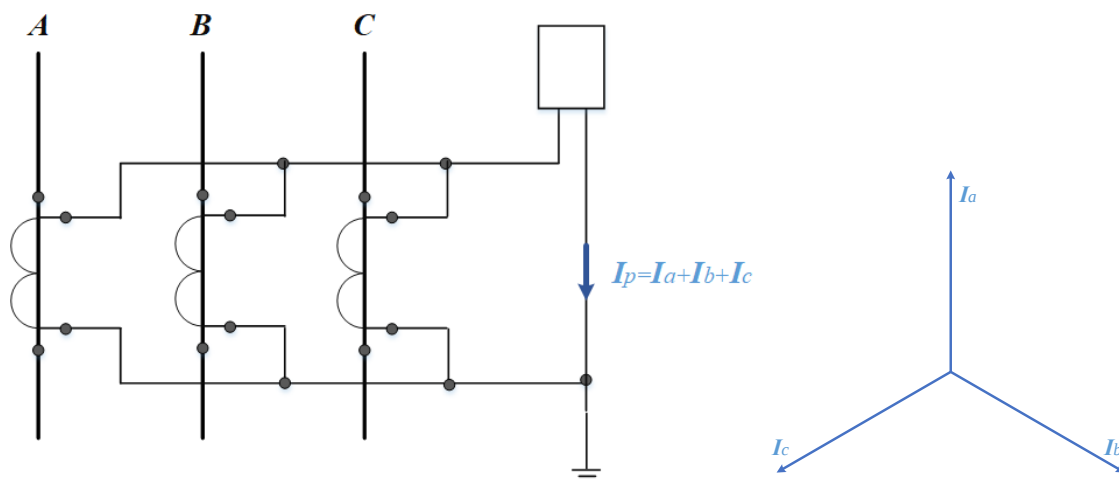


Схема з включенням реле як фільтр нульової послідовності

Вимірювальні трансформатори напруги (ТН) своєю первинною обмоткою включаються паралельно до ланцюга високої напруги. У вторинний ланцюг прилади включаються також паралельно. Їх режим роботи близький до режиму холостого ходу. Вводи в ТН та ізоляція первинної обмотки обираються за напругою первинного ланцюга. Номінальна напруга вторинної обмотки зазвичай 100 В, $100/\sqrt{3}$, $100/3$, $\sqrt{3} \cdot 100$.

Схеми включення ТН – рис. 3.5: а, б – однофазний ТН; в – трифазний ТН.

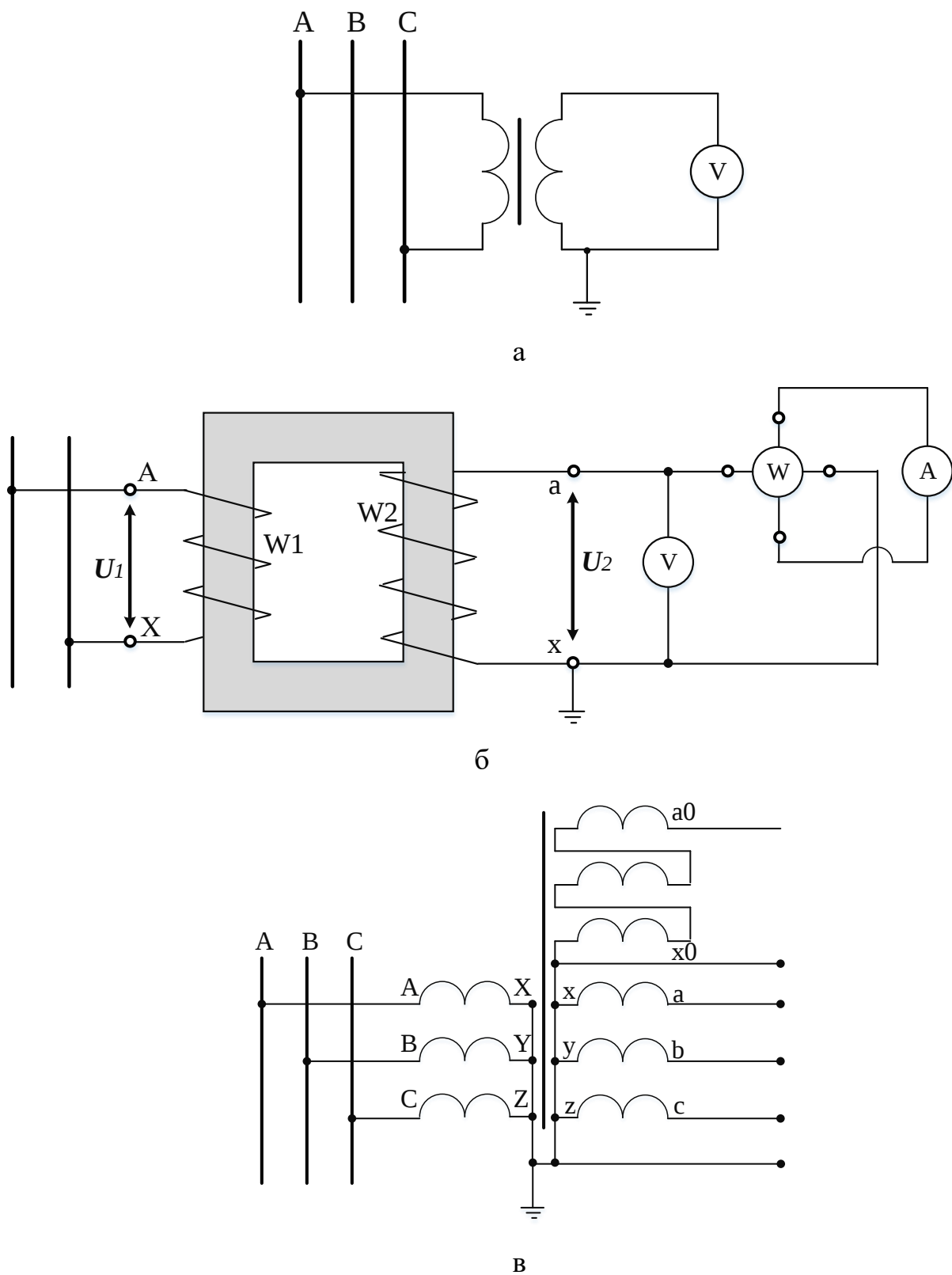


Рисунок 3.5 – Схеми включення ТН

У ТН також розрізняють похибку напруги: $\Delta U_{\%} = \frac{k_{\text{Т.НОМ}} \cdot U_2 - U_1}{U_1} \cdot 100\%$, де

$k_{\text{т.ном}} = \frac{U_{1.\text{ном}}}{U_{2.\text{ном}}}$ - коефіцієнт трансформації, і кутову похибку, яка обумовлена кутом δ між векторами первинної $U_{1.\text{ном}}$ та вторинної (повернутої на 180 градусів) $U_{2.\text{ном}}$ напруг ТН.

Класи точності такі ж, як у ТС. На значення похибок впливають, в основному, втрати в магнітопроводі на перемагнічування та вихрові струми; нагрівання обмоток.

Практична частина

Завдання 3.1. Визначити опір шунта для розширення межі вимірювання амперметра (табл. 3.1), якщо заданий опір амперметра (Ом), межа вимірювання до, і максимальне число поділок. Визначити відносну похибку вимірювання на позначці – фактичне число поділок, якщо заданий клас точності приладу.

Таблиця 3.1 – Вихідні дані

№ ва-ріанту	Опір амперметра Ом	Максимальне число поділок	Межа вимірювання до	Межа вимірювання після	Клас точності	Фактичне число поділок
1	200	100	15	25	0,05	60
2	250	150	10	30	0,1	90
3	300	200	15	35	0,2	120
4	350	150	25	40	0,5	90
5	300	100	15	35	1,0	60
6	250	150	20	30	1,5	90
7	200	200	15	25	2,5	120
8	150	150	10	30	4,0	90
9	200	100	15	35	2,5	60
10	250	150	20	40	1,5	90
11	300	200	15	35	1,0	120
12	350	150	10	30	0,5	90
13	300	100	15	25	0,2	60
14	250	150	20	30	0,1	90
15	200	200	15	35	0,05	120

Розглянемо приклад виконання.

Необхідно виміряти струм у межах 20 – 25 А. Маємо амперметр з межею вимірювання 200 мкА, внутрішнім опором 300 Ом і максимальним числом поділок 100. Визначити опір шунта для розширення межі вимірювання до 30 А і відносну похибку вимірювання на позначці 85 поділок, якщо клас точності приладу 1,0.

Необхідно спочатку визначити коефіцієнт шунтування:

$$n = \frac{I}{I_A} = \frac{30}{200 \cdot 10^{-6}} = 15 \cdot 10^4.$$

$$\text{Тоді } r_{ш} = \frac{r_A}{n-1} = \frac{300}{15 \cdot 10^4 - 1} = 2 \cdot 10^{-3}.$$

Визначаємо показання амперметра, що відповідає 85 поділкам, для чого ціну поділки 0,3 А/под (30 А / 100 поділок) помножимо на число поділок 85, тоді прилад покаже: $I = 0,3 \cdot 85 = 25,5 \text{ А}$.

Відносна похибка у цій точці:

$$\beta = \frac{\Delta I_{\max}}{I} \cdot 100\% = \frac{0,3}{25,5} \cdot 100\% = 1,18 \approx 1,2\%,$$

$$\text{де } \Delta I_{\max} = \frac{30}{100} \cdot 1\% = 0,3 \text{ А}.$$

Завдання 3.2.

У мережі змінного струму через трансформатор струму (ТС) (табл. 3.2 $I_{1.\text{ном}} / I_{2.\text{ном}}$ А) і трансформатор напруги (ТН) (табл. 3.2 $U_{1.\text{ном}} / U_{2.\text{ном}}$ В) увімкнені амперметр, вольтметр і ватметр. Для приладів заданий клас точності (0,5), максимальне число поділок 200 і їх показання (табл. 3.2).

Визначити повну потужність S_m , що споживається мережею, її повний опір Z_m і коефіцієнт потужності $\cos \varphi$, найбільшу абсолютну ΔZ_m і відносну β похибки вимірювання повного опору, враховуючи клас точності приладів.

Таблиця 3.2 – Вихідні дані

№ ва-ріанту	ТС	ТН	Амперметр		Вольтметр		Ватметр	
	$I_{1.ном} / I_{2.ном}$	$U_{1.ном} / U_{2.ном}$	Межа вимірювання, А	Фактичний показник у поділках	Межа вимірювання, В	Фактичний показник у поділках	Межа вимірювання ВА	Фактичний показник у поділках
1	100/5	600/100	3	125	200	160	3x200	80
2	150/5	500/100	5	100	150	140	5x150	90
3	200/5	600/150	5	85	300	120	5x300	120
4	300/5	500/150	4	75	150	100	4x150	150
5	400/5	600/100	5	100	300	120	5x300	120
6	300/5	500/100	4	125	200	140	4x200	90
7	200/5	600/150	3	135	150	140	3x150	100
8	150/5	500/150	3	115	200	160	3x200	80
9	100/5	600/100	3	100	150	140	3x150	90
10	150/5	500/100	3	95	200	120	3x200	120
11	200/5	600/150	4	85	250	100	4x250	150
12	300/5	500/150	4	75	300	120	4x300	120
13	400/5	500/100	5	125	150	140	5x150	90
14	300/5	600/150	5	165	200	140	5x200	100
15	200/5	500/150	4	65	200	160	4x200	150

Розглянемо приклад виконання.

У мережі змінного струму через трансформатор струму 100/2,5 А і трансформатор напруги 600/150 увімкнені амперметр, вольтметр і ватметр, які показали відповідно 100, 120 і 88 поділок.

Межі вимірювання приладів такі: амперметр – 3 А, вольтметр – 150 В, ватметр – 2,5 А по струму, 150 В по напрузі. Усі прилади класу точності 0,5 мають максимальне число поділок 150.

Визначаємо ціну поділки кожного приладу як відношення виміру до максимального числа поділок. Для амперметра ціна поділки $3/150=0,02$ А/под, для вольтметра – $150/150=1$ В/под, для ватметра – $=2,5 \cdot 150/150=2,5$ Вт/под.

Тоді показання приладів:

$$I = 100 \cdot 0,02 = 2 \text{ A}; U = 120 \cdot 1 = 120 \text{ B}; P = 2,5 \cdot 88 = 220 \text{ Вт}.$$

Коефіцієнти трансформації:

$$k_I = \frac{I_{1\text{ном}}}{I_{2\text{ном}}} = \frac{100}{2,5} = 40; k_U = \frac{U_{1\text{ном}}}{U_{2\text{ном}}} = \frac{600}{150} = 4.$$

Струм, напруга й активна потужність мережі:

$$I_{\text{м}} = k_I \cdot I = 40 \cdot 2 = 80 \text{ A};$$

$$U_{\text{м}} = k_U \cdot U = 4 \cdot 120 = 480 \text{ B};$$

$$P_{\text{м}} = k_I \cdot k_U \cdot P = 40 \cdot 4 \cdot 220 = 35,2 \text{ кВт}.$$

Повну потужність, що споживає мережа, визначаємо через струм і напругу: $S_{\text{м}} = U_{\text{м}} \cdot I_{\text{м}} = 480 \cdot 80 = 38,4 \text{ кВ} \cdot \text{А}.$

$$\text{Коефіцієнт потужності: } \cos \varphi = \frac{P_{\text{м}}}{S_{\text{м}}} = \frac{35,2}{38,4} = 0,92.$$

$$\text{Повний опір мережі: } Z_{\text{м}} = \frac{U_{\text{м}}}{I_{\text{м}}} = \frac{480}{80} = 6 \text{ Ом}.$$

Найбільше значення повного опору мережі:

$$Z_{\text{м max}} = \frac{U_{\text{м max}}}{I_{\text{м min}}} = \frac{120 \cdot \left(1 + \frac{0,5}{100}\right) \cdot 4}{2 \cdot \left(1 - \frac{0,5}{100}\right) \cdot 40} = 6,06 \text{ Ом}$$

Звідки абсолютна похибка:

$$\Delta Z_{\mathcal{M}} = Z_{\mathcal{M}\max} - Z_{\mathcal{M}} = 6,06 - 6 = 0,06 \text{ Ом}.$$

Відносна похибка виміру:

$$\beta = \frac{\Delta Z_{\mathcal{M}}}{Z_{\mathcal{M}}} \cdot 100 = \frac{0,06}{6} \cdot 100 = 1\%.$$

У відповідності з отриманими даними наводяться висновки.

Питання для самоперевірки

1. Режим роботи трансформатора струму.
2. Режим роботи трансформатора напруги
3. Схеми підключення трансформаторів струму.
4. Схеми підключення трансформаторів напруги.

Література

[6, 7].

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4

ДОСЛІДЖЕННЯ МОСТОВИХ СХЕМ

Мета роботи: дослідити мостові схеми вимірювання.

Теоретична частина

Як добре відомо, принцип вимірювання мостової схеми полягає у порівнянні вимірюваної величини із зразковою (мірою). Область застосування мостових схем: як засіб вимірювання (опора, індуктивності, ємності, добротності, тангенса кута втрат або температури, переміщення тощо); як прилади автоматики, як фільтри. Класифікують мостові схеми: постійного і змінного струму. Роздивимося мости постійного струму (рис. 4.1).

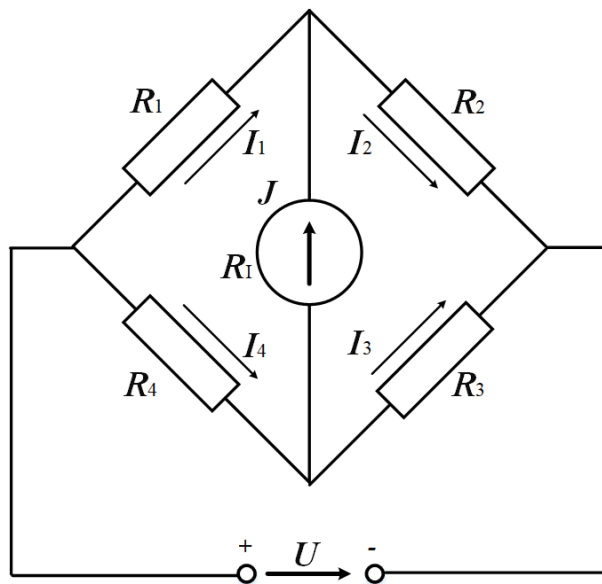


Рисунок 4.1 – Схема моста постійного струму

Визначимо рівняння рівноваги. Пронумеруємо вузли (рис. 4.2) та використаємо перший закон Кірхгофа для 2 і 3 вузлів:

- для вузла 2:

$$I_1 + J - I_2 = 0; \quad (4.1)$$

- для вузла 3:

$$I_4 - J - I_3 = 0. \quad (4.2)$$

З рівняння (4.1): $I_2 = I_1 + J$. З рівняння (4.2): $I_3 = I_4 - J$.

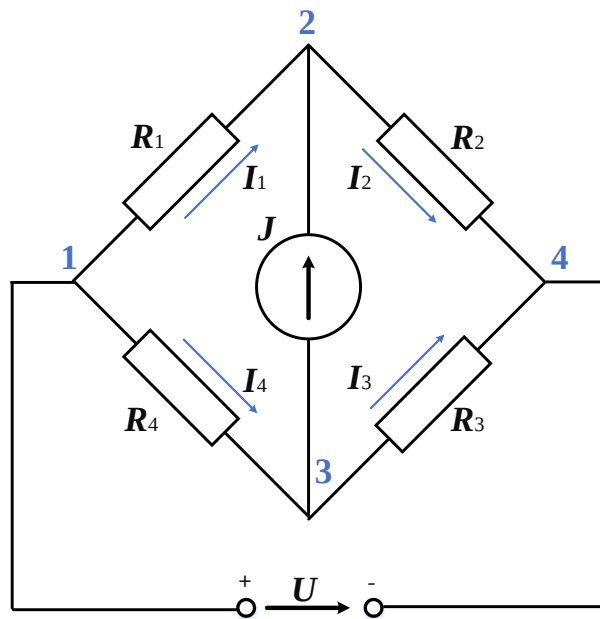


Рисунок 4.2

За другим законом Кірхгофа:

- перший контур: $I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = -U$;

$$I_1 \cdot R_1 + (I_1 + J) \cdot R_2 = -U ;$$

$$I_1 \cdot (R_1 + R_2) + J \cdot R_2 = -U . \quad (4.3)$$

- другий контур: $I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = -U$;

$$(I_4 - J) \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = -U ;$$

$$I_4 \cdot (R_3 + R_4) - J \cdot R_3 = -U . \quad (4.4)$$

- третій контур:

$$I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 - J \cdot R_1 = 0 \quad (4.5)$$

Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 \cdot (R_1 + R_2) + J \cdot R_2 = -U \\ I_4 \cdot (R_3 + R_4) - J \cdot R_3 = -U \\ I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 - J \cdot R_1 = 0 \end{cases}$$

і перетворення до виду зручного до розв'язання:

$$\begin{cases} I_1 \cdot (R_1 + R_2) + I_4 \cdot 0 + J \cdot R_2 = -U \\ I_1 \cdot 0 + I_4 \cdot (R_3 + R_4) + J \cdot (-R_3) = -U \\ I_1 \cdot R_1 + I_4 \cdot (-R_4) + J \cdot (-R_1) = 0 \end{cases}$$

Далі:

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2) & 0 & R_2 \\ 0 & (R_3 + R_4) & (-R_3) \\ R_1 & (-R_4) & (-R_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_4 \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U \\ -U \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матриця опорів:

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2) & 0 & R_2 \\ 0 & (R_3 + R_4) & (-R_3) \\ R_1 & (-R_4) & (-R_1) \end{pmatrix} =$$

$$= -R_1 \cdot (R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4) - R_3 \cdot R_4 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot R_2 \cdot (R_3 + R_4)$$

Струм в індикаторі:

$$J = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} (R_1 + R_2) & 0 & -U \\ 0 & (R_3 + R_4) & -U \\ R_1 & (-R_4) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{U}{\Delta} \cdot [R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_4 - R_4 \cdot R_1 - R_4 \cdot R_2] = \frac{U}{\Delta} \cdot [R_1 \cdot R_3 - R_4 \cdot R_2]$$

Остаточно струм в індикаторі:

$$J = \frac{U \cdot [R_1 \cdot R_3 - R_4 \cdot R_2]}{R_1 \cdot (R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4) + R_3 \cdot R_4 \cdot (R_1 + R_2) + R_1 \cdot R_2 \cdot (R_3 + R_4)}.$$

Рівняння рівноваги:

$$R_1 \cdot R_3 = R_4 \cdot R_2. \quad (4.6)$$

Рівняння вимірювання:

$$R_1 = R_2 \cdot \frac{R_4}{R_3}. \quad (4.7)$$

Мости змінного струму (рис. 4.3). В плечах схеми моста постійного струму замінюємо опір резисторів R повними опорами двополюсників $\bar{Z} = r + jx$, і отримаємо принципову схему моста змінного струму. В діагоналі моста включаємо джерело змінної напруги $\sim U$ й індикатор з вхідним опором $\bar{Z}_{\text{інд}}$.

Струм в діагоналі індикатора моста змінного струму:

$$I_{\text{інд}} = U_{\text{м}} \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_4}{\bar{Z}_{\text{інд}} \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \cdot (\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4) + \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2 \cdot (\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4) + \bar{Z}_3 \cdot \bar{Z}_4 \cdot (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)}.$$

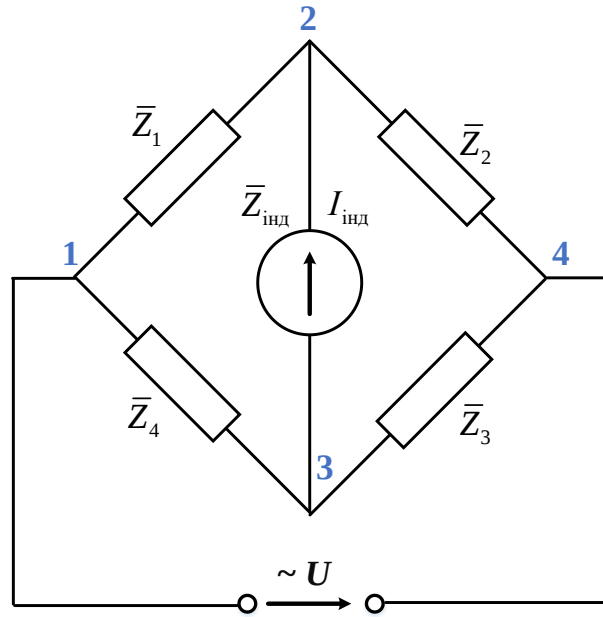


Рисунок 4.3 – Схема мосту змінного струму

Індикатори мостів змінного струму мають значний вхідний опір $\bar{Z}_{\text{інд}}$.

Напруга на вході індикатора:

$$U_{2-3} \approx U_m \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_4}{(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) \cdot (\bar{Z}_3 + \bar{Z}_4)}.$$

Умова рівноваги мосту змінного струму – струм $I_{\text{інд}}$ і напруга $U_{\text{інд}}$ в діагоналі індикатора дорівнюють нулю. Умова досягається при виконанні умови рівності добутків повних опорів протилежних плечей: $\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_3 = \bar{Z}_2 \cdot \bar{Z}_4$.

Для комплексних величин умова рівноваги в показовій формі:

$$|Z_1| \cdot e^{j\varphi_1} \cdot |Z_3| \cdot e^{j\varphi_3} = |Z_2| \cdot e^{j\varphi_2} \cdot |Z_4| \cdot e^{j\varphi_4},$$

де $|Z_1|, |Z_2|, |Z_3|, |Z_4|$ – модулі повних опорів плечей, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ – фазні зсуви між струмом і напругою в відповідних плечах.

Отже рівняння рівноваги розкладається на дві умови рівноваги:

$$\begin{cases} |Z_1| \cdot |Z_3| = |Z_2| \cdot |Z_4|; \\ \varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4. \end{cases}$$

Висновок: міст змінного струму можна врівноважити регулюванням не менше двох елементів схеми зі змінними параметрами, тобто потрібно досягати рівноваги по модулях $|Z|$ і за фазами окремо φ .

При роздільному регулюванні активних і реактивних складових, змінюються одночасно і модуль $|Z|$, і фаза φ , тому міст змінного струму можна привести в рівновагу лише послідовними наближеннями.

Швидкість досягнення рівноваги, тобто число послідовних регулювань одного й іншого параметра, визначається збіжністю моста, яка є важливою характеристикою конструкції будь-якого мосту змінного струму.

Друга умова рівноваги мосту змінного струму вимагає, щоб суми фазових зрушень φ протилежних плечей були рівні один одному і визначає можливість побудови схеми мосту.

Якщо в протилежні плечі, наприклад, в перше і третє плече, включені резистори R , то в інші два протилежні плечі, друге і четверте, повинні включатися відповідно котушка індуктивності L і конденсатор C .

Якщо в суміжних плечах, наприклад, в першому і другому, включені резистори R , то в інші суміжні плечі повинні бути включені однакові реактивні опори – або індуктивні L , або ємнісні C .

Очевидно, що в усі плечі можна включати двополюсники з опорами однакового характеру.

Міст Віна – використовується для вимірювання індуктивності.

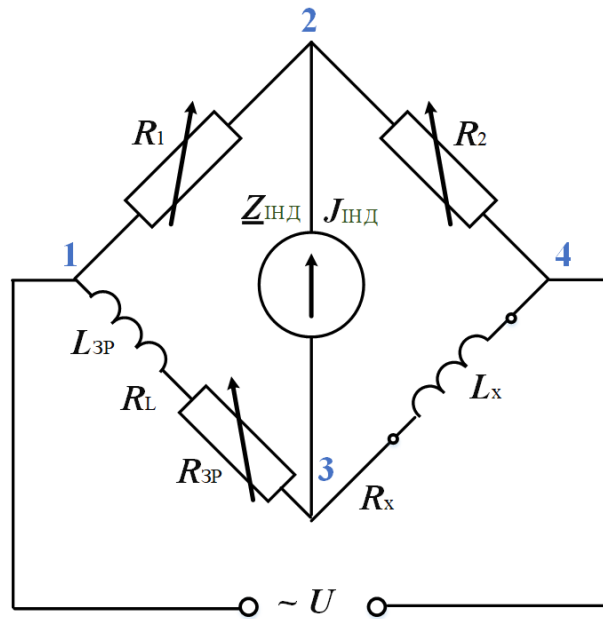


Рисунок 4.4 – Міст змінного струму (міст Віна)

Плечі:

перше і друге – резистори з опорами R_1 і R_2 ;

третє - вимірювана котушка індуктивності L_x з опором втрат R_x ,

четверте - послідовно з'єднані зразкова котушки (L_{zp} , R_L) і зразковий резистор R_{zp} .

Умова рівноваги моста Віна:

$$R_1 \cdot (R_x + j\omega L_x) = R_2 \cdot (R_{zp} + R_L + j\omega L_{zp});$$

$$R_1 \cdot R_x + j\omega R_1 \cdot L_x = R_2 \cdot (R_{zp} + R_L) + j\omega R_2 \cdot L_{zp}.$$

Прирівнявши дійсні і уявні складові, отримаємо:

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot (R_{zp} + R_L); L_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot L_{zp}; Q_x = \frac{\omega L_x}{R_x} = \frac{L_{zp}}{R_{zp} + R_L}.$$

Міст Соті – використовується для вимірювання ємності.

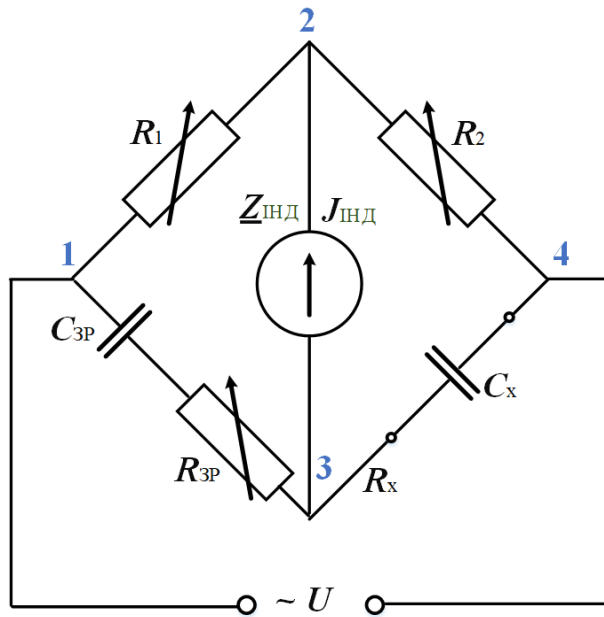


Рисунок 4.5 – Міст змінного струму (міст Соті)

Плечі:

перше і друге – резистори з опорами R_1 і R_2 ;

третє – вимірювана ємність C_x з опором втрат R_x ,

четверте – послідовно з'єднані зразкова ємність ($C_{зр}$) і зразковий резистор $R_{зр}$.

Умова рівноваги моста Соті:

$$R_1 \cdot \left(R_x + \frac{1}{j\omega C_x} \right) = R_2 \cdot \left(R_{зр} + \frac{1}{j\omega C_{зр}} \right).$$

Прирівнявши дійсні і уявні складові, отримаємо:

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot R_{зр}; \quad C_x = \frac{R_2}{R_1} \cdot C_{зр}; \quad \varphi_x = \varphi_{зр}.$$

Мости Віна і Соті – мости відношення плечей.

Для визначення невідомої величини (L_x , C_x) потрібно мати відому

величину відношення опорів суміжних плечей.

Вимірювання індуктивності і її добротності можна виконати за допомогою моста Максвелла.

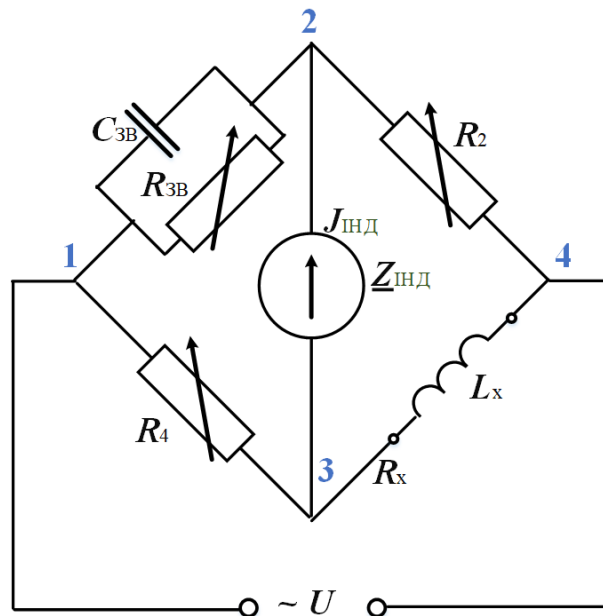


Рисунок 4.6 – Міст змінного струму (міст Максвелла)

Міст Максвелла.

Плечі:

друге і четверте – резистори з опорами R_2 і R_4 ;

третє – вимірювана індуктивність L_x з опором втрат R_x ,

перше – паралельно з'єднані зразкова ємність (C_{3P}) і зразковий резистор R_{3P} .

Умова рівноваги моста Максвелла:

$$Z_{3P} \cdot Z_x = R_2 \cdot R_4;$$

$$\frac{R_{3P}}{1 + j\omega \cdot C_{3P} \cdot R_{3P}} \cdot (R_x + j\omega L_x) = R_2 \cdot R_4.$$

Прирівнявши дійсні і уявні складові, отримаємо:

$$R_x = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_{3P}}; L_x = R_2 \cdot R_4 \cdot C_{3P}; Q_x = \frac{\omega L_x}{R_x} = R_{3P} \cdot \omega \cdot C_{3P}.$$

Міст Максвелла називають мостом добутку плечей.

Практична частина

Плечі мосту постійного струму (рис. 4.7) в стані рівноваги мають такі опори: R_2 , R_3 , R_4 , Ом. Визначити вимірюваний опір R_1 та струми I_1 та I_3 у протилежних плечах в момент рівноваги, якщо напруга живлення становила $U_{дж}$, В.

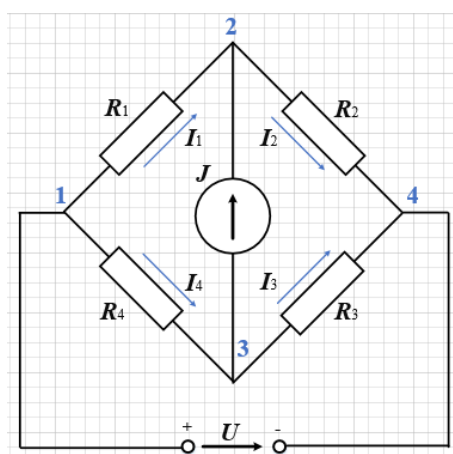


Рисунок 4.7 – Схема моста постійного струму

Таблиця 4.1 – Вихідні дані

№ варіанту	$U_{дж}$ В	R_2 Ом	R_3 Ом	R_4 Ом
1	10	12	10	15
2	20	18	15	20
3	30	22	20	25
4	40	26	25	20
5	50	32	30	15
6	60	26	35	20
7	50	22	30	25
8	40	18	25	20

№ варіанту	$U_{дж}$ В	R_2 Ом	R_3 Ом	R_4 Ом
9	30	12	20	15
10	20	18	15	20
11	10	22	10	25
12	20	26	15	20
13	30	32	20	15
14	40	26	25	20
15	50	22	30	25

Приклад розв'язання.

Плечі мосту постійного струму (рис. 4.7) в стані рівноваги мають такі опори: $R_2 = 15 \text{ Ом}$; $R_3 = 35 \text{ Ом}$; $R_4 = 25 \text{ Ом}$. Визначити вимірюваний опір R_1 та струми I_1 та I_3 у протилежних плечах в момент рівноваги, якщо напруга живлення становила $U_{дж} = 60 \text{ В}$.

Кафедра «Електронної техніка» має лабораторний стенд НТЦ-05.08.1 «Електричні вимірювання» призначений для використання як навчального обладнання під час проведення робіт з дослідження характеристик і параметрів основних вимірювальних пристроїв. За допомогою лабораторного стенду можна вимірювати, проаналізувати і розрахувати параметри елементів електричних схем мостовим методом.

В умовах дистанційного навчання використаємо програмне забезпечення Multisim.

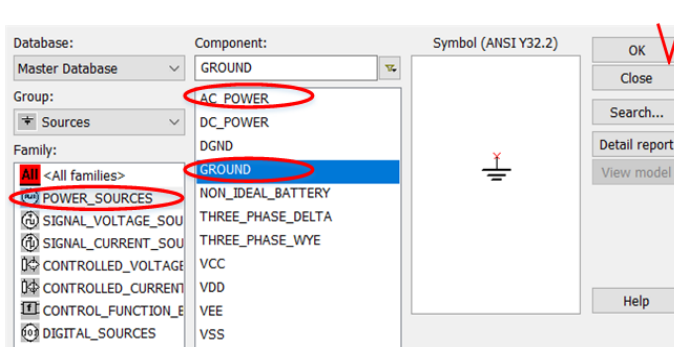
Вкладка

Place Source/Power Source

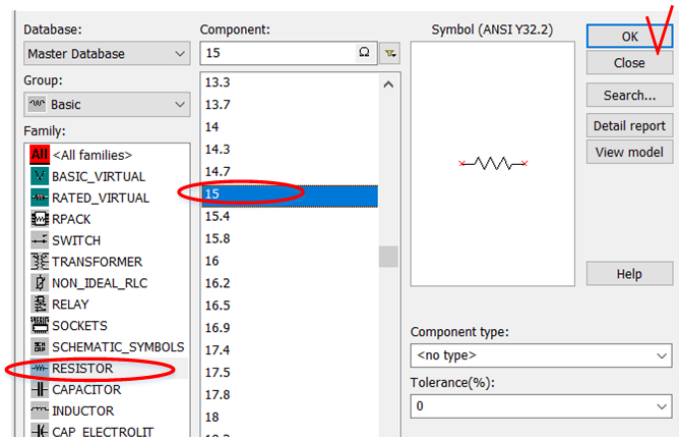
раємо два елементи:

- DC-Power;
- Ground.

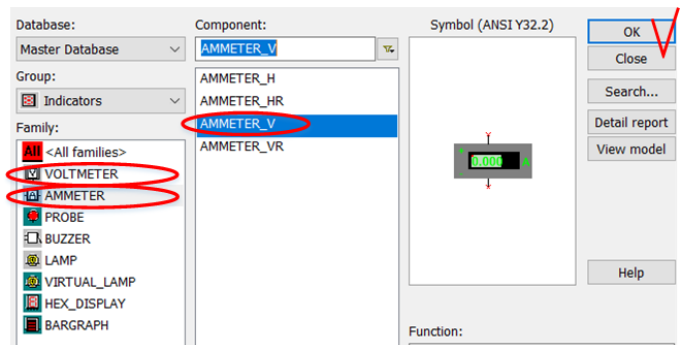
оби-



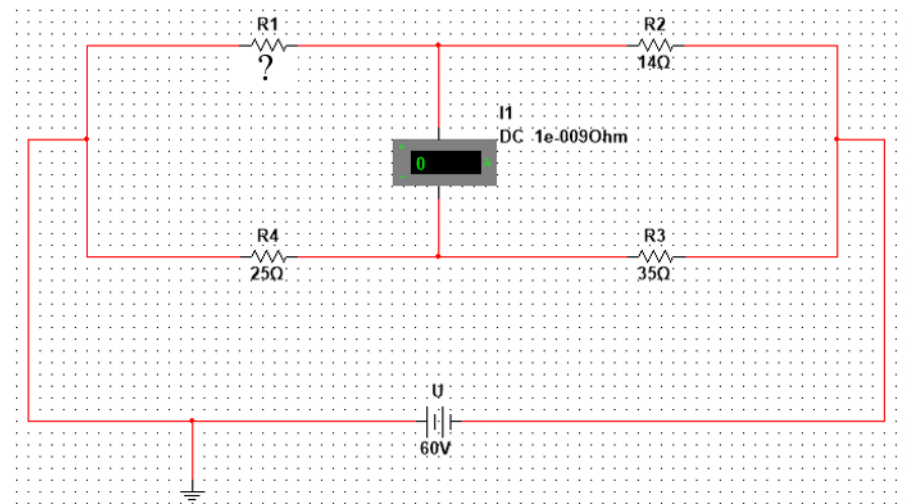
Вкладка Place Basic
обираємо чотири однотипні елементи: Resistor.



Вкладка Place Indicator
обираємо два елементи:
- Voltmeter;
- Ammeter.



Отримуємо робочу схему для досліджень:



Невідомий опір:

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_3} = \frac{15 \cdot 25}{35} = 10,714 \text{ Ом}.$$

Загальний струм:

$$I_{\Sigma} = \frac{U_{\text{ДЖ}}}{\frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{60}{\frac{10,714 \cdot 25}{10,714 + 25} + \frac{15 \cdot 35}{15 + 35}} = 3,333 \text{ A}$$

Падіння напруги на опорі $U_{R_1-R_4}$:

$$U_{R_1-R_4} = I_{\Sigma} \cdot \frac{R_1 \cdot R_4}{R_1 + R_4} = 3,333 \cdot \frac{10,714 \cdot 25}{10,714 + 25} = 25 \text{ B.}$$

Падіння напруги на опорі $U_{R_2-R_3}$:

$$U_{R_2-R_3} = I_{\Sigma} \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = 3,333 \cdot \frac{15 \cdot 35}{15 + 35} = 35 \text{ B.}$$

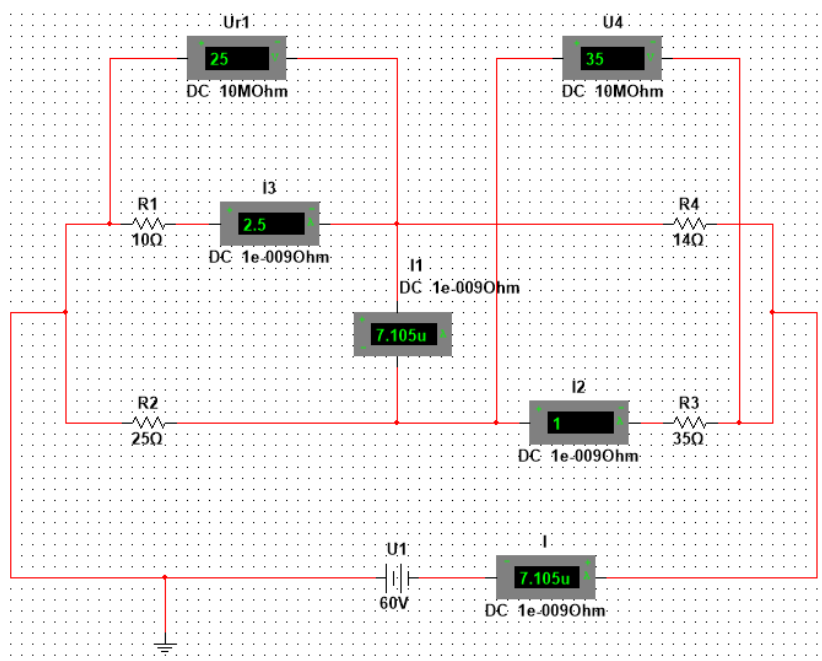
Перевірка:

$$U_{\text{ДЖ}} = U_{R_1-R_4} + U_{R_2-R_3} = 25 + 35 = 60 \text{ B.}$$

Струм в опорі R_1 : $I_1 = \frac{U_{R_1-R_4}}{R_1} = \frac{25}{10,714} = 2,333 \text{ A.}$

Струм в опорі R_3 : $I_3 = \frac{U_{R_2-R_3}}{R_3} = \frac{35}{35} = 1 \text{ A}$

Шляхів виконання роботи два: або в **Multisim**, або ручним розрахунком.



Завдання 4.2. При вимірюванні індуктивності L_x з опором R_x мостом змінного струму (міст Віна) (рис. 4.4) значення зразкової котушки індуктивності становить L_0 , Гн, з опором R_0 , Ом, опір другого плеча – R_2 , Ом. Вихідні дані в табл. 4.1.

Визначити значення індуктивності L_x , Гн, і опір першого плеча R_1 , Ом.

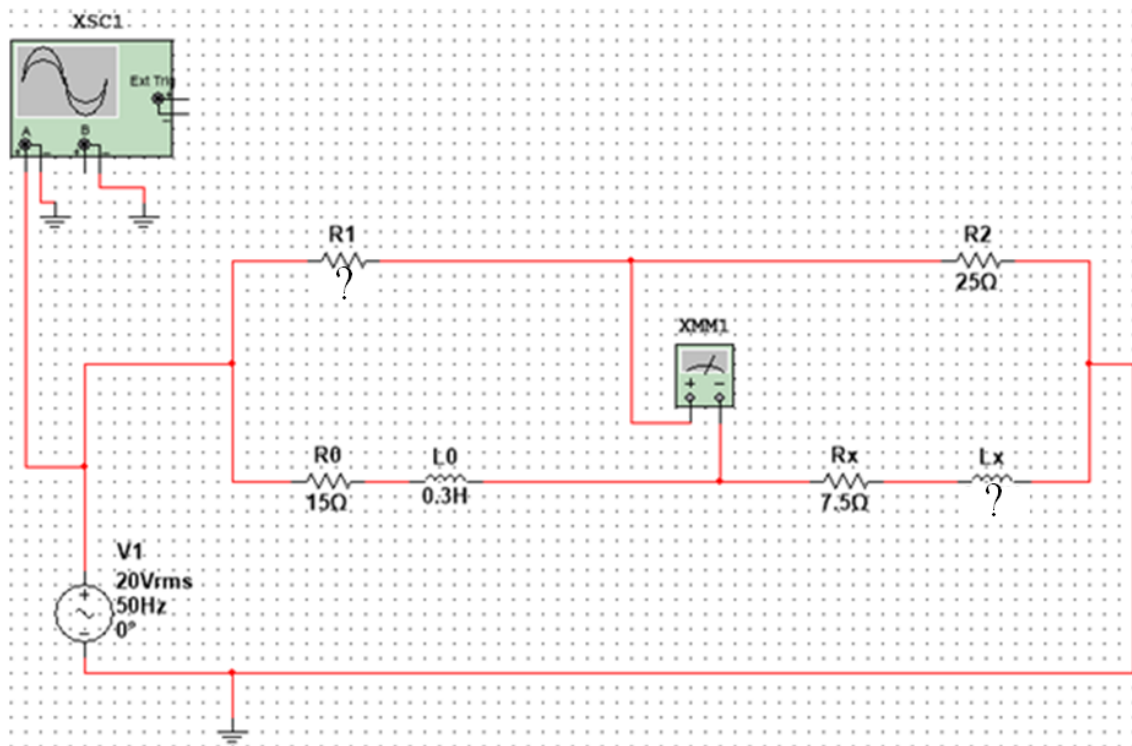
Таблиця 4.2 – Вихідні дані

Номер варіанту	R_x , Ом	L_0 , Гн	R_0 , Ом	R_2 , Ом
1	10	12	10	15
2	20	18	15	20
3	30	22	20	25
4	40	26	25	20
5	50	32	30	15
6	60	26	35	20
7	50	22	30	25
8	40	18	25	20
9	30	12	20	15
10	20	18	15	20
11	10	22	10	25
12	20	26	15	20
13	30	32	20	15
14	40	26	25	20
15	50	22	30	25

Приклад розв'язання.

При вимірюванні індуктивності L_x з опором $R_x = 7,5$ Ом мостом змінного струму (міст Віна) (рис. 4.2) значення зразкової котушки індуктивності становить $L_0 = 0,3$ Гн, з опором $R_0 = 15$ Ом, опір другого плеча – $R_2 = 25$ Ом.

Визначити значення індуктивності L_x , Гн, і опір першого плеча R_1 , Ом.

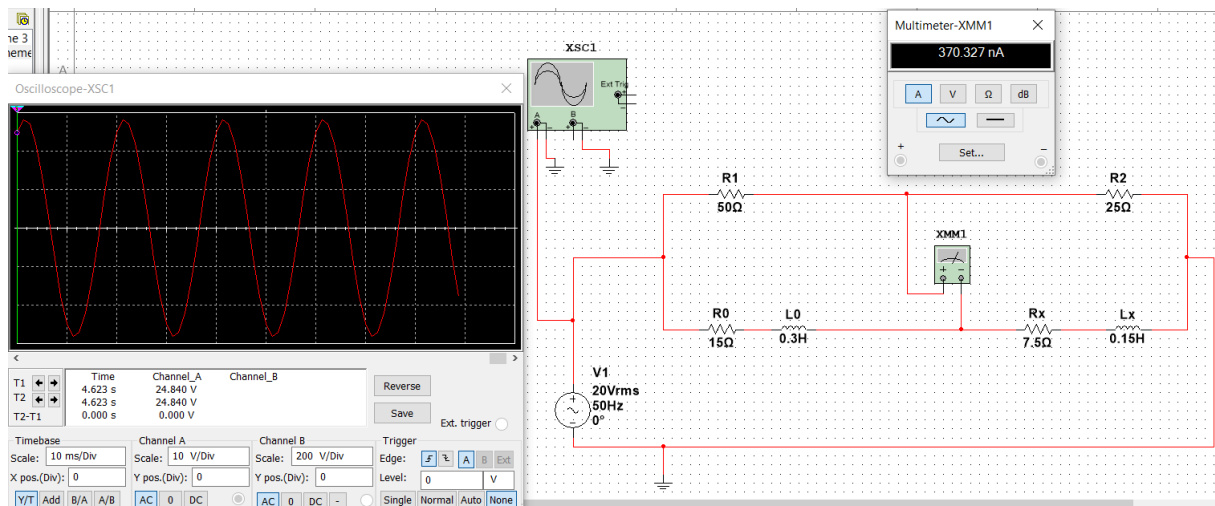


Опір першого плеча:

$$R_1 = R_2 \cdot \frac{R_0}{R_x} = 25 \cdot \frac{15}{7,5} = 50 \text{ Ом}.$$

Вимірювана індуктивність:

$$L_x = L_0 \cdot \frac{R_2}{R_1} = 0,3 \cdot \frac{25}{50} = 0,15 \text{ Ом}.$$



У відповідності з отриманими даними наводяться висновки.

Питання для самоперевірки

1. Область застосування вимірювальних мостових схем.
2. Умова збалансованості моста постійного струму.
3. Умови збалансованості моста змінного струму.

Література

[8, 9].

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Кваліметрія / А.С. Зенкін, В.П. Куценко, Г.І. Хімічева, М.В. Трегуб. – Донецьк : ППШ “Наука і освіта”, 2013. – 340 с.
2. Кваліметрія : навч. посіб. / В.Р. Куць, П.Г. Столярчук, В.М. Друзюк. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2012. – 256 с.
3. Irvin, J.O. On a criterion for the rejection of outlying observation. // *Biometrika*, 1925. – Vol.17, № 3-4. – P. 238-250.
4. Романовский, В.И. Применения математической статистики в опытном деле. – М.-Л. : Гостехиздат, 1947. – 248 с.
5. Статистичний аналіз даних вимірювань: навч. посіб. / В. С. Єременко, Ю. В. Куц, В. М. Мокійчук, О. В. Самойліченко. – Київ : НАУ, 2013. – 320 с.
6. Теоретичні основи інформаційно-вимірювальних систем : підручник / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Єременко та ін.; за ред. В.П. Бабака / 2-е вид., перероб. і доп. – К. : Ун-т новітніх технологій; НАУ, 2017. – 496 с.
7. Сегеда, М. С. Проектування структурних схем електростанцій та підстанцій: навч. посіб. / М.С. Сегеда, В.Г. Гапанович, В.П. Олійник, К.Б. Покровський. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2010. – 144 с.
8. Основы метрологии и электрические измерения : учеб. для вузов. – 6-е изд., перераб. и доп. / под ред. Е.М.Душина. – Л. : Энергоатомиздат, 1987. – 480 с.
9. Электрические измерения / под ред. В.Н. Малиновского. – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 450 с.