

Болотюк К.Г., бакалавр, **Кравцова А.Д.**, бакалавр,
Індустріальний інститут ДВНЗ «ДонНТУ», м. Покровськ, Україна,
Лесіна Є.В., канд. фіз.-мат наук, доцент,
ДВНЗ «Донецький національний технічний університет», м. Покровськ,
Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ДИСКРЕТИЗОВАНОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

Анотація. В роботі розглядається класична задача математичної фізики – задача про поперечні коливання натягнутої струни скінченної довжини, закріпленої на обох кінцях. Задача про коливання струни дала поштовх до розвитку не тільки математичного аналізу, але і експериментальних методів дослідження. Вихідне рівняння шляхом дискретизації просторової змінної зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, яку розв'язано аналітичним способом. За допомогою пакету MATLAB здійснюється чисельне і символічне розв'язання дискретної системи.

Ключові слова: рівняння коливань струни, одномірне хвильове рівняння, початкові та граничні умови, власні коливання, дискретизація, моделювання.

Хвильове рівняння має широке застосування. Зокрема, одномірне хвильове рівняння описує коливання струни, двомірне – коливання мембрани. Вперше одномірне рівняння з'явилося майже одночасно в роботах Д. Бернуллі (1700 - 1782), Ж. Д'Аламбера (1717 - 1783) і Л. Ейлера (1707 - 1783), пізніше – в роботах Ж. Фур'є (1768 - 1830). Бернуллі отримав розв'язок рівняння у вигляді тригонометричного ряду, Д'Аламбер і Ейлер представили розв'язок у вигляді прямої і зворотної хвилі, які переміщуються зі швидкістю a , що і дало назву рівняння. Фур'є показав еквівалентність цих двох розв'язків.

Задача про поперечні коливання струни – одна з класичних задач математичної фізики. У ній розглядається туго натягнута струна, закріплена в кінцевих точках. Якщо вивести струну з положення рівноваги, наприклад, відтягнути її і потім відпустити, то струна почне коливатися. В процесі коливання величина відхилення u буде залежати від абсциси точки струни x і часу t . Таким чином, щоб знати положення будь-якої точки струни в довільний момент часу, треба знайти залежність u від x і t , тобто знайти функцію $u(x,t)$. Якщо вважати струну абсолютно гнучкою, пружною (тобто за умови, що для неї виконується закон Гука) і розглядати малі коливання, то функція $u(x,t)$ задовольняє рівняння:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \alpha^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (1)$$

де T – сила натягу струни, ρ – лінійна щільність (маса одиниці її довжини) [1].

Рівняння (1) називається рівнянням вільних коливань струни або одномірним хвильовим рівнянням. До нього зводиться не тільки розглянута задача, але і багато інших, наприклад, задача про поперечні коливання літальних апаратів, задача про флаттер (коливання крила літака).

Для виділення конкретного розв'язку в задачі про коливання струни задаються граничні умови двох видів: початкові і крайові. Початкові умови показують, в якому стані перебувала струна в момент початку коливання (тобто

описують форму струни і швидкість її точок при $t = 0$). Початковий стан струни задається двома функціями:

$$u|_{t=0} = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi(x). \quad (2)$$

Крайові умови показують, що відбувається на кінцях струни під час коливань. Якщо кінці струни закріплені (початок струни – на початку координат, а кінець – в точці $x = l$), функція $u(x, t)$ буде залежати від умов:

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Характер коливань струни суттєво залежить від початкових умов. Найбільш простий випадок спостерігається, коли в початковий момент часу струні надають форму напівхвилі синусоїди $f(x) = \sin \pi x / l$ і відпускають без початкової швидкості. Тоді всі точки струни будуть здійснювати гармонічні коливання з однією і тією ж частотою ω_1 , так що в будь-який момент часу форма струни буде відрізнятися від вихідної тільки амплітудою. Математично такі коливання описуються формулою:

$$u(x, t) = A_1(t) \sin \pi x / l, A_1(t) = \cos \omega_1 t. \quad (4)$$

Це так зване перше власне коливання струни, йому відповідає низькочастотний чистий тон. Саме він використовується музикантами під час налаштування гітари або рояля. Щоб знайти першу власну частоту ω_1 , підставимо функцію (4) в рівняння (1). Після диференціювання і скорочення на загальний множник отримаємо:

$$\alpha^2 \pi^2 / l^2 = \omega_1^2, \omega_1 = \alpha \pi / l.$$

Таким чином, розв'язок рівняння (1) в даному випадку описується формулою

$$u_1(x, t) = \cos \frac{\alpha \pi}{l} t \cdot \sin \frac{\pi}{l} x. \quad (5)$$

Друге власне коливання отримаємо, задавши початкову умову у вигляді $f(x) = \sin 2\pi x / l$. Вона описується рівнянням

$$u(x, t) = A_2(t) \sin 2\pi x / l, \quad A_2(t) = \cos \omega_2 t.$$

Підставляючи ці вирази в рівняння (1), знаходимо, що друга власна частота $\omega_2 = 2\alpha \pi / l$. Звідси отримаємо формулу для другого власного коливання:

$$u_2(x, t) = \cos \frac{2\alpha \pi}{l} t \cdot \sin \frac{2\pi}{l} x. \quad (6)$$

Аналогічно виводяться формули для третього і інших власних коливань:

$$u_3(x, t) = \cos \frac{3\alpha \pi}{l} t \cdot \sin \frac{3\pi}{l} x. \dots$$

Якщо струна коливається зі своєю частотою $\omega_k = k\alpha \pi / l$, то у неї будуть $k+1$ нерухомих точок (вузлів) і k точок пучності (точок, де відхилення досягають максимуму). Коливання такого виду називаються стоячими хвилями.

Коли струна коливається, вона видає звук, висота якого зростає з частотою коливань. Якщо струна здійснює власні коливання, то найнижчий тон буде, коли частота дорівнює ω_1 . Решта тонів, що відповідають частотам ω_k , називаються обертонами або гармоніками. Якщо струна здійснює вільні коливання, то функція $u(x, t)$, представляється у вигляді суми окремих гармонік. Це дозволяє записати загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді нескінченного ряду Фур'є.

Для переходу від рівняння (1) до скінченновимірної моделі здійснимо дискретизацію задачі за змінною x . В результаті вийде система звичайних

диференціальних рівнянь, число рівнянь в ній залежить від кроку дискретизації h . З цією метою виділимо на струні n рівновіддалених точок з координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ (рис. 1).

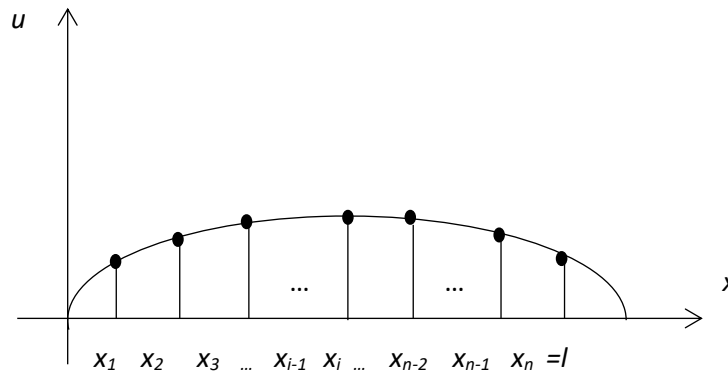


Рис. 1 – Скінченновимірна модель струни

Тим самим струна умовно розбивається на n рівних ділянок довжиною $h = l/n$ і замінюється наближеною моделлю у вигляді $n-1$ мас (точок, намистин), закріплених на невагомій нитці. Рух розглянутих точок в процесі коливань струни буде описуватися деякими функціями часу $u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n-1}(t)$. Для обчислення другої похідної скористаємося наближеною формулою:

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, h = \frac{l}{n}.$$

Записуючи тепер рівняння (1) для точок $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = b(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}), i = \overline{1, n-1}, b = \frac{\alpha^2}{h^2} \quad (7)$$

з граничними умовами $u_0=0, u_n=0, u_i(0)=f(x_i)$. Вона являє собою скінченновимірну модель струни. Зокрема, для $n = 4, b = 1$ ця модель буде містити три рівняння:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= u_2 - 2u_1 + u_0, \\ \ddot{u}_2 &= u_3 - 2u_2 + u_1, \\ \ddot{u}_3 &= u_4 - 2u_3 + u_2, \end{aligned} \quad (8)$$

з крайовими умовами $u_0 = u_4 = 0$. Сумарний порядок рівнянь дорівнює 6, тобто ми маємо справу з шестивимірною моделлю.

Початкову швидкість струни будемо вважати нульовою $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = \dot{u}_3(0) = 0$. Щоб знайти розв'язок цієї системи, перепишемо її в матричній формі:

$$\ddot{U} = A_0 U, \quad A_0 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Розв'язок необхідно шукати у вигляді $U = H \cos \omega t$, де вектор H та частота ω підлягають визначенню. Після підстановки цього виразу в (9) одержимо відношення:

$$A_0 H = -\omega^2 H.$$

Це означає, що H та $-\omega^2$ – власні вектори та власні числа матриці A_0 . Для того, щоб знайти власні значення, виписуємо характеристичний поліном матриці A_0

$$\det(\lambda E - A_0) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 10\lambda + 4 = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 2)$$

та знаходимо його розв'язки:

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{2} = -0,5858, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -2 - \sqrt{2} = -3,4142.$$

Їм відповідають власні вектори, які задовольняють алгебраїчні рівняння $A_0 H_i = \lambda_i H_i$:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix},$$

і власні частоти: $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$: $\omega_1 = 0,7654, \omega_2 = 1,4142, \omega_3 = 1,8478$. Загальний розв'язок системи (9) має вигляд:

$$U(t) = c_1 H_1 \cos \omega_1 t + c_2 H_2 \cos \omega_2 t + c_3 H_3 \cos \omega_3 t, \quad (10)$$

де постійні c_1, c_2, c_3 залежать від початкових умов $u_1(0), u_2(0), u_3(0)$. Рівняння для їх визначення отримаємо із відношення (10) при $t=0$: $U(0) = c_1 H_1 + c_2 H_2 + c_3 H_3$. В нашому випадку отримуємо систему:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + c_3 &= u_1(0), \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_3 &= u_2(0), \\ c_1 + c_2 + c_3 &= u_3(0), \end{aligned}$$

розв'язком якої буде набір:

$$c_1 = \frac{1}{4}[u_1(0) + \sqrt{2}u_2(0) + u_3(0)], c_2 = \frac{1}{2}[u_3(0) - u_1(0)], c_3 = \frac{1}{4}[u_1(0) - \sqrt{2}u_2(0) + u_3(0)].$$

Цей крок завершує отримання аналітичного розв'язку для дискретної моделі струни (8).

В MATLAB можна отримати чисельні і символьні розв'язки системи диференціальних рівнянь (8) [2]. Це робиться за допомогою команди *dsolve* тулбокса SYMBOLIC. Вихідними аргументами команди служать диференціальні рівняння і початкові умови.

```
>>y=dsolve('D2u1=u2-2*u1','D2u2=u3-2*u2+u1','D2u3=u2-2*u3','Du1(0)=0','Du2(0)=0','Du3(0)=0')
>> simplify(y.u1),simplify(y.u2),simplify(y.u3)
```

Для візуалізації символьних розв'язків застосовуються команди *ezplot* та *ezsurf*. У якості прикладу їх використання на рис. 2 зображені поверхні, які відповідають першому та другому коливанням струни та описуються формулами (5), (6).

```
>> ezsurf('sin(pi*x)*cos(pi/4*t)',[0,20,0,1])
>> ezsurf('sin(2*pi*x)*cos(pi/2*t)',[0,20,0,1])
```

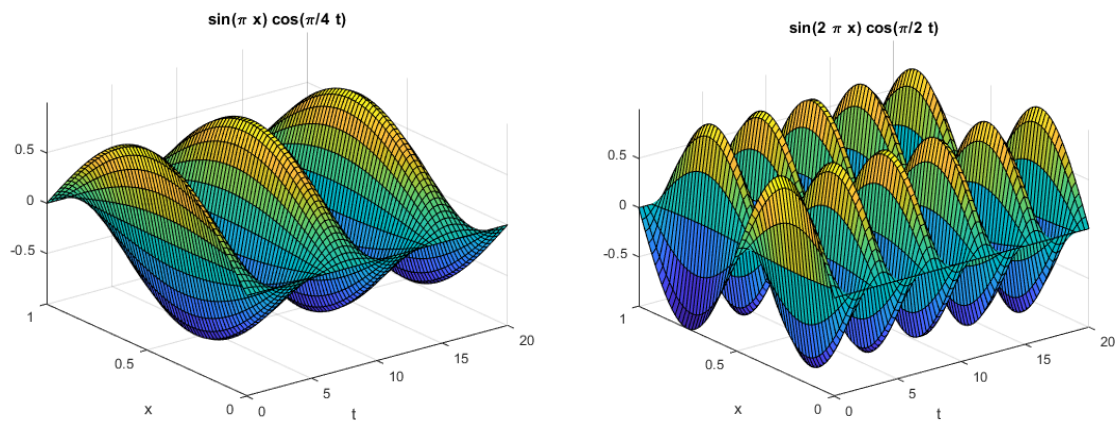


Рис. 2 – Просторове зображення власних коливань струни

Рисунок 3 ілюструє похибку, яка вноситься дискретизацією просторової координати. На ньому зображені графіки другого власного коливання, які отримані шляхом розв'язання рівняння з частинними похідними (1) та систем диференціальних рівнянь при $a = \frac{1}{4}, n = 4$. Очевидно, що зі збільшенням кількості ділянок, на які розбивається струна при дискретизації, криві будуть зближуватися.

```
>> ezplot('cos(sqrt(2)*t)',[0,10]);grid,
```

```
>> hold;ezplot('cos(pi/2*t)',[0,10])
```

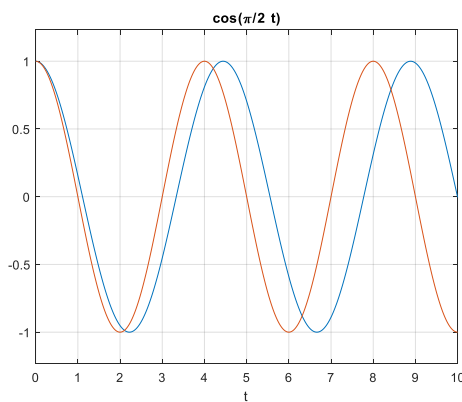


Рис. 3 – Графіки власного коливання безперервної та дискретної моделей

Список використаної літератури

1. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения. (Курс высшей математики и математической физики) / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – М.: Физматлит, 2005. - 256 с.
2. Эдвардс Ч., Пенни Д. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple, MATLAB. – М.: Вильямс, 2008. – 1104 с.