

МОДЕЛЮВАННЯ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ ЗА ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ НА ПРИКЛАДІ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Лесіна Є.В., к.ф.-м.н., доцент, eugenia.lesina@donntu.edu.ua

Коровін В.С., магістрант, korovin.vic@gmail.com

ДонНТУ, м. Покровськ, Україна

Лінеаризація за зворотним зв'язком вважається найбільш поширеним та теоретично відпрацьованим методом нелінійної теорії керування, який торкається безлічі нетривіальних математичних результатів та має під собою складну теорію, що базується на диференціальній геометрії [1].

Розглянемо моделювання лінеаризації за зворотним зв'язком на прикладі перевернутого маятника (еталону для тестування алгоритмів керування: ПД-регуляторів, нейронних мереж тощо). Моделювання відбувається у середовищі програми MATLAB Simulink. Диференціальне рівняння, яке описує модель маятника, має вигляд:

$$m\ddot{x} \cos \theta + ml\ddot{\theta} = mg \sin \theta,$$

де θ – кут відхилення маятника від вертикалі, m – маса маятника, l – довжина маятника, $\ddot{x} = a$ – прискорення руху платформи.

В афінній формі $\dot{x} = f(x) + g(x)u, y = h(x)$ [2] динаміка об'єкта керування подається наступним чином:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{l} \sin x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{l} \cos x_1 \end{pmatrix}, \quad y = x_1, \quad (1)$$

де $x = (x_1, x_2)^T = (\theta, \dot{\theta})^T$, $u = a$.

Зауважимо, що рівняння (1) моделює лише окрему частину перевернутого маятника як системи – власне рухомий вантаж, але не охоплює динаміку платформи, на якій міститься маятник. Більш реалістична модель повинна враховувати масу платформи та маятника, а також моделювати зміну прискорення a в залежності від докладеної до рухомої платформи сили F . Крім того, необхідним є моделювання тертя у точці кріплення маятника і тертя під час руху платформи.

Утримання в положенні рівноваги системи «перевернутий маятник на візку» є класичною задачею теорії керування, до якої зводяться задачі керування різноманітними реальними об'єктами: ракетою, буксиром, що штовхає перед собою баржі, і навіть ядерною реакцією радіонуклідів на АЕС.

Для моделювання нелінійних систем даного вигляду в Simulink використовують блоки Integrator та Embedded MATLAB Function. Після з'єднання блоків між собою одержимо модель, яку зображено на рисунку 1.

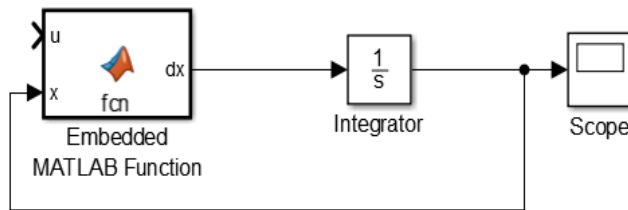


Рисунок 1. Модель нелінійної системи в Simulink

Оскільки простір станів є площиною $(\theta, \dot{\theta})^T$, доцільно задати у полі Initial condition блоку Integrator вектор двох чисел. Припустимо, що маятник знаходиться в нижньому вертикальному положенні: $\theta = \pi$, тоді $\theta(0) = \pi - \frac{\pi}{4}$, $\dot{\theta}(0) = 0$. Звертаючись до блоку Embedded MATLAB Function, вводим текст скриптовою мовою для обчислення правих нелінійних частин рівняння моделі маятника.

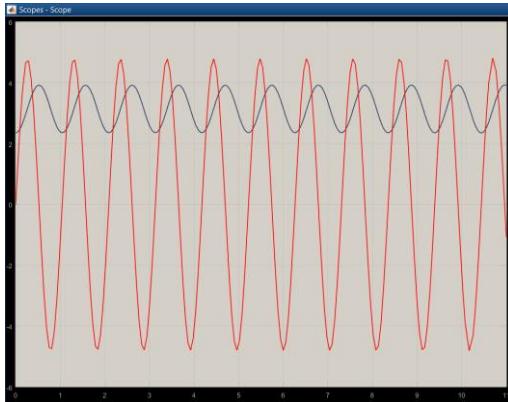


Рисунок 2. Результат моделювання перевернутого маятника. Коливання малої амплітуди – кутове положення $\theta(t)$, інша крива – швидкість $\dot{\theta}(t)$

В результаті моделювання отримаємо гармонічні коливання між кутовими положеннями $\pi - \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi + \frac{\pi}{4}$, які проілюстровано на рисунку 2.

Виконаємо в афінній формі моделі маятника (1) подвійне диференціювання виходу об'єкта керування: $\ddot{y} = \dot{x}_2 = \frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{1}{l} \cos x_1 u$.

Заміна

$$u = u(x, v) = \frac{\frac{g}{l} \sin x_1 - v}{\frac{1}{l} \cos x_1}$$

зводить початкову нелінійну систему до лінійної: $\ddot{y} = v$. Лінеаризація невизначена в точках $\theta = \pm \pi / 2$, оскільки знаменник дорівнює нулю. Вихідна система в цих точках некерована, тому сингулярності лінеаризації мають виключно фізичну природу: чим ближче положення маятника до горизонталі, тим важче ним керувати.

З практичної точки зору відомо, що система може відпрацьовувати траєкторії, що є перехідними через положення $\pm \pi / 2$, наприклад $\theta(t) = \omega t$ (обертання відносно точки закріплення). У даному випадку, значення функції $u(x, v)$ в об'єкті керування обмежується значенням u_{max} у $10g$, тому ми можемо визначити лінеаризуюче перетворення у всій фазовій площині.

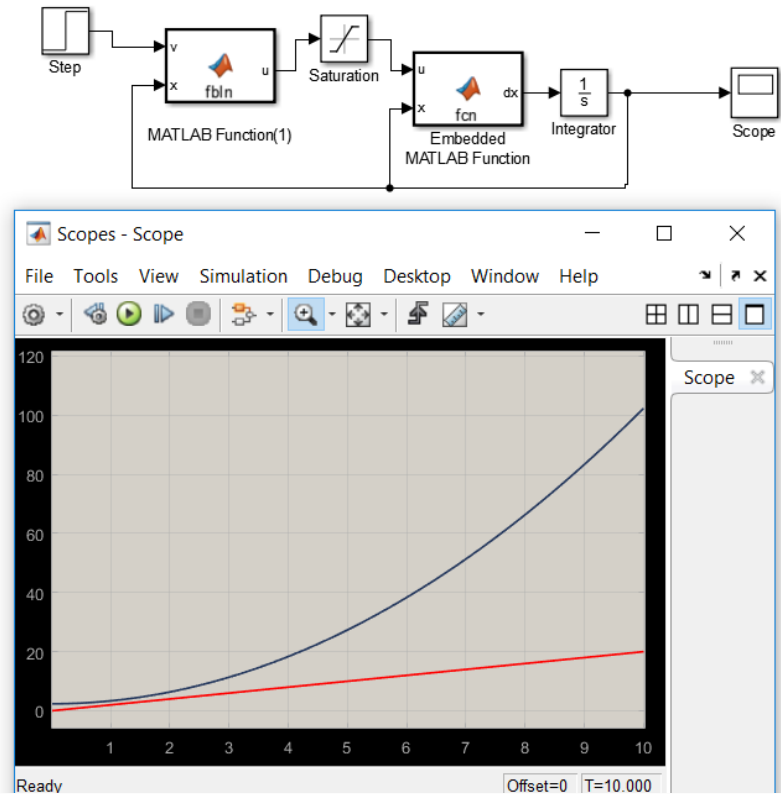


Рисунок 3. Модель лінеаризованої системи та реакція моделі на одиничний вплив

З метою отримати модель лінеаризованої системи, додаємо ще один блок Embedded MATLAB Function (блок fbln відповідає за перетворення лінеаризації).

Промодельювавши реакцію системи на ступінчатий вплив, отримаємо звичайну характеристику лінійної системи (подвійного інтегратора $\ddot{y} = v$) – лінійне та квадратичне зростання x_2 та x_1 (рисунок 3).

Література

1. Борисевич А.В. Теория автоматического управления: элементарное введение с применением MATLAB. – [Электронный ресурс] / А.В. Борисевич. – М.: Инфра-М, 2014. – 200 с. – ISBN 978-5-16-101828-6.
2. Беклемишев Д.В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Д.В. Беклемишев – М.: Высшая школа, 1998. – 320 с.

Анотація

У роботі описано процедуру моделювання лінеаризації на прикладі перевернутого маятника в середовищі програми MATLAB Simulink. Наводиться рівняння динаміки об'єкта керування в афінній формі. За допомогою заміни виконано обчислення і перетворення системи з нелінійної у лінеаризовану.

Ключові слова: моделювання, зворотний зв'язок, об'єкт керування, лінеаризація.

Аннотация

В работе представлена линеаризованная (по обратной связи) модель перевернутого маятника в среде программы MATLAB Simulink. Приводится уравнение динамики объекта управления в аффинной форме. С помощью замены осуществляется преобразование системы из нелинейной в линеаризованную.

Ключевые слова: моделирование, обратная связь, объект управления, линеаризация.

Abstract

The paper presents a linearized (by feedback) model of an inverted pendulum in the MATLAB Simulink program environment. An equation of the dynamics of the control object is given in affine form. With the help of replacement, the system is transformed from nonlinear to linearized.

Keywords: modeling, feedback, control object, linearization.