

Міністерство освіти та науки України
Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»

Кафедра вищої математики і фізики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ З ДИСЦИПЛІНИ
«ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЧАСТИНА 3»

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ
ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ УСІХ ФОРМ НАВЧАННЯ

Покровськ, 2021

УДК 51(072)
М 54

Методичні вказівки з дисципліни «Вища математика. Частина 3» до практичних занять та самостійної роботи студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання [Електронний ресурс] / уклад. Н.Ф. Гоголева, С.В. Волков. – Покровськ : ДонНТУ, 2021. – 76 с.

Методичні вказівки містять завдання для практичних занять та самостійної роботи студентів теоретичні питання, приклади розв'язання завдань до кожного з розділів дисципліни «Вища математика. Частина 3» та список рекомендованої літератури.

Укладачі: Гоголева Н.Ф., доц., к.ф.-м.наук, доц. кафедри вищої математики і фізики;

Волков С.В., ст. викладач кафедри вищої математики і фізики.

Рецензент: Власенко М.М., доц., к.т.н., доц. кафедри вищої математики і фізики;

Відповідальний за випуск: доц к.ф.-м.наук, завідувач кафедри вищої математики і фізики
Медведєва М.І.

Затверджено навчально-методичним відділом ДВНЗ «ДонНТУ», протокол № 6 від 23.02.2021 р.

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики і фізики, протокол № 1 від 29.01.2021 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
I. Методичні рекомендації до практичних занять	5
1. Теоретичні відомості до розділу «Теорія функції комплексної змінної» .	5
Приклади завдань для практичного заняття	5
2. Теоретичні відомості до розділу «Ряди»	7
Приклади завдань для практичного заняття	7
3. Теоретичні відомості до розділу «Операційне числення»	11
Приклади завдань для практичного заняття	11
4. Теоретичні питання до розділу «Теорія ймовірностей та математична статистика»	14
Приклади завдань для практичного заняття	15
II. Методичні рекомендації до самостійної роботи	21
Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми «Теорія функції комплексної змінної»	21
Приклади розв’язання завдань та комплекти завдань для самостійного опрацювання теми	21
Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми «Ряди»	25
Приклади розв’язання завдань та комплекти завдань для самостійного опрацювання теми	25
Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми «Операційне числення»	41
Приклади розв’язання завдань та комплекти завдань для самостійного опрацювання теми	41
Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми «Теорія ймовірностей та математична статистика»	55
Приклади розв’язання завдань та комплекти завдань для самостійного опрацювання теми	55
ДОДАТОК А	73
ДОДАТОК Б	74
ДОДАТОК В	75
ДОДАТОК Г	76
Список рекомендованої літератури	77

ВСТУП

Основними видами роботи студента будь якої форми навчання над засвоєнням навчального матеріалу є самостійна та практична робота, як вид діяльності, стимулюючий активність, самостійність, пізнавальний інтерес; як основа самоосвіти, поштовх до подальшого підвищення кваліфікації. Самостійна робота студента є навчально-пізнавальною діяльністю, яка спрямована на формування професійної компетенції. Формування самостійності майбутнього фахівця у процесі навчання є одним з найважливіших завдань вищої школи, яке здійснюється шляхом використання у навчальному процесі самостійної роботи студентів. Для майбутнього фахівця – важливо не лише осмислити й засвоїти інформацію, а й оволодіти способами її практичного застосування і прийняття рішень.

Основні цілі практичних занять та самостійної роботи студента: освоєння теоретичних і практичних предметних математичних дій; освоєння способів дій професійної діяльності, а саме дій математичного моделювання у фаховій галузі; засвоєння предметних знань у процесі розв’язання задач.

Дані методичні вказівки містять такі структурні елементи: методичні рекомендації до практичних занять та самостійної роботи студентів, теоретичні питання, приклади розв’язання задач та завдання до кожного з розділів; додатки; список літературних джерел. Теоретичні питання складені у відповідності з навчальною програмою курсу «Вища математика. Частина 3».

І. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Мета роботи: Допомогти студентам оволодіти окремими розділами курсу «ТФКЗ»; навчитися вирішувати ряд простих типів завдань: арифметичні дії з комплексними числами, записаними в різних формах, переходити з алгебраїчної форми до показникової або тригонометричної і навпаки.

Для виконання практичних робіт необхідно вирішити наступні завдання за темою заняття.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Поняття комплексного числа. алгебраїчна форма комплексного числа. операції над комплексними числами (додавання, віднімання, множення, ділення). геометрична інтерпретація комплексних чисел.

Завдання 1. Обчислити а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 \cdot z_2$, в) $\frac{z_1}{z_2}$.

а) $z_1 = 2 + 3i, z_2 = -3 + 5i$;

б) $z_1 = -3i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$.

Завдання 2. Знайти дійсні x та y з рівнянь:

а) $(2x - 13y) + (7y + 2xi) = -17 + 3yi$

б) $(\frac{3}{4}x - 2yi) - (\frac{1}{3}y + 6xi) = 21i$

Завдання 3. Знайти комплексне число з рівняння $(2 - 3i)z = -1 - 5i$.

Завдання 4. Довести рівність $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$.

Завдання 5. Зобразити на комплексній площині множину точок, що

задовольняють вказаним умовам $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} \leq 0$.

Контрольні питання:

1. Що називається комплексним числом?
2. Що називається дійсною та уявною частиною комплексного числа,

аргументом?

3. Властивості операцій додавання, добутку, ділення на множені комплексних чисел.
4. Які комплексні числа називаються
 - а) рівними; б) спряженими; в) протилежними?
5. Чи можна порівняти між собою нерівні комплексні числа?
6. Що є геометричним образом комплексного числа на площині?

Література: [4, 5, 6, 7].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Піднесення комплексного числа у степінь (формула Муавра). Корінь комплексного числа

Завдання 1. Подати в алгебраїчній формі число $4(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$.

Завдання 2. Подати в тригонометричній формі числа а) $-\sqrt{3} - i$, б) 3, в) $5i$.

Завдання 3. Піднести до куба число $2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)$.

Завдання 4. Подати в показниковій формі числа:

$$а) -2, б) i, в) -1 - \sqrt{3}i$$

Завдання 5. Піднести до 20-го степеня число $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Завдання 6. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{1-i}$.

Контрольні питання:

1. Сформулюйте правила, за якими виконуються дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній формі.
2. Як виконати дії над комплексними числами, заданими в показниковій формі?

3. Запишіть формули Ейлера. Коли їх використовують?
4. Чому дорівнює сума протилежних комплексних чисел?
5. Чому дорівнює сума і добуток взаємно спряжених комплексних чисел?
6. Чому дорівнюють модуль і аргумент комплексного нуля?

Література: [4, 5, 6, 7].

РОЗДІЛ 2. РЯДИ

Мета роботи: Допомогти студентам оволодіти математичним апаратом який застосовується в числових та функціональних рядах, виробити у студентів уміння, навички обчислювати різні задачі з теми «Ряди».

Для виконання практичних робіт необхідно вирішити наступні завдання за темою заняття.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Ряди, збіжність, сума, необхідна ознака збіжності, залишок ряду. Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами.

Завдання 1. Знайти загальний член ряду

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$, б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \dots$

Завдання 2. Обчислити перші чотири частини суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n$.

Завдання 3. Перевірити за визначенням ряд на збіжність

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Завдання 4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-5}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} n!$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (2n+1)^{-n}$.

Контрольні питання:

1. Що називається числовим рядом?

2. Який числовий ряд називається збіжним, розбіжним?
3. Що називається сумою числового ряду?
4. Яка необхідна умова збіжності числового ряду? Сформулювати та довести її.
5. Сформулюйте та доведіть необхідну і достатню умову розбіжності ряду.
6. Який ряд називають геометричним? Дослідите його збіжність при $|q| < 1, |q| > 1, |q| = 1$.
7. Сформулюйте та доведіть властивості збіжних числових рядів.
8. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів – ознаку Д'аламбера.
9. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів – радикальну ознаку Коши.
10. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів – інтегральну ознаку.
11. Сформулюйте та доведіть достатню ознаку збіжності числових рядів – теореми порівняння.
12. Який ряд називається узагальненим гармонічним рядом? Дослідите його збіжність.

Література: [4, 5, 6, 7].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Знакозмінні ряди. Види збіжності. Знакопочережні ряди, теорема Лейбніца.

Завдання. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!};$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{3n+7} \right)^n; \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{5n}.$$

Контрольні питання:

1. Який ряд називається знакопереміжним? Сформулюйте та доведіть теорему Лейбніца збіжності знакопереміжних рядів.
2. Доведіть, що при заміні суми ряду типу Лейбніца сумою його перших членів допустима абсолютна похибка не перевищує модуля першого відкинутого члена ряду.
3. Який знакопереміжний ряд називається абсолютно збіжним рядом? Доведіть, що із абсолютної збіжності ряду слідує його збіжність.
4. Який знакопереміжний ряд називається умовно збіжним рядом? Наведіть приклади абсолютно і умовно збіжних рядів.

Література: [4, 5, 6, 7].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Функціональні ряди. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Ряди Маклорена та Тейлора. Стандартні розвинення функцій в степеневі ряди. Застосування степеневих рядів.

Завдання 1. Знайти область збіжності ряду

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Завдання 2. Розвинути у ряд Маклорена наступні функції:

$$a) f(x) = \cos 4x; \quad b) f(x) = e^{2x}.$$

Завдання 3. Розвинути функцію у ряд Тейлора, використовуючи означення:

$$a) f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{в околі точки } x = -1;$$

$$b) f(x) = \sqrt{x^3} \quad \text{в околі точки } x = 1;$$

Завдання 4. Обчислити інтеграли з точністю $\delta = 10^{-3}$:

$$a) \int_0^{0,5} e^{x^2} dx; \quad b) \int_5^{10} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx; \quad c) \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^2} dx; \quad e) \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx.$$

Завдання 5. Обчислити наближено із точністю $\delta = 10^{-3}$:

$$a) \sin 1; \quad б) \cos 1^\circ; \quad в) \sqrt{16,64}; \quad г) \frac{1}{\sqrt[6]{738}}.$$

Контрольні питання:

1. Який ряд називається степеневим? Сформулюйте та доведіть його властивості.
2. Як знайти область збіжності степеневому ряду? Виведіть формулу для обчислення радіуса збіжності степеневому ряду.
3. Який ряд називається рядом Тейлора (Маклорена)? Яка умова розвинення функції у ряд Тейлора?
4. Одержіть розвинення функцій у степеневий ряд (Додаток А) та визначте області збіжності одержаних рядів.
5. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для наближеного обчислення значень функцій.
6. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для знаходження невизначених інтегралів
7. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для наближеного обчислення визначених інтегралів.
8. Використання рядів Тейлора (Маклорена) для наближеного інтегрування диференціальних рівнянь.

Література: [4, 5, 6, 7].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Тригонометричні ряди, ряд Фур'є. Розвинення функцій в ряд Фур'є.

Завдання 1. Розкласти функцію в ряд Фур'є.

$$a) f(x) = x^2; \quad x \in (-\pi; \pi]; \quad б) f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}; \quad (\text{парним чином}).$$

Завдання 2. Розкласти функцію в ряд Фур'є.

$$\text{а) } f(x) = 2x + 1; x \in (-\pi; \pi]; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}; \text{ (непарним чином).}$$

Контрольні питання:

1. Який функціональний ряд називають рядом Фур'є? Запишіть коефіцієнти Фур'є.
2. Яка достатня та необхідна умова розвинення функції у ряд Фур'є (теорема Діріхле)?
3. Розвинення у ряд Фур'є функції з періодом $T = 2\pi$.
4. Розвинення у ряд Фур'є функції з періодом $T = 2l$.
5. Розвинення у ряд Фур'є парних та непарних функцій на заданому відрізку.

Література: [4, 5, 6, 7].

РОЗДІЛ 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Мета роботи: Допомогти студентам оволодіти математичним апаратом який застосовується в операційному численні, виробити у студентів уміння, навички обчислювати різні задачі з теми «Операційне числення».

Для виконання практичних робіт необхідно вирішити наступні завдання за темою заняття.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Ідея операційного числення. Означення та властивості перетворення Лапласа. Оригінал та зображення.

Завдання 1. Знайти зображення оригіналу за означенням

$$\text{а) } f(t) = t \cos t, \quad \text{б) } f(t) = e^{-t} \sin t.$$

Завдання 2. Знайти зображення оригіналу за означенням $f(t) = e^t$.

Завдання 3. Знайти $f(t)$, якщо $F(p) = \frac{4p+7}{p^2-p+3}$.

Контрольні питання:

1. Що називають перетворенням Лапласа?
2. Яким умовам повинна задовольняти функція, щоб вона була оригіналом в перетворенні Лапласа?
3. Що називають зображенням оригіналу.

Література: [5, 6, 7].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Основні теореми операційного числення (теорема подібності, теорема запізнення та зсуву).

Завдання 1. Знайти а) $L\left\{f\left(\frac{t}{2}\right)\right\}$, б) $L\{f(t-7)\theta(t-7)\}$, в) $L\{e^{3t}f(t)\}$, якщо

$$L\{f(t)\} = \frac{pe^{-2p}}{p^3 + 4}.$$

Завдання 2. Нехай $L\{f(t)\} = \frac{pe^{-5p}}{p^2 - 8}$.

Знайти а) $L\left\{f\left(\frac{t}{5}\right)\right\}$, б) $L\{f(t+4)\theta(t+4)\}$, в) $L\{e^{5t}f(t)\}$.

Завдання 3. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 4-t, & 2 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}.$$

Контрольні питання:

Як сформулювати та довести:

1. Теорему єдиності зображень;
2. Теорему лінійності відповідності оригіналу та зображень;

3. Теорему подібності;
4. Теорему запізнювання;
5. Теорему зсуву.

Література [5, 6, 7].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Основні теореми операційного числення. Диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення.

Завдання 1. Знайти зображення за допомогою теореми про диференціювання зображень

$$f(t) = t^2 e^t.$$

Завдання 2. Знайти зображення за допомогою теореми про інтегрування оригіналу

$$f(t) = \int_0^t e^t dt.$$

Завдання 3. Знайти зображення за допомогою теореми про інтегрування зображень

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Завдання 4. Розв'язати диференціальне рівняння за допомогою теореми про диференціювання оригіналу

$$x''' + x' = 1, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Контрольні запитання:

Як сформулювати та довести:

1. Теорему про диференціювання оригіналів;
2. Теорему про диференціювання зображень;
3. Теорему про диференціювання за параметром;
4. Теорему про інтегрування зображення;
5. Теорему про інтегрування похідної зображення?

Література [5, 6, 7].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Застосування операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами.

Завдання 1. Розв'язати задачу Коші операторним методом.

$$y'' - 2y' + y = 4; \quad y(0) = 4; \quad y'(0) = 2.$$

Завдання 2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь операторним методом.

$$\begin{cases} y_1' = 3y_2 - y_1 \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^t \end{cases}; \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

Завдання 3. Розв'язати інтегральне рівняння.

$$x(t) = 3\sin 2t + 4 \int_0^t x(\tau) \cos 2(t - \tau) d\tau.$$

Контрольні запитання:

Вказати алгоритм застосування перетворення Лапласа до:

1. Розв'язання диференціальних рівнянь;
2. Розв'язання систем диференціальних рівнянь;
3. Розв'язання інтегральних рівнянь.

Література [5, 6, 7].

РОЗДІЛ 4. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Мета роботи: Допомогти студентам оволодіти основними поняттями теорії ймовірностей та математичної статистики. Виробити у студентів уміння розв'язувати різноманітні технічні та економічні проблеми за допомогою методів математичної статистики.

Для виконання практичних робіт необхідно вирішити наступні завдання за темою заняття.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Елементи комбінаторики. Основні поняття теорії ймовірностей. Випадкові події, класифікація подій, операції над подіями. Означення ймовірності події.

Завдання 1. Скласти всі двозначні числа з трьох цифр 3, 5, 7 (числа з однаковими цифрами не враховувати).

Завдання 2. На конференції присутні 30 студентів. Скількома способами можна обрати президію у складі трьох осіб?

Завдання 3. В урні знаходяться 9 куль однакового розміру, з них 4 -червоних, 3-жовтих і 2-білих. Знайти ймовірність того, що навмання :а) вийняли червону кулю (подія А), б) вийняли жовту кулю (подія В), с) вийняли білу кулю (подія С).

Завдання 4. На конференції присутні 25 студентів. Скількома способами можна обрати президію у складі трьох осіб: голову і два заступника?

Контрольні запитання:

1. Що називається перестановками?
2. Що називається сполученням?
3. Що називається розміщенням?
4. Правила комбінаторики.
5. Події залежні та незалежні.
6. Події сумісні та несумісні.
7. Випадкові події, класифікація подій, операції над подіями.
8. Класичне означення ймовірності події.
9. Властивості ймовірності.
10. Геометричне означення ймовірності.
11. Статистичне означення ймовірності.

Література [1, 2, 3, 4].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Основні теореми теорії ймовірностей. Формула повної ймовірності та формули Бейєса.

Завдання 1. Прилад складається із трьох вузлів, кожний з яких незалежно від інших може відмовити в роботі. Вихід з ладу хоча б одного вузла приводить до зупинки приладу в цілому. Ймовірність безвідмовної роботи протягом 8 годин першого вузла дорівнює 0,8, другого – 0,9, третього – 0,7. Знайти ймовірність безвідмовної роботи приладу протягом 8 годин.

Завдання 2. Ймовірність зробити одну помилку при наборі однієї сторінки тексту становить 0,7. Знайти ймовірність того, що помилка буде лише на одній сторінці з трьох набраних.

Завдання 3. Прилад складається з високоякісних деталей і деталей звичайної якості. Якщо прилад складено з високоякісних деталей, то ймовірність його безвідмовної роботи за час t дорівнює 0,98; якщо з деталей звичайної якості – 0,6. У середньому 40% приладів складається з високоякісних деталей. Навмання обрали один прилад. Знайти ймовірність того, що:

- а) за час t прилад буде працювати безвідмовно;
- б) якщо прилад працював безвідмовно, то він був складений з високоякісних деталей.

Контрольні запитання:

1. Сформулюйте теореми множення ймовірностей залежних і незалежних подій.
2. Сформулюйте теореми додавання ймовірностей сумісних та несумісних подій.
3. За якою формулою обчислюють ймовірність появи хоча б однієї з сумісних подій?
4. Сформулюйте теорему про повну ймовірність випадкової події A за наявності певної кількості гіпотез.
5. Коли застосовують формули Бейєса? Сформулюйте формули Бейєса.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Незалежні випробування з повтореннями. Схема та формула Бернуллі.

Завдання 1. Монету підкидають шість разів. Знайти:

- а) ймовірність того, що герб з'явиться не менше 3 разів;
- б) найімовірнішу кількість появи герба.

Завдання 2. Станок-автомат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь бракована, дорівнює 0,2. Знайти:

- а) ймовірність того, що з 4 навмання обраних деталей 2 будуть стандартні;
- б) найімовірнішу кількість бракованих деталей з 20 навмання обраних.

Завдання 3. Ймовірність того, що лотерейний білет виграшний дорівнює 0,02. Знайти:

- а) ймовірність того, що з трьох придбаних білетів один виграшний;
- б) найімовірнішу кількість виграшних білетів з 8 придбаних.

Контрольні запитання:

1. Що називається схемою Бернуллі?
2. Запишіть формулу Бернуллі
3. Як визначається найімовірніше число подій в схемі Бернуллі?

Література [1, 2, 3].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Граничні теореми у схемі Бернуллі.

Завдання 1. Змішали порівну білу та пофарбовану бавовну. Знайти ймовірність того, що з 240 випадково відібраних волокон суміші буде виявлено рівно 90 пофарбованих.

Завдання 2. У квітучого плодового дерева деякого виду з 20% квіток з'являються плоди, а решта опадають з різних причин. На гілках 800 квіток. Знайти ймовірність того, що на них буде від 250 до 350 плодів.

Завдання 3. Страхова компанія застрахувала на рік 1450 клієнтів. Якщо страховий випадок відбувся, компанія виплачує клієнту 170 гривень. Ймовірність страхового випадку дорівнює 0,007. Визначити мінімальну суму страхового внеску, за якого ймовірність розорення компанії (на кінець року) не буде перевищувати 0,007.

Контрольні запитання:

1. Сформулюйте локальну теорему Лапласа. В яких випадках вона застосовується?
2. Запишіть формулу Пуассона. Чим відрізняються умови застосування формули Пуассона від умов застосування локальної теореми Лапласа?
3. Запишіть інтегральну теорему Лапласа. В яких випадках вона застосовується?
3. Як визначається ймовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності події в схемі?

Література [1, 2, 3].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Дискретні та неперервні випадкові величини та їх числові характеристики.

Завдання 1. Мисливець стріляє в ціль до першого влучення. Знайти закон розподілу випадкової величини X – число використаних патронів, якщо ймовірність влучення в ціль при кожному пострілі 0,25, а число пострілів необмежене.

Завдання 2. Визначити закон розподілу дискретної випадкової величини X , якщо відомі її дисперсія $D(X) = 9,09$ та $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Знайти:

- а) функцію розподілу $F(x)$, побудувати графік $F(x)$ та полігон розподілу;
- б) характеристики положення (математичне сподівання, моду, медіану);
- в) характеристики розсіювання (дисперсію, середнє квадратичне відхилення);
- г) характеристики форми розподілу (асиметрію, ексцес).

x_i	x_1	0	3	6
p_i	0,6	p_2	0,1	0,1

Завдання 3. Дано інтегральну функцію розподілу випадкової величини $F(x)$. Знайти щільність розподілу $f(x)$; математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Завдання 4. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} C \cdot x^3, & x \in [3, 4]; \\ 0, & x \notin [3, 4]. \end{cases}$$

Знайти значення C , обчислити математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$. Побудувати графіки щільності $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$.

Контрольні запитання:

1. Дайте означення випадкової величини.
2. Які випадкові величини називаються дискретними, а які – неперервними?
3. Що називається рядом розподілу випадкової величини?
5. Які властивості має функція розподілу?
6. Як знаходиться ймовірність попадання випадкової величини в заданий інтервал за допомогою функції розподілу?
7. Що називається щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини?
8. Сформулюйте властивості щільності розподілу.
9. Що називається математичним сподіванням? Властивості математичного сподівання.

10. Що називається дисперсією? Властивості дисперсії.
11. Що називається середнім квадратичним відхиленням?
12. Що називається початковим моментом, центральним моментом k -го порядку?

Література [1, 2, 3].

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ

Тема: Основні закони розподілу ДВВ та НВВ. Нормальний закон розподілу.

Завдання 1. Пристрій складається з 5 елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови кожного елемента дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу та функцію розподілу кількості елементів, що відмовили. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

Завдання 2. Монета кинута тричі. Побудувати закон розподілу ВВ – кількість появ герба.

Завдання 3. Колесо обертається, а потім зупиняється під впливом сил тертя. Кут θ - випадкова величина, яка рівномірно розподілена у проміжку $[0; 2\pi)$. Визначити її числові показники.

Завдання 4. Випадкова величина T – час безвідмовної роботи верстата, яка має показниковий розподіл. Визначити ймовірність того, що час безвідмовної роботи верстата буде щонайменше 6000 годин, якщо середній час безвідмовної роботи верстата 4000 годин.

Завдання 5. По цілі, що має вигляд смуги, ширина якої 20 м, ведеться стрілянина у напрямку перпендикулярній смузі. Прицілювання ведеться по середній лінії. Середнє квадратичне відхилення (точність прицілу) у бік стрільби дорівнює $\sigma = 8 \text{ м}$. Знайти ймовірність попадання в ціль при одному пострілі.

Контрольні запитання:

1. Який вигляд має ряд розподілу випадкової величини розподіленою за біноміальним законом?

2. Яка випадкова величина називається розподіленою за законом Пуассона?
3. Чому закон Пуассона називають законом рідкісних подій?
4. Напишіть ряд розподілу геометрично розподіленої випадкової величини.
5. Яка випадкова величина називається рівномірно розподіленою на відрізку?
6. Який розподіл випадкової величини називають нормальним розподілом?
7. Чому дорівнюють числові характеристики нормально розподіленої випадкової величини?
8. Як знайти ймовірність попадання в заданий інтервал нормально розподіленої випадкової величини?
9. Сформулюйте правило трьох сигм.
10. Який розподіл випадкової величини називають експоненціальним законом розподілу?

Література [1, 2, 3].

II. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Поняття комплексного числа. алгебраїчна форма комплексного числа. операції над комплексними числами (додавання, віднімання, множення, ділення). геометрична інтерпретація комплексних чисел.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Обчислити а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 \cdot z_2$, в) $\frac{z_1}{z_2}$.

$$z_1 = 2 - 5i; z_2 = -3 + 2i.$$

Розв'язання. а) $z_1 + z_2 = 2 - 5i + -3 + 2i = (2 - 3) + i(-5 + 2) = -1 - 3i$.

$$\text{б) } z_1 \cdot z_2 = (2 - 5i) \cdot (-3 + 2i) = -6 + 4i + 15i - 10i^2 = -6 + 19i - 10 = -16 + 19i.$$

$$в) \frac{z_1}{z_2} = \frac{2-5i}{-3+2i} = \frac{(2-5i) \cdot (-3-2i)}{(-3+2i) \cdot (-3-2i)} = \frac{-6-4i+15i+10i^2}{9-4i^2} = \frac{-16+11i}{9+4} = -\frac{16}{13} + \frac{11}{13}i.$$

Завдання 2. Знайти $(4-7i)^3$

Розв'язання. Використовуючи формулу куба різниці двох чисел, одержимо

$$(4-7i)^3 = 64 - 3 \cdot 16 \cdot 7i + 3 \cdot 4 \cdot 49i^2 - 343i^3 = 64 - 336i + 588i^2 - 343i^3 = \\ = 64 - 336i + 588 - 343i = -54 + 7i$$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Обчислити z та знайти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$. Записати отримане число в різних формах.

$$а) z = \frac{1}{(1+i)^4} - \frac{1}{(1-i)^4}, \quad б) z = \left(\frac{2}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}} \right)^8, \quad в) z = (1+i)^{10} + (1-i)^{10}.$$

2. Обчислити а) $z_1 + z_2$, б) $z_1 \cdot z_2$, в) $\frac{z_1}{z_2}$.

$$z_1 = 5 - 3i, \quad z_2 = \frac{1}{7} + \frac{2}{3}i.$$

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Піднесення комплексного числа у степінь (формула Муавра). Корінь комплексного числа.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Обчислити z та знайти $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$. Записати отримане число в різних формах.

$$z = \left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}} \right)^2.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, маємо

$$i^5 = i \cdot i^4 = i, \quad i^{19} = -i. \quad \text{Тоді} \quad z = \left(\frac{2+i}{1-i} \right)^2 = \left(\frac{4+4i-1}{1-2i-1} \right) = \frac{3+4i}{-2i} = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Отримали число z в алгебраїчній формі. Тобто $\operatorname{Re}(z) = -2$, $\operatorname{Im}(z) = \frac{3}{2}$.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+9}{4}} = \frac{5}{2}, \quad \arg z = \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right).$$

Число z у тригонометричній формі має вид

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ де } r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

$$z = \frac{5}{2} \left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right) + i \sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \right) = \frac{5}{2} \left(-\cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right) + i \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \right).$$

Число z у показниковій формі має вид $z = re^{i\varphi} \Rightarrow z = \frac{5}{2} e^{i(\pi - \operatorname{arctg}(\frac{3}{4}))}$.

Завдання 2. Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{1+i}$.

Розв'язання. Обчислимо значення кореня комплексного числа за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Представимо число в тригонометричній формі:

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) \right);$$

Отримаємо три різні значення кореня числа:

$$k = 0, \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right); \quad k = 1, \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{9\pi}{12}\right) \right);$$

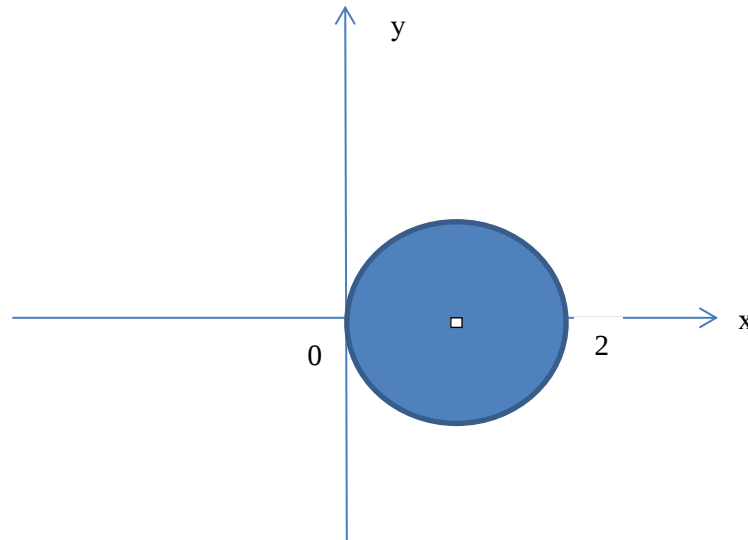
$$k = 2, \sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right) \right).$$

Завдання 3. Зобразити на комплексній площині множину точок, що задовольняють вказаним умовам $0 < |z-1| \leq 1$.

Розв'язання. $|z-1| = |x+iy-1| = |(x-1)+iy| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$

$$0 < \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \leq 1.$$

Точки z , які задовольняють дану умову лежать всередині круга з центром в точці $(1;0)$ і радіусом 1, окрім самого центра, тобто центра $(1;0)$.



Задачі для самостійного опрацювання

1. Зобразити на комплексній площині множину точок, що задовольняють вказаним умовам

а) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} \leq 0$, б) $3|z| - \operatorname{Re} z \leq 12$.

2. Подати в тригонометричній формі число

а) $z = 1 - i$, б) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. Установити, чи рівні числа $\sqrt{3} + i$ і $2 \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$.

4. Знайти всі значення кореня

а) $\sqrt[3]{-8i}$, б) $\sqrt[3]{64i}$, в) $\sqrt[4]{-16}$.

РОЗДІЛ 2. РЯДИ

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Ряди, збіжність, сума, необхідна ознака збіжності, залишок ряду. Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Записати у найбільш простій формі формулу загального члена

ряду: $\frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6} + \dots$

Розв'язання. Неважко помітити, що чисельники даних членів являються квадратами їх номерів, а знаменники на одиницю більше номера члена. Тому

найпростіша формула загального члена ряду має вигляд $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Відповідь: $u_n = \frac{n^2}{n+1}$.

Завдання 2. Дослідити ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)3^n}, \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

Розв'язання. а) Порівнюємо даний ряд з *розбіжним* гармонійним рядом. Для даного ряду виконується співвідношення $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$. Тому, за теоремою порівняння ряд розбігається.

б) Порівнюємо даний ряд з нескінченно спадною геометричною прогресією $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, цей ряд *збігається* (знаменник прогресії $\frac{1}{3} < 1$). Для всіх членів даних рядів виконується співвідношення $\frac{n}{(n+3)3^n} < \frac{1}{3^n}$.

За теоремою порівняння: ряд з «більшими» членами також збігається.

в) Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

Усі члени цього ряду, починаючи з третього, задовольняють умові

$$\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

збігається (як ряд спадної геометричної прогресії), то даний ряд також збігається.

Відповідь: а) ряд розбігається; б) ряд збігається; в) збігається.

Завдання 3. Чи являється збіжним ряд $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$?

Розв'язання. Складемо n -у часткову суму S_n : $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}$.

Очевидно, члени ряду являються членами геометричної прогресії з першим членом $b_1 = 1$ і знаменником $q = \frac{1}{3}$. Застосовуємо відому з шкільного курсу

математики формулу суми n перших членів геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$

і знаходимо n -у часткову суму даного ряду:

$$S_n = \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: сума існує і скінченна, даний ряд збігається і має суму $S = 1,5$.

Завдання 4. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

Розв'язання. Даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ не є збіжним, так

як $S_n = 0$, коли $n = 2k$ і $S_n = 1$, коли $n = 2k - 1$. У даному випадку не можна говорити, що ряд має суму.

Відповідь: даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ розбігається.

Завдання 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Розв'язання. Наявність факторіала у загальному члені зумовлює доцільність використання ознаки Даламбера: за умовою $u_n = \frac{3^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$.

Тоді знайдемо

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!} \Rightarrow p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 \Rightarrow p = 0 < 1.$$

Відповідь: ряд збігається.

Завдання 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної умови збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)} = 0 \Rightarrow \text{умова виконана і даний ряд може}$$

збігатися. З'ясуємо, чи збігається інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1) \ln^2(x+1)}$:

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1) \ln^2(x+1)} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \ln^{-2}(x+1) \frac{dx}{x+1} = -\lim_{b \rightarrow \infty} \ln^{-1}(x+1) \Big|_1^b = -\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x+1)} \Big|_1^b = \\ &= -\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln(b+1)} - \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Як бачимо, інтеграл збігається.

Відповідь: даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$ збігається.

Завдання 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Розв'язання. Необхідна ознака $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ виконується, оскільки

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0$, що свідчить про можливу збіжність ряду. Застосуємо достатню ознаку – інтегральну ознаку Коши:

$$u_n = \frac{1}{n^3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^b =$$

$$= -0,5 \lim_{b \rightarrow \infty} (b^{-2} - 1) = 0,5 - \text{інтеграл збігається, а значить і ряд збігається.}$$

Відповідь: даний ряд збігається.

Завдання 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3^4}{2^4} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{4^9}{3^9} + \dots + \frac{1}{3^n} \cdot \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}} + \dots$$

Розв'язання. За умовою $u_n = \frac{1}{3^n} \cdot \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}$. Маємо

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} \cdot \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Тоді $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1 \Rightarrow$ даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Завдання 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n5^n} = 0 \Rightarrow$

умова виконана. Застосуємо ознаки порівняння: візьмемо для порівняння збіжний

геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ з $q = \frac{1}{5} < 1$ і загальним членом $v_n = \frac{1}{5^n}$. Очевидно, що

загальний член даного ряду $u_n = \frac{1}{n5^n} \leq v_n = \frac{1}{5^n} \Rightarrow$ згідно з ознакою порівняння

даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Завдання 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum_1^{\infty} tg \frac{1}{n}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} tg \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow$ ознака виконується, можлива збіжність ряду. Далі застосуємо достатню ознаку – ознаку порівняння. Візьмемо для порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Відомо, що він розбігається як гармонійний при $p=1$. Крім того, відомо, що $tg \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$. Отже, згідно з ознакою порівняння даний ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Для даних рядів записати n -у часткову суму S_n та дослідити їх на збіжність за

означенням збіжності ряду а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$.

2. Дослідити на збіжність ряди: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+3)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!) \left(\frac{e}{n}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}$.

3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 5}$.

4. Дослідити на збіжність ряд За допомогою порівняння дослідити на збіжність

ряди: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 7}$;

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Знакозмінні ряди. Види збіжності. Знакопочережні ряди, теорема Лейбніца

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Розв'язання. Складемо ряд із модулів членів даного ряду, він збігається як

узагальнений гармонічний ряд з показником $p = 2 > 1$. Отже, збігається і даний ряд, причому абсолютно.

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

Завдання 2. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Розв'язання. Перевіримо першу умову теореми Лейбніца: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Так як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0, \quad \text{то} \quad \text{умова виконана;} \quad \text{друга умова теореми:}$$

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \dots > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} > \dots \text{також виконана, то за ознакою Лейбніца даний ряд}$$

збігається. Щоб дослідити, як збігається ряд: умовно чи абсолютно, дослідимо на

збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ за допомогою інтегральної ознаки Коші. З'ясуємо, чи

$$\text{збігається інтеграл } \int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1}: \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(2x-1) \Big|_1^b = \infty \Rightarrow \quad \text{інтеграл}$$

розбігається, що свідчить про розбіжність ряду.

Відповідь: ряд умовно збігається.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Як збігається кожен ряд (умовно чи абсолютно)?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 7^n}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)!};$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{3n+7} \right)^n; \quad g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{1}{5n}.$$

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Функціональні ряди. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Ряди Маклорена та Тейлора.

Стандартні розвинення функцій в степеневі ряди. Застосування степеневих рядів

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Розв'язання. за умовою $u_n = \ln^n x$, $u_{n+1} = \ln^{n+1} x = \ln x \cdot \ln^n x$. Тоді маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln x \cdot \cancel{\ln^n x}}{\cancel{\ln^n x}} \right| = |\ln x| < 1.$$

Отже, $-1 < \ln x < 1 \Rightarrow \ln e^{-1} < \ln x < \ln e \Rightarrow x \in (e^{-1}; e)$ – інтервал збіжності даного

ряду. Числа $x = e^{-1}$ і $x = e$ задовольняють умові $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$.

Дослідимо збіжність даного функціонального ряду при $x = e^{-1}$. За цієї умови із

даного ряду одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln e^{-1})^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ – розбіжний (див.

приклад 4). Дослідимо точку $x = e$, за цієї умови із даного ряду одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n e = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \infty.$$

Відповідь: $x \in (e^{-1}; e)$ – область збіжності даного ряду.

Завдання 2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{5^n}$.

Розв'язання. За умовою $a_n = \frac{1}{5^n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$. Тоді згідно з формулою радіуса збіжності степеневого ряду знайдемо радіус збіжності R та інтервал збіжності ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5 \Rightarrow (1-5; 1+5) = (-4; 6) \text{ – інтервал збіжності.}$$

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = -4$ та $x = 6$ степеневий ряд приймає вигляд:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(6-1)^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1^n.$$

Обидва ряди розбігаються, так як не задовольняють необхідній ознаці збіжності.

Відповідь: Отже, $(-4; 6)$ – область збіжності даного ряду.

Завдання 3. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.

Розв'язання. За умовою $a_n = n!$, $a^n = (n+1)!$. Тоді радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Відповідь: ряд збігається тільки в одній точці $x = 0$.

Завдання 4. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$.

Розв'язання. За умовою

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+3)} \Rightarrow \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = 1 \Rightarrow (-1; 1) - \text{інтервал}$$

збіжності. Дослідимо збіжність даного ряду при $x = 1$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Порівнюючи його зі збіжним гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, робимо висновок, що він

збігається, і $x = 1$ належить області збіжності даного ряду. При $x = -1$ даний ряд

перетворюється в знакопочеревний $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$, який збігається також, причому

абсолютно, так як збігається ряд, складений із абсолютних величин, що встановлено вище.

Відповідь: $[-1; 1]$ – область збіжності даного ряду.

Завдання 5. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$

Розв'язання. За умовою $a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$, тоді

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)! 2n(2n+1)}{(2n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n(2n+1) = \infty.$$

Оскільки $R = \infty$, то шукана область збіжності $(-\infty; \infty)$.

Відповідь: даний ряд збігається на всій числовій осі.

Завдання 6. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+2)^n}{n}$.

Розв'язання. за умовою $u_n(x) = \frac{3^n (x+2)^n}{n}$, $u_{n+1}(x) = \frac{3^{n+1} (x+2)^{n+1}}{n+1}$.

Тоді розв'язуємо нерівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} (x+2)^{n+1} n}{(n+1) 3^n (x+2)^n} \right| < 1$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\cancel{3^n} 3 (x+2)^{\cancel{n}} (x+2) n}{(n+1) \cancel{3^n} (x+2)^{\cancel{n}}} \right| = 3|x+2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow 3|x+2| < 1.$$

Отже, $|x+2| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}$, звідки робимо висновок, що

$\left(-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ – інтервал збіжності даного ряду. Числа $x = -\frac{7}{3}$ і $x = -\frac{5}{3}$

задовольняють умові $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$. Дослідимо збіжність даного ряду при $x = -\frac{7}{3}$.

За цієї умови із даного ряду одержимо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(-\frac{7}{3} + 2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \text{ який є знакопозадаєним. Застосуємо}$$

теорему Лейбніца: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 2) $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. Як бачимо, обидві умови

теорему Лейбніца виконуються, що свідчить про збіжність даного ряду при

$x = -\frac{7}{3}$. Дослідимо точку $x = -\frac{5}{3}$: із даного ряду одержимо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left(-\frac{5}{3} + 2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ який є гармонічним, } p = 1 \Rightarrow \text{ряд розбігається.}$$

Відповідь: $\left[-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ – область збіжності даного ряду.

Завдання 7. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{(n-1)!}$

Розв'язання. За умовою $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n!}$, тоді маємо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n-1)!}}{\frac{1}{n!}} \Rightarrow R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cancel{(n-1)!} \cdot n}{\cancel{(n-1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

Оскільки $R = \infty$, то шукана область збіжності $(-5 - \infty; -5 + \infty) \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$

Відповідь: даний ряд збігається на всій числовій осі.

Завдання 8. Розвинути функцію $y = \sin x$ у ряд Макларена (у точці $x = 0$).

Розв'язання. 1) знайдемо і обчислимо декілька перших порядків похідних:

$$\begin{array}{ll} y = \sin x, & y(0) = \sin 0 = 0, \\ y' = \cos x, & y'(0) = \cos 0 = 1, \\ y'' = -\sin x, & y''(0) = -\sin 0 = 0, \\ y''' = -\cos x, & y'''(0) = -\cos 0 = -1, \\ y^{IV} = \sin x, & y^{IV}(0) = \sin 0 = 0, \\ y^V = \cos x, & y^V(0) = \cos 0 = 1, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Як бачимо, після $-\cos x$ йде періодичний повтор першої четвірки різних функцій і відповідно четвірки їх значень. Отже,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

2) знайдемо область збіжності, розв'язуючи нерівність $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|}{\left| (-1)^{2n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \right|} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2n(2n+1)} < 1 \Rightarrow$$

$$x^2 < \lim_{n \rightarrow \infty} 2n(2n+1) \Rightarrow x^2 < \infty \Rightarrow |x| < \infty - \text{область збіжності.}$$

Відповідь: $\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \forall x \in (-\infty; \infty).$

Завдання 9. Розвинути у ряд Маклорена функцію $\ln \frac{1+x}{1-x}$.

Розв'язання. логарифм частки дорівнює різниці логарифмів, тобто

$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x).$ Застосуємо ряд 8 (додаток А) :

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Відповідь: $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad (|x| < 1).$

Завдання 10. Розвинути функцію $\frac{1}{1+x^2}$ у ряд за степенями x .

Розв'язання. Використаємо ряд 5 (додаток А):

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad (|x| < 1)$$

Відповідь: $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad (|x| < 1).$

Завдання 11. Розвинути у ряд Макларена функцію $y = \arctg x$.

Розв'язання. Відомо, що $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Тоді

$$\arctg x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow$$

$$\arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Відповідь: $\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots \Rightarrow \arctg x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad (|x| \leq 1).$

Завдання 12. Розвинути у ряд за степенями $x+2$ функцію $f(x) = \frac{1}{4+3x}$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{4+3x} = \frac{1}{-2+3(x+2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{3(x+2)}{2}} \Rightarrow$

$\frac{1}{4+3x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-y}$, де $y = 3 \frac{x+2}{2}$. Тоді за розкладом 5 (додаток А):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4+3x} &= -\frac{1}{2} (1 + y + \dots + y^n + \dots) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3(x+2)}{2} + \left(\frac{3(x+2)}{2} \right)^2 + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n (x+2)^n \Rightarrow \frac{1}{4+3x} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n (x+2)^n. \end{aligned}$$

Одержане розвинення вірно для всіх значень $y: |y| < 1 \Rightarrow$ для знаходження області збіжності знайденого ряду до даної функції необхідно розв'язати нерівність $-1 < \frac{3(x+2)}{2} < 1$. У результаті розв'язання одержимо $x \in \left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3} \right)$ – область збіжності.

Відповідь: $\frac{1}{4+3x} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n (x+2)^n, \forall x \in \left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3} \right)$.

Завдання 13. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin 2x}{x} dx$.

Розв'язання. Згідно 2 (додаток А) $\sin 2x$ представимо рядом, тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{x} dx &= \int \frac{1}{x} \left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \dots \right) dx = \\ &= \int \left(2 - \frac{2^3 x^2}{3!} + \frac{2^5 x^4}{5!} - \frac{2^7 x^6}{7!} + \dots \right) dx = 2x - \frac{2^3 x^3}{3! \cdot 3} + \frac{2^5 x^5}{5! \cdot 5} - \frac{2^7 x^7}{7! \cdot 7} + \dots \Rightarrow \end{aligned}$$

Відповідь: $\int \frac{\sin 2x}{x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}$.

Завдання 14. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' + e^y = x^3$, якщо $y(0) = 0$.

Розв'язання. Розв'язуємо дане рівняння відносно y' , знаходимо $y'', y''', \dots$ та обчислюємо їх значення у точці $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 y' &= x^3 - e^y, & y'(0) &= 0^3 - e^0 = -1, \\
 y'' &= 3x^2 - e^y \cdot y', & y''(0) &= 3 \cdot 0^2 - e^0 \cdot (-1) = 1, \\
 y''' &= 6x - (e^y y' \cdot y' + e^y \cdot y'') = & y'''(0) &= 6 \cdot 0 - e^0((-1)^2 + 1) = -2; \\
 &= 6x - e^y (y'^2 + y''); & & \\
 &\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Представляємо шуканий частинний розв'язок даного рівняння рядом Маклорена, так як початкове значення аргументу $x=0$, тобто рядом

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 \dots$$

Отже, шуканий частинний розв'язок $y = -x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \dots$

Відповідь: $y = -x + \frac{x^2}{2!} - \frac{2x^3}{3!} + \dots$

Завдання 15. Обчислити $\sqrt[5]{e}$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Так як $\sqrt[5]{e} = e^{1/5}$, то в розвиненні функції e^x беремо $x = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$$e^{1/5} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2 \cdot 2!} + \frac{1}{5^3 \cdot 3!} + \frac{1}{5^4 \cdot 4!} + \dots$$

Якщо взяти чотири члени цього ряду ($n=3$), то похибка обчислень не буде перевищувати 0,0001. Дійсно

$$R_3 < \frac{x^{3+1}}{3! (3+1-|x|)} = \frac{1}{5^4 \cdot 3! \left(4 - \frac{1}{5}\right)} \approx 0,00007 < 0,0001.$$

Відповідь: $e^{1/5} \approx 1,2213$ з точністю до 0,0001.

Завдання 16. Обчислити $\sin 18^\circ$ з точністю $\delta = 10^{-4}$.

Розв'язання. Застосуємо розвинення 2 (Додаток А), перейшовши до радіанної

міри кута $\left(18^\circ = \frac{\pi}{10}\right)$, знайдемо

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} - \dots \Rightarrow$$

$$\sin 18^\circ \approx 0,31416 - 0,00517 + 0,00003 - \dots \approx 0,3090.$$

Оскільки синус представлений знакопочерезним рядом, то похибка не більше першого із відкинутих членів ряду (згідно теореми Лейбніца), третій член ряду можна відкинути і похибка при цьому не перевищить 0,00003 а значить задана точність буде витримана.

Відповідь: $\sin 18^\circ \approx 0,3090$ з точністю $\delta < 10^{-4}$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Знайти область збіжності рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x-4)^n}{3^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n n \ln n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}.$$

2. Знайти області збіжності рядів:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{7^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}; \quad c) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)!(x-2)^n; \quad d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+x)^n}{n}; \quad e) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!};$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{n^2 + 4}.$$

3. Обчислити наближено із точністю $\delta = 10^{-3}$:

$$a) \sqrt{e}; \quad b) \frac{1}{e}; \quad c) \frac{1}{\sqrt{e}}; \quad d) \sqrt[5]{e}; \quad e) e^2; \quad f) \frac{1}{\sqrt[3]{e}}; \quad g) e;$$

$$j) \sin \frac{\pi}{3}; \quad k) \arcsin(0,5); \quad l) \operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}; \quad m) \cos \frac{\pi}{10};$$

$$p) \sqrt[3]{27,81}; \quad q) \sqrt[7]{136}; \quad r) \ln 3; \quad s) \lg 7; \quad t) \ln 10.$$

4. Знайти загальний розв'язок диференційного рівняння, яке задовольняє початковим умовам, у вигляді степеневого ряду.

$$a) y'' = xy^2 - y'; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 1,$$

$$б) y' = x^2 + y^3; \quad y(1) = 1.$$

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Тригонометричні ряди, ряд Фур'є. Розвинення функцій в ряд Фур'є

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Розвинути у ряд Фур'є на відрізку $[-\pi; \pi]$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0, \\ \pi + x, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція задовольняє усім умовам теореми Діріхле. Отже, її можна розвинути у ряд Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi + x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{5\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \pi \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n} \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Підставимо коефіцієнти у розклад $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, одержимо необхідне розвинення.

Відповідь:
$$f(x) = \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right).$$

Завдання 2. Розвинути у ряд Фур'є функцію $f(x) = e^{ax}$ ($a = \text{const} \neq 0$) на $[-\pi; \pi]$.

Розв'язання. Дана функція задовольняє усім умовам теореми Діріхле. Отже, її можна розвинути у ряд Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{e^{ax}}{a} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{\pi a} - e^{-\pi a}}{\pi a} = \frac{2 \operatorname{sh}(\pi a)}{\pi a};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos(nx) dx = \frac{e^{ax}}{\pi(a^2 + n^2)} [a \cos(nx) + n \sin(nx)] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \\ &= \frac{(-1)^n 2a \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}; \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin(nx) dx = \frac{e^{ax}}{\pi(a^2 + n^2)} [a \sin(nx) + n \cos(nx)] \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} 2n \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi(a^2 + n^2)}.$$

Відповідь: $e^{ax} = \frac{2 \operatorname{sh}(a\pi)}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} [a \cos(nx) - n \sin(nx)] \right\}.$

Завдання 3. Розвинути у ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ на відрізку $[0; 2\pi]$.

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\pi - x) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx = \frac{(\pi - x) \sin(nx)}{2\pi n} \Big|_0^{2\pi} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx = \frac{(\pi - x) \cos(nx)}{2\pi n} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{n}.$$

Відповідь: $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Розвинути у ряд Фур'є функцію

а) $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq \pi \end{cases};$ б) $f(x) = x^2; \quad x \in (0; \pi);$ (непарним чином).

2. . Розвинути у ряд Фур'є функцію

.а) $f(x) = x + 1; \quad x \in (-1; 1];$ б) $f(x) = 2x; \quad x \in (0; 2];$ (парним чином).

РОЗДІЛ 3. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Ідея операційного числення. Означення та властивості перетворення Лапласа.
Оригінал та зображення.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Для $f(t) = 1$ знайти $F(p)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} F(p) &= L(f(t)) = L(1) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \frac{1}{-p} \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-pt} \Big|_0^b = \\ &= \frac{1}{-p} \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-pb} - e^0) = \frac{1}{-p} (e^{-\infty} - 1) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Отже $L(1) = F(p) = \frac{1}{p}$.

Відповідь: $1 \square \frac{1}{p}$.

Завдання 2. Знайти оригінал функції $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.

Розв'язання. Представимо дріб $F(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$ у вигляді суми найпростіших

дрібів: $F(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$.

За методом невизначених коефіцієнтів знаходимо

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}.$$

Звідки маємо

$$F(p) = \frac{1}{2} \frac{1}{p-1} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{2} \frac{p}{p^2+1} \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} (e^t - \cos t - \sin t).$$

Відповідь: $f(t) = \frac{1}{2} (e^t - \cos t - \sin t)$.

Завдання 3. Знайти зображення періодичної функції $f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & a < t < 2a \end{cases}$ при

$t > 0$ з періодом $2a$:

Розв'язання.

$$\begin{aligned} L[f(t); p] &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{ka}^{(k+1)a} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2ka}^{(2k+1)a} e^{-pt} dt = \frac{A}{p} \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-2kap} - e^{-(2k+1)pa}) = \\ &= \frac{A(1 - e^{-pa})}{p} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kap} = \frac{A(1 - e^{-pa})}{p(1 - e^{-2pa})} = \frac{A}{p(1 + e^{-pa})}. \end{aligned}$$

Відповідь: $L[f(t); p] = \frac{A}{p(1 + e^{-pa})}.$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Для $f(t) = e^{at}$ знайти $F(p)$.
2. Для $f(t) = t$ знайти $F(p)$.
3. Для $f(t) = \sin \omega t$ знайти $F(p)$.
4. Для $f(t) = \cos \omega t$ знайти $F(p)$.

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Основні теореми операційного числення (теорема подібності, теорема запізнення та зсуву).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Знайти 1) $L[t^n e^{at}; p]$, 2) $L[e^{\lambda t} \cos \omega t; p]$

Розв'язання. 1) $L[t^n; p] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re} p > 0.$

За теоремою зсуву маємо

$$L[t^n e^{\alpha t}; p] = \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

$$2) L[\cos \omega t; p] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, L[\sin \omega t; p] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|.$$

За теоремою зсуву маємо

$$L[e^{\lambda t} \cos \omega t; p] = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}, L[e^{\lambda t} \sin \omega t; p] = \frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2},$$

$$\operatorname{Re} p > (\operatorname{Re} \lambda + |\operatorname{Im} \omega|).$$

Завдання 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2y = e^{2t}$ за умови, що $y(0) = 1$.

Розв'язання. Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння.

$$L(y' + 2y) = L(e^{2t}) \Rightarrow L(y') + 2L(y) = \frac{1}{p - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pY - y(0) + 2Y = \frac{1}{p - 2} \Rightarrow (p + 2)Y - 1 = \frac{1}{p - 2} \Rightarrow$$

$$(p + 2)Y = \frac{1}{p - 2} + 1 = \frac{1 + p - 2}{p - 2} \Rightarrow (p + 2)Y = \frac{p - 1}{p - 2} \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{p - 1}{(p - 2)(p + 2)} \Rightarrow Y(p) = \frac{p - 1}{p^2 - 2^2};$$

$$Y(p) = \frac{p - 1}{p^2 - 2^2} = \frac{p}{p^2 - 2^2} - \frac{1}{p^2 - 2^2} \square \operatorname{ch}(2 \cdot t) - \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2 \cdot t).$$

Відповідь: $y(t) = \operatorname{ch}(2 \cdot t) - \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2 \cdot t).$

Завдання 3. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ при } t < 0, t \geq 4, \\ t, \text{ при } 0 \leq t \leq 2, \\ 4 - t, \text{ при } 2 < t < 4 \end{cases}$$

Розв'язання. $f(t) = t \cdot \eta(t) - t \cdot \eta(t - 2) + (4 - t) \cdot \eta(t - 2) - (4 - t) \cdot \eta(t - 4),$

тобто $f(t) = t \cdot \eta(t) - (t - 2 + 2) \eta(t - 2) - (t - 2 - 2) \cdot \eta(t - 2) + (t - 4) \cdot \eta(t - 4),$

розкриємо дужки і наведемо подібні доданки

$$f(t) = t \cdot \eta(t) - 2(t-2)\eta(t-2) + (t-4) \cdot \eta(t-4).$$

Тоді зображення матиме вигляд

$$f(t) \square \frac{1}{p^2} - 2 \cdot \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-4p} = F(p).$$

Відповідь. $f(t) \square \frac{1}{p^2} - 2 \cdot \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} e^{-4p} = F(p).$

Завдання 4. Знайти зображення функції $f(t) = 5\sin(2t-4) + 4(t-3)^3$.

Розв'язання. $L\{f(t)\} = 5L\{\sin 2(t-2)\} + 4L\{(t-3)^3\} = \frac{10e^{-2p}}{p^2+4} + \frac{24e^{-3p}}{p^4}.$

Завдання 5. Знайти оригінал функції

$$F(p) = \frac{24}{(2p+10)^4} + \frac{12p+24}{p^2+4p+13}$$

Розв'язання: Представимо зображення у вигляді

$$F(p) = \frac{4 \cdot 3!}{16(p+5)^4} + \frac{12(p+2)}{(p+2)^2+9}, \text{ тоді маємо оригінал}$$

$$f(t) = \frac{1}{4} e^{-5t} \cdot t^3 + 12e^{-2t} \cdot \cos 3t.$$

Відповідь. $f(t) = \frac{1}{4} e^{-5t} \cdot t^3 + 12e^{-2t} \cdot \cos 3t.$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Знайти зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, t \geq 5, \\ t, & \text{при } 0 \leq t \leq 2, \\ 2+t, & \text{при } 2 < t < 5 \end{cases}.$$

2. Знайти оригінали заданих зображень.

а) $F(p) = \frac{5p+8}{p^2+4p+13}$; б) $F(p) = \frac{3-2p}{(p-1)(p+1)^2}.$

3. Знайти зображення функції $f(t) = e^{2t} \cos t$.

4. знайти зображення функції $f(t) = e^{-4t} \sin 2t \cos 3t$.

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Основні теореми операційного числення. Диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Знайти зображення функції $e^{mt} f(t)$

Розв'язання.

$$e^{mt} f(t) \square \int_0^{+\infty} e^{mt} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t(p-m)} dt = F(p-m) \Rightarrow$$

$$e^{mt} f(t) \square F(p-m).$$

Відповідь. $e^{mt} f(t) \square F(p-m)$.

Завдання 2. Знайти зображення функції $f(t) = \operatorname{sh} t$.

Розв'язання.

$$L\{\operatorname{sh} t\} = L\{(\operatorname{ch} t)'\} = pL\{\operatorname{ch} t\} - \operatorname{ch} 0 = p \frac{p}{p^2-1} - 1 = \frac{1}{p^2-1}.$$

Відповідь. $L\{\operatorname{sh} t\} = \frac{1}{p^2-1}$.

Завдання 3. Знайти зображення функції $f(t) = t \sin t$.

Розв'язання. За теоремою про диференціювання зображення маємо

$$L\{t \sin t\} = -\left(L\{\sin t\}\right)' = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)' = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Відповідь. $L\{t \sin t\} = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$

Завдання 4. Знайти зображення функції $f(t) = \int_0^t t \sin t \, dt.$

Розв'язання. За теоремою про інтегрування оригіналу та результатами завдання 3 маємо:

$$F(p) = \frac{2}{(p^2+1)^2}.$$

Відповідь: $F(p) = \frac{2}{(p^2+1)^2}.$

Завдання 5. Знайти зображення функції $f(t) = \frac{e^{-2t} \sin t}{t}.$

Розв'язання. За теоремою зсуву маємо $L\{e^{-2t} \sin t\} = \frac{1}{(p+2)^2+1}$, тоді за теоремою про інтегрування зображення отримаємо

$$F(p) = \int_p^\infty \frac{dp}{(p+2)^2+1} = \arctg(p+2) \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg(p+2) = \text{arcctg}(p+2).$$

Відповідь. $F(p) = \text{arcctg}(p+2).$

Задачі для самостійного опрацювання

1. Знайти зображення функції

$$f(t) = \int_0^t t^2 e^{-t} \, dt$$

2. Знайти зображення функції

$$a) f(t) = \frac{e^t - 1}{t}, \quad б) f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}.$$

3. Знайти зображення функції $f(t) = t^2 \cos t.$

4. Знайти зображення функції $f(t) = \frac{e^{-3t} \cos t}{t}$.

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Застосування операційного числення до розв'язування диференціальних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Завдання 1. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + 2y = e^{2t}$ за умови, що $y(0) = 1$.

Розв'язання. Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння.

$$L(y' + 2y) = L(e^{2t}) \Rightarrow L(y') + 2L(y) = \frac{1}{p-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow pY - y(0) + 2Y = \frac{1}{p-2} \Rightarrow (p+2)Y - 1 = \frac{1}{p-2} \Rightarrow$$

$$(p+2)Y = \frac{1}{p-2} + 1 = \frac{1+p-2}{p-2} \Rightarrow (p+2)Y = \frac{p-1}{p-2} \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p+2)} \Rightarrow Y(p) = \frac{p-1}{p^2-2^2};$$

$$Y(p) = \frac{p-1}{p^2-2^2} = \frac{p}{p^2-2^2} - \frac{1}{p^2-2^2} \square ch(2 \cdot t) - \frac{1}{2} sh(2 \cdot t).$$

Відповідь: $y(t) = ch(2 \cdot t) - \frac{1}{2} sh(2 \cdot t).$

Завдання 2. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + y = e^{-t}$ за умови, що $y(0) = 1$.

Розв'язання.

$$L(y') + L(y) = L(e^{-t}) \Rightarrow pY - y(0) + Y = \frac{1}{p+1} \Rightarrow (p+1)Y - 1 = \frac{1}{p+1} \Rightarrow$$

$$(p+1)Y = \frac{1}{p+1} + 1 \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} \Rightarrow y(t) = te^{-t} + e^{-t}.$$

Виконаємо перевірку $y' + y = e^{-t}$

$$((t+1)e^{-t})' + (t+1)e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow (t+1)'e^{-t} + (t+1)(e^{-t})' + (t+1)e^{-t} = e^{-t};$$

$$1 \cdot e^{-t} + (t+1)(-e^{-t}) + (t+1)e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow e^{-t} \equiv e^{-t}.$$

Відповідь: $y(t) = (t+1)e^{-t}$.

Завдання 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 3y' + 2y = 1 + t + t^2$ за умови, що $y(0) = 0$ і $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Застосуємо перетворення Лапласа до даного рівняння

$$L(y'' + 3y' + 2y) = L(1 + t + t^2).$$

$$L(1 + t + t^2) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3}, L(y) = Y, L(y') = pY - y(0) = pY,$$

$$L(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 1 \Rightarrow$$

$$p^2Y - 1 + 3pY + 2Y = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3} \Rightarrow$$

$$p^2Y + 3pY + 2Y = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3} + 1 \Rightarrow (p^2 + 3p + 2)Y = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3} + 1$$

$$Y = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3} + 1}{p^2 + 3p + 2} \Rightarrow \frac{p^3 + p^2 + p + 2}{p^3(p^2 + 3p + 2)} \Rightarrow Y(p) = \frac{p^3 + p^2 + p + 2}{p^3(p^2 + 3p + 2)}$$

$$Y(p) = \frac{p^3 + p^2 + p + 2}{p^3(p+2)(p+1)} = \frac{p^2(p+1) + p + 2}{p^3(p+2)(p+1)} = \frac{1}{p(p+2)} + \frac{1}{p^3(p+1)}.$$

Представимо другий дріб у вигляді суми простих дробів,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^3(p+1)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p^3} + \frac{D}{p+1} = \\ &= \frac{Ap^2(p+1) + Bp(p+1) + C(p+1) + Dp^3}{p^3(p+1)} \Rightarrow \\ 1 &= (A+D)p^3 + (A+B)p^2 + (B+C)p + C \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+D=0; \\ A+B=0; \\ B+C=0; \\ C=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1; \\ B=-1; \\ A=1; \\ D=-1. \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p^3(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p+1}.$$

$$\begin{aligned}Y(p) &= \frac{1}{p(p+2)} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p+1} \square \frac{1-e^{-2t}}{2} + 1-t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t} \Rightarrow \\ \Rightarrow y(t) &= \frac{3}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2}.\end{aligned}$$

Виконаємо перевірку отриманого розв'язку. Знайдемо похідні функції

$$y(t) = \frac{3}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2}:$$

$$y' = \left(\frac{3}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} \right)' = -1 + t + e^{-t} + e^{-2t},$$

$$y'' = (-1 + t + e^{-t} + e^{-2t})' = 1 - e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

Підставимо функцію та її похідні до рівняння

$$\begin{aligned}y'' + 3y' + 2y &= 1 + t + t^2 \Rightarrow \\ (1 - e^{-t} - 2e^{-2t}) + 3(-1 + t + e^{-t} + e^{-2t}) + 2\left(\frac{3}{2} - t + \frac{1}{2}t^2 - e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2}\right) &= \\ = 1 - e^{-t} - 2e^{-2t} - 3 + 3t + 3e^{-t} + 3e^{-2t} + 3 - 2t + t^2 - 2e^{-t} - e^{-2t} &= \\ = 1 + t + t^2.\end{aligned}$$

Бачимо, що отриманий розв'язок задовольняє дане рівняння.

Відповідь: $y(t) = \frac{3}{2} - t + \frac{t^2}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} - e^{-t}.$

Завдання 4. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь,

$$\begin{cases} x'(t) = -x + y + z; \\ y'(t) = x - y + z; \\ z'(t) = x + y - z. \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 2, z(0) = -1.$$

Розв'язання. Якщо вважати, що $L(x) = X(p), L(y) = Y(p), L(z) = Z(p)$, то згідно властивості диференціювання оригіналу:

$$\begin{aligned} L(x'(t)) &= pX - x(0) = pX - 2, \quad L(y'(t)) = pY - y(0) = pY - 2, \\ L(z'(t)) &= pZ - z(0) = pZ + 1. \end{aligned}$$

Застосуємо перетворення Лапласа до кожного з рівнянь системи:

$$\begin{cases} pX - 2 = -X + Y + Z; \\ pY - 2 = X - Y + Z; \\ pZ + 1 = X + Y - Z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p+1)X - Y - Z = 2; \\ -X + (p+1)Y - Z = 2; \\ -X - Y + (p+1)Z = -1. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему за формулами Крамера $X = \frac{\Delta_x}{\Delta}, Y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, Z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$,

де $\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -1 \\ -1 & p+1 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix}$ – головний визначник, визначник складений із

коефіцієнтів при невідомих в системі; $\Delta_{x,y,z}$ – допоміжні визначники, визначники отримані з головного шляхом заміни відповідного стовпця коефіцієнтів стовпцем вільних членів.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & -1 \\ -1 & p+1 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+1)^3 - 1 - 1 - 3(p+1) = p^3 + 3p^2 - 4 \Rightarrow \Delta = (p+2)^2(p-1),$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & p+1 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix} = 2(p+1)^2 - 1 + 2 - (p+1) - 2 + 2(p+1) = \\ &= 2(p+1)^2 + (p+1) - 1 = 2((p+1) - (-1)) \left((p+1) - \frac{1}{2} \right) = (p+2)(2p+1), \end{aligned}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p+2)(2p+1),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} p+1 & -1 & 2 \\ -1 & p+1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(p+2)(p-4).$$

Зауважимо, визначники обчислені за правилом трикутника:

$$X(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)}, Y(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)}, Z(p) = \frac{-(p-4)}{(p+2)(p-1)}.$$

Представимо зображення X, Y, Z розв'язків $x(t), y(t), z(t)$ у вигляді простих (табличних) дробів та знайдемо їх оригінали:

$$X(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)} = 2 \frac{p}{(p+2)(p-1)} + \frac{1}{(p+2)(p-1)},$$

і, враховуючи відповідність для кожного дробу отримаємо

$$X(p) \Rightarrow 2 \frac{-1e^t - 2e^{-2t}}{-1-2} + \frac{e^{-2t} - e^t}{-1-2} = \frac{1}{-3} (-2e^t - 4e^{-2t} + e^{-2t} - e^t) \Rightarrow$$

$$x(t) = e^t + e^{-2t}.$$

$$Y(p) = \frac{2p+1}{(p+2)(p-1)} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{p-1} = \frac{A(p-1) + B(p+2)}{(p+2)(p-1)}.$$

З рівності дробів, у яких рівні знаменники, робимо висновок про необхідність прирівняти чисельники цих дробів.

$$2p+1 = A(p-1) + B(p+2) \Rightarrow \begin{matrix} p=1 \\ p=-2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 3 = B \cdot 3 \\ -3 = A \cdot (-3) \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} B=1, \\ A=1. \end{cases}$$

$$Y(p) = \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p-1} \Rightarrow e^{-2t} + e^t \Rightarrow y(t) = e^t + e^{-2t}.$$

$$Z(p) = \frac{-(p-4)}{(p+2)(p-1)} = -\frac{(p-1)-3}{(p+2)(p-1)} = -\frac{1}{p+2} + \frac{3}{(p+2)(p-1)} \Rightarrow$$

$$Z(p) \Rightarrow -e^{-2t} + 3 \left(\frac{e^{-2t} - e^t}{-1-2} \right) = e^t - 2e^{-2t} \Rightarrow z(t) = e^t - 2e^{-2t}.$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x(t) = e^t + e^{-2t}, \\ y(t) = e^t + e^{-2t}, \\ z(t) = e^t - 2e^{-2t} \end{cases} - \text{розв'язок даної системи.}$$

Завдання 5. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь,

$$\begin{cases} x'(t) - 5x + 9y = 4, \\ y'(t) - x + 5y = e^{5t}. \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Розв'язання. Нехай $L(x) = X(p)$, $L(y) = Y(p)$, тоді згідно властивості маємо:

$$L(x'(t)) = pX - x(0) = pX, \quad L(y'(t)) = pY - y(0) = pY.$$

Застосуємо перетворення Лапласа до кожного рівняння системи:

$$\begin{cases} L(x'(t) - 5x + 9y) = L(4), \\ L(y'(t) - x + 5y) = L(e^{5t}). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} pX - 5X + 9Y = \frac{4}{p}, \\ pY - X + 5Y = \frac{1}{p-5}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (p-5)X + 9Y = \frac{4}{p}, \\ -X + (p+5)Y = \frac{1}{p-5}. \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} p-5 & 9 \\ -1 & p+5 \end{vmatrix} = p^2 - 25 + 9 = p^2 - 16,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{4}{p} & 9 \\ \frac{1}{p-5} & p+5 \end{vmatrix} = \frac{4p+20}{p} - \frac{9}{p-5} = \frac{4p^2 - 9p - 100}{p(p-5)} \Rightarrow$$

$$\Delta_x = \frac{(4p-25)(p+4)}{p(p-5)}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} p-5 & \frac{4}{p} \\ -1 & \frac{1}{p-5} \end{vmatrix} = 1 + \frac{4}{p} = \frac{p+4}{p}.$$

За формулами Крамера

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{(4p-25)(p+4)}{p(p-5)(p^2-16)} = \frac{4p-25}{p(p-5)(p-4)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{p+4}{p(p^2-16)} = \frac{\cancel{p+4}}{p(p-4)(\cancel{p+4})} = \frac{1}{p(p-4)}.$$

$$X(p) = \frac{4}{(p-5)(p-4)} - 25 \frac{1}{p(p-5)(p-4)} \Rightarrow$$

$$X(p) \square 4 \frac{e^{5t} - e^{4t}}{5-4} - 25 \left(\frac{1}{20} - \frac{5e^{4t} - 4e^{5t}}{20(5-4)} \right) \Rightarrow x(t) = -\frac{5}{4} - e^{5t} + \frac{9}{4} e^{4t},$$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p-4)} \square \frac{e^{0t} - e^{4t}}{0-4} = -\frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4} \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4}.$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x(t) = -\frac{5}{4} - e^{5t} + \frac{9}{4} e^{4t}, \\ y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4}. \end{cases} \quad \text{— розв'язок даної системи.}$$

Завдання 6. Розв'язати інтегральне рівняння: $\varphi(t) = 2 + \frac{1}{2} \int_0^t (t-x)^2 \varphi(x) dx$.

Розв'язання. Враховуючи, що $\varphi(t) \square \Phi(p)$, $2 \square \frac{2}{p}$, $t^2 \square \frac{2}{p^3}$, отримаємо:

$$\Phi(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{2} \frac{2}{p^3} \cdot \Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) \left(1 - \frac{1}{p^3} \right) = \frac{2}{p} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{2p^2}{p^3 - 1},$$

$$\Phi(p) = \frac{2p^2}{(p-1)(p^2+p+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+p+1} \Rightarrow$$

$$\frac{2p^2}{(p-1)(p^2+p+1)} = \frac{A(p^2+p+1) + (Bp+C)(p-1)}{(p-1)(p^2+p+1)} \Rightarrow$$

$$2p^2 = A(p^2+p+1) + (Bp+C)(p-1)$$

$$2p^2 = (A+B)p^2 + (A-B+C)p + (A-C)$$

$$\begin{array}{l|l} p^2 & 2 = A+B \\ p & 0 = A-B+C \\ p^0 & 0 = A-C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} B = 2-A, \\ C = A, \\ 0 = A-2+A+A. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2/3, \\ C = 2/3, \\ B = 2 - 2/3 = 4/3. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Phi(p) = \frac{2}{3} \frac{1}{p-1} + \frac{2}{3} \frac{2p+1}{p^2+p+1} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{p-1} + 2 \frac{p+1/2}{(p+1/2)^2 + 3/4} \right) \Rightarrow$$

$$\Phi(p) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{p-1} + 2 \frac{p+1/2}{(p+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right) \square \frac{2}{3} \left(e^t + 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3} \cdot t}{2} \right)$$

Відповідь: $\varphi(t) = \frac{2}{3}e^t + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{3} \cdot t}{2}$ – розв’язок рівняння.

Завдання 7. Розв’язати інтегральне рівняння $\varphi(t) = t + \int_0^t (t-x) \cdot \varphi(x) dx$.

Розв’язання. Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння і враховуючи, що

$\varphi(t) \square \Phi(p), t \square \frac{1}{p^2}$, отримаємо:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} \cdot \Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{1}{p^2} : \frac{p^2-1}{p^2} \Rightarrow$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p^2}{p^2-1} = \frac{1}{p^2-1} \Rightarrow \Phi(p) = \frac{1}{p^2-1} \square \frac{e^t - e^{-t}}{2} = sh(t).$$

Відповідь: $\varphi(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ – розв’язок рівняння.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Розв’язати інтегральне рівняння $\varphi(t) = \cos t + \int_0^t (t-x) \varphi(x) dx$.

2. Розв’язати рівняння

$$y'' + 4y = 2 \cos 2t; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 4.$$

3. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1' - 4y_2 - 2y_1 = \cos t \\ y_2' + y_1 + 2y_2 = \sin t \end{cases}; \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

4. Розв’язати рівняння $x(t) = 5 + 2 \int_0^t x(\tau) \sin 2(t-\tau) d\tau$.

РОЗДІЛ 4. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Елементи комбінаторики. Основні поняття теорії ймовірностей. Випадкові події, класифікація подій, операції над подіями. Означення ймовірності події

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Порядок виступів 5 учасників конференції визначається жеребкуванням. Скільки різних варіантів жеребкування при цьому можливо.

Розв'язання. Очевидно, що кожен варіант жеребкування відрізняється тільки порядком учасників конкурсу. Тоді з рівності (1) отримаємо

$$N = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ варіантів виступів.}$$

Відповідь. 120 варіантів.

Приклад 2. Скільки існує семизначних чисел, що складаються з цифр 7, 8, 9, в яких цифра 7 повторюється 3 рази, а цифра 8, 9 по два рази?

Розв'язання. Кожне семизначне число відрізняється порядком цифр, причому за умовою, цифри повторюються. Кількість чисел - перестановка з повтореннями з семи елементів. Для обчислення загальної кількості перестановок застосуємо формулу (2)

$$P_7(3, 2, 2) = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

Відповідь. 210 чисел існує.

Приклад 3. Для участі у студентських заходах може бути присутній кожен з 10 студентів групи. Скільки існує різних способів відвідування заходу?

Розв'язання. Шукана кількість дорівнює кількості усіх підмножин множини, яка складається з 10 елементів, тобто

$$N = 2^{10} = 1024.$$

Відповідь. 1024 способів.

Приклад 4. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайдіть ймовірність

того, що з п'яти навмання обраних деталей рівно три будуть якісні.

Розв'язання. Нехай подія A – з 5 обраних виробів рівно 3 якісні. Аналогічно, до попереднього прикладу отримаємо

$$P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{5! \cdot 5!}{10!} = \frac{10}{21}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{10}{21}.$

Приклад 5. Протягом зміни чоловік прийняв у ремонт 10 годинників тієї самої марки від 10 різних осіб і перед закінченням зміни навмання розклав їх підряд на полиці. Знайти ймовірність того, що три годинники, які належать певним особам, виявились поруч.

Розв'язання. Нехай подія A – {три годинники, які належать певним особам, виявились поруч}.

Усі 10 годинників розкладались навмання, тому вони могли розміститися в довільному порядку. Отже, можлива елементарна подія – перестановка годинників. Загальна кількість елементарних подій дорівнює кількості перестановок із 10 елементів. Усі вони рівноможливі і несумісні. Тому можна застосувати класичне означення ймовірності. Тоді, за означенням перестановки, $n = 10!$. Щоб обчислити m , об'єднаємо 3 годинники певних осіб в одну групу. Тоді для події A буде $7!$ перестановок серед 7 годинників, які залишились; $3!$ переставлень буде у групі відібраних годинників, а крім того, група із 3 годинників може бути розміщена в будь-якому із 8 проміжків між 7 годинниками, які залишились. Отже,

$$P(A) = \frac{7! \cdot 3! \cdot 8}{10!} = \frac{6 \cdot 8}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{15}.$$

Відповідь. $P(A) = \frac{1}{15}.$

Зауваження. Можна міркувати по іншому. 3 годинники утворюють «зв'язку». Залишається 7 годинників і «зв'язка» - це 8 «елементів». Тоді для події A буде $8!$ перестановок серед 8 «елементів» і $3!$ переставлень буде у групі

відібраних годинників.

Задачі для самостійного опрацювання

1. З 10 троянд і 8 жоржин потрібно скласти букет так, щоб у ньому були 2 троянди та 3 жоржини. Скількома способами можна скласти такий букет?
2. Серед переставлень цифр числа 1234567 скільки таких, які починаються з цифр 1, 2, 3 за умови, що ці цифри розташовані в будь-якому порядку?
3. З десяти лотерейних квитків виграшними є 2. Знайти ймовірність того, що серед узятих на вивчення 5 квитків хоча б один виграшний.
4. До кінця дня в палатці залишилося 60 кавунів, з яких 50 стиглі. Покупець вибирає 2 кавуна. Знайти ймовірність того, що обидва кавуни стиглі?
5. У партії з 30 деталей 8 браковані. Знайти ймовірність того, що з 5 взятих на вивчення деталей три будуть браковані.

Література [1, 2, 3].

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Основні теореми теорії ймовірностей. Формула повної ймовірності та формули Бейєса.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. У відділ технічного контролю представлені на огляд 80 костюмів, з яких 50 костюмів одного фасону, а 30 – іншого. Знайти ймовірність того, що взяті на вивчення для огляду костюми виявляться різних фасонів.

Розв'язання. Позначимо через подію A – надійшов на огляд костюм першого фасону, через B – надійшов на огляд костюм другого фасону, через C – два костюми, що надійшли на огляд, є костюмами різних фасонів.

Подія C може відбутися тільки тоді, коли першою відбудеться подія A , а другою подія B , або першою – подія B , а другою – подія A . Події A і B залежні.

Події AB і BA – незалежні, несумісні.

Ймовірність появи події C визначимо за формулою:

$$P(C) = P(AB + BA) = P(A)P(B/A) + P(B)P(A/B).$$

За умовою маємо:

$$P(A) = \frac{50}{80}, P(B) = \frac{30}{80}, P(A/B) = \frac{50}{79}, P(B/A) = \frac{30}{79}.$$

Тоді

$$P(C) = P(AB + BA) = \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} + \frac{30}{80} \cdot \frac{50}{79} = \frac{75}{316} + \frac{75}{316} = \frac{75}{158}.$$

Відповідь. $P(C) = \frac{75}{158}.$

Приклад 2. Колектив працівників фірми складається на 65% із жінок. Серед працівників фірми 25% чоловіків і 35% жінок мають вищу освіту. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний працівник фірми є чоловік і має вищу освіту.

Розв’язання. Нехай подія A – вибраний навмання працівник фірми має вищу освіту, подія B – вибраний навмання працівник фірми є чоловік. За умовою задачі $P(B) = 0,35$, $P(A/B) = 0,25$. Подія C полягає в тому, що вибраний навмання працівник фірми має вищу освіту і є чоловік. Тоді маємо:

$$P(C) = P(B) \cdot P(A/B) = 0,35 \cdot 0,25 = 0,0875.$$

Відповідь. $P(C) = 0,0875.$

Приклад 3. У кожному з трьох ящиків лежить по 10 деталей; у першому ящику 2 деталі браковані, у другому – 3, у третьому – 1. З кожного ящика беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них є принаймні одна стандартна.

Розв’язання. Позначимо події: подія A – з трьох деталей принаймні одна стандартна; події A_i , ($i=1,2,3$) означають, що взята деталь стандартна з i -ого ящика. За умовою задачі:

$$P(A_1) = \frac{8}{10} = 0,8; \quad P(A_2) = \frac{7}{10} = 0,7; \quad P(A_3) = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Тоді ймовірності протилежних подій дорівнюють

$$q_1 = P(\bar{A}_1) = \frac{2}{10} = 0,2; \quad q_2 = P(\bar{A}_2) = \frac{3}{10} = 0,3; \quad q_3 = P(\bar{A}_3) = \frac{1}{10} = 0,1$$

Отже,

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = \\ &= 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 1 - 0,006 = 0,994. \end{aligned}$$

Відповідь. $P(A) = 0,994$.

Приклад 4. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем в мішень при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність попадання в мішень при одному пострілі.

Розв'язання. Введемо позначення: подія A - попасти в мішень хоча б при одному з чотирьох пострілів; p – ймовірність влучення при одному пострілі, $q = 1 - p$ – ймовірність протилежної події (промаху при одному пострілі).

Тоді маємо

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - q^4 = 0,9984, \\ q^4 &= 0,0016; \quad q = 0,2; \quad p = 1 - q = 1 - 0,2 = 0,8. \end{aligned}$$

Відповідь. $p = 0,8$.

Приклад 5. В магазин надійшла продукція з трьох фабрик: продукції, яка виготовлена на першій фабриці - 50%, 30% - на другий і 20% - на третій. Для продукції брак становить: для першої фабрики - 2%, другий - 3% і третьої - 5%. Яка ймовірність, того що виріб, придбаний в магазині, виявиться бракованим?

Розв'язання. Подія A – виріб виявиться бракованим. Введемо наступні гіпотези: H_1 - купується виріб виготовлений на першій фабриці, H_2 - на другий, H_3 - на третій. Їх ймовірності за умовою дорівнюють: $P(H_1) = 0,5$, $P(H_2) = 0,3$, $P(H_3) = 0,2$. Відомі також умовні ймовірності $P(A/H_1) = 0,02$ (це ймовірність того, що виріб бракований за умови, що він виготовлено першою фабрикою),

$P(A/H_2) = 0,03$, $P(A/H_3) = 0,05$. Тоді згідно з формулою повної ймовірності маємо

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3) = \\ &= 0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,029. \end{aligned}$$

Відповідь. $P(A) = 0,029$.

Приклад 6. Змінимо питання в попередньому прикладі 5. Будемо вважати, що хтось купив в магазині виріб і воно виявилось бракованим (тобто подія A відбулася). Яка ймовірність того, що воно виготовлено на третій фабриці?

Розв'язання. Тут потрібно переоцінити ймовірність третьої гіпотези, тобто визначити ймовірність виготовлення купленого виробу на третій фабриці за умови, що воно виявилось бракованим. Таку умовну ймовірність визначає формула Бейеса:

$$\begin{aligned} P(H_3/A) &= \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + P(H_3) \cdot P(A/H_3)} = \\ &= \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,5 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,03 + 0,2 \cdot 0,05} = 0,345. \end{aligned}$$

Відповідь: $P(H_3/A) = 0,345$.

Задачі для самостійного опрацювання

- У екзаменаційному білеті 3 питання: 1 – теоретичне, 2 – практичних. Ймовірність повної відповіді на теоретичне і практичне питання складає 0,8 і 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що студент дасть повну відповідь не менш ніж на 2 питання білету.
- Деталь перевіряється на стандартність одним з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь потрапить до першого контролера, дорівнює 0,45, а до другого – 0,55. Ймовірність того, що стандартну деталь буде визнано стандартною першим контролером, дорівнює 0,95, а другим – 0,85. Знайти ймовірність того, що:
 - стандартну деталь при перевірці буде визнано стандартною;
 - деталь перевіряв перший контролер.

Література [1, 2, 3, 4].

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Незалежні випробування з повтореннями. Схема та формула Бернуллі.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Вироби деякого виробництва містять 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п'яти навмання взятих виробів будуть два бракованих.

Розв'язання. Імовірність події A (даний виріб бракований) $P(A) = P = 0,05$. Тоді $q = 1 - P = 0,95$. Імовірність того, що серед п'яти виробів два бракованих визначаємо за формулою Бернуллі, так як число випробувань (виробів) невелике:

$$\begin{aligned} P_5(2) &= C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} 0,95^2 0,05^{5-2} = \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} 0,95^2 \cdot 0,05^3 = 0,00113. \end{aligned}$$

Відповідь. $P_5(2) = 0,00113$.

Приклад 2. Імовірність хоча б одного влучення при двох пострілах дорівнює 0,96. Знайти ймовірність трьох попадань при чотирьох пострілах.

Розв'язання. Якщо p^* ймовірність хоча б одного попадання при двох пострілах, то $p^* = 0,96 = 1 - q^2 \Rightarrow q = 0,2$.

Тоді ймовірність одного влучення $p = 1 - q = 0,8$, та ймовірність трьох попадань при чотирьох пострілах

$$P_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot (0,8)^3 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

Відповідь. $P_4(3) = 0,4096$.

Приклад 3. Тест з математики складається з 10 запитань. На кожне питання пропонується три відповіді, одна з яких правильна. Знайти ймовірність того, що студент, не підготовлений до тестів, правильно відповість: а) на 4 питання; б) не менш ніж на 9 питань?

Розв'язання. Ймовірність того, що студент правильно відповість на питання

$$p = \frac{1}{3}, \text{ а неправильно } q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

а) За формулою Бернуллі маємо

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{13440}{59049} \approx 0,23.$$

б) Подію A – студент правильно відповість не менш ніж на 9 питань – можна представити як суму двох несумісних подій: A_1 - правильно відповість на 9 питань; A_2 - правильно відповість на 9 питань, тобто $A = A_1 + A_2$, а також $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$.

$$P(A_1) = C_{10}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^9 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 10 \cdot \frac{2}{3^{10}} \approx 0,00034,$$

$$P(A_2) = C_{10}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1}{3^{10}} \approx 0,00002. \text{ Тобто маємо}$$

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 0,00036.$$

Відповідь: а) $P_{10}(4) \approx 0,23$, б) $P(A) = 0,00036$.

Приклад 4. Визначити найімовірніше число деталей першого сорту серед 5 відібраних навмання, якщо автоматичний верстат виготовляє $\frac{2}{3}$ деталей першого сорту.

Розв’язання. Визначимо за формулою $np - q \leq k_0 \leq np + p$,

$$np + p = 5 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 4, \quad np - q = 5 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 3, \text{ тобто маємо два значення}$$

$$k_0 = 4, k_{01} = 3.$$

Відповідь. $k_0 = 4, k_{01} = 3$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Автоматичний верстат виготовляє $\frac{2}{3}$ деталей другого сорту. Визначити ймовірність того, що а) серед 6 взятих на вмання деталей 3 деталі першого сорту; б) визначити найімовірніше число деталей першого сорту серед
 - 10 відібраних;
 - 5 відібраних.
2. У деякій місцевості 40% населення – темноокі. Знайти:
 - а) ймовірність того, що з 4 на вмання обраних осіб рівно 3 будуть з темними очами;
 - б) найімовірнішу кількість темнооких людей з 8 на вмання обраних.

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Граничні теореми у схемі Бернуллі.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Імовірність того, що стрілець влучить у ціль при одиночному пострілі дорівнює $p = 0,2$. Яка ймовірність того, що при 100 пострілах ціль буде вражена рівно 20 разів?

Розв'язання. За умовою $p = 0,2$, $q = 0,8$, $n = 100$, $m = 20$. Число випробувань велике, то використовуємо локальну формулу Лапласа. Для цього

визначаємо $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0,2 \cdot 0,8} = 4$, $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0,2}{4} = 0$.

За таблицею визначаємо $\varphi_0(x) = \varphi_0(0) = 0,3989$. Тоді шукана ймовірність дорівнює

$$P_{100}(20) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0(x) = \frac{1}{4} \cdot 0,3989 = 0,0999.$$

Відповідь. $P_{100}(20) \approx 0,0999$.

Приклад 2. При виробництві деякої масової продукції ймовірність появи

одного нестандартного виробу становить 0,01. Яка ймовірність, що в партії з 100 виробів два вироби будуть нестандартними?

Розв'язання. Тому що ймовірність $p = 0,01$ мала, а число випробувань 100 велике, причому $\lambda = np = 100 \cdot 0,01 = 1$, то шукана ймовірність визначається за формулою Пуассона:

$$P_{100}(2) \approx \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{1}{2} e^{-1} = 0,184.$$

Відповідь. $P_{100}(2) \approx 0,184$.

Приклад 3. Ймовірність того, що деталь пройшла перевірку, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 відібраних навмання деталей виявиться неперевіреними від 70 до 100.

Розв'язання. Обчислимо

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25; \quad x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Тоді за інтегральною теоремою Лапласа:

$$P_{400}(70, 100) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25) = 0,8882.$$

Відповідь. $P_{400}(70, 100) \approx 0,8882$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Ймовірність влучити у мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 150 пострілах кількість влучень у мішень буде у межах від 100 до 150.
2. Ймовірність того, що під час набору тексту на одній сторінці буде допущено помилку, дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що на 80 сторінках виявиться рівно 5 помилок.
3. Страхова компанія застрахувала на рік 2300 клієнтів. Якщо страховий випадок відбувся, компанія виплачує клієнту 100 гривень. Ймовірність страхового

випадку дорівнює 0,004. Визначити мінімальну суму страхового внеску, за якого ймовірність розорення компанії (на кінець року) не буде перевищувати 0,006.

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Дискретні та неперервні випадкові величини та їх числові характеристики.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Дан ряд розподілу випадкової величини X :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Потрібно: а) знайти функцію розподілу цієї випадкової величини; б) знайти ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, що не перевершує по абсолютній величині 1.

Розв'язання. а) Область визначення будь-якої функції розподілу інтервал $(-\infty, +\infty)$. Розіб'ємо його точками на проміжки і для кожного з них знайдемо значення функції розподілу $F(x)$.

Усередині проміжку $(-\infty, -2]$ випадкова величина значень не приймає (див. Таблицю). Тому для будь-якого з цього проміжку

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = 0.$$

Розглянемо тепер інтервал $(-2; -1]$. Для будь-якого x з цього проміжку випадкова величина приймає тільки одне значення $X = -2$ з ймовірністю 0,1. Тобто $F(x) = P(-\infty < X < x) = P(X = -2) = 0,1$.

Аналогічно, всередині проміжку $x \in (-1; 0]$ випадкова величина приймає значення $x = -2$ з ймовірністю 0,1 і $x = -1$ з ймовірністю 0,2. Тому маємо

$$F(x) = P(-\infty < X < x) = P(X = -2) + P(X = -1) = 0,1 + 0,2 = 0,3.$$

Для $x \in (0; 1]$

$$F(x) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) = 0,1 + 0,2 + 0,2 = 0,5.$$

Для $x \in (1; 2]$

$$F(x) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 0,5 + 0,4 = 0,9.$$

Для $x \in (2; +\infty)$

$$F(x) = P(X = -2) + P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,9 + 0,1 = 1.$$

Остаточно функцію розподілу випадкової величини X можна записати у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -2] \\ 0,1 & x \in (-2, -1] \\ 0,3 & x \in (-1, 0] \\ 0,5 & x \in (0, 1] \\ 0,9 & x \in (1, 2] \\ 1,0 & x \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

б) Визначимо ймовірність події $-1 < X < 1$.

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = 0,5 - 0,1 = 0,4.$$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Ax^2 + B, & 0 < x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Знайти: а) невідомі коефіцієнти A і B ; б) диференціальну функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $f(x)$.

Розв'язання. а) Для визначення коефіцієнтів A і B використовується той факт, що функція є неперервною на всій числовій прямій, а, отже, в точках $x = 0$ і $x = 4$. Тому

$$\lim_{x \rightarrow -0} F(x) = \lim_{x \rightarrow +0} F(x) = F(0) \Rightarrow 0 = B,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} F(x) = F(4) \Rightarrow 16A + B = 1.$$

Отримали систему рівнянь відносно A і B :

$$\begin{cases} B = 0 \\ 16A + B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{1}{16} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{16}x^2, & 0 < x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

б) знаходимо щільність ймовірності (диференціальну функцію розподілу) випадкової величини як першу похідну від інтегральної функції її розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{8}x, & 0 < x < 4, \\ 0, & x \geq 4. \end{cases}$$

Приклад 3. Випадкова величина задана диференціальною функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ a(x-1), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: а) значення параметра a ; б) функцію розподілу; в) ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $[0; 1,5]$; г) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини.

Розв'язання. а) Значення параметра знаходиться з властивості диференціальної функції $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. При записи цього інтегралу врахуємо, що функція $f(x)$ має на різних проміжках різний аналітичний вираз:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^1 0 \cdot dx + \int_1^2 a(x-1)dx + \int_2^{+\infty} 0dx = 1, \Rightarrow a \frac{(x-1)^2}{2} \Big|_1^2 = 1, \Rightarrow \frac{a}{2} = 1, \Rightarrow a = 2.$$

$a = 2$

б) Інтегральну функцію знаходимо за формулою $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$.

Для $x \in (-\infty, 1]$ $F(x) = \int_{-\infty}^x 0dx = 0$.

Для $x \in (1; 2]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^x 2(x-1)dx = (x-1)^2 \Big|_1^x = (x-1)^2$$

Для $x \in (2; +\infty)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^2 2(x-1)dx + \int_2^x 0dx = (x-1)^2 \Big|_1^2 = 1.$$

в) $P(0 \leq X \leq 1,5) = F(1,5) - F(0) = (1,5-1)^2 - 0 = 0,25$.

г) Математичне сподівання неперервної випадкової величини визначається за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^1 x \cdot 0dx + \int_1^2 x \cdot 2 \cdot (x-1)dx + \int_2^{+\infty} x \cdot 0dx = \frac{5}{3}.$$

Для знаходження дисперсії випадкової величини X попередньо обчислимо математичне сподівання випадкової величини X^2 :

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^1 x^2 \cdot 0dx + \int_1^2 x^2 2(x-1)dx + \int_2^{+\infty} x^2 0dx = \frac{17}{6}.$$

Тоді дисперсія випадкової величини X дорівнює

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Відповідь. а) $a = 2$;

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

в) $P(0 \leq X \leq 1,5) = 0,25$.

г) $M(X) = \frac{5}{3}, D(X) = \frac{1}{18}$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Випадкова величина задана законом розподілу

X	-2	-1	0	1
P	0,1	0,2	0,3	?

Знайти: а) функцію розподілу $F(x)$, побудувати графік $F(x)$ та полігон розподілу;

б) характеристики положення (математичне сподівання, моду, медіану);

в) характеристики розсіювання (дисперсію, середнє квадратичне відхилення);

г) характеристики форми розподілу (асиметрію, ексцес).

2. Задано щільність розподілу неперервної випадкової величини $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ ax^2, & 0 \leq x < 1; \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Знайти значення сталої; обчислити математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$. Знайти функцію розподілу $F(x)$. Побудувати графіки щільності $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$.

3. Дано інтегральну функцію розподілу випадкової величини $F(x)$. Знайти щільність розподілу $f(x)$; обчислити математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$. Побудувати графіки щільності $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,5x, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

САМОСТІЙНА РОБОТА ЗА ТЕМОЮ

Основні закони розподілу ДВВ та НВВ. Нормальний закон розподілу.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. 1. Біноміальний закон розподілу.

X	0	1	...	k	...	n
p	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Приклад 2. Закон розподілу Пуассона.

X	0	1	...	n	...
p	e^{-a}	$\frac{a e^{-a}}{1!}$	...	$\frac{a^n e^{-a}}{n!}$	...

Приклад 3. Монета кинута тричі. Побудувати закон розподілу ВВ X – кількість появ герба.

Розв'язання. Можливі значення ВВ наступні $X = \{0, 1, 2, 3\}$. За формулою Бернуллі обчислимо відповідні ймовірності:

$$p_1 = P_3(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} ; \quad p_2 = P_3(1) = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} ;$$

$$p_3 = P_3(2) = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8} ; \quad p_4 = P_3(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Перевіримо $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1.$

Відповідь: Отримали закон розподілу X :

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Приклад 4. Випадкова величина X – час безвідмовної роботи верстата має показниковий розподіл. Визначити ймовірність того, що час безвідмовної роботи верстата буде щонайменше 6000 годин, якщо середній час безвідмовної роботи верстата 4000 годин.

Розв'язання. Математичне сподівання Випадкової величини за умовою дорівнює

$$M(X) = 4000 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4000}, \text{ тоді}$$

$$P(T \geq 6000) = R(6000) = e^{-\frac{6000}{4000}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}} \approx 0,223.$$

Відповідь. $P(T \geq 6000) \approx 0,223.$

Приклад 5. Зріст жінок розподілено за нормальним законом. Математичне сподівання зросту дорівнює 168 см, а середнє квадратичне відхилення – 5 см. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з трьох обраних навмання жінок буде мати зріст від 165 см до 170 см.

Розв'язання. Позначимо через X – нормально розподілену випадкову величину, що відповідає зросту жінок. За умовою математичне сподівання $M(X) = 168$ см, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5$ см. Нехай подія A – з трьох обраних жінок хоча б одна має зріст з проміжку $[165; 170]$, тоді подія $\bar{A}$ – зріст усіх трьох жінок не належить проміжку $[165; 170]$. Величина X розподілена

нормально, тому знайдемо ймовірність того, що зріст однієї жінки належить заданому проміжку :

$$P(165 \leq X \leq 170) = \Phi\left(\frac{170-168}{5}\right) - \Phi\left(\frac{165-168}{5}\right) = \Phi\left(\frac{2}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-3}{5}\right) = \Phi(0,4) + \Phi(0,6),$$

за допомогою таблиці для значень інтегральної функції Лапласа, отримаємо

$$P(165 \leq X \leq 170) = 0,1554 + 0,2257 = 0,3811.$$

Тоді ймовірність того, що зріст однієї жінки не належить проміжку $[165;170]$

$$p = 1 - P(165 \leq X \leq 170) = 1 - 0,3811 = 0,6189.$$

Ймовірність того, що зріст усіх трьох жінок не належить проміжку $[165;170]$

$$P(\bar{A}) = (0,6189)^3 \approx 0,237.$$

У результаті ймовірність події A буде дорівнювати

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,237 = 0,763.$$

Відповідь. $P(A) = 0,763$.

Задачі для самостійного опрацювання

1. Жирність молока корів у Житомирській області (у %) можна розглядати як нормально розподілену випадкову величину з математичним сподіванням рівним 4 % і середнім квадратичним відхиленням 0,03 %. Обчислити ймовірність того, що в навмання взятій пробі жирність молока буде: а) більшою за 4%; б) меншою 4%; в) від 3,95 % до 4,05%. Знайти щільність розподілу даної випадкової величини.
2. Вага однієї плитки шоколаду є нормально розподіленою випадковою величиною з математичним сподіванням 100 г і середнім квадратичним відхиленням 2 г. Знайти відсоток коробок, вага яких: а) більша 100 г; б) міститься у межах від 99 г до 101 г.
3. Зміна індексу цінних паперів на фондовій біржі може бути змодельована як нормально розподілена випадкова величина з параметрами $\mu=1$ і $\sigma=0,01$. Знайти ймовірність того, що на наступних торгах індекс цінних паперів буде: а) більшим

1; б) меншим 1; в) від 0,98 до 1,02. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу ймовірностей даної випадкової величини.

4. Хвилинна стрілка годинника переміщується стрибком наприкінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент годинник покаже час, що відрізняється від справжнього не більше ніж на 15 секунд.

5. Випадкова величина X – число викликів, що надходять на пульта диспетчера станції швидкої допомоги протягом години, має розподіл Пуассона з параметром $\lambda=10$ (повідомлень за годину). Знайти числові характеристики випадкової величини X та ймовірності наступних подій:

а) $P(X = 0)$, б) $P(X > 6)$.

Розвинення функцій у ряд Маклорена

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$2. \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$3. \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$4. (1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^n}{n!}, \quad |x| < 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

$$5. \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots, \quad |x| < 1;$$

$$6. \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1;$$

$$7. \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad |x| < 1;$$

$$8. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1;$$

$$9. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad |x| < 1;$$

$$10. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| \leq 1;$$

$$12. \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots, \quad |x| < 1;$$

$$13. \operatorname{arccotg} x = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad |x| \leq 1.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$$1 \quad y = x^k \Rightarrow y' = kx^{k-1}; \quad k \in R$$

$$2 \quad y = a^x \Rightarrow y' = a^x \ln a$$

$$3 \quad y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$4 \quad y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$5 \quad y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$6 \quad y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$7 \quad y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$8 \quad y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9 \quad y = \operatorname{ctg} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$10 \quad y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11 \quad y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12 \quad y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13 \quad y = \operatorname{arcctg} x \Rightarrow y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Правила диференціювання

Нехай функції $U(x)$ и $V(x)$ диференційовні

1. Якщо $C = \text{const} \Rightarrow (C)' = 0$.

2. $(U \pm V)' = U' \pm V'$.

3. $(UV)' = U'V + V'U$.

4. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

Таблиця невизначених інтегралів від основних елементарних функцій

- | | |
|--|---|
| 1 $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$
$\alpha \in R (\alpha \neq -1).$ | 8 $\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\operatorname{ctgu} + C$ |
| 2 $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | 9 $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$ |
| 3 $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1).$ | 10 $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$ |
| 4 $\int e^u du = e^u + C$ | 11 $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right + C$ |
| 5 $\int \sin u du = -\cos u + C$ | 12 $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$ |
| 6 $\int \cos u du = \sin u + C$ | 13 $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$ |
| 7 $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \sec^2 u du = \operatorname{tgu} + C$ | 14 $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{u-a}{u+a}\right + C$ |

Формула інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Таблиця оригіналів та зображень

№ п/п	Оригінал	Зображення	№ п/п	Оригінал	Зображення
1	1	$\frac{1}{p}$	9	$t \sin \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	10	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
3	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	11	$t \operatorname{sh} \beta t$	$\frac{2\beta p}{(p^2 - \beta^2)^2}$
4	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	12	$t \operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p^2 + \beta^2}{(p^2 - \beta^2)^2}$
5	$\operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$	13	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
6	$\operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$	14	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
7	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	15	$\frac{e^{bt} - e^{\alpha t}}{t}$	$\ln \frac{p - a}{p - b}$
8	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$	16	$\frac{\sin t}{t}$	$\operatorname{arctg} p$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лозовий, Б.Л. Практикум з вищої математики : навч. посіб. / Б.Л. Лозовий, Я.С. Пушак, О.Є. Шабат. – 4-е вид., перероб. та допов. – Львів : Магнолія-2006, 2019. – 285 с.
2. Медведєва, М.І. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах : навч. посіб. / М.І. Медведєва, Ю.В. Новікова. – Покровськ : ДВНЗ "ДонНТУ", 2020. – 228 с.
3. Пушак, Я.С. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики : навч. посіб. / Я.С. Пушак, Б.Л. Лозовий. – 4-е вид., перероб. та допов. – Львів : Магнолія-2006, 2019. – 276 с.
4. Конспект лекцій з курсу «Вища математика. Ч.3» для студентів усіх форм навчання галузей знань 14-Електрична інженерія, 15-Автоматизація та приладобудування, 17-Електроніка та телекомунікації [Електронний ресурс] / уклад. Ю.В. Новікова, Н.Ф. Гоголева. – Покровськ : ДонНТУ, 2021. – 98 с.
5. Письменный, Дмитрий. Конспект лекций по высшей математике. Тридцать пять лекций. Ч.2 / Дмитрий Письменный. – 6-е изд. – М. : АЙРИС ПРЕСС, 2008. – 256 с.
6. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2-х ч. : учеб. пособие / авт. П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – Ч. 2. – 6-е изд. – М. : ОНИКС ; Мир и Образование, 2007. – 416 с.
7. Пак, В.В. Вища математика : підручник / В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. – Донецк : Сталкер, 2003. – 496 с.