МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ

Лесіна Є.В.

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ГІРНИЧОТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ З ДИСЦИПЛІНИ

«ВИЩА МАТЕМАТИКА (СПЕЦРОЗДІЛИ). СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

Красноармійськ-2015

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КРАСНОАРМІЙСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ

Лесіна Є.В.

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ ГІРНИЧОТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ З ДИСЦИПЛІНИ

«ВИЩА МАТЕМАТИКА (СПЕЦРОЗДІЛИ). СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ»

Красноармійськ-2015

УДК 519.85

Методичні матеріали для самостійної роботи студентів гірничотехнічних спеціальностей з дисципліни «Вища математика (спецрозділи). Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування» / Є.В. Лесіна. – Красноармійськ: КІІ ДонНТУ, 2015. – 38 с.

Застосування методів математичного моделювання на практиці дозволяє інженеру в значній мірі скоротити витрати часу і забезпечує утворення технічних об'єктів з високими показниками ефективності та якості. Укладені методичні матеріали містять опис задачі лінійного програмування як математичної моделі виробничого процесу. Розглядається алгоритм найбільш універсального методу лінійного програмування – симплекс-методу, який продемонстровано на прикладах задач гірничої промисловості.

Рекомендовано студентам всіх спеціальностей гірничотехнічного профілю.

Друкується за рішенням кафедри загальнонаукової підготовки КІІ ДонНТУ, протокол № 4 від 28 жовтня 2015 року.

Затверджено на засіданні навчально-методичного відділу ДонНТУ, протокол № 2 від 28 жовтня 2015 року.

Укладач: к.ф.-м.н. **Лесіна Є.В.**

Рецензент: к.т.н., доцент кафедри

«Інженерної механіки» КІІ ДонНТУ **Повзун О.І.**

ЗМІСТ

ВСТУП

Основна мета використання машин (вугільних і прохідницьких комбайнів, стрічкових і скребкових конвеєрів, вантажних електровозів, бункер-поїздів і т.д.) при видобутку кам'яного вугілля – досягнення мінімально можливих в даних умовах повних витрат необхідної праці на одиницю продукції, що враховують витрати живої праці безпосередньо в організації процесу, минулої праці, яку уречевлено в матеріальних ресурсах процесу, кваліфікації виконавців, і майбутньої праці на підтримку продукції в робочому стані. Інші цілі (собівартість, термін конання робіт і т.д.), що виникають в окремих випадках, є складовими основної мети. Її досягнення потребує вирішення низки завдань, зумовлених складом факторів і умов процесу. Сполучення останніх дають безліч рішень, з яких треба визначити оптимальне.

Оптимальний результат – найкращий з можливих в даних умовах. Ознака оптимуму – екстремальне (максимальне або мінімальне) значення функції параметрів, прийнятої критерієм, яке прямо або побічно показує, що результат найкращий. Сучасні методи оптимізації потребують призначення одного критерію. Умови та чинники процесу враховують у вигляді обмежень при розв’язанні завдання. Найбільш поширений критерій оптимальності – показник наведених витрат. Слід пам'ятати, що екстремум критерію завжди відносний, оскільки залежить від діючих обмежень.

Наскрізна механізація процесів видобутку вугілля дозволяє отримати найбільший прибуток при виконанні робіт необхідної якості найвищими темпами. Однією з можливостей підвищення продуктивності машин є вдосконалення методів планування та оперативного управління на основі застосування економіко-математичних методів для вибору оптимальних рішень.

У своїй основі економіко-математичні методи мають математичні моделі, реалізовані тим чи іншим способом. Побудова математичної моделі – важливий і складний етап під час розв’язання завдання. Вона містить мету розрахунку та умови її досягнення, записані у вигляді формул, рівнянь і нерівностей. Модель повинна об'єднувати необхідну і достатню кількість формально описаних факторів та умов, щоб відображати фізичну та економічну сутність явищ. Чим більше враховано таких умов, тим повніше модель відображає особливості даного процесу, тим ближче вона до реальності і тим точніше розв'язок. Разом із тим при обліку всіх факторів в реальних задачах виникають такі громіздкі та складні моделі, що формалізувати їх і отримати розв'язок існуючими методами іноді неможливо. Тому при складанні математичної моделі необхідно прагнути до всілякого її спрощення з виділенням головних, вирішальних факторів.

Реалізація математичної моделі здійснюється за допомогою того чи іншого методу математичного програмування. Складність розв'язання завдань методами математичного програмування залежить від того, який вид (лінійний, нелінійний) мають функція цілі і умови задачі. У випадках, коли шукана точність результату є задовільною, функціональні залежності і умови задачі доцільно записувати у вигляді лінійних функцій і обмежень. Лінійний характер залежностей дозволяє розглядати задачі оптимізації у класі задач лінійного програмування (ЗЛП), методика розв'язання яких базується на відомих універсальних алгоритмах.

Вперше задача лінійного програмування (найбільш зручного і поширеного математичного інструменту при моделюванні та розв'язанні багатовимірних оптимізаційних задач) була сформульована в 1939 р. радянським вченим Л.В. Канторовичем, який застосував математичну модель цієї задачі в економіці і розробив метод розв'язання. У 1975 р. Л.В. Канторович отримав Нобелівську премію за досягнення в цій галузі.

Взагалі, в межах достовірності розв'язку, нелінійні функції можна апроксимувати лінійними або кусково-лінійними. У всіх інших випадках потрібно застосовувати методи нелінійного програмування, обчислювальна процедура яких більш трудомістка.

1. Розмірність простору змінних задачі оптимізації

Розглянемо вплив параметрів простору на спосіб дослідження і розв'язання задачі лінійного програмування (ЗЛП). Якщо розмірність простору k=3, можна сформулювати наступне: 1) у тривимірному просторі область допустимих розв'язків (ОДР) являє собою багатогранник; 2) кожній площині багатогранника відповідає значення однієї змінної, яке дорівнює нулю; кожному ребру багатогранника відповідають значення двох змінних (знову нулі); кожній вершині ОДР відповідають значення трьох змінних, що дорівнюють нулю; 3) кожному значенню цільової функції відповідає площина рівних значень; 4) оптимальним розв'язком є координати вершини ОДР, в якій цільова функція набуває оптимальне значення. З іншого боку, якщо розмірність задачі k>3, то наочна геометрична інтерпретація, природно, відсутня. Замість тривимірного простору розв'язок задачі буде розглядатися в k-вимірному гіперпросторі. При цьому висновки для випадку k=3 можна поширити і на випадок k>3, а саме: 1) ОДР являє собою багатогранник в k-вимірному гіперпросторі; 2) кожній вершині ОДР відповідають k змінних, рівних нулю; 3) кожному значенню цільової функції відповідає гіперплощина рівних значень; 4) оптимальним розв'язком є координати такої вершини ОДР, в якій цільова функція набуває оптимальне значення.

Слід зауважити, що практичні задачі оптимізації можуть бути одночасно багатовимірними, нелінійними і цілочисельними. Розгляд різноманітних складних випадків базується, як правило, на розв'язанні задач лінійного програмування, яке ми обговоримо більш докладно. Єдина перевага графічної інтерпретації – наочність. Проте практичні ЗЛП мають число змінних, що вимірюється десятками і навіть сотнями. Природно, що такі завдання графічно не можуть бути розв'язаними, тому до них треба застосовувати аналітичні методи.

2. Форми запису задачі лінійного програмування

Задача лінійного програмування включає: цільову функцію, яку слід максимізувати або мінімізувати, обмеження, записані у вигляді рівностей або нерівностей, які треба задовольнити, граничні умови з гранично допустимими мінімальними і максимальними значеннями змінних. Найбільш поширеною формою граничних умов у ЗЛП є вимога невід'ємності змінних. Скорочена форма запису ЗЛП має вигляд:

$$\begin{cases} L = C_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max\ (\min), \\ \sum a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \\ \sum a_{ij} \le b_i, \quad i = \overline{p+1, m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Така форма запису задачі лінійного програмування називається *мішаною*. Вона характеризується тим, що частина обмежень ЗЛП задана у вигляді рівностей, а інша частина – у вигляді нерівностей. Якщо всі обмеження задачі задані у вигляді нерівностей, причому зі знаком «≤», то така форма запису називається *симетричною*:

$$\begin{cases} L = C_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max\ (\min), \\ \sum a_{ij} x_j \le b_j, \quad i = \overline{p+1, m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Якщо всі обмеження ЗЛП задані у вигляді лінійних рівнянь, то така форма запису називається *канонічною* (при цьому слід звертати увагу на те, щоб рівняння в системі обмежень були лінійно незалежними, оскільки саме вони визначають розмірність простору і результати розв'язання):

$$\begin{cases} L = C_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \to \max\ (\min), \\ \sum a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, p}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

3. Симплекс-метод лінійного програмування

Розв'язання задач лінійного програмування можна здійснити за допомогою ряду методів, які поділяються на наступні групи:

1) універсальні методи, прикладом яких можуть служити симплекс-метод, метод множників Л.В. Канторовича та інші;
2) спеціальні методи, що застосовуються для розв'язання окремих класів задач;
3) наближені методи, що відрізняються простотою і зручністю використання, особливо при ручному рахунку. Це індексний метод, метод апроксимації Фогеля та інші.

В даний час найбільшого поширення набув симплекс-метод, запропонований Джоном Данцигом у 1947 році. Він має ряд модифікацій. Ми розглянемо табличну модифікацію. Для знаходження оптимального розв'язку необхідно і достатньо перебрати опорні розв'язки і порівняти значення цільової функції при кожному опорному рішенні, тобто в кожній вершині ОДР. Симплекс-метод якраз забезпечує цілеспрямований перебір вершин ОДР і дозволяє знайти вершину, яка відповідає оптимальному значенню цільової функції, за кінцеве число кроків, зазвичай званих ітераціями.

Симплекс-метод забезпечує розв'язання ЗЛП, сформульованих у канонічній формі запису, тобто у випадку, коли всі обмеження являють собою рівняння. Якщо ж у результаті формалізації задачі обмеження мають вигляд нерівностей, то необхідно від нерівностей перейти до рівнянь. Такий перехід від нерівностей до рівнянь здійснюється наступним чином.

Припустимо, що в результаті формалізації задачі отримано систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_{2,} \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ \qquad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, які входять до початкової формалізованої задачі, називають основними. Для переходу від системи нерівностей до системи рівнянь в кожну нерівність вводять по одній додатковій невід'ємній змінній $y_1, y_2, ..., y_n$, внаслідок чого одержують:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}; y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Для системи рівнянь характерні наступні фактори: система включає N змінних, причому $N = n + m$, де n і m – відповідно кількість основних і додаткових змінних; усі змінні невід'ємні. Скорочена форма запису системи рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \sum a_{ij}x_j + y_i = b_i, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}; \; y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Канонічна форма запису є вихідною для розв'язання ЗЛП симплекс-методом, але вона повинна бути перетвореною. Так, усі змінні задачі мають бути розділені на базисні, кількість яких дорівнює m, і вільні, кількість яких дорівнює k, причому базисні змінні і цільова функція виражаються за допомогою вільних. При цьому не слід змішувати вільні змінні з основними, а базисні з додатковими.

Найбільш просто поділ змінних на базисні і вільні можна здійснити у випадку, коли канонічну форму ЗЛП отримано з симетричної шляхом введення додаткових змінних. Розмірність простору такої задачі дорівнює $k = N - m$, де $N = n + m$ – кількість основних і додаткових змінних в рівняннях; m – кількість обмежень. Отже, $k = n + m - m = n$. Тому, приймаючи m додаткових змінних за базисні і виражаючи їх через $k = n$ основних змінних, отримаємо перший базисний розв'язок. У цьому базисному розв'язку всі основні змінні є вільними і дорівнюють нулю, оскільки їх кількість дорівнює k, всі додаткові – базисними і дорівнюють правим частинам в обмеженнях. Після визначення першого базисного розв'язку ЗЛП можна записати у вигляді стандартної таблиці.

Пояснимо детально процедуру складання стандартної таблиці симплекс-методу. Нехай надано задачу лінійного програмування у симетричній формі, кількість основних змінних n=3, а кількість обмежень m=4 :

$$\begin{cases} L = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 \to \max, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \le b_4. \end{cases}$$

Після введення в задачу додаткових змінних y_1, y_2, y_3, y_4 і переходу від нерівностей до рівнянь будемо мати:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + y_2 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + y_3 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + y_4 = b_4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3};\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

В даній системі $N=n+m=3+4=7$; $k=N-m=3$. Покладемо $n=k=3$ основних змінних вільними і виразимо через них $m=4$ додаткових змінних y_i, які стануть базисними.

Перепишемо систему у формі, яку можна охарактеризувати наступним чином: 1) вільний член стоїть на першому місці; 2) всі змінні розташовані в дужки, перед якими винесено знак "мінус"; 3) у всіх рівняннях в дужках містяться одні й ті ж змінні. І аналогічним чином перетворимо цільову функцію. Отже, остаточно одержимо систему:

$$\begin{cases} L = C_0 - \left(- C_1 x_1 - C_2 x_2 - C_3 x_3\right) \to \max, \\ y_1 = b_1 - \left(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3\right), \\ y_2 = b_2 - \left(a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3\right), \\ y_3 = b_3 - \left(a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3\right), \\ y_4 = b_4 - \left(a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3\right), \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3};\ y_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Ця форма називається *стандартною*.

У такій формі змінні, які містяться в дужках (x_1, x_2, x_3), є вільними, а які розташовані в лівих частинах рівнянь (y_1, y_2, y_3, y_4) – базисними. Для скорочення запису стандартну форму прийнято записувати у вигляді таблиці коефіцієнтів, званої стандартною таблицею (табл. 1).

Стандартна таблиця є основою розв’язання задачі лінійного програмування симплекс-методом. За допомогою стандартної таблиці можна отримати відповідь на ряд важливих питань, а також отримати розв’язок задачі і здійснити її подальший аналіз. Подання ЗЛП у вигляді стандартної таблиці дозволяє виявити несумісність обмежень і необмеженість цільової функції. Відсутність ОДР, тобто несумісність обмежень, визначається на кожній ітерації пошуку опорного розв’язку за допомогою ознаки 1.

Ознака 1. *Обмеження будуть несумісні, якщо на будь-якій ітерації пошуку опорного розв’язку в кожному рядку, що має негативний вільний член, немає жодного негативного елементу.*

Необмеженість цільової функції перевіряється за допомогою стандартної таблиці на кожній ітерації пошуку як опорного, так і оптимального розв'язків за допомогою ознак 2.

Ознака 2а. *Цільова функція буде необмеженою знизу (тобто* $\min L$ *буде відсутній), якщо в кожному стовпці, у якого в рядку цільової функції знаходиться позитивний елемент, немає жодного позитивного елементу*.

Ознака 2б. *Цільова функція буде необмеженою зверху (тобто* $\max L$ *буде відсутній), якщо в кожному стовпці, у якого в рядку цільової функції знаходиться негативний елемент, немає жодного позитивного елементу*.

Таблиця 3.1.

Стандартна таблиця симплекс-методу

	Вільний член	x_1	x_2	x_3
L	C_0	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$
y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
y_3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}
y_4	b_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}

Після перевірки за розглянутими ознаками слід перейти безпосередньо до розв'язання задачі, яке включає визначення опорного і оптимального розв'язків.

4. Пошук опорного розв'язку

Опорним розв'язком є координати будь-якої вершини ОДР. При цьому в будь-якій вершині ОДР k змінних дорівнюють нулю, а інші m змінних – невід'ємні. Виходячи з цього, можна встановити ознаку опорного розв'язку. Якщо в стандартній таблиці 1 покласти, що всі n = 3 вільних змінних x_1, x_2, x_3 дорівнюють нулю, то m=4 базисних змінних будуть рівні вільним членам: $y_1 = b_1;\ y_2 = b_2;\ y_3 = b_3;\ y_4 = b_4.$ Оскільки в опорному розв'язку k змінних мають бути рівними нулю, а m мають бути невід'ємними, то, очевидно, що розв'язок буде опорним, якщо всі вільні члени будуть невід'ємні: $b_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}.$

Ознака 3. *Розв'язок буде опорним, якщо в стандартній таблиці усі вільні члени є невід'ємними.*

Якщо перший розв'язок, в якому всі основні змінні є вільними, а всі додаткові – базисними, не є опорним, слід застосувати обмін змінних, тобто необхідно знайти такий набір n вільних змінних, рівних нулю, щоб при цьому інші m базисних змінних були невід'ємними. При одному обміні (ітерації) одна вільна змінна обмінюється місцями з однією базисною. В результаті обміну зменшується або число негативних вільних членів, або абсолютне значення негативного вільного члена. Після кожного обміну перевіряється виконання ознаки опорного розв'язку. Якщо ознаку задоволено, пошук опорного розв'язку закінчено, якщо ні – ітерації повторюються.

Розглянемо ідею обміну змінних на прикладі стандартної таблиці 1. Обміняємо x_2 на y_3, тобто переведемо x_2 із вільних змінних у базисні, а y_3 навпаки – із базисних у вільні. Ця операція позначається символом $x_2 \leftrightarrow y_3$. У нашому прикладі

$$y_3 = b_3 - \left(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\right)$$

міняємо місцями x_2 і y_3. Тоді

$$a_{32}x_2 = b_3 - \left(a_{31}x_1 + y_3 + a_{33}x_3\right),$$

звідки остаточно маємо:

$$x_2 = \frac{b_3}{a_{32}} - \left(\frac{a_{31}}{a_{32}} + \frac{1}{a_{32}}y_3 + \frac{a_{33}}{a_{32}}x_3\right).$$

Підставивши останній вираз у якості x_2 у цільову функцію та інші рівняння (див. таблицю 1) і виконавши необхідні алгебраїчні перетворення, одержимо рівності, в яких замість змінної x_2 буде змінна y_3:

$$y_1 = \left(b_1 - \frac{a_{12}b_3}{a_{32}}\right) - \left[\left(a_{11} - \frac{a_{12}a_{31}}{a_{32}}\right)x_1 - \frac{a_{12}}{a_{32}}y_3 + \left(a_{13} - \frac{a_{12}a_{33}}{a_{32}}\right)x_3\right],$$

$$L=\left[C_0-\frac{(-C_2)b_3}{a_{32}}\right]-\left\{\left[(-C_1)-\frac{(-C_2)a_{31}}{a_{32}}\right]x_1-\frac{(-C_2)}{a_{32}}y_3+\right.$$
$$\left.+\left[(-C_3)-\frac{(-C_2)a_{33}}{a_{32}}\right]x_3\right\}$$

Після визначення опорного розв'язку цільова функція і обмеження будуть виражені через відповідні вільні змінні, і на основі отриманої стандартної таблиці можна переходити до визначення оптимального розв'язку.

Щоб полегшити роботу з обміну змінних, складено алгоритм, в основі якого лежить викладений вище метод модифікованих Жорданових винятків. Алгоритм обміну змінних налічує п'ять етапів: 1) записати умову задачі у вигляді стандартної таблиці; 2) вибрати *розв'язувальний елемент*; 3) заповнити нижні праві частини комірок стандартної таблиці; 4) перейти до наступної стандартної таблиці; 5) перевірити відповідність ознакам.

Проаналізуємо окремо кожний з етапів пошуку опорного розв'язку.

1-й етап. Стандартна таблиця заповнюється на підставі стандартної форми запису задачі. Особливістю є лише те, що коефіцієнти записуються не в центрі кожної комірки, а в лівому верхньому кутку.

2-й етап. Вибір *розв'язувального елементу*.

А. Вибрати *розв'язувальний стовпець*. У рядку, що містить негативний вільний член, вибрати негативний елемент. Стовпець, що містить цей негативний елемент, прийняти в якості розв'язуючого і виділити двома рисами. Якщо в рядку, що містить негативний вільний член, немає негативного елементу, це означає, що не виконується ознака 1, тобто обмеження є несумісними. Якщо в рядку є кілька негативних елементів, то краще обрати стовпець з більшим за модулем негативним елементом.

Б. Вибрати *розв'язувальний рядок*. У розв'язувальному стовпці розглядають всі елементи, що мають знак, однаковий з вільним членом того самого рядка. В якості розв'язуючого рядка обирають той, для якого відношення вільного члена до елемента розв'язуючого стовпця є мінімальним. Розв'язувальний рядок знову виділяють двома рисами.

В. Виділити *розв'язувальний елемент*, тобто такий елемент a_{ij}, який стоїть на перетині j-го розв'язуючого стовпця і i-го розв'язуючого рядка. Поставити знаки обміну $x_j \leftrightarrow y_i$ у розв'язуючих стовпця і рядка.

3-й етап. Нижню праву частину комірки розв'язувального елемента заповнюють величиною $\lambda = 1/a_{ij}$; нижні праві частини комірок розв'язувального рядка – елементами, що стоять у верхніх лівих частинах кожної комірки, помноженими на λ; розв'язувального стовпця – елементами, що стоять в лівих верхніх частинах кожної комірки, помноженими на $(-\lambda)$. Виділяють, за винятком розв'язувального елемента, в розв'язувальному рядку всі верхні числа, а в розв'язувальному стовпці – всі нижні. Нижні праві частини решти комірок стандартної таблиці заповнюють добутком виділених чисел, які містяться в тому ж стовпці і тому ж рядку, що і відповідна комірка.

4-й етап. Складають наступну стандартну таблицю, в якій міняють місцями обмінювані змінні x_j і y_i. Інші змінні лишають на своїх місцях. У верхні ліві частини комірок колишніх розв'язувальних рядка і стовпця записують величини, що стоять в нижніх правих частинах тих самих комірок попередньої таблиці (для розв'язувального стовпця це збігається з виділеними елементами). У верхніх лівих кутах інших комірок ставлять суму двох величин, що стоять в кожній комірці попередньої таблиці.

5-й етап. У процесі пошуку опорного розв'язку перевіряють виконання ознаки 3. Якщо ознака 3 задовольняється, опорний розв'язок знайдено, і слід перейти до визначення оптимального розв'язку. Якщо ознака 3 не задовольняється, необхідно перевірити виконання ознак 1 і 2. Якщо навіть вони не справджуються, ітерацію обміну змінних слід повторити.

5. Визначення оптимального розв'язку

Для спрощення дослідимо цільову функцію у вигляді:

$$L = C_0 - (-C_1 x_1).$$

Можливі наступні варіанти постановки задач.

1-й варіант. $L = C_0 - (-C_1 x_1) \to \max$. Очевидно, що $L = C_0$ при $x_1 = 0$. Якщо $-C_1 > 0$, то із збільшенням x_1, тобто в процесі переводу її зі складу вільних змінних у базисні, цільова функція буде зменшуватися. Разом із тим, зменшувати x_1 не можна, оскільки це вільна змінна, і порушиться умова $x_1 \geq 0$. Отже, отриманий розв'язок є оптимальним. Якщо $-C_1 < 0$, то перетворюючи x_1 з вільної змінної на базисну і збільшуючи її (тобто крокуючи від одного опорного розв'язку до іншого), будемо збільшувати і цільову функцію. Сформулюємо ознаку максимуму цільової функції.

Ознака 4а. *Цільова функція набуває максимального значення у тому випадку, коли всі коефіцієнти в рядку цільової функції (крім вільного члену) є позитивними.*

2-й варіант. $L = C_0 - (-C_1 x_1) \to \min$. Знову, як і раніше, $L = C_0$ при $x_1 = 0$. Повторюючи ті самі міркування, що і в першому варіанті, доходимо висновку, що розв'язок буде оптимальним при $-C_1 \leq 0$. Тоді ознака мінімуму цільової функції формулюється наступним чином.

Ознака 4б. *Цільова функція набуває мінімального значення у тому випадку, коли всі коефіцієнти в рядку цільової функції (крім вільного члену) є від'ємними.*

3-й варіант. $L = C_0 - \left(-C_1 x_1\right) \to \max(\min)$. Цей випадок є ознакою існування альтернативного, тобто неєдиного, оптимального розв'язку.

Ознака 4в. *Задача лінійного програмування має альтернативні оптимальні розв'язки, якщо серед коефіцієнтів $-C_j$, $j = \overline{1,n}$, цільової функції $L = C_0 - (-C_1 x_1 - C_2 x_2 - \ldots - C_j x_j - \ldots - C_n x_n)$ є нульові елементи. При цьому максимальне або мінімальне значення цільової функції визначається за допомогою знаків інших ненульових $-C_j$ в рядку цільової функції (без урахування вільного члену).*

Зауважимо, що від однієї ітерації до іншої цільова функція має зменшуватися (при мінімізації), або збільшуватися (при максимізації), або лишатися незмінною (коли йдеться про так званий вироджений випадок).

6. Задача оптимізації поставок руди на збагачувальну фабрику

Продемонструємо застосування симплекс-методу на конкретному прикладі оптимізаційної задачі виробництва.

Розглянемо задачу. *На збагачувальній фабриці є три склади сировини об'ємом A_1, A_2 і A_3, на яких в даний момент знаходиться вугілля середньої зольності Z_1, Z_2 і Z_3. Вугілля надходить на дві технологічні лінії із пропускною здатністю П$_1$ і П$_2$, розраховані на переробку вугілля середньої зольності Z_1' і Z_2'. Скласти план переробки вугілля на наступну добу, що забезпечує повне завантаження технологічних ліній для максимального звільнення зазначеного вугільного складу.*

Таблиця 6.1.

Вихідні дані

Кількість вугілля на складах, тис.т			Зольність вугілля на складах,%			Продуктивність ліній, тис.т / добу		Розрахункова зольність вугілля, %		№ максимально звільненого складу
A_1	A_2	A_3	Z_1	Z_2	Z_3	Π_1	Π_2	Z_1'	Z_2'	
5	6	4	12	18	27	3	3	15	20	3

В якості цільової функції слід скористатися сумарним добовим перевезенням вугілля на збагачувальну фабрику із заданого максимально звільненого складу з його максимізацією.

Для досягнення мети потрібно врахувати задану повну пропускну здатність технологічних ліній і дотриматися середньої зольності вугілля для них. Перевезення вугілля для переробки необхідно здійснити в межах обсягів складів.

Перелічимо для формалізації і розв’язання задачі вихідні дані та шукані результати:

m – кількість складів вугілля на збагачувальній фабриці;

$i = \overline{1,m}$ – порядковий номер складу;

n – кількість технологічних ліній;

$j = \overline{1,n}$ – порядковий номер технологічної лінії збагачувальної фабрики;

A_i, $i = \overline{1,m}$ – кількість вугілля на складі *i*, тис.т;

Z_i, $i = \overline{1,m}$ – зольність вугілля на складі i , %;

Π_j, $j = \overline{1,n}$ – продуктивність технологічної лінії j , тис.т/добу.;

Z'_j, $j = \overline{1,n}$ – розрахункова зольність вугілля на технологічній лінії *j*;

k – номер максимально звільненого складу, $k \in \{1,...,m\}$.

Шуканими даними є:

x_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ – кількість вугілля, що переробляється за наступну добу, зі складу *i* технологічною лінією *j*.

Формування економіко-математичної моделі.

Економіко-математична модель задачі виглядає наступним чином: максимізувати функцію

$$L = \sum_{j=1}^{n} x_{kj} \tag{6.1}$$

за наявності умов:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le A_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{6.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \Pi_j, \; j = \overline{1,n}, \tag{6.3}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} Z_i x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}} = Z'_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{6.4}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \qquad (6.5)$$

Фізичний сенс моделі:

(6.1) – цільова функція, що має такий зміст: сумарна доставка вугілля зі складу *k* на переробку наступної доби повинна бути максимально можливою (тобто склад *k* має бути максимально звільненим);

(6.2) – сумарна доставка вугілля зі складу *i* на технологічні лінії $j = \overline{1,n}$ не перевищує кількість вугілля A_i на складі;

(6.3) – необхідно забезпечити продуктивність технологічної лінії *j* відповідними доставками вугілля зі складів $i = \overline{1,m}$;

(6.4) – необхідно забезпечити потрібну зольність вугілля на переробній лінії *j*;

(6.5) – шуканий обсяг доставки руди наступного дня зі складу *i* на технологічну лінію *j* – невід'ємна величина.

Запис моделі в стандартній формі.

З урахуванням вихідних даних задачі одержимо наступну математичну модель:

$$L = x_{31} + x_{32} \to \max,$$

$$x_{11} + x_{12} \leq A_1, \quad x_{21} + x_{22} \leq A_2, \quad x_{31} + x_{32} \leq A_3,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = \Pi_1, \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = \Pi_2,$$

$$\frac{Z_1 x_{11} + Z_2 x_{21} + Z_3 x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} = Z_1', \qquad \frac{Z_1 x_{12} + Z_2 x_{22} + Z_3 x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} = Z_2',$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,2}.$$

Підставивши значення параметрів з таблиці 2, отримаємо:

$$L = x_{31} + x_{32} \to \max,$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 5, \quad x_{21} + x_{22} \leq 6, \quad x_{31} + x_{32} \leq 4,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3, \quad x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3,$$

$$\frac{12x_{11} + 18x_{21} + 27x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} = 15, \qquad \frac{12x_{12} + 18x_{22} + 27x_{32}}{x_{12} + x_{22} + x_{32}} = 20,$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,2}.$$

Стандартна форма запису моделі:

$$L = 0 - (-x_{31} - x_{32}) \to \max,$$
$$y_1 = 5 - (x_{11} + x_{12}),$$
$$y_2 = 6 - (x_{21} + x_{22}),$$
$$y_3 = 4 - (x_{31} + x_{32}),$$
$$\xi_1 = 3 - (x_{11} + x_{21} + x_{31}),$$
$$\xi_2 = 3 - (x_{12} + x_{22} + x_{32}),$$
$$\xi_3 = 0 - (-3x_{11} + 3x_{21} + 12x_{31}),$$
$$\xi_4 = 0 - (-8x_{12} - 2x_{22} + 7x_{32}),$$
$$l = 6 - (-2x_{11} - 7x_{12} + 4x_{21} - x_{22} + 13x_{31} + 8x_{32}),$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,2}.$$

Нижче наводиться відповідна стандартна таблиця 6.2 симплекс-методу.

Таблиця 6.2.

Стандартна таблиця симплекс-методу і перша ітерація пошуку опорного розв'язку

$\updownarrow \xi_1$

		Вільний член	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}
	l	6 6	-2 2	-7 0	4 2	-1 0	13 2	8 0
	L	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	-1 0	-1 0
	y_1	5 -3	1 -1	1 0	0 -1	0 0	0 -1	0 0
	y_2	6 0	0 0	0 0	1 0	1 0	0 0	0 0
	y_3	4 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 0	1 0
x_{11} $\leftrightarrow$	ξ_1	3 3	1 1	0 0	1 1	0 0	1 1	0 0
	ξ_2	3 0	0 0	1 0	0 0	1 0	0 0	1 0
	ξ_3	0 9	-3 3	0 0	3 3	0 0	12 3	0 0
	ξ_4	0 0	0 0	-8 0	0 0	-2 0	0 0	7 0

Пошук опорного розв'язку.

Пошук опорного розв’язку здійснено шістьма ітераціями обміну змінних у таблицях 6.3-6.7.

Таблиця 6.3.

Друга ітерація пошуку опорного розв'язку

		Вільний член	$\updownarrow \xi_2$ x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}
	l	12 21	-7 7	6 0	-1 7	15 0	8 7
	L	0 0	0 0	0 0	0 0	-1 0	-1 0
	y_1	2 -3	1 -1	-1 0	0 -1	-1 0	0 -1
	y_2	6 0	0 0	1 0	1 0	0 0	0 0
	y_3	4 0	0 0	0 0	0 0	1 0	1 0
	x_{11}	3 0	0 0	1 0	0 0	1 0	0 0
x_{12} $\leftrightarrow$	ξ_2	3 3	1 1	0 0	1 1	0 0	1 1
	ξ_3	9 0	0 0	6 0	0 0	15 0	0 0
	ξ_4	0 24	-8 8	0 0	-2 8	0 0	7 8

Таблиця 6.4.

Третя ітерація пошуку опорного розв'язку

	Вільний член	$\updownarrow \xi_3$ x_{21}	x_{22}	x_{31}	x_{32}
l	33 -9	6 -1	6 0	15 -15	15 0
L	0 0	0 0	0 0	-1 0	-1 0
y_1	-1 1,5	-1 0,167	-1 0	-1 2,5	-1 0
y_2	6	1	0	1	0

		-1,5	-0,167	0	-2,5	0
	y_3	4 0	0 0	0 0	1 0	1 0
	x_{11}	3 -1,5	1 -0,167	0 0	1 -2,5	0 0
	x_{12}	3 0	0 0	1 0	0 0	1 0
x_{21} $\leftrightarrow$	ξ_3	$\boxed{9}$ 1,5	$\boxed{6}$ 0,167	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{15}$ 2,5	$\boxed{0}$ 0
	ξ_4	24 0	0 0	6 0	0 0	15 0

Таблиця 6.5.

Четверта ітерація пошуку опорного розв'язку

		Вільний член	$\updownarrow \xi_4$ x_{22}	x_{31}	x_{32}
	l	24 -24	6 -1	0 0	15 -15
	L	0 0	0 0	-1 0	-1 0
	y_1	0,5 4	-1 0,167	1,5 0	-1 2,5
	y_2	4,5 -4	1 -0,167	-2,5 0	0 -2,5
	y_3	4 0	0 0	1 0	1 0
	x_{11}	1,5 0	0 0	-1,5 0	0 0
	x_{12}	3 -4	1 -0,167	0 0	1 -2,5
	x_{21}	1,5 0	0 0	2,5 0	0 0
x_{22} $\leftrightarrow$	ξ_4	$\boxed{24}$ 4	$\boxed{6}$ 0,167	$\boxed{0}$ 0	$\boxed{15}$ 2,5

Таблиця 6.6.

П'ята ітерація пошуку опорного розв'язку

		Вільний член	x_{31} $\updownarrow x_{21}$	x_{32}
	L	0 0,6	-1 0,4	-1 0
	y_1	4,5 -0,9	1,5 -0,6	-1 2,5
	y_2	0,5 1,5	-2,5 1	-2,5 0
	y_3	4 -0,6	1 -0,4	1 0
	x_{11}	1,5 0,9	-1,5 0,6	0 0
	x_{12}	-1 0	0 0	-1,5 0
x_{31} $\leftrightarrow$	x_{21}	1,5 0,6	2,5 0,4	0 0
	x_{22}	4 0	0 0	2,5 0

Таблиця 6.7.

Шоста ітерація пошуку опорного розв'язку

		Вільний член	x_{21}	x_{32} $\updownarrow x_{12}$
	L	0,6 0,667	0,4 0	-1 -0,667
	y_1	3,6 -1	-0,6 0	1,5 1
	y_2	2 1,667	1 0	-2,5 -1,667
	y_3	3,4 -0,667	-0,4 0	1 0,667
	x_{11}	2,4 0	0,6 0	0 0
x_{32} $\leftrightarrow$	x_{12}	-1 0,667	0 0	-1,5 -0,667
	x_{31}	0,6 0	0,4 0	0 0
	x_{22}	4 -1,667	0 0	2,5 1,667

Пошук оптимального розв’язку.

Оптимальний розв’язок знайдено шляхом виконання ітерації обміну змінних у таблиці 6.8 і подано у таблиці 6.9.

Таблиця 6.8.

Ітерація пошуку оптимального розв'язку

				$\updownarrow x_{22}$
		Вільний член	x_{21}	x_{12}
	L	1,267 0,933	0,4 0	-0,667 0,4
	y_1	2,6 -1,4	-0,6 0	1 -0,6
	y_2	3,667 2,333	1 0	-1,667 1
	y_3	2,733 -0,933	-0,4 0	0,667 -0,4
	x_{11}	2,4 0	0,6 0	0 0
	x_{32}	0,667 0,933	0 0	-0,667 0,4
	x_{31}	0,6 0	0,4 0	0 0
x_{12} $\leftrightarrow$	x_{22}	2,333 1,4	0 0	1,667 0,6

Таблиця 6.9.

Оптимальний розв'язок задачі

	Вільний член	x_{21}	x_{12}
L	2,2	0,4	0,4
y_1	1,2	-0,6	-0,6
y_2	6	1	1
y_3	1,8	-0,4	-0,4
x_{11}	2,4	0,6	0
x_{32}	1,6	0	0,4
x_{31}	0,6	0,4	0
x_{12}	1,4	0	0,6

Аналіз результатів розв'язання.

Оптимальний розв’язок має наступні властивості:
цільова функція – максимально можливе звільнення складу №3 (згідно задачі) за умови забезпечення заданої середньої зольності вугілля на технологічних лініях

$$\max L = 2{,}2 \text{ тис.т.};$$

оптимальні відвантаження вугілля на технологічні лінії збагачувальної фабрики:

$x_{11}^{*} = 2{,}4$ тис. т.; $x_{12}^{*} =$ 1,4 тис.т.; x_{21}^{*} = 0 тис.т.; x_{22}^{*} = 0 тис.т.; x_{31}^{*} = 0,6 тис.т.; x_{32}^{*} =1,6 тис.т;

залишки вугілля на складах:

y_1^{*}=1,2 тис.т.; y_2^{*}=6 тис.т.; y_3^{*}=1,8 тис.т.

7. Задача розрахунку продуктивності рудників

Розглянемо іншу задачу, подібну до попередньої, яку теж можна розв’язати за допомогою симплекс-методу.

Постановка задачі. *Визначити місячну продуктивність рудників, що забезпечує план поставки сирої руди на збагачувальну фабрику з заданим утриманням компонентів в руді і з мінімальними сумарними експлуатаційними витратами на її видобуток. Збагачувальній фабриці пред'явлено наступні вимоги до якості вихідної сировини:*
середній вміст 1-го компонента: $\alpha_1 = \alpha_{пл}$;

2-го компонента: $\alpha_{2\min} \le \alpha_2 \le \alpha_{2\max}$.

Таблиця 7.1.

Вихідні дані задачі

Розглянута група рудників	Допустимі рівні вмісту компонента в усередненої руді,%			Обсяг поставок руди, тис. т
	$\alpha_{пл}$	$\alpha_{2\min}$	$\alpha_{2\max}$	
1,2,3,4	1,3	0,4	0,5	160

Таблиця 7.2.

Техніко-економічні показники рудників

№ рудника	Вміст компонента в руді,%		собівартість видобутку, тис. грн.	допустима навантаження на рудник, тис. т
	1-го	2-го		
1	1,2	0,5	1,25	50
2	2,1	0,4	1,10	45
3	1,6	0,3	0,81	36
4	2,6	0,8	1,05	55

Відповідно до завдання, в якості цільової функції слід скористатися сумарними експлуатаційними витратами на видобуток руди з їх мінімізацією.

Мету буде досягнуто при обмеженні необхідних місячних потужностей рудників, при дотриманні вимог до якості вихідної сировини та забезпеченні сумарного обсягу поставок руди, що має бути обумовлено в математичній моделі відповідними умовами.

Для формалізації і розв'язання задачі маємо наступні вихідні дані і шукані результати:

m – кількість розглянутих рудників;

$i=\overline{1,m}$ – порядкові номери рудників;

x_i, $i=\overline{1,m}$ – місячна продуктивність рудника i, тис. т;

n – кількість видів компонентів в руді;

$j=\overline{1,n}$ – порядкові номери металів в концентраті збагачувальної фабрики;

α_{ij}, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$ – зміст компонента j в руді рудника i, %;

$Q_{i\max}$, $i=\overline{1,m}$ – допустиме навантаження на рудник i, тис. т;

Q – сумарний обсяг поставок руди з рудників, тис. т;

$\alpha_{пл}$ – допустимий рівень вмісту 1-го компонента в усередненій руді, %;

$\alpha_{2\min}$, $\alpha_{2\max}$ – мінімально можливий і максимально допустимий рівні вмісту 2-го компонента в усередненій руді,%;

C_i, $i=\overline{1,m}$ – собівартість видобутку 1т руди на руднику i, тис. грн. / т.

Формування економіко-математичної моделі.

Мінімізувати

$$L = \sum_{i=1}^{m} 1000 C_i x_i \tag{7.1}$$

при умовах:

$$X_i \le Q_{i\,\max}, \quad i = \overline{1,m} \tag{7.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_i = Q \tag{7.3}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = a_{\text{пл}} \tag{7.4}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i} \ge a_{2\min}, \tag{7.5}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i} \le a_{2\max}, \tag{7.6}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m} \tag{7.7}$$

Фізичний зміст моделі:

(7.1) – цільова функція, що виражає сумарні експлуатаційні витрати в тис. грн. на видобуток руди, які повинні бути мінімальними;

(7.2) – місячна продуктивність рудника *і* не повинна перевищувати допустимого навантаження, тис. т;

(7.3) – сумарний обсяг поставок руди, який має бути;

(7.4) – вміст 1-го компонента в усередненій руді має дорівнювати заданому;

(7.5) – вміст 2-го компонента в усередненій руді не може бути меншим за мінімально можливий;

(7.6) – вміст 2-го компонента в усередненій руді не може бути більшим за максимально допустимий;

(7.7) – шукані місячні потужності рудників невід'ємні.

Запис моделі в стандартній формі.

З урахуванням вихідних даних задачі математична модель буде виглядати наступним чином:

$$L = 1{,}25x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}81x_3 + 1{,}05x_4 \to \min,$$

за наявності умов:

$$x_1 \le 50, \quad x_2 \le 45, \quad x_3 \le 36, \quad x_4 \le 55,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 160,$$
$$\frac{1{,}2x_1 + 2{,}1x_2 + 1{,}6x_3 + 2{,}6x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} = 1{,}3,$$
$$\frac{0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}8x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \ge 0{,}4,$$
$$\frac{0{,}5x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}8x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \le 0{,}5,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}4}.$$

Необхідно здійснити деякі математичні перетворення, щоб звести модель до мішаної форми:

$$L = 1{,}25x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}81x_3 + 1{,}05x_4 \to \min,$$
$$x_1 \le 50, \quad x_2 \le 45, \quad x_3 \le 36, \quad x_4 \le 55,$$
$$-0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 - 0{,}4x_4 \le 0,$$
$$-0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 \le 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 160,$$
$$-0{,}1x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}3x_3 + 1{,}3x_4 = 0,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}4}.$$

В обмеження типу "≤" необхідно додати додаткові змінні $y_i, \quad i = \overline{1{,}6}$, а в обмеження типу "=" – штучні змінні ξ_j, $j = \overline{1{,}2}$.

Модель задачі набуває наступного вигляду:

$$L = 1{,}25x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}81x_3 + 1{,}05x_4 \to \min,$$

якщо виконуються умови:

$$x_1 + y_1 = 50,$$
$$x_2 + y_2 = 45,$$
$$x_3 + y_3 = 36,$$
$$x_4 + y_4 = 55,$$
$$-0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 - 0{,}4x_4 + y_5 = 0,$$

$$-0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + y_6 = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \xi_1 = 160,$$
$$-0{,}1x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}3x_3 + 1{,}3x_4 + \xi_2 = 0,$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}4}, \quad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}6}, \quad \xi_j = 0, \quad j = \overline{1{,}2}.$$

Стандартна форма запису моделі:

$$L = 0 - (-1{,}25x_1 - 1{,}1x_2 - 0{,}81x_3 - 1{,}05x_4) \to \min,$$

за наявності умов:

$$y_1 = 50 - x_1,$$
$$y_2 = 45 - x_2,$$
$$y_3 = 36 - x_3,$$
$$y_4 = 55 - x_4,$$
$$y_5 = 0 - (-0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 - 0{,}4x_4),$$
$$y_6 = 0 - (-0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4),$$
$$\xi_1 = 160 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$
$$\xi_2 = 0 - (-0{,}1x_1 + 0{,}8x_2 + 0{,}3x_3 + 1{,}3x_4),$$
$$l = 160 - (0{,}9x_1 + 1{,}8x_2 + 1{,}3x_3 + 2{,}3x_4),$$
$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}4}, \quad y_i \ge 0, \quad i = \overline{1{,}6}, \quad \xi_j = 0, \quad j = \overline{1{,}2}.$$

Нижче наводиться стандартна таблиця симплекс-методу.

Таблиця 7.3.

Стандартна таблиця симплекс-методу на першій ітерації пошуку опорного перетину

$\updownarrow \xi_1$

	Вільний член	X_1	X_2	X_3	X_4
l	160 -144	0,9 -0,9	1,8 -0,9	1,3 -0,9	2,3 -0,9
L	0 200	-1,25 1,25	-1,1 1,25	-0,81 1,25	-1,05 1,25
y_1	50 -160	1 -1	0 -1	0 -1	0 -1
y_2	45 0	0 0	1 0	0 0	0 0
y_4	55 0	0 0	0 0	0 0	1 0
y_5	0 16	-0,1 0,1	0 0,1	0,1 0,1	-0,4 0,1

	y_6	0 0	0,1 0,1	-0,1 0	-0,2 0	0,3 0
x_1 ↔	ξ_1	160 160	1 1	1 1	1 1	1 1
	ξ_2	0 16	-0,1 0,1	-0,8 0,1	0,3 0,1	1,3 0,1

Пошук опорного розв'язку.

Пошук опорного розв'язку виконано ітераціями, представленими в таблицях 7.3-7.6. Насамперед здійснено обмін штучних і вільних змінних, а також анульовано відповідні стовпці.

Таблиця 7.4.

Стандартна таблиця симплекс-методу на другий ітерації пошуку опорного перетину

↕ ξ_2

		Вільний член	X_2	X_3	X_4
	l	16 16	0,9 -1	0,4 -0,4	1,4 -1,4
	L	200 -2,672	0,15 -0,167	0,44 -0,0668	0,2 -0,234
	y_1	-110 17,776	-1 1,111	-1 0,444	-1 1,555
	y_2	45 -17,776	1 -1,111	0 -0,444	0 -1,555
	y_3	36 0	0 0	1 0	0 0
	y_4	55 0	0 0	0 0	1 0
	y_5	16 -1,776	0,1 -0,111	0,2 -0,0444	- 0,3 -0,155
	y_6	0 1,176	-0,1 0,111	-0,2 0,0444	0,3 0,155
	x_1	16 -17,776	1 -1,111	1 -0,444	1 -1,155
x_2 ↔	ξ_2	16 17,778	0,9 1,111	0,4 0,444	1,4 1,556

Таблиця 7.5.

Третя ітерація пошуку опорного розв’язку

↕y_3

		Вільний член	X_3	X_4
	L	197,328 -13,428	0,373 -0,373	-0,034 0
	y_1	-92,224 20,016	-0,556 0,556	0,555 0
	y_2	27,224 15,984	-0,444 0,444	-1,555 0
x_3 ↔	y_3	36 36	1 1	0 0
	y_4	55 0	0 0	1 0
	y_5	14,224 -5,616	0,156 -0,156	-0,455 0
	y_6	1,776 5,616	-0,156 0,156	0,455 0
	x_1	142,224 -20,016	0,556 -0,556	-0,555 0
	x_2	17,778 -15,984	0,444 -0,444	1,556 0

Таблиця 7.6.

Проміжна таблиця пошуку опорного розв’язку

	Вільний член	Y_3	X_4
L	183,9	-0,373	-0,034
y_1	-72,208	0,556	0,555
y_2	43,208	0,444	-1,555
X_3	36	1	0
y_4	55	0	1
y_5	8,608	-0,156	-0,455
y_6	7,392	0,156	0,455
X_1	122,208	-0,556	-0,555
X_2	1,794	-0,444	1,556

У відповідності із сформованим на останній ітерації (таблиця 7.6), пошук опорного розв'язку слід припинити, оскільки слід дотримуватися ознаки 1. У рядку із базисною змінною y_1 є від'ємний вільний член і немає жодного від'ємного елементу. Це означає, що обмеження в моделі несумісні. Умова з y_1 відповідає обмеженій можливості поставки першого рудника і неможливості в цілому забезпечити заданий обсяг поставок руди з певним змістом компонентів.

8. Контрольні питання

Тема 1. Введення в математичне моделювання.

1. Призначення і типи моделей.
2. Властивості виробничих систем і види математичних моделей.
3. Якісні характеристики математичних моделей.
4. Оптимізаційні моделі, їх структура.
5. Етапи розв'язання оптимізаційної задачі.

Тема 2. Методи і засоби пошуку оптимальних розв'язків.

1. Особливості розв'язання задач математичного програмування.
2. Графічне розв'язання оптимізаційної задачі.
3. Стратегія пошуку оптимуму.

Тема 3. Розв'язання основної задачі лінійного програмування.

1. Основна задача лінійного програмування.
2. Властивості множини розв'язків.
3. Стратегія пошуку оптимального розв'язку симплекс-методом.
4. Розрахунок нового базисного розв'язку.
5. Отримання початкового базисного розв'язку.

6. Пошук опорного розв’язку.
7. Пошук оптимального розв’язку.

Тема 4. Застосування лінійного програмування в задачах планування та управління гірничим виробництвом.

1. Умови застосування і класифікація лінійних моделей.
2. Задачі про розстановку обладнання.
3. Задачі про оптимальне використання ресурсів (оптимальний план випуску продукції).
4. Планування видобувних робіт в режимі усереднення якості.
5. Планування вантажних перевезень гірничих підприємств.
6. Модель задачі планування роботи групи гірничих підприємств (видобувних і переробних).

Тема 5. Цілочисельне лінійне програмування та його застосування при розв’язанні задач планування гірничого виробництва.

1. Особливості цілочисельних лінійних задач і методів їх розв’язання.
2. Використання булевих змінних при побудові моделей.
3. Модель планування розташування збагачувальних фабрик.
4. Модель оперативного планування розстановки самохідного обладнання по очисних блоках рудника.
5. Модель планування розвитку шахтного фонду виробничого об’єднання.
6. Метод гілок і меж при розв’язанні задач цілочисельного програмування.

9. Завдання для самостійної роботи

Визначити обсяги поставок руди на збагачувальну фабрику з чотирьох (або іншої кількості згідно варіанту) рудників, що забезпечують виконання завдання по кількості металів в концентраті при мінімальних витратах на транспорт і переробку руди.

Варіанти завдання відрізняються набором рудників і завданням за кількістю кожного виду металу в концентраті. Вихідні дані за змістом металу в руді по рудниках і техніко-економічні показники рудників наведені нижче в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1.

Номер варіанта	Рудники, які розглядаються	Завдання за кількістю метала в концентраті за видами, т			
		1-й	2-й	3-й	4-й
1	2	3	4	5	6
1	1, 2, 3	490	300	-	-
2	1, 2, 4	450	500	-	-
3	1, 3, 4	500	-	-	500
4	2, 3, 4	400	-	120	-
5	1, 2, 3, 4	500	500	140	1230
6	1, 2, 3	-	320	70	-
7	1, 2, 4	-	550	140	800
8	1, 3, 4	550	250	80	-
9	2, 3, 4	300	450	110	250
10	1, 2, 3, 4	500	500	-	-
11	1, 2, 3	140	290	70	1220
12	1, 2, 4	300	-	100	-
13	1, 3, 4	-	-	120	400
14	2, 3, 4	290	420	-	-
15	1, 2, 3, 4	460	-	100	-

Характеристики рудників

Вид металла	Вміст металу в руді на рудниках, %			
	1	2	3	4
1-й	2,8	-	-	6,8
2-й	1,2	2,4	-	3,6
3-й	-	0,3	0,8	1,6
4-й	4,5	4,8	5,2	4,3
Витрати на транспортування і переробку 1т руди, тис. руб.	1,15	0,72	1,36	0,94
Максимальний об'єм поставок з рудника, т	7000	12000	5000	6000

Висновки

Основна мета математичного моделювання як розділу курсу «Вища математика» в учбовому плані підготовки студентів за технічним профілем полягає у вивченні методів побудови і аналізу математичних моделей, постановки і розв'язання задач синтезу й оптимізації при автоматизованому проектуванні машин, технічних пристроїв, систем тощо.

Надання студентам знань з математичного моделювання, застосування якого на практиці дозволяє інженеру в значній мірі скоротити витрати часу і забезпечує утворення технічних об'єктів з високими показниками ефективності та якості, є необхідною складовою навчального процесу.

У представлених методичних рекомендаціях розглядається схема дослідження стандартної задачі лінійного програмування у багатовимірному випадку, коли неможливо навести графічну інтерпретацію області допустимих розв'язків (ОДР) і, зокрема, оптимального розв'язку. Алгоритм пошуку опорного розв'язку і визначення оптимального продемонстровано на конкретних прикладах.

Видання має допомогти студенту усвідомити проблему оптимального використання машин і обладнання за критерієм найменших витрат на виконання механізованих робіт, оволодіти методами математичного моделювання задач гірничої промисловості, засвоїти алгоритм найбільш універсального методу лінійного програмування – симплекс-методу, вміти формувати і аналізувати математичну модель задачі оптимізації, розв’язувати задачу графічно та за допомогою симплекс-метода (у багатовимірному випадку), а саме: записувати задачу лінійного програмування у стандартній формі, знаходити опорний розв’язок, визначати оптимальний розв’язок, а також застосовувати лінійне програмування в задачах планування та управління гірничим виробництвом.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алексеева Е.В.* Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи: учеб. пособие. – Новосибирск: Новосибирский гос. ун-т, 2012. – 131 с.
2. *Бункин В.А., Курицкий Б.Я., Сокуренко Ю.А.* Решение задач оптимизации в управлении машиностроительным производством. – Л.: Машиностроение, 1976. – 232 с.
3. *Вербицкий Г.М.* Основы оптимального использования машин в строительстве и горном деле: учебное пособие. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2009. – 108 с.
4. *Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И.* Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1967. – 460 с.
5. *Канторович Л.В*. Математические методы организации и планирования производства. – Л.: ЛГУ, 1939. – 68 с.
6. *Козин Р.Г.* Математическое моделирование: учебное пособие. – М.: МИФИ, 2006. – 85 с.
7. *Резниченко С.С.*, *Ашихмин А.А.* Математические методы и моделирование в горной промышленности: учебное пособие. – М.: Изд-во Московского горного ун-та, 2001. – 404 с.

Методичні матеріали для самостійної роботи студентів гірничотехнічних спеціальностей з дисципліни «Вища математика (спецрозділи). Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування»

Укладач: Лесіна Євгенія Вікторівна

Підписано до друку
Умовних друкованих аркушів 2,5
Тираж – 20 примірників

Видавничий центр Красноармійського індустріального інституту
ДВНЗ «ДонНТУ»,
85300, Красноармійськ, площа Шибанкова, 2