

УДК 512.2

DOI: 10.31474/2415-7902-2019-1(2)-2(3)-21-27

О. В. Фролов

ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ КОНГРУЕНЦІЇ ТРОХОЇДАЛЬНИХ КРИВИХ

Розглядається спосіб вилучення поверхні з конгруенції, що утворюється з трохойдальних кривих, шляхом занурення поданої лінії.

Мета роботи - розробка способу вилучення поверхонь з конгруенції циклоїдальних кривих на основі загального конструктивно – параметричного підходу до формоутворення поверхонь.

Дослідження поверхонь, що утворюються з трохойдальних кривих, має прикладне значення для опису поверхні вибою землерийних машин, у яких ріжуча кромка робочого органу здійснює два рухи: відносний – обертання по колу з кутовою швидкістю $w = \text{const}$ та переносний – прямолінійний рух осі робочого органу зі швидкістю $s = \text{const}$ у напрямку перпендикулярному до осі обертання. За цим принципом здійснюють рух робочі органи землерийних машин фрезерного типу, роторних та цепних траншеєкопачів та ін., окрім цього, такий рух є характерним для робочих поверхонь ґрунтообробного знаряддя.

В роботі було застосовано конструктивно – параметричний метод формоутворення поверхонь запропонований в роботах І.А. Скідана, що базується на теорії конгруенцій кривих та їхніх поверхонь.

На початку досліджень була побудована конструктивна модель конгруенції трохойдальних кривих, що утворюється зміною співвідношення параметрів форми циклоїди та плоско-паралельним зміщенням отриманого сімейства кривих у напрямку перпендикулярному площині інцидентності трохойд. Далі на базі загальних параметричних рівнянь була побудована аналітична модель конгруенції в двох формах – параметричній та явній в залежності від однієї з координат на площині інцидентності, а, також модель занурення до конгруенції поданої кривої лінії. Занурення лінії до конгруенції згідно з конструктивно – параметричним методом надає змогу вилучити окрему поверхню, що утворюється з сімейства трохойдальних кривих. В статті наведено конкретні приклади конструювання поверхонь за отриманими рівняннями.

Наукова новизна та практична значимість отриманих в роботі результатів полягає у розвитку засобів конструювання поверхонь сімействами трохойдальних кривих, що надає змогу винаходити нові форми робочих органів ґрунтообробного знаряддя.

Ключові слова: *робочий орган, траєкторія руху, конгруенція, трохойдальна крива, циклоїда.*

Вступ. Циклоїдальні криві здавна привертають увагу вчених, оскільки вони відбивають багато процесів, що відбуваються в техніці та живій природі. Так, наприклад, циклоїда обладнає властивістю, що тіло, що ковзає удовж неї без тертя, здійснює коливання з періодом, що не залежить від початкового положення. З'ясувалось, що траєкторії планет відносно Землі мають представлення у вигляді епіциклоїди. Ці криві також знайшли широке коло застосувань при формоутворенні різних виробів машинобудування.

Таким чином, розвиток способів формоутворення поверхонь на основі сімей трохойдальних кривих складає актуальну наукову проблему.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Застосуванню циклоїдальних кривих в машинобудуванні присвячені численні дослідження. Основну частину яких складають роботи присвячені циклоїдальним передачам – механізмам, що мають застосування в редукторах та насосах [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Іншу частину досліджень складають роботи з конструювання ґрунтообробного та землерийного знаряддя - [7, 8, 9, 10]. При цьому важливою геометричною характеристикою є траєкторія руху точок робочого органу, від якої залежать багато технологічних та експлуатаційних параметрів [9, 10].

В роботі [8] було визначено траєкторією руху точки, що обертається по колу радіуса R зі сталою кутовою швидкістю w та, водночас, здійснює прямолінійний рух із сталою швидкістю s . Параметричні рівняння траєкторії мають вигляд:

$$x = st + R \sin wt, \quad y = R \cos wt.$$

Форма цієї лінії буде залежати від співвідношення параметрів w та s . Так, окремим випадком такої кривої є циклоїда, яка визначається рівністю $s/w = R$. Саме така форма

траєкторії використовується при конструюванні ґрунтообробного знаряддя, зокрема дискових копачів [9].

Скіданом І.А. та його учнями [11] був розроблений конструктивно – параметричний метод формоутворення поверхонь. Його характерною рисою є узагальнення математичного опису конструктивних способів формоутворення поверхонь, а, саме, кінематичний способу, способу спеціальних координат, способу вилучення лінійного каркасу поверхні з конгруенції ліній. В основу конструктивно-параметричного методу було покладено наступні ідеї:

- параметричне дослідження геометричних фігур;
- конструктивні методи формоутворення алгебраїчних поверхонь на основі положень синтетичної геометрії;
- теорія конгруенцій кривих та їхніх поверхонь;
- гомеоморфізм і криволінійні координати.

Подання конгруенції згідно конструктивно – параметричному методу полягає у визначенні трьох функцій від трьох параметрів

$$x = f_1(u, v, t), y = f_2(u, v, t), z = f_3(u, v, t)$$

де x, y, z - прямокутні декартові координати,

u, v – параметри конгруенції, t – параметр положення точки на лінії конгруенції.

Відводячи за чергою змінним u, v, t роль вільного параметра, прийдемо до висновку, що, окрім трьох конгруенцій ліній останні рівняння виражають три однопараметричні сім'ї поверхонь, які носять назву ізопараметричних.

Лінії кожної з трьох конгруенцій, наприклад, t - конгруенції, є результатом перетину поверхонь, одна з яких належать до ізопараметричної сім'ї $v = \text{const}$, інша – ізопараметричної сім'ї $u = \text{const}$ при множині ∞^2 пар.

Мета статті (постановка завдання). Метою цієї роботи є розробка способу вилучення поверхонь з конгруенції циклоїдальних кривих, яка утворена зміною параметрів форми траєкторії руху точок робочого органу знаряддя.

Методи дослідження. В роботі було використано методи геометричного моделювання, що ґрунтуються на основі аналітичної, диференціальної геометрії, теорії поверхонь та конгруенцій. Також в роботі використано комп'ютерне моделювання та візуалізацію результатів з використанням бібліотеки Matplotlib мови програмування Python.

Основна частина. Перейдемо до формування математичної моделі конгруенції.

У рівняннях кривої зробимо зміну параметра t на $u = wt$, будемо мати

$$x = \frac{s}{w}u + R \sin u, \quad y = R \cos u.$$

Позначивши співвідношення параметрів форми кривої s/wR , як m , отримаємо

$$x = R(mu + \sin u), \quad y = R \cos u. \quad (1)$$

Рівняння (1) є параметричними рівняннями трохіодальної кривої загального вигляду [11]. Конкретний тип цієї лінії залежатиме від співвідношення m . Так, при $m=0$ будемо мати коло радіуса R ; при $m<1$ - подовжену циклоїду; при $m=1$ - циклоїду; при $m>1$ - зменшену циклоїду; при $m=\infty$ - пряму.

Рівняння цієї лінії можливо отримати в іншій формі, усунувши з (1) параметр t . Будемо мати:

$$x = mR \arccos \frac{y}{R} + \sqrt{R^2 - y^2}. \quad (2)$$

Якщо в рівняннях (1) чи (2) вважати змінним параметр m отримаємо однопараметричну множину ліній на площині. Тобто, вищезгадані рівняння можна вважати рівняннями сімейства трохоб'єдальних кривих. На рис. 1 наведено приклад розташування ліній цього сімейства на площині.

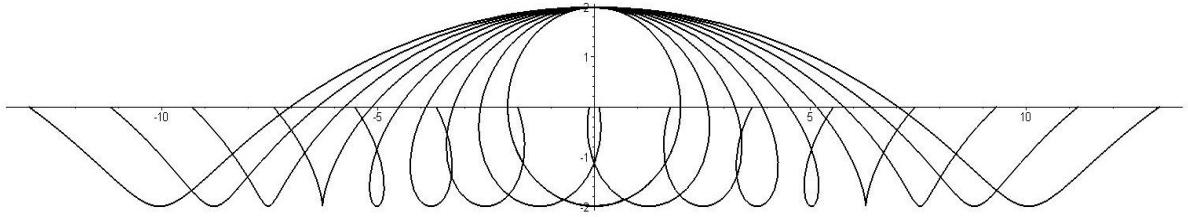


Рисунок 1 - Розташування ліній сім'ї (1) на площині при $R=2$; $m=0\dots1,6$; $-3\pi/2 \leq u \leq 3\pi/2$.

Щоб утворити у просторі конгруенцію трохоб'єдальних кривих, подаємо на площині Oxy сім'ю ліній (1) та будемо переміщувати цю площину разом із сімейством кривих у напрямку осі z . Таким чином, у просторі буде розташована ∞^1 паралельних площин, до кожній з яких належатиме ∞^1 трохоб'єдальних ліній. Рівняння цієї конгруенції матимуть вигляд:

$$x = R(mu + \sin u), \quad y = R \cos u, \quad z = k, \quad (3)$$

або в іншій формі

$$\begin{cases} x = mR \arccos \frac{y}{R} + \sqrt{R^2 - y^2}; \\ z = k, \end{cases} \quad (4)$$

де: m та k – суттєві параметри конгруенції.

Згідно з рівняннями (4) область існування конгруенції обмежується значеннями y в межах від $-R$ до R . Щоб вилучити з цієї конгруенції деяку поверхню, достатньо зв'язати параметри m та k залежністю

$$m = m(k). \quad (5)$$

Таку залежність можливо отримати, занурюючи до конгруенції деяку лінію. Нехай ця лінія подається у формі:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0; \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

тоді, розглядаючи разом системи рівнянь (6) та (5), можливо отримати залежність (5). Підставляючи вираз правої частини (5) до (3), маємо параметричні рівняння поверхні конгруенції, які відповідають зануренню поданої лінії:

$$x = R(m(k)u + \sin u), \quad y = R \cos u, \quad z = k. \quad (7)$$

Наприклад, якщо цією лінією є плоска крива, що лежить у площині $x = \text{const} = c$, та подається рівняннями:

$$\begin{cases} x = c; \\ y = \phi(z). \end{cases}$$

Залежність (5) набуває вигляду:

$$m = \frac{c - \sqrt{R^2 - \phi(k)}}{R \arccos \frac{\phi(k)}{R}}.$$

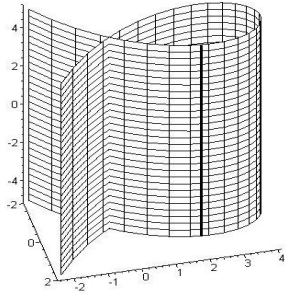
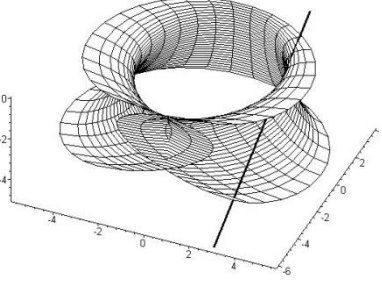
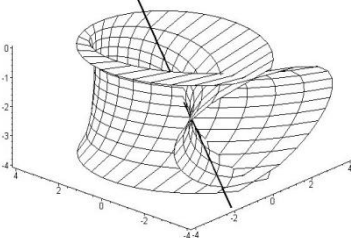
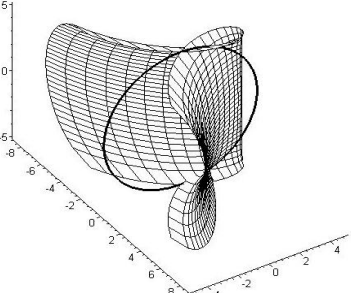
Підставляючи праву частину отриманого виразу до (7) маємо

$$x = R \left(\frac{c - \sqrt{R^2 - \phi(k)}}{R \arccos \frac{\phi(k)}{R}} \cdot u + \sin u \right), \quad y = R \cos u, \quad z = k$$

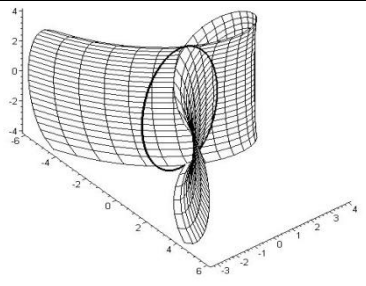
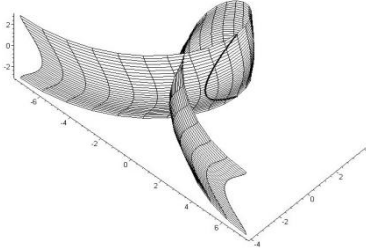
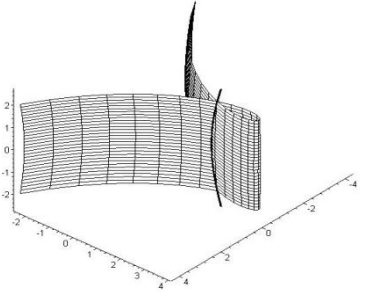
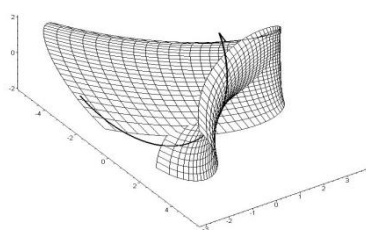
- параметричні рівняння поверхні, що відповідають зануренню поданої лінії до конгруенції трохіодальних кривих.

До таблиці 1 зведено поверхні, що відповідають зануренню різних ліній до конгруенції (4). У якості ліній, що занурюються, були взяті лінії, які найбільш широко використовуються в практиці конструювання робочих органів ґрунтообробного та землерийного знаряддя.

Таблиця 1

№ п/п	Лінія, що занурюється	Рівняння лінії, яка занурюється до конгруенції	Вираз залежності (5)	Зображення отриманої поверхні
1	2	3	4	5
1	Пряма, паралельна осі z	$\begin{cases} x = c \\ y = a \end{cases}$	$m = \frac{c - \sqrt{R^2 - a^2}}{R \arccos \frac{a^2}{R}}$	
2	Пряма в площині Oyz	$\begin{cases} x = c \\ y = az + b \end{cases}$	$m = \frac{c - \sqrt{R^2 - (ak + b)^2}}{R \arccos \frac{ak + b}{R}}$	
3	Пряма загального положення	$\begin{cases} x = cz + d \\ y = az + b \end{cases}$	$m = \frac{ck + d - \sqrt{R^2 - (ak + b)^2}}{R \arccos \frac{ak + b}{R}}$	
4	Коло	$\begin{cases} x = c \\ y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$	$m = \frac{c - \sqrt{R^2 - r^2 + k^2}}{R \arccos \frac{\pm \sqrt{r^2 + k^2}}{R}}$	

Продовження таблиці 1

1	2	3	4	5
5	Еліпс	$\begin{cases} x = c \\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \end{cases}$	$m = \frac{bc - \sqrt{R^2 b^2 - a^2 (b^2 - k^2)}}{bR \arccos \frac{\pm a \sqrt{b^2 - k^2}}{bR}}$	
6	Парабола	$\begin{cases} x = c \\ z^2 = 2py \end{cases}$	$m = \frac{2pc - \sqrt{2p^2 R^2 - k^4}}{2pR \arccos \frac{k^2}{2pR}}$	
7	Гіпербола	$\begin{cases} x = c \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \end{cases}$	$m = \frac{bc - \sqrt{R^2 b^2 - a^2 (b^2 + k^2)}}{bR \arccos \frac{\pm a \sqrt{b^2 + k^2}}{bR}}$	
8	Циліндрична гвинтова лінія	$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 \\ z = a \sin \frac{y}{b} \end{cases}$	$m = \frac{\sqrt{a^2 - k^2} - \sqrt{R^2 - b^2} \arcsin^2 \frac{k}{a}}{R \arccos \left(\frac{b}{R} \arcsin \frac{k}{a} \right)}$	

Обговорення результатів. Як показали результати досліджень, на форму траєкторії руху впливає співвідношення m параметрів форми. Тому оптимізація траєкторії може відбуватися за рахунок зміни всіх трьох складових R , w чи s , що входять до рівнянь трохоїдальної кривої.

Висновки. Отримані результати можуть бути використані при конструюванні робочих органів землерийного та ґрунтообробного обладнання. При цьому, подальші дослідження можливо спрямувати на пошук умов наявності дискримінант сімейств трохоїдальних кривих, зокрема, огинаючих таких сімейств.

Список літератури

1. Luo, S., Liao, L., Wang, J. Study on inspection and avoidance of interferences in five-axis end milling of cycloidal gears. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017. v. 91, Is. 9–12, pp. 3307–3314, <https://doi.org/10.1007/s00170-017-0002-1>
2. Luo S. M., Liao L. X., Mo J. Y. Prediction of surface roughness of end milling for cycloidal gears based on orthogonal tests. Engineering Transactions, 2018, v. 66, No. 3, pp. 339–352, <https://doi.org/10.24423/EngTrans.860.20180830>
3. Özel C. Ortaç Y. A study on the cutting errors of the tooth profiles of the cycloidal gears manufactured in CNC milling machine. International Journal of Materials and Product Technology (IJMPT). 2016. - v. 53, No. 1. – pp. 42 – 60, <https://doi.org/10.1504/IJMPT.2016.076373>

4. Wang P., Li J., Jin Y.Q. A study on the design of slicing cutter for cycloid gear based on conjugate theory. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2018. v. 98, Is. 5–8, pp. 2057–2068, <https://doi.org/10.1007/s00170-018-2115-6>
5. Ivanović L., Josifović D., Ilić A. Modelling of Trochoidal Gearing at the Gerotor Pump. In: Dobre G. (eds) *Power Transmissions. Mechanisms and Machine Science*, Springer, 2013. – v. 13. – pp. 553-562 https://doi.org/10.1007/978-94-007-6558-0_44
6. Скібінський О. І., Гуцул В. І., Гнатюк А. А Визначення умов існування спряженої огинаючої сімейства еквідистант до вкорочених епіциклоїд в циклоїдальній передачі внутрішнього зачеплення// Вісник Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Серія: Машинобудування. - К. : НТУУ «КПІ», 2014. - № 70. - С. 159-165.
7. Verhoef P.N.W. Wear of rock cutting tools: implications for the site investigation of rock dredging projects. CRC Press, 1997 – 340 p. <https://doi.org/10.1201/9780203733981>
8. Юрченко И. К. О геометрии рабочих органов некоторых землеройных машин, обусловленной траекторией движения. – Прикладная геометрия и инженерная графика.– К.: Будівельник, 1972 – Вып. 14. - С. 32 -43
9. Юрчук В. П., Карпук В. В., Махорін Я. Г Конструювання спряжених робочих поверхонь сільськогосподарських машин на ЕОМ// Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – Луцьк, 2015. - № 19. - С. 173-176.
10. Сукач М.К., Лисак С.І. Оптимізація параметрів ланцюгового робочого органа траншеєкопача. Науковий вісник ХДМІ, 2011. – т.1, №4. - С. 263-269
11. Скідан І.А. Загальна аналітична теорія прикладного формоутворення на основі глобальної параметризації // Прикладна геометрія та інженерна графіка: праці / Таврійська державна агротехнічна академія.-Мелітополь; 2001.-Вип.4, Т.13.- С. 21-28.
12. Савелов А.А. Плоские кривые: Систематика, свойства, применения. Справочное руководство. Изд. стереотип., М.: URSS, 2020. - 294 с.

References

1. Luo, S., Liao, L., Wang, J. (2017) Study on inspection and avoidance of interferences in five-axis end milling of cycloidal gears. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. - v. 91, Is. 9–12, pp. 3307–3314, <https://doi.org/10.1007/s00170-017-0002-1>
2. Luo S. M., Liao L. X., Mo J. Y. (2018) Prediction of surface roughness of end milling for cycloidal gears based on orthogonal tests. *Engineering Transactions*. - v. 66, No. 3, pp. 339–352, <https://doi.org/10.24423/EngTrans.860.20180830>
3. Özel C. Ortaç Y. (2016) A study on the cutting errors of the tooth profiles of the cycloidal gears manufactured in CNC milling machine. *International Journal of Materials and Product Technology (IJMPT)*. - v. 53, No. 1. – pp. 42 – 60, <https://doi.org/10.1504/IJMPT.2016.076373>
4. Wang P., Li J., Jin Y.Q. (2018) A study on the design of slicing cutter for cycloid gear based on conjugate theory. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, - v. 98, Is. 5–8, pp. 2057–2068, <https://doi.org/10.1007/s00170-018-2115-6>
5. Ivanović L., Josifović D., Ilić A. (2013) Modelling of Trochoidal Gearing at the Gerotor Pump. In: Dobre G. (eds) *Power Transmissions. Mechanisms and Machine Science*, Springer, – v. 13. - pp. 553-562 https://doi.org/10.1007/978-94-007-6558-0_44
6. Skibinskiy O., Gutsul I., Gnatuk A. (2014) Conditions determination of existence of tangent curve to family of equidistant curves of the shortened epicycloids in epicyclic transmission internal gear [Vyznachennia umov isnuvannia spriazhenoi ohynaiuchoi simeistva ekvidystant do vkorochenykh epitsykloid v tsykloidalnii peredachi vnutrishnoho zacheplennia]. *Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy «Kyivskiy politekhnichnyi instytut»*. Serii: Mashynobuduvannia. - K. : NTUU «KPI», - No. 70. - pp. 159-165. (In Ukrainian).
7. Verhoef P.N.W. (1997) Wear of rock cutting tools: implications for the site investigation of rock dredging projects. CRC Press, – 340 p. <https://doi.org/10.1201/9780203733981>
8. Yurchenko I. (1972). On the geometry of the working bodies of some earth moving machines due to the trajectory of motion [O geometrii rabochih organov nekotoryih zemleroynykh mashin, obuslovennoy traektoriei dvizheniya], *Applied geometry and engineering graphics*. - K. : Budivelnik, - Issue. 14., pp. 32-43. . (in Russian).
9. Yurchuk V., Karpuk V., Mahorin Y. (2015) Construction conjugated working surface of agricultural machines on computer. [Konstruiuvannia spriazhenykh robochykh poverkhon silskohospodarskykh mashyn na EOM], *Kompiuterno-intehrovani tekhnolohii: osvita, nauka, vyrobnytstvo*. – Lutsk, - No. 19. - pp. 173-176. (In Ukrainian).
10. Sukach M., Lisak S. (2011). Optimization of parameters of the cutting implement of chain trencher [Optymizatsiia parametriv lantsiuhovoho robochoho orhana transheiekopacha] *Naukovyi visnyk KhDMI*, – v.1, No. 4. - pp. 263-269 (In Ukrainian).

11. Skidan I. (2001) General analytical theory of applied formation on the basis of global parameterization [Zahalna analitychna teoriia prykladnoho formoutvorennia na osnovi hlobalnoi parametryzatsii]. Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika: pratsi. - Tavriiska derzhavna ahrotekhnichna akademiia. Melitopol. - v.4, No.13. - pp. 21-28. (In Ukrainian)
12. Savelov A (2020). Flat curves. [Ploskie krivyye], Moskow: URSS. - 294 p. (in Russian).

Надійшла до редакції 17.09.2019

O. Frolov

RESEARCHING THE SURFACES OF TROCHOIDAL CURVES CONGRUENCE

The method of extracting a surface from the congruence formed from the trochoidal curves by submerging the feed line is considered. The study of the surfaces formed from the trochoidal curves is of relevance to the description of the surface of the excavation of earthmoving machines, in which the cutting edge of the working body makes two motions: relative – rotation in a circle at an angular velocity $w = \text{const}$ and figurative – rectilinear motion of the axis of the working body with the speed $s = \text{const}$ in a direction perpendicular to the axis of rotation. According to this principle, the working bodies of earthmoving machines, rotor and chain trench diggers, etc. execute their motions. Besides that, such movement is typical for working surfaces of the soil processing equipment.

The mathematical model of the congruence of the trochoidal curves has been developed. The parameter of this congruence is a coefficient that depends on the parameters of the shape of trochoids and the distance between the parallel planes in which the families of these curves are located. The lines that are most commonly used in engineering of the working bodies of soil and earth-moving machinery have been used as the lines to be submerged in congruence.

In the research the structural-parametric method of shaping the surfaces, proposed in the works of I. Skidan, has been applied. It is based on the theory of curve congruences and their surfaces.

At the beginning of the research, a constructive model of the congruence of the trochoidal curves has been designed, which is formed by changing the ratio of the parameters of the cycloid shape and the plane-parallel displacement of the obtained family of curves in the direction perpendicular to the incident plane of the trochoids. Then, on the basis of general parametric equations, the analytical model of congruence has been constructed in two forms – the parametric and explicit, depending on one of the coordinates on the incident plane, and the model of immersion to the congruence of the given curve line. Immersion of the line to the congruence according to the constructive-parametric method allows removing a separate surface, which is formed from the family of trihedral curves. The article gives the specific examples of constructing surfaces according to the obtained equations.

The obtained results can be used to design the working bodies of earthmoving and soil-processing equipment. In this case, as the results of studies show, the shape of the trajectory of motion is affected by the ratio m of the shape parameters. Therefore, optimization of the trajectory can occur by changing all three of R , w , and s components, included in the equations of the trochoidal curve.

The scientific novelty and practical significance of the results obtained in the work lies in the development of ways of constructing surfaces by the families of trochoid curves, which allows inventing new forms of working bodies of the tillage machinery.

Keywords: *working part, trajectory, congruence, trochoidal curve, cycloid.*

Відомості про автора

Фролов Олег Васильович, кандидат технічних наук, доцент, ДВНЗ «Донецький національний технічний університет»; oleh.frolov@donntu.edu.ua

Frolov Oleg, PhD of Technical Sciences, Associate Professor, SHEE “Donetsk National Technical University”; oleh.frolov@donntu.edu.ua