

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»**

Навчально-науковий інститут комп'ютерних наук і технологій

Кафедра вищої математики і фізики

**Конспект лекцій з курсу
«Вища математика. Ч.3»**

для студентів усіх форм навчання галузей знань
14 – Електрична інженерія, 15 – Автоматизація та приладобудування,
17 – Електроніка та телекомунікації

Покровськ, 2021

УДК № 51 (042)

К 65

Конспект лекцій з курсу «**Вища математика. Ч.3**» для студентів усіх форм навчання галузей знань 14 – Електрична інженерія, 15 – Автоматизація та приладобудування, 17 – Електроніка та телекомунікації [Електронний ресурс] / уклад. Ю.В. Новікова, Н.Ф. Гоголева. – Покровськ: ДонНТУ, 2021 р. – 98 с.

Конспект лекцій з дисципліни «Вища математик. Ч.3» для студентів факультету КІТАЕР містить основні поняття та теореми за темами комплексне числення, числові та функціональні ряди, основи операційного числення та теорія ймовірностей. Конспект лекцій повністю відповідає робочій програмі курсу «Вища математика. Ч.3» для студентів галузей знань 14 – Електрична інженерія, 15 – Автоматизація та приладобудування, 17 – Електроніка та телекомунікації, а також може бути використана студентами інших інженерно-технічних спеціальностей.

Укладачі: _____Ю.В. Новікова, доц. каф. ВМФ, к.ф.-м.наук
(підпис)

_____Н.Ф. Гоголева, доц. каф. ВМФ, к.ф.-м.наук, доцент
(підпис)

Рецензенти: _____Л.Г. Сергієнко, доц. каф. ВМФ, к. пед. наук, доцент
(підпис)

Відповідальний

за випуск: _____М.І. Медведєва, зав. каф. ВМФ, к.ф.-м.наук, доцент

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ,
протокол № 1 від 07.09.2021 р.

Розглянуто на засіданні кафедри вищої математики і фізики
протокол № 5 від 18.05.2021 р.

Донецький національний технічний університет, 2021

© Новікова Ю.В., Гоголева Н.Ф.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
Лекція 1. ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАЇЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.....	6
Лекція 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНА ТА ПОКАЗНИКОВА ФОРМИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ПІДНЕСЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА У СТЕПІНЬ.....	10
Лекція 3. РЯДИ. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ. ДОСТАТНЯ ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ: ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ.....	15
Лекція 4. ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ: ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА, РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ, ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ. ЗНАКОПОЧЕРЕЖНІ РЯДИ.	21
Лекція 5. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РЯДИ МАКЛОРЕНА ТА ТЕЙЛОРА. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ.	25
Лекція 6. РЯД ФУР'Є. РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ У РЯД ФУР'Є.	31
Лекція 7. ІДЕЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ОРИГІНАЛ ТА ЗОБРАЖЕННЯ.....	37
Лекція 8. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. ЗГОРТКА ФУНКЦІЙ.....	42
Лекція 9. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ.	49
Лекція 10. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, КЛАСИФІКАЦІЯ ПОДІЙ.	53
Лекція 11. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЙ.	60
Лекція 12. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА ФОРМУЛИ БАЙЕСА.	65
Лекція 13. НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ З ПОВТОРЕННЯМИ. СХЕМА ТА ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ У СХЕМІ БЕРНУЛЛІ.....	72
Лекція 14. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	78
Лекція 15. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	85
Лекція 16. ОСНОВНІ ЗАКони РОЗПОДІЛУ ДВВ ТА НВВ. НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ.	92
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	97
ДОДАТОК А	98
ДОДАТОК Б	99

ВСТУП

Знання основних ідей та методів вищої математики, вміння практично застосовувати ці методи для розв'язування задач своєї спеціальності у наш час є обов'язковим для спеціаліста будь-якого напрямку.

Конспект лекцій з курсу «Вища математика Ч.3» орієнтований на студентів 2 курсу інженерно-технічних спеціальностей, а також може бути корисний усім категоріям студентів, які вивчають вищу математику.

Даний методичний посібник містить необхідні матеріали за розділами курсу вищої математики, які необхідні студентам при вивченні спеціальних курсів за професійним спрямуванням. У посібнику наведено матеріали за темами: комплексні числа, числові та функціональні ряди, основи операційного числення та теорія ймовірностей. Кожна з лекцій містить базові означення та теореми за відповідною темою. Теореми у більшості випадках наводяться без доведення, з метою оптимізації об'єму лекційного матеріалу. Виклад теоретичного матеріалу за усіма темами супроводжується великою кількістю прикладів і задач, що суттєво спрощує сприйняття матеріалу.

Конспект лекцій може бути використаний студентами для самостійного вивчення курсу та є базою у підготовці до іспиту з дисципліни «Вища математика. Ч.3».

Також даний курс лекцій буде корисним викладачам вищої математики, у якості опорного конспекту при підготовці до лекційних занять.

Лекція 1.

ПОНЯТТЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАЇЧНА ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ.

План лекції.

1. Алгебраїчна форма комплексного числа.
2. Геометричне зображення комплексного числа.
3. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.

На множині дійсних чисел не можна виконувати всі дії над числами без обмежень, наприклад, не можна добувати корінь квадратний із від'ємного числа. Але накладання такого обмеження ускладнює, або навіть унеможливорює розв'язок ряду важливих задач, таких як: розв'язок деяких квадратних (коли дискримінант менше нуля) та кубічних рівнянь, доведення багатьох теорем і формул тощо.

Тому природно постало питання про розширення множини дійсних чисел, приєднанням до неї нових так, щоб у розширеній множині крім чотирьох арифметичних дій – додавання, віднімання, множення і ділення (за винятком ділення на нуль), можна було виконувати дію добування кореня. Це питання було успішно розв'язано лише у XIX сторіччі. Відповідно до прийнятих в математиці принципів розширення поняття числа при розширенні множини дійсних чисел мають задовольнятися такі вимоги:

- означення нових чисел мусить спиратися на поняття дійсного числа, і нова множина має містити всі дійсні числа;
- для нових чисел повинні виконуватись п'ять законів прямих арифметичних чисел (пригадайте ці закони);
- у новій числовій множині мусить мати розв'язок рівняння $x^2 = -1$.

Оскільки існує вимога, що у новій числовій множині рівняння $x^2 = -1$ повинно мати розв'язок, необхідно ввести деяке нове число, вважаючи його розв'язком цього рівняння. Число, квадрат якого дорівнює -1 , позначають буквою i та називають уявною одиницею (i – перша буква латинського слова *imaginarius* – уявний).

Таким чином множина дійсних чисел розширюється шляхом введення так званої уявної одиниці

$$i^2 = -1 \quad \text{або} \quad i = \sqrt{-1}.$$

Підкреслимо, що рівність $i^2 = -1$ приймається за означенням i не доводиться.

Сам термін «уявне число» виник історично і зберігся до нашого часу, але тепер уже ясно, що без цього числа неможливо було б прийти до багатьох реальних речей.

Уявні, або комплексні числа знаходять своє застосування у гідродинаміці, аеромеханіці, теорії пружності, теоретичній фізиці, картографії, електротехніці, теорії фільтрації земних порід, дослідженні поведінки соціальних і економічних систем та багатьох інших галузях науки.

Алгебраїчна форма комплексного числа

Означення. Комплексним числом z називають вираз $z = x + yi$, де x та y – дійсні числа, а i – уявна одиниця. При цьому x називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y – уявною частиною і позначається $y = \operatorname{Im} z$.

Зауваження. Алгебраїчною формою комплексного числа є число виду $z = x + yi$.

Зауваження. Комплексні числа $z_1 = x_1 + y_1i$ та $z_2 = x_2 + y_2i$ вважаються рівними, якщо відповідно рівні їх дійсні й уявні частини, тобто $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Зокрема, комплексне число $z = x + yi = 0$ тоді і лише тоді, коли $0 = 0 + 0i$.

Операція порівняння комплексних чисел не визначена (порівняти комплексні числа неможливо).

Зауваження. Якщо $y = 0$, то комплексне число має вид $z = x + 0i$, тобто $z = x$ і називають таке число **дійсним**.

Якщо $x = 0$, $y \neq 0$, то комплексне число має вид $z = 0 + yi$, тобто $z = iy$ і називають таке число **чисто уявним**.

Означення. Два комплексні числа $z = x + yi$ та $\bar{z} = x - yi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називають **комплексно-спряженими**.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел

Комплексне число $z = x + yi$ геометрично зображується точкою або вектором з координатами x та y на площині Oxy .

Таку площину називають комплексною площиною.

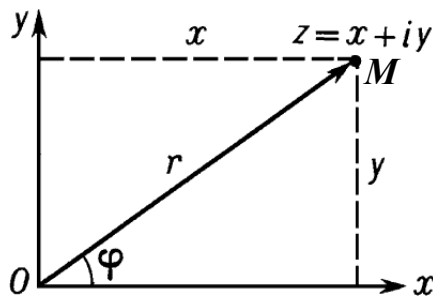


Рисунок 1. Комплексна площина

Комплексне число визначається його дійсною частиною x та уявною частиною y . Тому кожному комплексному числу відповідає єдина точка в комплексній

площині. Справедливе і обернене твердження. Кожна точка площини Ox зображає єдине комплексне число.

Отже, між комплексними числами і точками комплексної площини існує взаємно однозначна відповідність.

Якщо $z_1 = x_1 + y_1i$ — дійсне число, тобто $z_1 = x_1$, а $y_1 = 0$, то відповідна точка лежить на дійсній осі. Тому вісь абсцис називають **дійсною віссю**.

Якщо $z_2 = x_2 + y_2i$ — чисто уявне число, тобто $x_2 = 0$, а $z_2 = iy_2$, то відповідна точка лежить на осі ординат. Тому вісь ординат називають **уявною віссю**.

Вектор $\overline{OM}$ вважають геометричним образом числа $x + yi$.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Означення. Сумою двох комплексних чисел в алгебраїчній формі

$$z_1 = x_1 + y_1i \text{ та } z_2 = x_2 + y_2i$$

називається комплексне число, яке задається рівністю

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Означення. Різницею двох комплексних чисел в алгебраїчній формі

$$z_1 = x_1 + y_1i \text{ та } z_2 = x_2 + y_2i$$

називається комплексне число, яке при додаванні до z_2 дає комплексне число z_1

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Приклад. Обчисліть:

$$1) z = (2 - 5i) + (3 + 4i),$$

$$2) z = (2 - 5i) - (3 + 4i),$$

$$3) z = (7 + 5i) - (3 - 4i) + (2 + 8i).$$

Розв'язання.

$$1) z = (2 - 5i) + (3 + 4i) = 2 - 5i + 3 + 4i = (2 + 3) + (-5i + 4i) = 5 - i,$$

$$2) z = (2 - 5i) - (3 + 4i) = 2 - 5i - 3 - 4i = (2 - 3) + (-5i - 4i) = -1 - 9i,$$

$$3) z = (7 + 5i) - (3 - 4i) + (2 + 8i) = 7 + 5i - 3 + 4i + 2 + 8i = (7 - 3 + 2) + (5i + 4i + 8i) = 6 + 17i.$$

Означення. Добутком двох комплексних чисел у алгебраїчній формі

$$z_1 = x_1 + y_1i \text{ та } z_2 = x_2 + y_2i$$

називається комплексне число, яке утворюється при множенні цих чисел, як двочленів, за правилами алгебри. При множенні необхідно пам'ятати, що

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i.$$

Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Означення. Ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі задається як дія, що обернена множенню. Практично ж ділення комплексних чисел виконується за

наступним правилом: щоб поділити комплексне число $z_1 = x_1 + y_1i$ на інше комплексне число $z_2 = x_2 + y_2i$, необхідно помножити ділене і дільник на комплексне число, спряжене до дільника (тобто, на число $x_2 - y_2i$). Тоді дільником буде дійсне число, поділивши на яке дійсну та уявну частини діленого, отримаємо частку:

$$\frac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \frac{(x_1 + y_1i)(x_2 - y_2i)}{(x_2 + y_2i)(x_2 - y_2i)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Приклад. Обчисліть:

$$1) z = (2 - 5i)(3 + 4i),$$

$$2) z = \frac{2 - 5i}{3 + 4i}.$$

Розв'язання.

$$1) z = (2 - 5i)(3 + 4i) = 6 + 8i - 15i - 20i^2 = 6 + 8i - 15i + 20 = 26 - 7i,$$

$$2) z = \frac{2 - 5i}{3 + 4i} = \frac{(2 - 5i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 8i - 15i + 20i^2}{9 - 16i^2} = \frac{-14 - 23i}{25} = -\frac{14}{25} - \frac{23}{25}i.$$

Означення. Піднести до цілого n -го степеня комплексне число – це (як і для дійсних чисел) означає перемножити його саме на себе n разів.

Зауваження. Підносити до n -го степеня комплексне число в алгебраїчній формі не раціонально, для цього краще представити число у тригонометричній формі та застосувати формулу Муавра.

Зауваження. Добувати корінь цілого n -го степеня від комплексного числа краще від комплексного числа у тригонометричній формі. Для алгебраїчної форми запису комплексного числа «легко» можна обчислити лише значення квадратного кореня.

Приклад. Обчисліть $z = (3 + 4i)^3$.

Розв'язання.

$$z = (3 + 4i)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 4i + 3 \cdot 3 \cdot (4i)^2 + (4i)^3 = 27 + 108i - 144 - 64i = -117 + 44i.$$

Приклад. Розв'яжіть квадратне рівняння: $z^2 - 4z + 13 = 0$.

Розв'язання.

$$D = 16 - 4 \cdot 13 = -36, \quad \sqrt{D} = \sqrt{-36} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1} = 6i,$$

$$z_1 = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i, \quad z_2 = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i.$$

Звідси випливає, що будь-яке квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами має розв'язок у множині комплексних чисел.

Лекція 2.

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ТА ПОКАЗНИКОВА ФОРМИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ПІДНЕСЕННЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА У СТЕПІНЬ.

План лекції.

1. Тригонометрична та показникова форма комплексного числа.
2. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі (множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня n -го степеня).

Тригонометрична та показникова форма комплексного числа

Введемо на комплексній площині Z полярну систему координат так, що полюс збігається з початком координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю OX . Тоді точка $M(x, y)$ – образ комплексного числа $z = x + iy$ має полярні координати $r = |\overline{OM}|$ і φ – кут між додатним напрямком осі OX і вектором $\overline{OM}$.

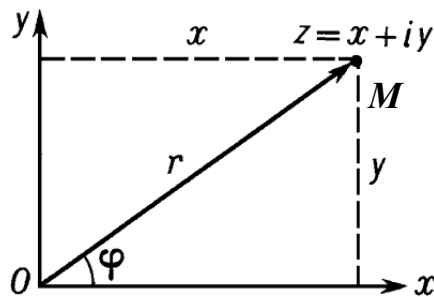


Рисунок 1. Комплексна площина

Тоді, як відомо,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

отже, комплексне число z можна представити у формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1)$$

Вираз, що стоїть праворуч у формулі (1) називається **тригонометричною формою** комплексного числа z , r називається модулем комплексного числа z , φ – аргументом, що відповідно позначаються

$$r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Означення. Модулем комплексного числа називається відстань від початку координат до відповідної точки комплексної площини. Тобто модуль – це довжина радіус-вектора

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Означення. Аргументом комплексного числа називається кут φ між додатною піввіссю осі OX і радіус-вектором, який проведено з початку координат

$$\varphi = \operatorname{Arg} z.$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$\operatorname{Arg} z$ визначається не однозначно, а з точністю до доданка кратного 2π :

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де $\arg z$ є головне значення $\operatorname{Arg} z$, обумовлене нерівністю $-\pi < \arg z \leq \pi$, і

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Зауваження. Якщо z – дійсне додатне число, то $\arg z = 0$; якщо z – дійсне від'ємне число, то $\arg z = \pi$; якщо $z = iy$, де $y > 0$, то $\arg z = \frac{\pi}{2}$; якщо $z = iy$, де $y < 0$, то $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Зауваження. Модуль комплексного числа нуль дорівнює нулю, а його аргументом може бути будь-яке число φ .

Зв'язок між показниковою та тригонометричною формою комплексного числа виражається за допомогою **формули Ейлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

де $e \approx 2,72$ – ірраціональне число.

Означення. Показникова форма комплексного числа має вид:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Приклад. Представити в тригонометричній та показниковій формі числа

$$1) \ z = -3; \quad 2) \ z = 1 - i; \quad 3) \ z = -\sqrt{3} + i; \quad 4) \ z = -2i.$$

Розв'язання.

$$1) \ |z| = |-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3, \quad \arg(-3) = \pi; \quad -3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi).$$

$$2) \ |z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$\text{так як } x > 0, \text{ то } \varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}, \quad 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

$$3) \left| -\sqrt{3} + i \right| = \sqrt{3+1} = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ так як } x < 0, \ y > 0,$$

$$\text{то } \varphi = \pi + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \quad -\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

$$4) \left| -2i \right| = \sqrt{0 + (-2)^2} = 2, \text{ так як } x = 0, \ y < 0, \text{ то } \varphi = -\frac{\pi}{2}, \quad -2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Зауваження. Два комплексних числа z_1 і z_2 , заданих у тригонометричній формі, рівні, якщо

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2|, \\ \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Нехай $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Означення. Добутком двох комплексних чисел заданих у тригонометричній формі є число

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Приклад.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ & = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Означення. Часткою двох комплексних чисел заданих у тригонометричній формі є число

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Означення. Піднести до цілого степеня n комплексне число це означає перемножити його саме на себе n разів.

У загальному випадку при довільному цілому додатному числу n справедлива **формула Муавра:**

$$z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

яка показує, що при піднесенні комплексного числа до цілого додатного степеня модуль числа підносять до цього степеня, а аргумент множиться на показник степеня.

Приклад. Обчислити $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{24}$.

Розв'язання.

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{24} = \left(\frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}\right)^{24} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{24} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi\right)\right)^{24} = 2^{12}(\cos 26\pi + i\sin 26\pi) = 2^{12} = 4096.$$

Означення. Коренем n -го степеня з числа z (n – натуральне число) називається число w , що задовольняє рівняння

$$w^n = z,$$

тобто $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, (n-1)}.$

Доведення формули. Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, тоді відповідно до правила піднесення до степеня

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Використовуючи умови рівності комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, одержимо

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi, \quad \text{де } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Тоді

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Хоча k – будь-яке ціле число, з останньої формули випливає, що існує лише n різних значень величини $\sqrt[n]{z}$, які можна отримати, задаючи значення $k = \overline{0, (n-1)}$.

Приклад. Обчислити всі значення $\sqrt[4]{-16}$.

Розв'язання.

Перетворимо комплексне число -16 у тригонометричну форму.

$$|-16| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16; \quad \varphi = \pi, \quad \text{отже} \quad -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{-16} &= \sqrt[4]{16(\cos \pi + i \sin \pi)} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4} \right), \quad \text{де } k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; \\ 2 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \\ 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}; \\ 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Усі значення $\sqrt[4]{-16}$ зображуються точками, розташованими на колі радіуса $r = 2$ і є вершинами квадрата.

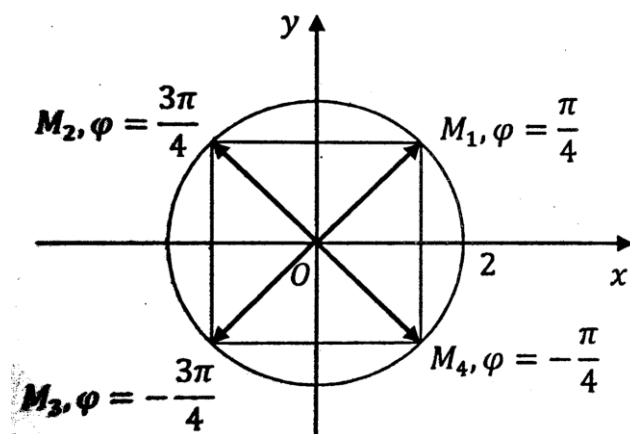


Рисунок 2. Точки, що відповідають значенням $\sqrt[4]{-16}$

Лекція 3.

РЯДИ. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ. ДОСТАТНЯ ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ: ОЗНАКА ПОРІВНЯННЯ.

План лекції.

1. Поняття ряду. Сума та збіжність ряду.
2. Необхідна ознака збіжності ряду.
3. Достатня ознака збіжності знакододатних рядів – ознака порівняння.

Числові ряди

Тема «Ряди» в курсі вищої математики є потужним інструментарієм вивчення функцій та обчислювальним апаратом у вирішенні прикладних задач не тільки в математиці, але й фізиці, економіці, хімії, геодезії, архітектурі, біології, екології і т.п. У більшості випадках, коли застосування традиційних математичних операцій стає складним або неможливим, можна отримати наближене рішення завдяки рядам. Тому вивчення цієї теми є важливим кроком математичної підготовки майбутніх фахівців.

Означення. Рядом називається вираз виду $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, де $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ – члени ряду, які є членами нескінченної послідовності. Ряд позначають символом

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

де a_n називається загальним членом ряду.

Значення $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ можуть бути числами, функціями та матрицями. Відповідні ряди називаються числовими, функціональними, матричними.

Щоб отримати будь-який член ряду, у його загальний член потрібно підставити номер члена, який знаходимо.

Означення. Сума n перших членів ряду $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$ називається частковою сумою.

Означення. Сумою ряду S називається скінченна границя часткових сум

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Означення. Числовий ряд називається **збіжним**, якщо границя часткової суми є скінченним числом. Якщо границя часткової суми не існує або дорівнює нескінченності, то ряд називається **розбіжним**.

Зауваження. Розбіжний ряд суми не має.

З означення збіжного та розбіжного рядів випливають наступні теореми:

Теорема. Відкидання від ряду або додавання до нього скінченної кількості членів не змінює його збіжність або розбіжність.

Теорема. Множення усіх членів ряду на відмінне від нуля дійсне число не впливає на збіжність ряду.

Для **збіжних рядів** мають місце наступні теореми:

Теорема. Якщо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ має суму S , то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, де λ – будь-яке дійсне число, має суму λS .

Теорема. Якщо збіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ мають суми S_a та S_b відповідно, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ також збігається, а його сума дорівнює $(S_a + S_b)$.

Необхідна ознака збіжності ряду

Застосування рядів у будь-якій прикладній задачі має на меті дослідження цього ряду на збіжність. Вирішення питання про збіжність починається з застосування *необхідної ознаки збіжності ряду*.

Теорема (необхідна ознака збіжності ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то границя загального члена ряду a_n при зростанні номера n дорівнює нулю, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Зауваження. Обернене твердження не вірне. З рівності нулю границі загального члена при $n \rightarrow \infty$ не слідує збіжність цього ряду.

Справедливість цього твердження проілюструємо на прикладі гармонічного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Для гармонічного ряду необхідна ознака збіжності виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, але сам ряд є розбіжним, що відомо з означення.

Означення. Узагальненим гармонічним рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

При $p > 1$ – ряд збігається, а при $p \leq 1$ – ряд розбігається.

З теореми випливає *достатня ознака розбіжності ряду*.

Теорема (достатня ознака розбіжності ряду). Якщо границя загального члена числового ряду не дорівнює нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$$

то даний ряд розбігається.

Остання теорема дає можливість легко встановити розбіжність ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = (-1)^{n-1}$. Границя загального члена при $n \rightarrow \infty$ не існує, оскільки при непарному n границя дорівнює 1, а при парному дорівнює (-1) . Отже, ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n-3}$.

Розв'язання. Так як $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-3} = 1 \neq 0$, то ряд розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3-3}$.

Розв'язання. Так як $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^3-3} = 0$, то про збіжність ряду нічого сказати не можна (ряд може збігатися або розбігатися).

Достатня ознака збіжності ряду: ознака порівняння

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, у якого усі члени – додатні числа, називається знакододатним рядом.

Розглянемо достатні ознаки збіжності (розбіжності) знакододатних рядів, які найчастіше застосовуються на практиці.

Ознака порівняння

Нехай необхідно дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Оберемо для порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжність (розбіжність) якого відомі заздалегідь, та такий, щоб можна було порівняти a_n та b_n .

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, а члени $a_n \leq b_n$, починаючи з деякого номера, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбігається, а члени $a_n \geq b_n$, починаючи з деякого номера, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.

Для порівняння часто застосовують наступні ряди:

1) ряд геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, який збігається при $|q| < 1$ та розбігається при $|q| \geq 1$;

2) узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, який збігається при $p > 1$ та розбігається при $p \leq 1$.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ на збіжність.

Розв'язання. Оберемо для порівняння розбіжний гармонічний рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Між членами цих рядів має місце співвідношення $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Так як гармонічний ряд розбігається, то розбігається і даний ряд.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)3^n}$.

Розв'язання. Оберемо для порівняння збіжний ряд спадної геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. Очевидно, що $\frac{n}{(n+3)3^n} < \frac{1}{3^n}$. Тому за теоремою порівняння зі збіжності ряду з більшими членами впливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+3)3^n}$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.

Розв'язання. Оберемо для порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$. Очевидно, що усі члени цього ряду, починаючи з третього задовольняють умові $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$. Так як ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ збігається (як ряд спадної геометричної прогресії), то даний ряд також збігається.

Гранична ознака порівняння

Ця ознака застосовується на практиці частіше, ніж ознака порівняння.

Теорема. Якщо існує скінченна та відмінна від нуля границя відношення загальних членів знакододатних рядів при $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq \begin{cases} 0, \\ \infty, \end{cases}$$

то ці ряди у сенсі збіжності ведуть себе однаково (або обидва збігаються, або обидва розбігаються).

Зауваження. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, то зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (обернене твердження невірне). Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, то з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Зауваження. Граничну ознаку порівняння додатних рядів зручно застосовувати тоді, коли загальний член ряду представляє собою дробово-раціональну функцію від n .

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$.

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Ознака порівняння відповіді на питання про збіжність ряду не дає, так як при $n \geq 3$ $\frac{1}{n + \ln n} < \frac{1}{n}$, але з розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, зробити висновок про збіжність ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$ неможливо.

Застосуємо граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n + \ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \ln n} = 1 \neq 0.$$

(Для розкриття невизначеності при обчисленні границі застосовано правило Лопіталю).

Так як границя скінченна та не дорівнює нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \ln n}$ поводить себе так, як і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тобто розбігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$.

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який є збіжним (як узагальнений гармонічний ряд при $p > 1$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^3 + 1} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^3 + 1} = 1 \neq 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$ збігається.

Зауваження. Якщо загальний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є дробово-раціональною функцією відносно n , то загальний член ряду для порівняння зручно брати у вигляді $b_n = \frac{1}{n^m}$, де m – різниця між степенями многочленів знаменника та чисельника a_n .

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$.

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\pi}{4}.$$

Так як границя скінченна, то ряд поводить себе аналогічно до гармонічного, тобто розбігається.

Лекція 4.

ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ: ОЗНАКА ДАЛАМБЕРА, РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ, ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ. ЗНАКОПОЧЕРЕЖНІ РЯДИ.

План лекції.

1. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів.
2. Знакопочережні ряди.

Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

а) Ознака Даламбера

Теорема. Якщо для знакододатнього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя виду $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$,

то цей ряд збігається при $l < 1$ та розбігається при $l > 1$. При $l = 1$ ознака Даламбера відповіді про збіжність ряду не дає.

Зауваження. Ознаку Даламбера доцільно використовувати тоді, коли формула загального члена ряду містить множник $n!$ або є показниковою функцією від n .

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$.

Розв'язання. На можливість застосування ознаки Даламбера вказує наявність у формулі загального члена множників $n!$ та 7^n .

Загальний член $a_n = \frac{7^n}{n!}$. Щоб отримати a_{n+1} замінимо у формулі a_n усі n на $n+1$.

Отримаємо $a_{n+1} = \frac{7^{n+1}}{(n+1)!}$. Тоді

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1} n!}{(n+1)! 7^n} = 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 7 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

За ознакою Даламбера ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання. Маємо, що $a_n = \frac{n^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Застосуємо ознаку Даламбера:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} n!}{(n+1)! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1.$$

Ряд розбігається.

б) Радикальна ознака Коші

Теорема. Якщо для знакододатнього ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, то при $l < 1$ даний ряд збігається, а при $l > 1$ – розбігається. При $l = 1$ радикальна ознака Коші, як і ознака Даламбера, не дає відповіді на питання про збіжність ряду.

Зауваження. На практиці ознака Коші застосовується тоді, коли загальний член ряду представляє собою показникову або показниково-степеневу функцію від n .

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Розв’язання. Загальний член ряду містить вираз у степені n . Тому доречно застосувати радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}$.

Розв’язання. Обчислимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}} = 2t,$$

$$\text{де } t = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1}}.$$

Щоб обчислити вираз спочатку прологарифмуємо його, а потім застосуємо правило Лопітала:

$$\ln t = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)^{1/n}} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{n} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так як $\ln t = 0$, то $t=1$, а отже $l = 2t = 2 > 1$.

Так як $l > 1$, то за радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

в) Інтегральна ознака Коші

Теорема. Нехай загальний член ряду представляє собою значення функції $f(x)$ при $x=n$, тобто $a_n = f(n)$. Якщо при цьому функція $f(x)$ монотонно спадає на деякому проміжку $c < x < \infty$, де $c \geq 1$, то даний ряд збігається, якщо збігається невластний інтеграл $\int_c^{+\infty} f(x)dx$, та розбігається, якщо цей невластний інтеграл

розбігається.

Наслідок. Для збіжного ряду з загальним членом, який задовольняє умовам теореми, залишок ряду можна оцінити зі співвідношення $R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Розв'язання. Так як $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ є значенням функції $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ при $x = n$ і ця функція неперервна і монотонно спадає на проміжку $2 \leq x < \infty$, то дослідимо на збіжність невластний інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right\} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln |\ln x| \Big|_2^b = \infty.$$

Інтеграл розбігається. Отже, розбігається і даний ряд.

Збіжність та розбіжність знакопозначених рядів

Означення. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, який містить нескінченну кількість додатних та від'ємних членів називається **знакозмінним**.

Частинним випадком знакозмінного ряду є **знакопозначений** ряд.

Означення. Ряд називається **знакопозначеним**, якщо будь-які два його сусідні члени відрізняються знаками

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n u_n + \dots$$

Для визначення характеру збіжності знакопозначених рядів використовують ознаку Лейбніца.

Теорема (ознака Лейбніца). Знакопозначений ряд збігається, якщо виконуються дві умови:

- 1) його члени спадають за абсолютною величиною, тобто $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- 2) границя загального члена u_n дорівнює нулю при $n \rightarrow \infty$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд, складений з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n u_n|$.

Теорема (про абсолютну збіжність ряду). Якщо збігається ряд, складений з модулів членів даного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n u_n|$, то відповідний знакопозначений ряд збігається абсолютно.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ називається **умовно збіжним**, якщо за теоремою

Лейбніца він збігається, а ряд, складений з модулів його членів $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n u_n|$, розбігається.

Зауваження. Дослідження на збіжність знакопозаперечних (і знакозмінних) рядів краще починати з дослідження абсолютної збіжності.

Приклад. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\frac{\sin \alpha}{1} + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin 3\alpha}{9} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^2} + \dots$$

Розв'язання. Ряд є знакозмінним, оскільки $\sin n\alpha$ приймає як додатні, так і від'ємні значення. Розглянемо ряд з модулів членів вихідного ряду:

$$\frac{|\sin \alpha|}{1} + \frac{|\sin 2\alpha|}{4} + \frac{|\sin 3\alpha|}{9} + \dots + \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} + \dots$$

Очевидно, що $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Тоді за ознакою порівняння маємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ збігається, як і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Так як ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ збігається, то за ознакою абсолютної збіжності маємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$ збігається абсолютно.

Приклад. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{4}{\sqrt{17}} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} n}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dots$$

Розв'язання. Даний знакопозаперечний ряд розбігається, так як не виконується необхідна умова збіжності ряду: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1 \neq 0$.

Приклад. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^n}$.

Розв'язання. Розглянемо ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$. Для дослідження на збіжність застосуємо ознаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} < 1.$$

Ряд з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається. Отже, даний ряд збігається абсолютно.

Лекція 5.

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РЯДИ МАКЛОРЕНА ТА ТЕЙЛОРА. ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ.

План лекції.

1. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Збіжність степеневих рядів.
2. Ряди Тейлора і Маклорена.
3. Застосування степеневих рядів.

Функціональні ряди. Степеневі ряди. Збіжність степеневих рядів

Означення. Ряд, членами якого є функції від деякого аргументу, називається функціональним:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Зауваження. При фіксованому значенні x з функціонального ряду можна отримати числовий ряд, який збігається або розбігається.

Означення. Областю збіжності функціонального ряду називається множина значень x , при яких можна отримати збіжний числовий ряд.

Так як значення суми ряду залежить від значень змінної x , то сума функціонального ряду також є функцією від x .

Означення. Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – коефіцієнти ряду.

Заміною $x - x_0 = y$ даний ряд можна звести до виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$.

Теорема (Абеля). Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається при будь-якому значенні x , яке задовольняє умові $|x| < |x_0|$.

Наслідок. Для кожного степеневих рядів $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ існує інтервал збіжності $(-R; R)$ з центром у початку координат, всередині якого степеневий ряд абсолютно збігається, а поза ним розбігається. На кінцях інтервалу в точках $x = -R$ та $x = R$, ряд може збігатися або розбігатися.

Означення. Число R називається радіусом інтервалу збіжності ряду.

Зауваження. Очевидно, що для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ центром інтервалу збіжності є не початок координат, а точка $x = x_0$. Відповідно інтервал збіжності має вид $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Існує два способи відшукування радіуса збіжності степеневому ряду:

1. Радіус збіжності степеневому ряду можна знайти за допомогою ознаки Даламбера або радикальної ознаки Коші. Тобто інтервал збіжності є розв'язком нерівностей:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \quad \text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1,$$

де $u_n = a_n(x - x_0)^n$ – загальний член даного ряду.

2. Якщо серед коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ може бути лише скінченна кількість рівних нулю, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{або} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Приклад. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$.

Розв'язання. Для даного ряду $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, $x_0 = 0$.

Знайдемо радіус збіжності ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{(n+1)^2 2^n} = 2.$$

Інтервал збіжності ряду: $(0 - 2; 0 + 2) = (-2; 2)$.

Для визначення області збіжності ряду, дослідимо ряд на збіжність на кінця інтервалу:

1. При $x = -2$ ряд має вид $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^2$. Отримали знакопозначений ряд. Він розбігається, так як не виконується одна з умов теореми Лейбніца, а саме $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$.

2. При $x = 2$ ряд має вид $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$. Отриманий знакододатний ряд розбігається, так як не виконується необхідна ознака збіжності ряду, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty \neq 0$.

Отже, область збіжності степеневому ряду є множина $x \in (-2; 2)$.

Приклад. Знайти область збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$.

Розв'язання. Для даного ряду $a_n = n^n$, $x_0 = 0$. Радіус інтервалу збіжності доцільно обчислити за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

При $x = 0$ ряд збігається, а при інших значеннях x розбігається.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$.

Розв'язання. Так як усі коефіцієнти при непарних степенях x дорівнюють нулю, то обчислити радіус інтервалу збіжності за формулою неможливо. Застосуємо узагальнену ознаку Даламбера. Маємо

$$u_n = \frac{x^{2n}}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}.$$

Ряд збігається, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2} n!}{(n+1)! x^{2n}} \right| = |x^2| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \right| = |x^2| \cdot 0 = 0.$$

Отримана умова виконується при будь-якому значенні x . Отже, ряд збігається на усій числовій осі ($x \in R$).

Ряди Тейлора і Маклорена. Розвинення функцій у степеневі ряди.

Означення. Рядом Тейлора для нескінченно диференційованої в точці x_0 та деякому її околі функції $f(x)$ називається степеневий ряд виду

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

Теорема (Необхідна та достатня умова збіжності ряду до функції $f(x)$). Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ збігається до функції $f(x)$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, де $R_n(x)$ – залишковий член ряду Тейлора.

Зауваження. Одне з представлень залишкового члену, було отримано Лагранжем, воно має вид $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, де c – деяка точка, що визначається виразом $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Означення. При $x_0 = 0$ маємо ряд виду

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$

який називається **рядом Маклорена**.

Алгоритм розвинення функції $f(x)$ у ряд Тейлора

1) обчислити похідні всіх порядків функції $f(x)$ у точці x_0 і формально скласти ряд Тейлора;

2) знайти область збіжності отриманого ряду;

Для розвинення функції у ряд Маклорена використовують табличні розвинення:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, |x| < \infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, |x| < \infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, |x| < 1;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x \leq 1;$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, |x| < 1.$$

Зауваження. Для розвинення функції у ряд Маклорена використовують додавання (віднімання) рядів та множення ряду на деякий вираз. Наприклад, якщо $f(x) = x^2 e^x$, то розвинення у ряд для функції e^x множать на x^2 . Множення рядів, виконують за правилом множення многочленів.

Приклад. Розкласти у ряд за степенями x функцію $f(x) = x^3 \sin \frac{x^2}{4}$.

Розв'язання. Нехай $y = \frac{x^2}{4}$. Тоді застосуємо табличне розвинення функції $\sin y$:

$$\sin \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{4^3 3!} + \frac{x^{10}}{4^5 5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{4n-2}}{4^{2n-1} (2n-1)!} + \dots$$

Для функції $f(x) = x^3 \sin \frac{x^2}{4}$ розвинення отримаємо, помноживши ряд на x^3 :

$$x^3 \sin \frac{x^2}{4} = \frac{x^5}{4} - \frac{x^9}{4^3 3!} + \frac{x^{13}}{4^5 5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{4n+1}}{4^{2n-1} (2n-1)!} + \dots$$

Отримане розвинення справедливе при будь-якому x , так як розвинення в ряд функції $\sin y$ має місце при будь-якому значенні y .

Застосування степеневих рядів

Для **наближеного обчислення значення функції** у деякій точці можна використовувати прийом розвинення функції у степеневий ряд. В отриманому

розвиненні позначити $x = x_0$ і у якості наближеного значення $f(x_0)$ взяти суму певної кількості членів ряду (в залежності від потрібної точності). Оцінку точності знаходять на основі оцінки залишку ряду $R_n(x_0)$, яка може бути проведена, наприклад, так:

1) якщо ряд знакопозаперечний, то похибка не перевищує за абсолютним значенням модуля першого з відкинутих членів;

2) залишок ряду оцінюється порівнянням його з рядом спадної геометричної прогресії, сума якого $\frac{a_0}{1-q}$;

3) якщо отриманий числовий ряд задовольняє умовам інтегральної ознаки Коші, то $R_n(x_0) < \int_n^{\infty} f(x)dx$.

Приклад. Наближено обчислити $\sin 18^\circ$, обравши два члени ряду Маклорена для функції $\sin x$. Оцінити похибку.

Розв'язання. Для будь-якого значення x справедливе розвинення

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

При $x = \frac{\pi}{10}$ маємо, що $\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{10^5 \cdot 5!} - \dots$

Відповідно до умови завдання, наближено маємо, що

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{10^3 \cdot 3!} \approx 0,3091.$$

Так як ряд знакопозаперечний, а третій член відкинули, то похибка не перевищує значення третього елемента, тобто $\Delta < 0,00003$.

Приклад. Обчислити $\sqrt[3]{68}$ з точністю до 0,01.

Розв'язання. $\sqrt[3]{68} = \sqrt[3]{64 + 4} = \sqrt[3]{4^3 + 4} = 4 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{4}{4^3}} = 4 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{3}}.$

Даний вираз представлено в вигляді суми виду $(1+x)^m$, де $|x| < 1$. Застосуємо розвинення функції $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ у біноміальний ряд

$$\begin{aligned} 4(1+x)^{\frac{1}{3}} &= 4 \left[1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3!}x^3 + \dots \right] = \\ &= 4 \left[1 + \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{3^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5x^3}{3^3 \cdot 3!} + \dots \right]. \end{aligned}$$

При $x = \frac{1}{16}$ з урахування того, що ряд знакопозначений, способом підбору визначаємо, що потрібну точність забезпечує сума трьох членів, так як $|R_3| < 4 \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3! \cdot 16^3} < 0,01$. Тоді $\sqrt[3]{68} \approx 4 \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 16} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2! \cdot 16^2} \right) \approx 4,082$.

Невизначені та визначені інтеграли, а також деякі невластні інтеграли, обчислюють аналогічно (підінтегральну функцію розкладають у степеневий ряд).

Приклад. Обчислити $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю до 0,01.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральну функцію у ряд

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots \right) \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \dots \approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} \approx 0,94. \end{aligned}$$

Для отримання заданої точності можна обмежитися сумою перших двох членів (так як ряд знакопозначений і вже третій член менше 0,01).

На практиці способи **інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою рядів** застосовують тоді, коли розв'язати диференціальне рівняння в елементарних функціях неможливо. Один з таких способів – спосіб послідовних диференціювань. Застосовують його тоді, коли потрібно знайти частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам. Для багатьох диференціальних рівнянь розв'язок можна шукати у вигляді ряду Тейлора

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Значення похідних у точці x_0 визначається з початкових умов та послідовного диференціювання даного диференціального рівняння. Недолік даного методу полягає у тому, що часто не вдається знайти формулу загального члена ряду.

Лекція 6.

РЯД ФУР'Є. РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ У РЯД ФУР'Є.

План лекції.

1. Ряди Фур'є. Умови розвинення функцій у ряд Фур'є.
2. Розвинення у ряд Фур'є парних та непарних функцій.
3. Розвинення неперіодичної функції у ряд Фур'є.

Ряди Фур'є. Умови розвинення функції у ряд Фур'є

Розглянемо періодичну функцію $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$, яка є інтегрованою на відрітку $[-\pi; \pi]$.

Означення. Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ називається функціональний ряд виду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

незалежно від того збігається ряд до $f(x)$ чи ні.

Коефіцієнти Фур'є a_0 , a_n , b_n обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Зауваження. Інтеграли у формулах (1) можна обчислювати по будь-якому відрітку, довжина якого дорівнює 2π , що впливає з властивості інтеграла для періодичної функції з періодом T :

$$\forall a: \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx.$$

Означення. Функція $f(x)$ називається кусково-монотонною на відрітку $[a; b]$, якщо цей відрізок можна розбити скінченною кількістю точок $x_1, x_2, \dots, x_n$ на інтервали $(a; x_1), (x_1; x_2), \dots, (x_n; b)$ так, що на кожному з цих інтервалів функція монотонна.

Далі будемо розглядати кусково-монотонні функції, які мають розриви тільки першого роду.

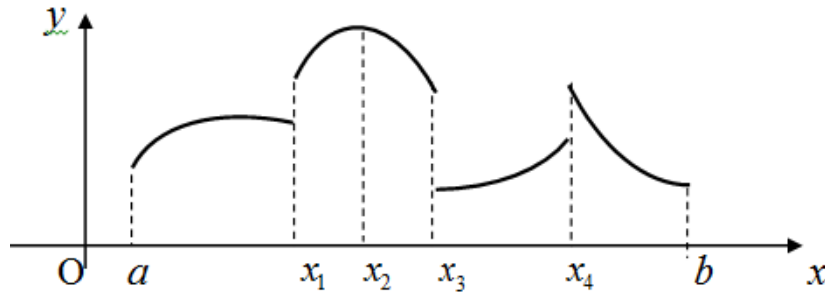


Рисунок 1. Кусково-монотонна функція з точками розриву першого роду

Теорема (Діріхле). Нехай функція $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$ задовольняє умовам Діріхле (кусково-монотонна функція, яка має розриви тільки першого роду) на проміжку $[-\pi; \pi]$. Тоді її ряд Фур'є збігається у кожній точці $x \in [-\pi; \pi]$ і сума цього ряду має вид

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

та дорівнює:

1. $S(x) = f(x)$ у всіх точках неперервності $f(x)$,

2. $S(x) = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ у всіх точках розриву,

3. $S(x) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$ у точках $\pm\pi$.

Зауваження. Для розривних функцій іноді ряд Фур'є записують у вигляді

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Приклад. Розкласти періодичну функцію у ряд Фур'є. Зобразити графік функції та графік суми ряду.

$$y = x, \quad x \in [-\pi; \pi].$$

Розв'язання. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \cos nx dx \quad v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right\} = \frac{x \cdot \sin nx}{\pi n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = \\ &= \frac{\pi \cdot \sin n\pi}{\pi n} - \frac{(-\pi) \cdot \sin(-\pi)n}{\pi n} + \frac{\cos nx}{\pi n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 + \left(\frac{\cos n\pi}{\pi n^2} - \frac{\cos(-\pi)n}{\pi n^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = \frac{-\cos nx}{n} \end{array} \right\} = \frac{-x \cdot \cos nx}{\pi n} \Big|_{-\pi}^{\pi} +$$

$$+ \frac{1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{-\pi \cdot \cos n\pi}{\pi n} - \frac{\pi \cdot \cos n\pi}{\pi n} + \frac{\sin nx}{\pi n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2\pi \cdot \cos n\pi}{\pi n} =$$

$$= \frac{-2 \cdot (-1)^n}{n} = \frac{2 \cdot (-1)^{n+1}}{n}.$$

Тоді ряд Фур'є для функції матиме вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2 \cdot \sin nx}{n}.$$

Побудуємо графік функції та графік суми ряду:

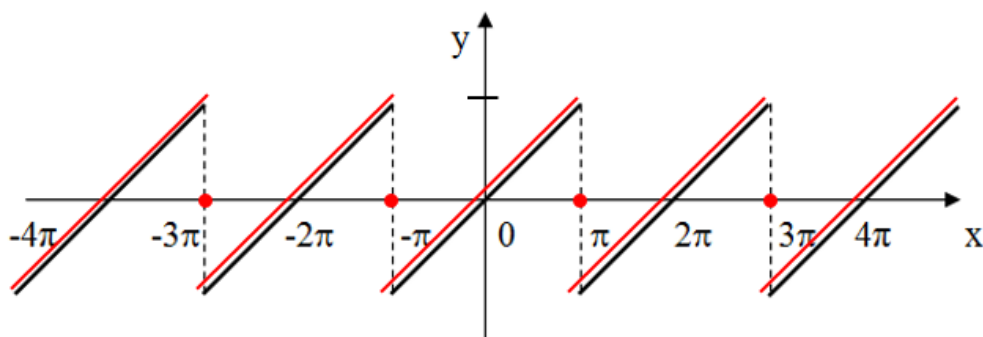


Рисунок 2. Графік функції $y = x$ (чорний) та графік суми ряду (червоний)

Ряд Фур'є для функції з періодом $T = 2l$

Нехай функція $f(x)$, яка задана на $[-l; l]$, є періодичною з періодом $T = 2l$.

Введемо нову змінну $t = \frac{\pi x}{l} \Rightarrow x = \frac{lt}{\pi}$. Тоді $f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ буде функцією з періодом $T = 2\pi$ і її можна розкласти у ряд Фур'є на $[-\pi; \pi]$, тобто

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

якщо повернутися до змінної x та врахувати, що $dt = \frac{\pi}{l} dx$, отримаємо наступні формули:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx. \quad (2)$$

Тоді ряд Фур'є матиме вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Приклад. Періодичну функцію $f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x \leq 0, \\ 4, & 0 < x < 2, \end{cases}$ розкласти у ряд Фур'є.

Розв'язання. Період функції дорівнює $T = 2l = 4$, отже $l = 2$. За формулами (2) обчислимо коефіцієнти:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 dx + \frac{1}{2} \int_0^2 4 dx = x \Big|_{-2}^0 + 2x \Big|_0^2 = 2 + 4 = 6,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 4 \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{4}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = 0,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 4 \sin \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_{-2}^0 - \frac{4}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = \\ &= -\frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) - \frac{4}{\pi n} ((-1)^n - 1) = \frac{2}{\pi n} - \frac{2(-1)^n}{\pi n} = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Тоді ряд Фур'є матиме вид:

$$f(x) = 3 + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k} \sin \frac{\pi k x}{2}.$$

Ряди Фур'є для парних та непарних функцій

Функції $f(x)$ з періодом $T = 2l$.

а) Якщо $f(x)$ – парна функція, то

$$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

б) Якщо $f(x)$ – непарна функція, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Ряд Фур'є:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Розвинення неперіодичної функції у ряд Фур'є

Функція, яка задана на інтервалі $(0;l)$ може бути продовжена на проміжок $(-l;0)$ або парним, або непарним чином та розкладена у ряд Фур'є за косинусам або за синусами. У таких випадках діємо наступним чином:

1) Якщо потрібно розвинути функцію у ряд Фур'є за косинусами, то $f(x)$ довізначають так, щоб при $x \in [-l;0]$ функція була парною, тобто $f(-x) = f(x)$ і періодично продовжують на всю числову вісь. У цьому випадку кажуть, що функція продовжена “парним” чином і для неї

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}.$$

2) Якщо потрібно розвинути функцію у ряд Фур'є за синусами, то $f(x)$ довізначають так, щоб при $x \in [-l;0]$ функція була непарною, тобто $f(-x) = -f(x)$ і періодично продовжують на всю числову вісь. У цьому випадку кажуть, що функція продовжена “непарним” чином і для неї

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Приклад. Розкласти функцію $f(x) = x^2$ на інтервалі $(0;1)$ у ряд Фур'є за синусами.

Розв'язання. Інтервал $(0;1)$ не симетричний відносно початку координат. Продовжимо функцію $f(x) = x^2$, на інтервал $(-1;0]$ непарним чином.

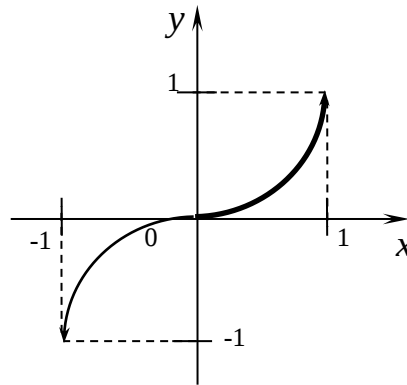


Рисунок 3. Непарне продовження функції $f(x) = x^2$ на інтервал $(-1;0]$

Утворена функція $f(x) = \begin{cases} -x^2, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 1, \end{cases}$ задана на проміжку $(-1;1)$ є непарною.

Отже, її розвинення в ряд Фур'є містить тільки синуси $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\pi n x)$.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 \sin \pi n x dx = -\frac{1}{\pi n} \cos \pi n + \frac{2}{\pi^3 n^3} (\cos \pi n - 1) = \frac{1}{\pi n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi^3 n^3} ((-1)^n - 1).$$

Тоді розвинення у ряд Фур'є має вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi^3 n^3} \right) \sin(\pi n x).$$

Розглянемо загальний випадок.

3) Нехай функцію, яка задовольняє умовам Діріхле на $[a; b]$, необхідно розкласти у ряд Фур'є. Для цього функцію періодично з періодом $T = 2l = 2 \cdot \left(\frac{b-a}{2} \right)$ продовжують на всю числову вісь, а коефіцієнти Фур'є обчислюють за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n x}{b-a} dx;$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n x}{b-a} dx.$$

Ряд Фур'є має вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n x}{b-a} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{b-a} \right).$$

Лекція 7.

ІДЕЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. ОЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ОРИГІНАЛ ТА ЗОБРАЖЕННЯ.

План лекції.

1. Поняття оригіналу та зображення.
2. Лінійна властивість перетворення Лапласа.
3. Таблиця оригіналів і зображень.

Операційне числення відіграє важливу роль при розв'язуванні прикладних задач, особливо в сучасній автоматичній і телемеханіці.

Операційне числення – один з методів математичного аналізу, що дозволяє в ряді випадків зводити дослідження диференціальних і деяких типів інтегральних операторів і розв'язування рівнянь, що містять ці оператори, до розгляду більш простих алгебраїчних задач.

Методи операційного числення припускають реалізацію наступної умовної схеми при розв'язуванні задачі.

1. Від шуканих функцій переходять до деяких інших функцій – їх зображень.
2. Над зображеннями проводять операції, що відповідають заданим операціям над самими функціями.
3. Одержавши деякий результат при діях над зображеннями, повертаються до самих функцій.

Як перетворення, що дозволяє перейти від функції до її зображення, будемо застосовувати перетворення Лапласа.

Поняття оригіналу та зображення

Основними первісними поняттями операційного числення є поняття функції-оригіналу і функції-зображення.

Нехай $f(t)$ – дійсна функція дійсної змінної t (під t будемо розуміти час або координату).

Означення. Функція $f(t)$ називається **оригіналом**, якщо вона задовольняє умовам: 1. $f(t) \equiv 0$, при $t < 0$.

2. $f(t)$ – кусково-неперервна при $t \geq 0$, тобто вона неперервна або має точки розриву I роду, при чому на кожному скінченному проміжку осі t таких точок лише скінченна кількість.

3. Існують такі числа $M > 0$ та $s_0 \geq 0$, що для всіх t виконується нерівність $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$, тобто при зростанні t функція $f(t)$ може зростати не швидше деякої показникової функції. Число s_0 називається **показником** росту $f(t)$.

Зауваження. Умови 1-3 виконуються для більшості функцій, що описують різні фізичні процеси.

Перша умова означає, що процес починається з деякого моменту часу; зручніше вважати, що в початковий момент $t=0$. Третій умові задовольняють обмежені функції (для них можна покласти $s_0=0$), степеневі t^n ($n>0$) і інші (для функцій вигляду $f(t)=ae^{t^2}$ умова 3 не виконується). Не буде оригіналом, наприклад, функція $f(t)=\frac{1}{t}$ (не задовольняє другій умові).

Зауваження. Функція $f(t)$ може бути і комплексною функцією дійсної змінної, тобто мати вигляд $f(t)=f_1(t)+if_2(t)$; вона вважається оригіналом, якщо дійсні функції $f_1(t)$ та $f_2(t)$ є оригіналами.

Означення. Зображенням оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p=s+i\sigma$, яка визначається інтегралом

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (1)$$

Операцію переходу від оригіналу $f(t)$ до зображення $F(p)$ називають **перетворенням Лапласа**. Відповідність між оригіналом $f(t)$ і зображенням $F(p)$ записується у вигляді $f(t) \div F(p)$ або $L\{f(t)\}=F(p)$ (прийнято оригінали позначати малими буквами, а їх зображення – відповідними великими буквами).

Теорема (Існування зображення). Для будь-якого оригіналу $f(t)$ зображення $F(p)$ існує (є визначеним) у півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$, де s_0 – показник росту функції $f(t)$, при чому функція $F(p)$ є аналітичною в цій півплощині ($s > s_0$).

Доведення. Нехай $p=s+i\sigma$ довільна точка півплощини $\operatorname{Re} p = s > s_0$ (Рис. 1).

Враховуючи, що $|f(t)| \leq M \cdot e^{s_0 t}$ знаходимо:

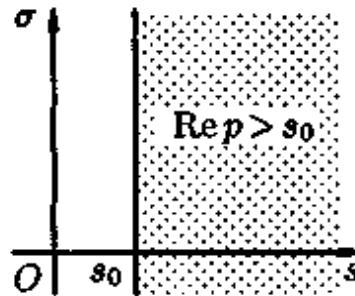


Рисунок 1. Ілюстрація до теореми

$$\left| \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \right| \leq \int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-pt}| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} |e^{-pt}| dt = M \int_0^{\infty} e^{s_0 t} \cdot e^{-st} dt = M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0},$$

так як $s-s_0 > 0$ і

$$|e^{-pt}| = |e^{-st} \cdot e^{-i\sigma t}| = e^{-st} \cdot |\cos \sigma t - i \sin \sigma t| = e^{-st}.$$

Таким чином,

$$|F(p)| = \left| \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \right| \leq \frac{M}{s - s_0}. \quad (2)$$

Звідси випливає абсолютна збіжність інтеграла (1), тобто зображення $F(p)$ існує й однозначно визначене в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$. ■

Наслідок (Необхідна ознака існування зображення). Якщо функція $F(p)$ є зображенням функції $f(t)$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Теорема (Про єдиність оригіналу). Якщо функція $F(p)$ є зображенням двох оригіналів $f_1(t)$ і $f_2(t)$ то ці оригінали збігаються один з одним у всіх точках, у яких вони неперервні.

Приклад. Знайти зображення одиничної функції Хевісайда (Рис. 2):

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

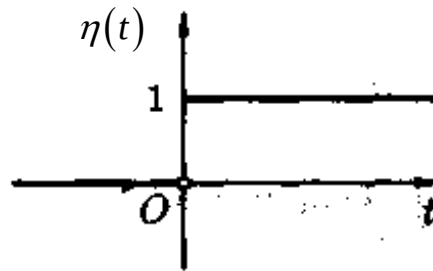


Рисунок 2. Одинична функція Хевісайда

Розв'язання. За формулою (1) знаходимо:

$$F(p) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right) \Big|_0^b = \frac{1}{p},$$

тобто $F(p) = \frac{1}{p}$, або, у символічному записі, $L\{\eta(t)\} = \frac{1}{p}$.

Зауваження. Надалі функцію-оригінал будемо коротко записувати у вигляді $f(t)$, маючи на увазі, що

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \geq 0, \\ 0, & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Приклад. Знайти зображення функції $f(t) = e^{at}$, де a – будь-яке число.

Розв'язання. Дана функція є оригіналом. За формулою (1) маємо, що

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-(p-a)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{p-a} \cdot e^{-(p-a)t} \right) \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-(p-a)b}}{p-a} + \frac{1}{p-a} \right) = \frac{1}{p-a},$$

якщо $\operatorname{Re}(p-a) > 0$. Таким чином, $L\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, ($\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$).

Зауваження. Функція $F(p) = \frac{1}{p-a}$ є аналітичною не тільки в півплощині $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$, де інтеграл (1) збіжний, а на всій комплексній площині p , крім точки $p = a$. Така особливість спостерігається і для багатьох інших зображень. Далі для нас буде більш важливим, як правило, саме зображення функції, а не область, у якій воно виражається інтегралом (1).

Лінійна властивість перетворення Лапласа

Знаходити зображення, користуючись тільки означенням зображення, не завжди просто і зручно. Властивості перетворення Лапласа істотно полегшують задачу знаходження зображень для великої кількості різноманітних функцій, а також задачу відшукування оригіналів за їх зображеннями.

Властивість лінійності. Лінійній комбінації оригіналів відповідає лінійна комбінація зображень. Тобто якщо $L\{f_1(t)\} = F_1(p)$, $L\{f_2(t)\} = F_2(p)$, де c_1, c_2 – постійні числа, то

$$L\{c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)\} = c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p).$$

Доведення. Використовуючи властивості інтеграла, маємо що

$$\int_0^{\infty} (c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)) \cdot e^{-pt} dt = c_1 \cdot \int_0^{\infty} f_1(t) \cdot e^{-pt} dt + c_2 \cdot \int_0^{\infty} f_2(t) \cdot e^{-pt} dt = c_1 \cdot F_1(p) + c_2 \cdot F_2(p). \blacksquare$$

Приклад. Знайти зображення функцій $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ (ω – будь-яке число), c ($const$).

Розв'язання. 1) Користуючись формулами Ейлера та властивістю лінійності перетворення Лапласа маємо:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad L\left\{\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right\} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

2) Аналогічно отримаємо формулу

$$L\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

3) Так як $c = c \cdot \eta$, то $L\{c\} = c \cdot \frac{1}{p}$.

Таблиця оригіналів і зображень

Розглянемо таблицю, що встановлює відповідність між деякими оригіналами та їх зображеннями.

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$	$f(t)$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$
$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	t^n (n - ціле)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
1	$\frac{1}{p}$	$e^{at} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$t \cdot \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$t \cdot \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	$e^{at} \cdot t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega(p-a)}{((p^2 - a)^2 + \omega^2)^2}$
$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$e^{at} \cdot t \cdot \cos \omega t$	$\frac{(p-a)^2 - \omega^2}{((p^2 - a)^2 + \omega^2)^2}$
$e^{at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$e^{at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{2\omega^3} (\omega t \operatorname{ch} \omega t - \operatorname{sh} \omega t)$	$\frac{1}{(p^2 - \omega^2)^2}$
$e^{at} \cdot \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 - \omega^2}$	$\sin(\omega t \pm \gamma)$	$\frac{\omega \cos \gamma \pm p \sin \gamma}{p^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cdot \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 - \omega^2}$	$\cos(\omega t \pm \gamma)$	$\frac{p \cos \gamma \pm \omega \sin \gamma}{p^2 + \omega^2}$

Лекція 8.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. ЗГОРТКА ФУНКЦІЙ.

План лекції.

1. Теореми подібності, запізнення та зсуву.
2. Диференціювання та інтегрування оригіналу та зображення.
3. Згортка функцій (множення зображень).

Знаходити зображення, користуючись тільки означенням зображення, не завжди просто і зручно. Властивості перетворення Лапласа істотно полегшують задачу знаходження зображень для великого числа різноманітних функцій, а також задачу відшукування оригіналів по їхніх зображеннях.

Теореми подібності, запізнення та зсуву

Теорема (Подібності). Якщо $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\{f(\lambda t)\} = \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$,

тобто множення аргументу оригіналу на додатне число λ приводить до ділення зображення та його аргументу на це число.

Доведення. За формулою $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$ маємо

$$\begin{aligned} L\{f(\lambda t)\} &= \int_0^{\infty} f(\lambda t) \cdot e^{-pt} dt = [\text{поклавши } \lambda t = t_1] \\ &= \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} f(t_1) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda} t_1} dt_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\frac{p}{\lambda} t} dt = \frac{1}{\lambda} \cdot F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

(так як немає різниці, якою буквою позначена змінна інтегрування). ■

Наприклад, нехай $L\{\cos t\} = \frac{p}{p^2 + 1}$. Тоді $L\{\cos \omega t\} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$.

Теорема (Зсуву). Якщо $L\{f(t)\} = F(p)$, $a = \text{const}$, то $L\{e^{at} f(t)\} = F(p - a)$,

тобто множення оригіналу на функцію e^{at} спричиняє зсув змінної p .

Доведення. В силу формули $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$ маємо

$$L\{e^{at} \cdot f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a), \quad (\text{Re}(p - a) > s_0).$$

Приклад. Знайти оригінал за його зображенням

$$F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11}.$$

Розв'язання. Перетворимо даний дріб так, щоб можна було скористатися теоремою зсуву:

$$F(p) = \frac{2p-5}{p^2-6p+11} = \frac{2(p-3)+1}{(p-3)^2+2} = 2 \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(p-3)^2+(\sqrt{2})^2},$$

тоді

$$f(t) = 2 \cdot e^{3t} \cdot \cos \sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{3t} \sin \sqrt{2}t.$$

Теорема (Запізнення). Якщо $L\{f(t)\} = F(p)$, $\tau > 0$, то $L\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}F(p)$,

тобто запізнення оригіналу на додатну величину τ приводить до множення зображення оригіналу без запізнення на $e^{-p\tau}$.

Доведення. Поклавши $t-\tau=t_1$, отримаємо

$$\begin{aligned} L\{f(t-\tau)\} &= \int_0^{\infty} f(t-\tau) \cdot e^{-pt} dt = \int_{-\tau}^{\infty} f(t_1) \cdot e^{-p(t_1+\tau)} dt_1 = \\ &= \int_0^{\infty} f(t_1) \cdot e^{-p\tau} \cdot e^{-pt_1} dt_1 = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt = e^{-p\tau} F(p). \blacksquare \end{aligned}$$

Пояснимо термін «запізнення». Графіки функції $f(t)$ і $f(t-\tau)$ мають однаковий вигляд, але графік функції $f(t-\tau)$ зсунутий на τ одиниць вправо (Рис. 1). Отже, функції $f(t)$ і $f(t-\tau)$ описують той самий процес, але процес, описуваний функцією $f(t-\tau)$, починається з запізненням на час τ .

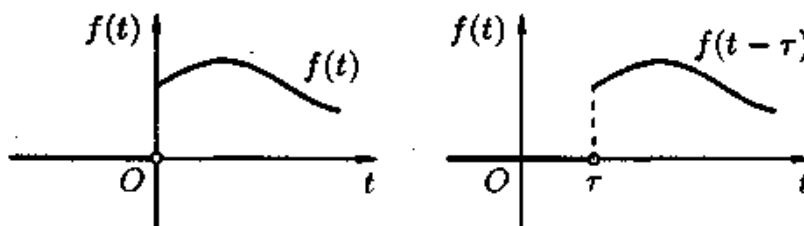


Рисунок 1. Ілюстрація «запізнення» функції

Властивість запізнення зручно застосовувати при відшукуванні зображення функцій, що на різних ділянках задаються різними аналітичними виразами; функцій, що описують імпульсні процеси.

Функція $\eta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \geq \tau, \\ 0, & \text{при } t < \tau, \end{cases}$ називається **узагальненою**
одиничною функцією (Рис. 2).

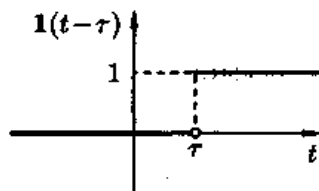


Рисунок 2. Узагальнена одинична функція

Так як $L\{\eta(t)\} = \frac{1}{p}$, то $L\{\eta(t-\tau)\} = \frac{1}{p} e^{p\tau}$.

Функцію, яка запізнюється $g(t) = \begin{cases} f(t-\tau), & \text{при } t \geq \tau, \\ 0, & \text{при } t < \tau, \end{cases}$ можна записати так:
 $g(t) = f(t-\tau) \cdot \eta(t-\tau)$.

Диференціювання та інтегрування оригіналу та зображення

Теорема (Диференціювання оригіналу). Якщо $L\{f(t)\} = F(p)$ і функції $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$\begin{aligned} L\{f'(t)\} &= p \cdot F(p) - f(0), \\ L\{f''(t)\} &= p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0), \\ L\{f'''(t)\} &= p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0), \\ &\dots\dots\dots \\ L\{f^{(n)}(t)\} &= p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \quad (1)$$

Доведення. За означенням зображення знаходимо, що

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{-pt} & du = -p e^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt & v = f(t) \end{array} \right\} = f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

Отже, $L\{f'(t)\} = p \cdot F(p) - f(0)$.

Застосовуючи формулу інтегрування частинами n разів, отримаємо зображення n -ої похідної. ■

Зауваження. Формули (1) просто виглядають при нульових початкових умовах: якщо $f(0) = 0$ то $L\{f'(t)\} = p \cdot F(p)$, якщо $f(0) = f'(0) = 0$, то $L\{f''(t)\} = p^2 \cdot F(p)$, і нарешті, якщо $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $L\{f^{(n)}(t)\} = p^n \cdot F(p)$. Тобто

диференціюванню оригіналу відповідає множення його зображення на p , при нульових початкових умовах.

Розглянута властивість диференціювання оригіналу разом із властивістю лінійності широко використовується при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь.

Приклад. Знайти зображення виразу $x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2$, якщо $x(0) = 3$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -2$.

Розв'язання. Нехай $L\{x(t)\} = X(p) = X$. Тоді, відповідно до формул (1), маємо:

$$L\{x'(t)\} = p \cdot X - 3,$$

$$L\{x''(t)\} = p^2 \cdot X - p \cdot 3 - 0,$$

$$L\{x'''(t)\} = p^3 \cdot X - p^2 \cdot 3 - p \cdot 0 + 2,$$

$$L\{2\} = \frac{2}{p}.$$

Отже, $L\{x'''(t) - 2x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) + 2\} =$

$$= p^3 \cdot X - 3p^2 + 2 - 2(p^2 \cdot X - 3p) - 3(p \cdot X - 3) + 2X + \frac{2}{p}.$$

Теорема (Диференціювання зображення). Якщо $L\{f(t)\} = F(p)$, то

$$L\{F'(p)\} = -t \cdot f(t), \quad L\{F''(p)\} = (-1)^2 \cdot t^2 \cdot f(t),$$

.....

(2)

$$L\{F^{(n)}(p)\} = (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t),$$

тобто диференціюванню зображення відповідає множення його оригіналу на $(-t)$.

Доведення. Відповідно до теореми про існування зображення, $F(p)$ є аналітичною функцією в півплощині $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Отже, у неї існує похідна будь-якого порядку. Диференціюючи інтеграл по параметру p (обґрунтування законності цієї операції опускаємо), одержимо

$$F'(p) = \left(\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^\infty (f(t) \cdot e^{-pt})'_p dt = \int_0^\infty f(t) \cdot (-t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty (-t \cdot f(t)) e^{-pt} dt,$$

тобто $L\{F'(p)\} = -t \cdot f(t)$. Тоді $L\{F''(p) = (F'(p))'\} = -t(-t \cdot f(t)) = t^2 f(t)$,

$L\{F'''(p)\} = -t(t^2 \cdot f(t)) = -t^3 \cdot f(t)$ і взагалі $L\{F^{(n)}(p)\} = (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t)$. ■

Приклад. Знайти зображення функції $f(t) = t \sin t$ за допомогою теореми про диференціювання зображення.

Розв'язання. Формули (2) можна інтерпретувати по іншому, тобто

$$F'(p) = L\{-t \cdot f(t)\},$$

тоді

$$L\{t \sin t\} = -(L\{\sin t\})' = -\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)' = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}.$$

Теорема (Інтегрування оригіналу). Якщо $L\{f(t)\} = F(p)$, то $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$, тобто інтегруванню оригіналу від 0 до t відповідає ділення його зображення на p .

Доведення. Нехай функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ є оригіналом (можна перевірити) і $L\{\varphi(t)\} = \Phi(p)$. Тоді за властивістю диференціювання оригіналу маємо

$$L\{\varphi'(t)\} = p \cdot \Phi(p) - \varphi(0) = p \cdot \Phi(p) \quad (\text{так як } \varphi(0) = 0).$$

Так як

$$\varphi'(t) = \left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right)' = f(t),$$

то $F(p) = p \cdot \Phi(p)$. Звідси $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$, тобто $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$. ■

Теорема (Інтегрування зображення). Якщо $L\{f(t)\} = F(p)$ і інтеграл $\int_p^\infty F(p) dp$ збігається, то $\int_p^\infty F(p) dp = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$, тобто інтегруванню зображення від p до ∞ відповідає ділення його оригіналу на t .

Доведення. Використовуючи формулу для знаходження зображення оригіналу і змінюючи порядок інтегрування отримаємо

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(p) dp &= \int_p^\infty \left(\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt\right) dp = \int_0^\infty \left(\int_p^\infty e^{-pt} dp\right) f(t) dt = \\ &= \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t} e^{-pt} \Big|_p^\infty\right) f(t) dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}. \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад. а) Знайти зображення функції $\frac{\sin t}{t}$.

б) Знайти зображення інтеграла $\int_0^t e^{\tau} d\tau$.

Розв'язання. а) Так як $L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2 + 1}$, то за властивістю інтегрування зображення маємо

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_p^\infty \frac{1}{p^2 + 1} dp = \arctg p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctg p,$$

тобто
$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctg p = \operatorname{arcctg} p.$$

б) Застосовуючи властивість інтегрування оригіналу, отримаємо

$$L\left\{\int_0^t e^{\tau} d\tau\right\} = \frac{L\{e^t\}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

Згортка функцій (множення зображень)

Означення. Вираз виду

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

називається **згорткою функцій** $f_1(t)$ та $f_2(t)$.

Зауваження. Функція $\int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$ є оригіналом (перевірити самостійно).

Зауваження. Можна переконатися (поклавши $t - \tau = u$), що згортання має властивість перестановки, тобто

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t).$$

Теорема (Бореля). Якщо $L\{f_1(t)\} = F_1(p)$, $L\{f_2(t)\} = F_2(p)$, то

$$L\{f_1 * f_2\} = F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Приклад. Знайти оригінал функцій за зображенням $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$.

Розв'язання. Представимо зображення наступним чином

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{F_2(p)}.$$

Так як $L\{t\} = \frac{1}{p^2}$, $L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$, то за теоремою Бореля маємо, що

$$L\{t * \sin t\} = \frac{1}{p^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{p^2+1}}_{F_2(p)},$$

отже, щоб знайти оригінал, достатньо обчислити згортку функцій:

$$\begin{aligned} t * \sin t &= \int_0^t (t-\tau) \sin \tau d\tau = \left\{ \begin{array}{ll} u = t-\tau & du = -d\tau \\ dv = \sin \tau d\tau & v = -\cos \tau \end{array} \right\} = \\ &= -(t-\tau) \cos \tau \Big|_0^t - \int_0^t \cos \tau d\tau = t - \sin \tau \Big|_0^t = t - \sin t. \end{aligned}$$

Перевірка:

$$L\{t - \sin t\} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

Наслідок. Якщо $L\{f_1 * f_2\} = F_1(p) \cdot F_2(p)$ і $f_1'(t)$ також є оригіналом, то

$$L\{p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)\} = \int_0^t f_1'(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t).$$

Остання формула називається **формулою Дюамеля**.

Зауваження. На підставі властивості перестановки згортки формулу Дюамеля можна записати у вигляді

$$L\{p \cdot F_1(p) \cdot F_2(p)\} = \int_0^t f_1'(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau + f_1(0) \cdot f_2(t).$$

Формулу Дюамеля можна застосовувати для визначення оригіналів по відомих зображеннях.

Приклад. Знайти оригінал, що відповідає зображенню $F(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}$.

Розв'язання. Так як $\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}$ і $L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$,

$L\{\cos t\} = \frac{p}{p^2+1}$, за формулою Дюамеля маємо

$$L\left\{2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1}\right\} = 2 \int_0^t \cos \tau \cdot \cos(t-\tau) d\tau + 0 = t \cdot \cos t + \sin t.$$

Лекція 9. ЗАСТОСУВАННЯ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ.

План лекції.

1. Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом операційного числення.
2. Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язування лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом операційного числення

Нехай потрібно знайти розв'язок лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t), \quad (1)$$

яке задовольняє початковим умовам

$$y(0) = c_0, \quad y'(0) = c_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – задані числа.

Будемо вважати, що шукана функція $y(t)$ разом з її розглянутими похідними та функція $f(t)$ є оригіналами.

Нехай $L\{y(t)\} = Y(p)$ і $L\{f(t)\} = F(p)$. Користуючись властивістю диференціювання оригіналу та властивістю лінійності, перейдемо в рівнянні (1) від оригіналів до зображень:

$$\begin{aligned} & (p^n Y(p) - p^{n-1} y(0) - p^{n-2} y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)) + a_1 (p^{n-1} Y(p) - p^{n-2} y(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)) + \dots + \\ & + a_{n-1} (p Y(p) - y(0)) + a_n Y(p) = F(p). \end{aligned}$$

Підставивши початкові умови отримаємо:

$$\begin{aligned} & (p^n Y - p^{n-1} c_0 - p^{n-2} c_1 - \dots - c_{n-1}) + a_1 (p^{n-1} Y - p^{n-2} c_0 - \dots - c_{n-2}) + \dots + \\ & + a_{n-1} (p Y - c_0) + a_n Y = F. \end{aligned}$$

Отримане рівняння називають **операторним (або рівнянням у зображеннях)**. Розв'яжемо його відносно $Y(p)$:

$$\begin{aligned} & Y(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = \\ & = F(p) + c_0 (p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}) + c_1 (p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}) + \dots + c_{n-1}, \end{aligned}$$

тобто

$$Y(p) \cdot Q_n(p) = F(p) + R_{n-1}(p),$$

де $Q_n(p)$ і $R_{n-1}(p)$ – алгебраїчні многочлени від p степеня n і $n-1$ відповідно.

З останнього рівняння знаходимо

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \quad (2)$$

Рівність (2) називають операторним розв'язком диференціального рівняння (1).

Зауваження. Рівність (2) має більш простий вигляд, якщо всі початкові умови дорівнюють нулю, тобто $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$. У такому випадку

$$Y(p) = \frac{F(p)}{Q_n(p)}.$$

Застосовуючи обернене перетворення Лапласа знаходимо оригінал $y(t)$, що відповідає знайденому зображенню (2). Таким чином отримаємо, у силу теореми єдиності, частинний розв'язок диференціального рівняння (1).

Зауваження. Отриманий розв'язок $y(t)$ у більшості випадків є справедливим для всіх значень t (а не тільки при $t \geq 0$).

Приклад. Розв'язати операційним методом диференціальне рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$$

Розв'язання. Нехай $L\{y(t)\} = Y(p)$. Тоді

$$L\{y'(t)\} = pY(p) - y(0) = pY - 2,$$

$$L\{y''(t)\} = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 6,$$

$$L\{e^{3t}\} = \frac{1}{p-3}.$$

Підставимо отримані вирази в диференціальне рівняння:

$$p^2Y - 2p - 6 - 3(pY - 2) + 2Y = 12 \frac{1}{p-3}.$$

Виразимо $Y(p)$:

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) - 2p - 6 + 6 = \frac{12}{p-3},$$

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{12}{p-3} + 2p,$$

$$Y(p)(p^2 - 3p + 2) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{p-3}.$$

Звідси маємо:

$$Y(p) = \frac{2p^2 - 6p + 12}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Знайдемо оригінал $y(t)$, для цього розкладемо дробово-раціональну функцію на суму простих дробів:

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3}.$$

$$2p^2 - 6p + 12 = A(p-2)(p-3) + B(p-1)(p-3) + C(p-2)(p-1),$$

Знайдемо значення коефіцієнтів A, B, C :

$$p=2, \quad 8 = -B \Rightarrow B = -8,$$

$$p=3, \quad 12 = 2C \Rightarrow C = 6,$$

$$p=1, \quad 8 = 2A \Rightarrow A = 4.$$

Тоді

$$Y(p) = \frac{4}{p-1} + \frac{-8}{p-2} + \frac{6}{p-3}.$$

Розв'язок рівняння має вид:

$$y(t) = 4e^t - 8e^{2t} + 6e^{3t}.$$

Розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Аналогічно застосовується операційний метод для розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо метод на конкретному прикладі.

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 3.$$

Розв'язання. Нехай $L\{x(t)\} = X(p)$; $L\{y(t)\} = Y(p)$; $L\{z(t)\} = Z(p)$.

За властивістю диференціювання оригіналу маємо:

$$L\{x'\} = pX - 1; \quad L\{y'\} = pY - 2; \quad L\{z'\} = pZ - 3.$$

Система операторних рівнянь приймає вид:

$$\begin{cases} pX - Y + Z = 1, \\ X - (p-1)Y = -2, \\ X + (1-p)Z = -3. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему алгебраїчних рівнянь методом підстановки:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p-2}{p(p-1)}, \\ Y(p) &= \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2}, \\ Z(p) &= \frac{3p^3 - 2p - 2}{p(p-1)^2}. \end{aligned}$$

Переходячи від зображень до оригіналів, отримаємо розв'язки системи:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p-2}{p(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} = \frac{A(p-1) + Bp}{p(p-1)}, \\ p-2 &= A(p-1) + Bp, \\ p=1, \quad -1 &= B, \\ p=0, \quad -2 &= -A \Rightarrow A=2, \\ X(p) &= \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1}, \\ x(t) &= 2 - e^t. \end{aligned}$$

Аналогічно, отримаємо

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{2p^2 - p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}, \\ y(t) &= -2 + 4e^t - te^t, \\ Z(p) &= \frac{3p^2 - 2p - 2}{p(p-1)^2} = -\frac{2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}, \\ z(t) &= -2 + 5e^t - te^t. \end{aligned}$$

Відповідь: $x(t) = 2 - e^t$, $y(t) = -2 + 4e^t - te^t$, $z(t) = -2 + 5e^t - te^t$.

За допомогою операційного числення можна також знаходити розв'язки лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, рівнянь у частинних похідних, рівнянь у кінцевих різницях (різницевих рівнянь); робити підсумовування рядів; обчислювати інтеграли. При цьому розв'язання цих та інших задач значно спрощуються.

Лекція 10.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ, КЛАСИФІКАЦІЯ ПОДІЙ.

План лекції.

1. Елементи комбінаторики.
2. Основні принципи комбінаторики.
3. Випробування та події. Класифікація подій. Види подій.

У практичній діяльності ми часто зустрічаємося з явищами, результат яких не можна передбачити, і результат яких залежить від випадку. Там, де мова йде про випадкові події марно шукати закономірності. Вплив різноманітних причин, кожна з яких може впливати на результат експерименту, призводить до того, що результат експерименту не визначається заздалегідь однозначно, тому говорять, що результат такого досвіду *випадковий*.

Математична оцінка об'єктивної можливості настання деякої події в результаті випробування називається **ймовірністю** цієї події.

Теорія ймовірностей – це розділ математики, що вивчає закономірності випадкових подій.

Поява поняття ймовірності було пов'язане як з потребами страхування, яке отримало значного поширення в ту епоху, коли помітно розширювалися торгівельні зв'язки та морські подорожі, так і в зв'язку з розвитком азартних ігор. Азартними називаються ті ігри (карти, доміно тощо), у яких виграш залежить переважно не від уміння гравця, а від випадковості. Азартні ігри були для вчених тільки зручною моделлю для вирішення завдань і аналізу понять теорії ймовірностей.

Засновниками «науки про випадковості» вважають П'єра Ферма і Блеза Паскаля (XVII ст). Ці французькі вчені знайшли ключ до складання кількісної оцінки ймовірності події. Вони використовували метод, який пізніше був названий комбінаторним аналізом, або комбінаторикою.

Комбінаторика – область математики, в якій вивчаються питання про те, скільки різних комбінацій можна скласти з заданих об'єктів.

Комбінаторика як розділ математики не відноситься безпосередньо до теорії ймовірностей і математичної статистики. Проте при обчисленні ймовірностей подій часто доводиться користуватися формулами комбінаторики, так як у багатьох випадках безпосередній перебір всіх можливих результатів експерименту та кількості сприятливих наслідків складний в силу їх великої кількості.

Різні групи, складені з будь-яких елементів, що відрізняються елементами або порядком цих елементів, називаються **сполуками** або **комбінаціями** цих елементів. Розрізняють сполуки трьох видів: **перестановки, розміщення та сполучення**. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів. Загалом множини бувають упорядковані та неупорядковані.

Множину називають **впорядкованою**, якщо при її побудові істотним є порядок розміщення елементів. У протилежному випадку множину називають **невпорядкованою**.

Елементи комбінаторики

Означення. Сполуки з n елементів, що відрізняються лише порядком елементів, називають **перестановками** цих елементів.

Кількість таких упорядкованих множин з n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n,$$

(1)

де n набуває лише цілих невід'ємних значень.

Символ $n!$ читається: « n факторіал». Зауважимо, що прийнято вважати $0! = 1$.

Приклад. Порядок виступів 5 учасників конференції визначається жеребкуванням. Скільки різних варіантів виступу учасників може утворитися.

Розв'язання. Очевидно, що кожен варіант жеребкування відрізняється тільки порядком учасників конкурсу. Тоді з рівності (1) отримаємо

$$N = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \text{ варіантів виступів.}$$

Означення. Якщо перестановка складається з n елементів і k різних елементів цієї перестановки повторюються $m_1, m_2, \dots, m_k$ разів ($m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$), то такі перестановки називаються **перестановками з повтореннями**.

Кількість таких перестановок обчислюють за формулою

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}. \quad (2)$$

Приклад. Скільки існує семизначних чисел, що складаються з цифр 7, 8, 9, в яких цифра 7 повторюється 3 рази, а цифри 8 і 9 по два рази?

Розв'язання. Кожне семизначне число відрізняється порядком цифр, причому за умовою, цифри повторюються. Кількість чисел - перестановка з повтореннями з семи елементів. Для обчислення загальної кількості перестановок застосуємо формулу (2)

$$P_7(3, 2, 2) = \frac{7!}{3!2!2!} = 210.$$

Означення. Розміщенням з n елементів по k ($0 \leq k \leq n$) називають такі впорядковані підмножини, що складаються з k елементів, які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів та самими елементами (хоча б одним елементом).

Кількість розміщень з n елементів по k позначається A_n^k (читається: «число розміщень з n по k » або « A з n по k ») і обчислюється за формулою

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (3)$$

Формула (3) справедлива і у випадку, коли $k = 0$ та $n = 0$. Дійсно, так як згідно припущення $0! = 1$, то

$$A_n^0 = \frac{n!}{n!} = 1, \quad A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1.$$

Приклад. Скласти всі двозначні числа з трьох цифр 3, 5, 7 (числа з однаковими цифрами не враховувати).

Розв'язання. Маємо 35, 37, 53, 57, 73, 75. Загальну кількість різних чисел можна підрахувати за формулою (3):

$$N = A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Означення. Сполученнями з n елементів по k ($0 \leq k \leq n$) називають будь-які підмножини з k елементів, утворених з даних n елементів, що відрізняються між собою хоча б одним значенням.

Кількість сполучень з n елементів по k позначають символом C_n^k (читається: «число сполучень з n елементів по k » або « C з n по k ») і в загальному випадку обчислюють за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Приклад. На конференції присутні 30 студентів. Скількома способами можна обрати президію у складі трьох осіб?

Розв'язання. Кількість способів є довільною (невпорядкованою) підмножиною множини з 30 елементів, за формулою (4) кількість способів дорівнює кількості комбінацій із 30 елементів по 3:

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{27!3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060.$$

Зауваження. Якщо за умовою цієї задачі, потрібно обрати в президії голову, заступника та голову лічильної комісії, то кількість способів треба підрахувати кількістю розміщень за формулою (3).

Властивості сполучень

1) $C_n^n = 1$;

2) $C_n^1 = n$;

3) $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$.

Зміст останньої властивості полягає у наступному. Так як C_n^k – це кількість усіх підмножин n -елементної множини, які мають k елементів, то сума $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ дає число усіх підмножин n -елементної множини. Отже, кількість усіх підмножин множини, яка містить n елементів, дорівнює 2^n .

Приклад. Студентський заході може відвідати будь-який студент групи з 10 осіб. Скільки існує різних способів відвідування заходу?

Розв'язання. Шукана кількість дорівнює кількості усіх підмножин множини, яка складається з 10 елементів, тобто $N = 2^{10} = 1024$.

Правила комбінаторики (основні принципи комбінаторики)

В основі розв'язання багатьох задач комбінаторики лежать два простих правила – *правило суми* та *правило добутку*.

Правило суми: нехай першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, третю – n_3 способами і так до k -ї дії, яку можна виконати n_k способами. Тоді кількість можливих способів реалізації або першої, або другої і т.д., або k -тої дії буде дорівнювати

$$N = n_1 + n_2 + \dots + n_k. \quad (5)$$

Приклад. У ящику 200 деталей. З них 120 - деталі першого сорту, 50 - другого, інші - третього. Скільки існує способів вилучення однієї деталі першого або другого сорту.?

Розв'язання. Деталь першого сорту може бути вилучена $n_1 = 120$ способами, другого сорту $n_2 = 50$ способами. Тоді кількість способів обрати одну деталь обчислимо за формулою (5)

$$N = n_1 + n_2 = 120 + 50 = 170.$$

Правило добутку: нехай треба виконати послідовно одну за одною k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, третю – n_3 способами і так до k -ї дії, яку можна виконати n_k способами, то загальна кількість N різних варіантів виконання усіх k дій можна знайти за формулою

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k. \quad (6)$$

Приклад. У групі 20 студентів. Необхідно вибрати старосту, його заступника і профорга. скільки існує способів це зробити?

Розв'язання. Старосту можна обрати 20 способами, заступника – будь кого з 19 студентів, що залишились, профорга – 18 способів. Використаємо правило добутку та отримаємо

$$N = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840.$$

Приклад. Скількома способами з 28 кісточок доміно можна обрати дві кісточки одну за іншою так, щоб другу можна було прикласти до першої?

Розв'язання. Якщо перша кісточка є дублем, то $n_1 = 7$, тоді другу можна прикласти до першої $n_2 = 6$ способами. За правилом добутку існує $n = n_1 \cdot n_2 = 7 \cdot 6 = 42$ способи вибору двох кісточок доміно. Якщо перша кісточка не є дублем, то $m_1 = 21$, тоді другу можна прикласти до першої $m_2 = 12$ способами. Маємо, що $m = m_1 \cdot m_2 = 21 \cdot 12 = 252$ способи вибору двох кісточок доміно. Застосуємо правило суми та остаточно отримаємо

$$N = n_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot m_2 = 42 + 252 = 294.$$

Випробування та події. Класифікація подій

У будь-якій науці є початкові поняття, які не можна визначити через інші; вони лише роз'яснюються, а всі інші поняття зводяться до них. До таких первинних понять в теорії ймовірностей відносяться поняття «випробування» та «події».

Під **випробуванням** (дослідом) будемо розуміти експеримент, який здійснюється за певних незмінних умов і результати якого можна спостерігати. Усі експерименти можуть бути розподілені на два типи: випадкові (або стохастичні) та не випадкові (детерміновані) експерименти.

Стохастичним (випадковим) експериментом називається експеримент, результати якого не можна передбачити заздалегідь. В іншому випадку експеримент називається **детермінованим** (невипадковим).

Наприклад, у результаті одноразового підкидання монети може випасти або «герб», або «число». Однак заздалегідь точно передбачити результат такого експерименту не можна. Отже, підкидання монети є стохастичним експериментом.

Подія – це наслідок будь-якого стохастичного експерименту.

Події, як правило, позначають великими літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$

Події поділяють на випадкові, вірогідні та неможливі.

Випадкова подія – це подія, про яку можна сказати, що вона відбувається або не відбувається за певних умов.

Наприклад, при підкиданні монети, поява герба буде випадковою подією, тому що замість герба може з'явитися число.

Вірогідна подія – подія, яка внаслідок випробування обов'язково відбудеться в умовах заданого експерименту.

Позначають вірогідні події Ω або U .

Неможлива подія – подія, яка внаслідок певного випробування не може відбутися ніколи. Неможлива подія не містить жодного з елементарних наслідків та позначається символом $\emptyset$.

Наприклад, якщо в партії виробів всі стандартні, то взяти стандартний виріб – подія вірогідна, а нестандартне – неможлива подія; якщо в урні є лише червоні кулі, то витягування червоної кулі – достовірна подія, а витягування з цієї урни кулі іншого кольору – неможлива подія.

Випадкові події поділяють на елементарні та складені.

Елементарна подія – подія, яку неможливо розділити на більш прості.

Складена подія – подія, яку можна розкласти на елементарні (прості) події.

Позначимо множину усіх можливих наслідків експерименту через Ω , а її елементи через ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ називається **простором елементарних подій**, а її елементи ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – **елементарними подіями**.

Приклад. Кидають гральний кубик. Множина елементарних подій $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Розглянемо випадкові події:

A – кількість очок кратна двом, тобто $A = \{2; 4; 6\}$;

B – випало шість очок, тобто $B = \{6\}$;

C – випало непарне число очок, тобто $C = \{1; 3; 5\}$.

Маємо, що B – елементарна подія, події A, C – складені події, які можна розкласти на елементарні події.

У ролі елементарних наслідків можна розглядати точки n -вимірного простору, відрізок лінії, функцію однієї або багатьох змінних.

Простір елементарних наслідків може містити скінченну, зліченну або незліченну множину елементів.

Якщо множина елементарних наслідків (подій) Ω скінченна або зліченна, тобто усі її елементи можна занумерувати натуральними числами, то простір елементарних наслідків називається **дискретним**. У іншому випадку простір елементарних наслідків Ω називається **неперервним** або **незліченим**.

Приклад. Розглянемо приклади елементарних просторів.

а) Дискретний простір елементарних наслідків зі скінченною кількістю елементів. Монету кидають двічі. У такому експерименті простір елементарних наслідків містить 4 елементи (є скінченим): $\{(Г, Г), (Г, Ч), (Ч, Г), (Ч, Ч)\}$, де Г – це герб, а Ч – число.

б) Дискретний простір елементарних наслідків зі зліченною кількістю елементів.

Викладач задає студенту додаткові питання до тих пір, поки студент не відповість на питання. Можливі такі елементарні події:

$\omega_1 - \{ \text{студент не відповість на перше запитання} \},$

$\omega_2 - \{ \text{студент не відповість на друге запитання} \},$

$\omega_3 - \{ \text{студент не відповість на третє запитання} \}$ і т.д.

У такому експерименті простір елементарних наслідків може мати нескінченну кількість точок, які можна шляхом нумерації перелічити. Тому простір елементарних наслідків буде зліченим.

в) Неперервний простір елементарних наслідків.

Двоє людей призначають зустріч у певному місці між 12.00 та 13.00 годинами. Кожен з них може прийти у межах цього часу в будь-який випадковий момент. Відслідкуємо момент їх приходу. Кожен варіант приходу двох людей – це точка з квадрату зі стороною 60 (в годині 60 хвилин).

Тоді $\Omega = \{(x, y), 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$ (перший може прийти о 12 годині x хвилин, а другий о 12 годині y хвилин). Усі точки з квадрату не можна ні перерахувати, ні перенумерувати. У цьому полягає його неперервна структура, отже, у даному експерименті маємо неперервний простір елементарних наслідків.

Види подій

Сумісні події – поява однієї з них не виключає можливості появи інших.

Наприклад, якщо два стрільці стріляють у мішень, то події A_1 – перший стрілець влучив у мішень та A_2 – другий стрілець влучив у мішень будуть сумісними випадковими подіями.

Несумісні події – поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні.

Наприклад, отримання оцінки на іспиті "незадовільно", "задовільно", "добре", "відмінно" по одній дисципліні події несумісні, а отримання цих же оцінок з трьох дисциплін - сумісні.

Рівноможливі події – події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Наприклад, витягти "туза", "короля" з колоди карт або поява "герба", "числа" при підкиданні монети – події рівноможливі.

Або, при киданні шестигранного кубика події A_1 – випала грань з цифрою 1, A_2 – випала грань з 2, A_3 – випала грань з 3, A_4 – випала грань з 4, A_5 – випала грань з 5, A_6 – випала грань з 6 є рівноможливими за умови, що центр ваги кубика не зміщений.

Повна група подій: випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють повну групу подій, якщо внаслідок випробування хоча б одна з них з'явиться обов'язково.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ утворюють **повну групу несумісних подій**, якщо:

- 1) вони попарно несумісні, тобто $A_i \cdot A_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
- 2) $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$.

Наприклад, якщо у сім'ї двоє дітей, то повну групу подій утворюють наступні події: A – "двоє хлопчиків", B – "один хлопчик, одна дівчинка", C – "дві дівчинки".

Лекція 11.

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЇ.

План лекції.

1. Класичне означення ймовірності події.
2. Геометричне означення ймовірності події.
3. Статистичне означення ймовірності події.

Класичне означення ймовірності

Для порівняння випадкових подій за степенем їх об'єктивної можливості треба кожному подію пов'язати з певним числом. Таке число P називають ймовірністю події. Існує 4 означення ймовірності.

Розглянемо стохастичний експеримент зі скінченною кількістю рівноможливих наслідків $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ і деяку подію A , яка спостерігається у цьому експерименті.

Означення. Ймовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, яке дорівнює відношенню кількості елементарних подій, що сприяють появі A до загальної кількості всіх елементарних подій, тобто

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}, \quad (1)$$

де $N(A) = |A| = m$ – наслідки, що сприяють появі події A ;

$N(\Omega) = |\Omega| = n$ – усі рівноможливі елементарні наслідки.

З формули (1) випливають наступні твердження:

- 1) ймовірність вірогідної (достовірної) події дорівнює одиниці: $P(\Omega) = 1$;
- 2) ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\emptyset) = 0$;
- 3) ймовірність випадкової події A є невід'ємне число, яке знаходиться між нулем та одиницею: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Приклад. В урні знаходяться 9 куль однакового розміру, з них 4 – червоні, 3 – жовті і 2 – білі. Знайти ймовірність того, що: а) вийняли червону кулю (подія A), б) вийняли жовту кулю (подія B), в) вийняли білу кулю (подія C).

Розв'язання. Число 9 є число всіх можливих випробувань. Із всіх дев'яти випробувань події A сприяють – 4, події B – 3, події C – 2 випробування. Тоді, згідно з означенням ймовірності, маємо

$$P(A) = \frac{4}{9}, \quad P(B) = \frac{3}{9}, \quad P(C) = \frac{2}{9}.$$

Приклад. Партія з 10 деталей містить 4 браковані. Знайдіть ймовірність того, що з п'яти навмання обраних деталей рівно три будуть якісні.

Розв'язання. Нехай подія A – з 5 обраних виробів рівно 3 якісні. Аналогічно, до попереднього прикладу отримаємо

$$P(A) = \frac{C_6^3 \cdot C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{5! \cdot 5!}{10!} = \frac{10}{21}.$$

Зауваження. Класичне означення ймовірності має місце лише тоді, коли множина елементарних наслідків події скінченна, а самі наслідки події рівноможливі. Якщо ці умови не виконуються, то формулою (1) користуватися не можна. У випадку, коли множина елементарних наслідків незліченна, то обчислення ймовірності виконують за допомогою геометричного означення ймовірності.

Геометричне означення ймовірності

Розглянемо експеримент, у якому простір елементарних наслідків незліченний і являє собою область Ω у n – вимірному евклідовому просторі R^n , наприклад, точку навмання кидають у область Ω . Припустимо, що область має скінченновимірну геометричну міру $m(\Omega)$ (довжину, площу, об'єм і т.д.).

Проводимо випадкове «кидання точки» на скінченну ділянку прямої, площини або простору. Тоді ймовірність того, що точка влучить у будь-яку частину області пропорційна мірі цієї частини та не залежить від її розташування і форми.

Означення. Геометричною ймовірністю випадкової події A називається відношення міри події A , яка полягає у тому, що точка, навмання кинута в область Ω потрапила в область $A \in \Omega$, до міри області Ω

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}, \quad (2)$$

де $m(A)$ – міра області, яка належить Ω і сприяє події A ,

$m(\Omega)$ – міра області Ω .

Відповідно,

$$P(A) = \frac{\text{довжина } A}{\text{довжина } \Omega}, \quad P(A) = \frac{\text{площа } A}{\text{площа } \Omega}, \quad P(A) = \frac{\text{об'єм } A}{\text{об'єм } \Omega}.$$

Приклад. На відрізок $[-5; 5]$ навмання «кинута» точка. Знайдіть ймовірність того, що вона потрапила на відрізок $[0; 2]$.

Розв'язання. Нехай подія A – у результаті експерименту точка потрапила на відрізок $[0; 2]$. Довжина відрізка $[-5; 5]$ дорівнює 10 одиниць, а довжина відрізка $[0; 2]$ – 2 одиниці. Тоді, згідно означення геометричної ймовірності (2.2):

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Приклад (Задача про зустріч). Два студенти домовилися зустрітися у певному місці між 12.00 та 13.00 годинами дня. Той хто приходить першим чекає другого протягом $1/4$ години, після чого йде. Знайдіть ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен студент навмання обирає момент свого приходу в проміжку від 12.00 до 13.00.

Розв'язання. Позначимо моменти приходів першого та другого студентів через x та y відповідно. Так як початок відліку часу приходу не впливає на розв'язок задачі, то множина усіх наслідків експерименту буде

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Позначимо подію A – два студенти зустрілися. Тоді цій події сприяють наступні наслідки

$$A = \{(x, y) : |x - y| \leq 1/4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Розглянемо декартову систему координат, визначимо області, що відповідають множинам A і Ω (Рис. 1).

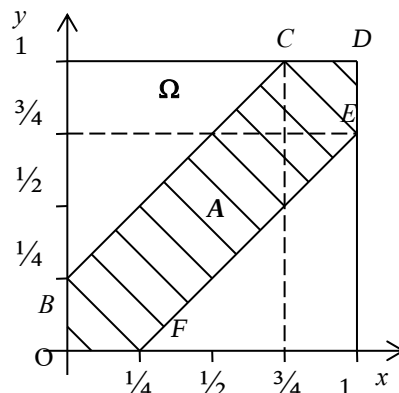


Рисунок 1. Области Ω і A

Область Ω – це квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці. Для визначення площі, що сприяє події A , знайдемо область, де $|x - y| \leq \frac{1}{4}$. Вона представляє собою перетин областей

$$\begin{cases} x - y \leq \frac{1}{4}, \\ x - y \geq -\frac{1}{4}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y \geq x - \frac{1}{4}, \\ y \leq x + \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Перетин областей Ω і A дає заштриховану область $OBCDEF$. Тоді $m(\Omega) = 1$ і $m(A) = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{16}$. У результаті маємо, що $P(A) = \frac{7}{16} : 1 = \frac{7}{16}$.

Статистичне означення ймовірності

Розглянемо деякий стохастичний експеримент та подію A , яка спостерігається у цьому експерименті. Припустимо, що проводиться серія з n таких випробувань, у кожному з яких може з'явитися або не з'явитися подія A .

Означення. Відносною частотою випадкової події A у даній серії експериментів називається відношення кількості випробувань, у яких подія A відбулася до загальної кількості проведених випробувань, тобто

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \quad (3)$$

де m – кількість експериментів, у яких з'явилася подія A ;

n – загальна кількість проведених експериментів.

Зауважимо, що значення частоти залежить від конкретної серії експериментів та їх кількості.

Приклад. Перевіряючи якість певної продукції цеху заводу, контроль виявив, що 60% перевіреної продукції складає продукція першого сорту. Це означає, що відносна частота першого сорту продукції складає $P^*(A) = 0,6$

Якщо контролю підлягала досить велика кількість виробів, то цей показник можна вважати показником якості роботи цеху, тобто вважати ймовірність випуску цехом продукції першого сорту приблизно дорівнює 0,6.

Основною властивістю відносної частоти є те, що зі збільшенням кількості дослідів відносна частота випадкової події поступово стабілізується і прямує до певного числа, яке й вважають ймовірністю певної події.

Одним з прикладів використання статистичного означення ймовірності є встановлення ймовірності народження хлопчика – 0,514. Ця величина визначена на основі обробки протягом багатьох років найбагатшого статистичного матеріалу.

Означення. Статистичною ймовірністю $P(A)$ випадкової події A називається стаке число, навколо якого групуються відносні частоти цієї події зі збільшення кількості експериментів, тобто

$$P(A) \approx P^*(A).$$

Приклад. У рамках даного прикладу розглянемо дві задачі та порівняємо їх результати.

а) Знайдемо ймовірність появи герба при киданні монети. У даному експерименті можливі два наслідки (або герб, або число), події A – поява герба, сприяє один наслідок, отже

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

б) Англійський математик Карл Пірсон (1857-1936) кидав монету 24000 разів, у результаті чого герб з'явився 12012 разів. Тоді відносна частота появи герба у такій серії експериментів обчислюється за формулою (3):

$$P^*(A) = \frac{12012}{24000} = 0,5005.$$

Порівнюючи розв'язки обох задач бачимо, що друга задача підтверджує припущення про ймовірність появи герба при одному киданні монети.

Лекція 12.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ ТА ФОРМУЛИ БАЙЄСА.

План лекції.

1. Незалежні події. Теорема множення ймовірностей.
2. Теорема додавання ймовірностей.
3. Формула повної ймовірності та формули Байєса.

Незалежні події. Теорема множення ймовірностей

Означення. Випадкові події A і B називаються незалежними, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від появи або не появи іншої події. У протилежному випадку події називаються залежними.

Означення. Умовною ймовірністю події A , обчисленою у припущенні, що подія B уже відбулася, називається число

$$P(A / B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1)$$

Умовна ймовірність позначається $P(A / B)$ або $P_B(A)$.

Приклад. В урні знаходяться 10 куль з яких 3 білих та 7 чорних. Навмання послідовно беруть дві кулі. Знайдіть ймовірність того, що друга куля чорна.

Розв'язання. Нехай подія A – перша куля біла, а подія B – друга куля чорна. Так як в умові задачі не вказано чи повертається перша куля до урни, то розглянемо два можливі випадки.

1) Якщо кулю, яку взяли першою, повертають до урни, то ймовірність появи другої кулі не залежить від того, яку кулю обрали першою, тому $P(B) = \frac{7}{10}$.

2) Якщо перша куля не повертається до урни, то ймовірність другої події залежить від результату першого випробування.

а) Якщо першою взяли білу кулю, то в урні залишилося 2 білих кулі та 7 чорних, тому $P(B / A) = \frac{7}{9}$.

б) Якщо першою взяли чорну кулю, то в урні залишилося 3 білих кулі та 6

чорних, тому $P(B / \bar{A}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Отже, ймовірність події B залежить від появи або не появи події A , тобто A та B залежні події.

Теорема (Множення ймовірностей залежних подій). Якщо $P(A) > 0$ і $P(B) > 0$, то ймовірність сумісної появи двох випадкових подій A та B дорівнює добутку ймовірності однієї з них та умовній ймовірності іншої події за умови, що перша подія відбулася, тобто

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B). \quad (2)$$

Зауваження. Теорема множення ймовірностей справедлива і для будь-якої скінченної кількості подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, тобто справедлива наступна рівність

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 A_2) \dots P(A_n/A_1 A_2 \dots A_{n-1}). \quad (3)$$

Приклад. Колектив працівників фірми складається на 65% із жінок. Серед працівників фірми 25% чоловіків і 35% жінок мають вищу освіту. Знайти ймовірність того, що навмання обраний працівник фірми є чоловіком з вищою освітою.

Розв'язання. Нехай подія A – обраний навмання працівник фірми має вищу освіту, подія B – обраний навмання працівник фірми є чоловік. За умовою задачі $P(B) = 0,35$, $P(A/B) = 0,25$. Подія C полягає у тому, що обраний навмання працівник фірми є чоловіком з вищою освітою. За формулою (2) маємо: $P(C) = P(B) \cdot P(A/B) = 0,35 \cdot 0,25 = 0,0875$.

Наслідок. Якщо події A і B незалежні, то формула (2) приймає вид

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (4)$$

Зауваження. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні у сукупності, то ймовірність сумісної появи цих подій дорівнює добутку їх ймовірностей, тобто формула (4) приймає вид

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n).$$

Приклад. Три студенти складають іспит з математики. Ймовірність того, що перший складе іспит – 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 та 0,7. Обчисліть ймовірність того, що:

а) три студенти складуть іспит; б) три студенти не складуть іспит.

Розв'язання. а) Нехай A – три студенти складуть іспит, A_1, A_2, A_3 – перший, другий та третій студенти складуть іспит. Події A_1, A_2, A_3 – незалежні.

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

б) Нехай B – три студенти не складуть іспит, $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – перший, другий та третій студенти не складуть іспит. Події $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3$ – незалежні.

$$P(B) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = (1 - 0,9)(1 - 0,8)(1 - 0,7) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006.$$

Теорема додавання ймовірностей

Теорема (Додавання ймовірностей подій). Нехай A і B – випадкові сумісні події. Тоді

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (5)$$

Зауваження. Формула (5) має узагальнення для суми будь-якої кількості подій:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n). \quad (6)$$

Наприклад, для трьох доданків формула (6) має вид

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Приклад. Два мисливці стріляють у мішень незалежно один від одного. Ймовірність влучення у ціль першим дорівнює 0,8, другим – 0,9. Знайдіть ймовірність того, що хоча б один з них влучив у ціль.

Розв'язання. Нехай A_1 – перший мисливець влучив у ціль, A_2 – другий мисливець влучив у ціль, A – хоча б один мисливець влучив у ціль. Тоді $A = A_1 + A_2$. Події A_1 і A_2 можуть відбутися одночасно, тобто вони сумісні. За теоремою додавання ймовірностей (5) маємо $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$.

Підставимо ймовірності подій A_1, A_2 і A_1A_2 у (5) та отримаємо

$$P(A) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98.$$

Якщо події A і B несумісні, то $AB = \emptyset$ і $P(AB) = 0$. Тоді з (5) отримаємо **формулу додавання ймовірностей несумісних подій**, а саме

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (7)$$

Зауваження. Формула (7) узагальнюється на суму будь-якої кількості несумісних подій: якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несумісні, то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Приклад. У лотереї випущено 10000 білетів, серед яких 100 білетів з виграшем по 5 тис. грн., 200 - по 1 тис. грн., 500 - по 500 грн., та 1000 – по 200 грн., а решта без виграшу. Знайти ймовірність виграшу не менше 500 грн., якщо придбали один білет.

Розв'язання. Введемо позначення подій: подія A – виграш не менше 500 грн., подія A_1 – виграш становить 5 тис. грн., A_2 – виграш становить 1 тис. грн., A_3 – виграш становить 500 грн.. Оскільки куплено тільки один білет, то ці події попарно несумісні. За формулою додавання ймовірностей несумісних подій (7):

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{100}{10000} + \frac{200}{10000} + \frac{500}{10000} = 0,08.$$

Наслідок. Сума ймовірностей подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, які утворюють повну групу і є попарно несумісними, дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Наслідок. Ймовірність події, протилежної даній, дорівнює різниці між одиницею і ймовірністю даної події, тобто

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (8)$$

Приклад. У кожному з трьох ящиків лежить по 10 деталей; у першому ящику 2 деталі

браковані, у другому – 3, у третьому – 1. З кожного ящика беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них є принаймні одна стандартна.

Розв’язання. Позначимо події: подія A – з трьох деталей принаймні одна стандартна; події A_i , ($i=1,2,3$) означають, що взята деталь стандартна з i -ого ящика.

За умовою задачі:

$$P(A_1) = \frac{8}{10} = 0,8; \quad P(A_2) = \frac{7}{10} = 0,7; \quad P(A_3) = \frac{9}{10} = 0,9.$$

Тоді ймовірності протилежних подій дорівнюють

$$q_1 = P(\bar{A}_1) = \frac{2}{10} = 0,2; \quad q_2 = P(\bar{A}_2) = \frac{3}{10} = 0,3; \quad q_3 = P(\bar{A}_3) = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Отже,

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = \\ &= 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 1 - 0,006 = 0,994. \end{aligned}$$

Приклад. Ймовірність хоча б одного попадання стрільцем в мішень при чотирьох пострілах дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність попадання в мішень при одному пострілі.

Розв’язання. Нехай подія A – у мішень влучили хоча б при одному з чотирьох пострілів; p – ймовірність влучення при одному пострілі, $q = 1 - p$ – ймовірність протилежної події (промаху при одному пострілі).

Тоді маємо

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - q^4 = 0,9984, \\ q^4 &= 0,0016; \quad q = 0,2; \quad p = 1 - q = 1 - 0,2 = 0,8. \end{aligned}$$

Формула повної ймовірності та формули Байєса

Події $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу несумісних подій, якщо:

1. вони попарно несумісні, тобто $H_i \cdot H_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
2. $H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$.

Такі події іноді називають **гіпотезами**.

Теорема. Якщо випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу, то ймовірність події A визначається за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i). \quad (9)$$

Формула (9) називається **формулою повної ймовірності**.

Приклад. У першому ящику 20 деталей, з яких 15 стандартних. У другому ящику 10 деталей, з яких 9 стандартних. З другого ящика беруть навмання одну деталь і перекладають її до першого ящика. Знайти ймовірність того, що взята після цього навмання деталь з першого ящика – стандартна.

Розв’язання. Нехай подія A – з першого ящика взяли стандартну деталь. Розглянемо гіпотези H_1 – з другого ящика переклали до першого стандартну деталь, H_2 – з другого ящика переклали до першого нестандартну деталь. Так як випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій H_1 або H_2 , то ймовірність події A знайдемо за формулою (9)

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2).$$

Обчислимо потрібні ймовірності за класичним означенням

$$P(H_1) = \frac{9}{10}, \quad P(H_2) = \frac{1}{10}, \quad P(A/H_1) = \frac{16}{21}, \quad P(A/H_2) = \frac{15}{21}.$$

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{16}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{15}{21} = \frac{53}{70}.$$

Теорема. Якщо ймовірності гіпотез $H_1, H_2, \dots, H_n$ до експерименту дорівнювали $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$ і в результаті експерименту відбулася подія A , то умовні ймовірності гіпотез $P(H_i/A), i=1, 2, \dots, n$ за умови, що відбулася подія A , обчислюються за **формулами Байєса**:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A/H_i)} = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}, \quad (10)$$

де гіпотези $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу несумісних подій.

Ймовірності гіпотез $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$, обчислені до експерименту називаються **апостеріорними** ймовірностями.

Якщо відомо, що подія A відбулася, то формули Байєса дозволяють виконати переоцінку ймовірності гіпотез $H_i, i=1, 2, \dots, n$, що важливо при контролі або ревізіях.

Умовні ймовірності $P(H_i/A)$ називаються **апостеріорними** ймовірностями.

Приклад. У магазин надходять однотипні вироби від трьох виробників. Відомо, що 30% виробів надходить від першого виробника, 45% – від другого і 25% – від третього. Відомо, що перший виробник допускає 5% браку, другий – 1% браку і третій – 6% браку. Знайдіть ймовірність того, що навмання придбаний виріб виявиться бракованим. Якщо відомо, що придбаний виріб виявився бракованим, знайти ймовірність того, що цей виріб від другого виробника.

Розв’язання. Нехай подія A – придбано бракований виріб.

Розглянемо наступні гіпотези:

H_1 – виріб від першого виробника; H_2 – виріб від другого виробника;

H_3 – виріб від третього виробника.

Очевидно, що події H_1 , H_2 , H_3 несумісні і описують усі можливі наслідки для даного експерименту (у сумі утворюють простір елементарних наслідків). Отже, гіпотези H_1 , H_2 і H_3 утворюють повну групу несумісних подій.

З умови задачі можна записати ймовірності гіпотез, а також умовні ймовірності:

$$P(H_1) = 0,3, \quad P(H_2) = 0,45, \quad P(H_3) = 0,25,$$

$$P(A/H_1) = 0,05, \quad P(A/H_2) = 0,01, \quad P(A/H_3) = 0,06.$$

За формулою (9) знаходимо ймовірність того, що придбаний виріб буде бракованим:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A/H_i) = 0,3 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot 0,01 + 0,25 \cdot 0,06 = 0,0345.$$

Отже, у магазині в середньому 3,45% бракованих виробів даного типу.

Ймовірність $P(H_2) = 0,45$ – це апіорна ймовірність гіпотези H_2 . Вона ілюструє, що з ймовірністю 0,45 у цьому магазині можна придбати виріб, виготовлений другим виробником. Якщо ми знаємо, що придбано бракований виріб, знайдемо ймовірність того, що він від другого виробника, тобто $P(H_2/A)$.

За формулою Байєса (10):

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,45 \cdot 0,01}{0,0345} \approx 0,13.$$

Отже, серед бракованих виробів, що знаходяться у магазині, приблизно 13% є виробами від другого виробника.

Лекція 13.

НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ З ПОВТОРЕННЯМИ. СХЕМА ТА ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ У СХЕМІ БЕРНУЛЛІ.

План лекції.

1. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі.
2. Граничні теореми у схемі Бернуллі.

Схема Бернуллі. Формула Бернуллі

Означення. Незалежними називаються випробування, результатами яких є події незалежні в сукупності, тобто ймовірність наслідку кожного випробування не залежить від того, які наслідки мали інші випробування.

Розглянемо серію з n незалежних однотипних випробувань, у кожному з яких може відбутися подія A зі сталою ймовірністю p і не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$. Таким чином у кожному випробуванні може або відбутися подія A , або подія $\bar{A}$. Таку послідовність незалежних випробувань називають **схемою Бернуллі** (на честь відомого швейцарського математика Я. Бернуллі, який був одним із засновників теорії ймовірностей та математичної статистики).

ТЕОРЕМА (Бернуллі). Якщо ймовірність появи події A в кожному випробуванні стала та дорівнює p , то ймовірність того, що у серії з n незалежних випробувань подія A відбудеться рівно k разів обчислюється за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0, n}. \quad (1)$$

Формулу (1) називають **формулою Бернуллі**.

Формула (1) дозволяє обчислити ймовірність $P_n(k)$ того, що в n незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів. Однак часто виникає необхідність обчислити ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться від k_1 до k_2 раз, тобто $k_1 \leq k \leq k_2$. Так як

$$(k_1 \leq k \leq k_2) = (k = k_1) + (k = k_1 + 1) + \dots + (k = k_2),$$

то

$$P_n(k_1; k_2) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k=k_2} C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (2)$$

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться менше m разів обчислюється за формулою

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m-1). \quad (3)$$

Ймовірність появи події A не менше m разів можна знайти за формулою

$$P_n(k \geq m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n)$$

або за формулою

$$P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k). \quad (4)$$

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях подія A з'явиться хоча б один раз може бути обчислена за формулою

$$P_n(1; n) = 1 - q^n. \quad (5)$$

Приклад. Гральний кубик підкидають п'ять разів. Знайдіть ймовірність того, що число кратне трьом випало не менше трьох і не більше чотирьох разів.

Розв'язання. Нехай подія A – при одному підкиданні кубика випало число кратне трьом. Тоді за класичним означенням ймовірності $p = P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Отже,

$q = 1 - p = \frac{2}{3}$ і за умовою задачі $n = 5$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$. За формулою (2) маємо

$$\begin{aligned} P_5(3; 4) &= P_5(3) + P_5(4) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \\ &= \frac{4 \cdot 5}{2!} \cdot \frac{4}{3^5} + 5 \cdot \frac{2}{3^5} = \frac{50}{3^5} \approx 0,206. \end{aligned}$$

Приклад. Ймовірність влучити у ціль при одному пострілі дорівнює 0,8. Проводиться шість незалежних пострілів. Знайдіть ймовірність того, що буде хоча б один влучний постріл.

Розв'язання. За умовою $n = 6$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$. Застосовуючи формулу (5), маємо

$$P_6(1; 6) = 1 - q^6 = 1 - (0,2)^6 = 0,999936.$$

Означення. Найбільш ймовірним значенням k_0 появи події A у n незалежних випробуваннях називається число, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ є більшою, або принаймні не меншою ймовірності кожного з інших можливих наслідків випробувань, тобто $P_n(k_0) \geq P_n(k_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Подвійна нерівність

$$np - q \leq k_0 \leq np + p \quad (6)$$

дозволяє визначити найбільш ймовірне (найімовірніше) значення появи події A .

Зауваження. З формули (6) маємо, що довжина інтервалу, у який потрапляє найімовірніше значення k_0 , дорівнює одиниці:

$$(np + p) - (np - q) = p + q = 1.$$

Тому можливими є два наступні випадки:

1) якщо $np - q$ – дробове число, то існує одне значення найбільш ймовірного числа k_0 ;

2) якщо $np - q$ – ціле число, то існує два значення найбільш ймовірного числа k_0

$$k'_0 = np - q, \quad k''_0 = np + p = k'_0 + 1.$$

Приклад. При деякому технологічному процесі 90% усієї виробленої продукції є продукцією вищого ґатунку. Знайдіть найбільш ймовірну кількість виробів вищого ґатунку у партії з 200 виробів.

Розв’язання. За умовою задачі $n = 200$, $p = 0,9$, $q = 1 - p = 0,1$. Тоді згідно нерівностей (6) маємо:

$$200 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k_0 \leq 200 \cdot 0,9 + 0,9,$$

$$179,9 \leq k_0 \leq 180,9.$$

У інтервалі $[179,9; 180,9]$ знаходиться єдине найбільш ймовірне значення $k_0 = 180$. Отже, найбільш ймовірна кількість виробів вищого ґатунку в партії з 200 виробів дорівнює 180.

Граничні теореми у схемі Бернуллі

При великих значеннях n і k та досить малих значеннях p і q обчислення ймовірностей безпосередньо за формулами (1) і (2) досить громіздке. У таких випадках для обчислення відповідних ймовірностей використовують граничні теореми Муавра – Лапласа та теорему Пуассона.

Означення. Функцією Гаусса називається функція вигляду

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Властивості функції $\varphi(x)$

- 1) функція $\varphi(x)$ визначена для усіх $x \in (-\infty; \infty)$;
- 2) функція $\varphi(x) > 0$;
- 3) функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$;
- 5) $\varphi(x) \approx 0$, якщо $x \geq 4$ ($x \leq -4$).

ТЕОРЕМА (Локальна теорема Муавра – Лапласа). Якщо проводиться n ($n \rightarrow \infty$) незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з’являється зі сталою ймовірністю p відмінною від 0 та 1, то ймовірність $P_n(k)$ того, що у цих випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів приблизно дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_0), \quad (7)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса, $x_0 = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Значення функції $\varphi(x)$ для $x \geq 0$ табульовані (Додаток А).

Приклад. Проводиться серія з 500 випробувань, у кожному з яких деяка подія A може відбутися з постійною ймовірністю, яка дорівнює 0,8. Знайдіть ймовірність того, що у серії випробувань подія з’явиться рівно 120 разів. Знайдіть ймовірність найбільш ймовірного числа появи події A .

Розв’язання. За умовою задачі $n = 500$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$, $k = 120$. Очевидно, що обчислити необхідно ймовірність $P_{500}(120)$ за формулою Бернуллі, яка призводить до громіздких обчислень. Так як значення ймовірності p досить велике, то застосуємо локальну теорему Муавра – Лапласа. Так як

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{120 - 400}{\sqrt{400 \cdot 0,2}} \approx -31,31,$$

то за властивостями функції $\varphi(x)$ отримаємо, що $\varphi(-31,31) = 0$. Тоді за формулою (7)

$$P_{500}(120) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2}} \varphi(-31,31) = 0.$$

Отже, ймовірність того, що у 500 незалежних випробуваннях подія A відбудеться рівно 120 разів практично дорівнює нулю.

Знайдемо найбільш ймовірну кількість появи події A у серії з 500 випробувань. За формулою (6) маємо

$$\begin{aligned} 400 - 0,2 &\leq k_0 \leq 400 + 0,8 \Rightarrow \\ 399,8 &\leq k_0 \leq 400,8 \Rightarrow k_0 = 400. \end{aligned}$$

Тоді

$$x = \frac{k_0 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{400 - 400}{\sqrt{400 \cdot 0,2}} = 0$$

і за таблицею значень функції $\varphi(x)$ знаходимо $\varphi(0) = 0,3989$. (Додаток А).

Шукану ймовірність знаходимо за формулою (7):

$$P_{500}(400) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2}} \varphi(0) \approx 0,11 \cdot 0,3989 = 0,043879.$$

Означення. Інтегральною функцією Лапласа називається функція вигляду

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Властивості функції Лапласа $\Phi(x)$

- 1) функція $\Phi(x)$ визначена для усіх $x \in (-\infty; \infty)$;
- 2) функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 3) $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$, якщо $x \geq 5$ і $\Phi(x) \approx -\frac{1}{2}$, якщо $x \leq -5$.

ТЕОРЕМА (Інтегральна теорема Муавра – Лапласа). Якщо проводиться n ($n \rightarrow \infty$) незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється зі сталою ймовірністю p відмінною від 0 та 1, то ймовірність $P_n(k_1; k_2)$ того, що в цих випробуваннях подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів приблизно дорівнює

$$P_n(k_1 \leq k < k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (8)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – інтегральна функція Лапласа, а $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$, $i = 1, 2$.

Функція $\Phi(x)$ табульована (Додаток Б).

Приклад. При встановленому технологічному процесі підприємство випускає в середньому 80% продукції першого гатунку. Знайдіть ймовірність того, що у партії з 1000 виробів кількість деталей першого гатунку

- а) буде між 650 і 780;
- б) буде меншою за 770.

Розв'язання. За умовою $n = 1000$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$. Так як кількість деталей першого гатунку потрапляє в інтервал, то для обчислення шуканої ймовірності застосуємо інтегральну теорему Муавра – Лапласа.

а) Необхідно обчислити $P_{1000}(650; 780)$, тобто $k_1 = 650$, $k_2 = 780$. Обчислимо значення x_1 і x_2 :

$$x_1 = \frac{650 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -11,86, \quad x_2 = \frac{780 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,58.$$

Так як $x_1 < -5$, то за властивостями функції $\Phi(x)$ отримаємо $\Phi(x_1) \approx -0,5$. Оскільки функція непарна, то $\Phi(-1,58) = -\Phi(1,58)$, тоді за таблицею значень інтегральної функції Лапласа $\Phi(x)$ (Додаток Б) визначаємо значення $\Phi(1,58) \approx 0,4429$. Отже,

$$P_{1000}(650; 780) \approx \Phi(-1,58) - \Phi(-11,86) = -0,4429 + 0,5 = 0,0571.$$

б) За умовою кількість деталей першого гатунку має бути меншою за 770, тобто $k_1 = 0$ і $k_2 = 770$, отже, необхідно знайти ймовірність того, що число першосортних виробів потрапляє в інтервал від 0 до 770, тобто $P_{1000}(0; 770)$. Спочатку обчислимо значення x_1 і x_2 :

$$x_1 = \frac{0 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -63,25, \quad x_2 = \frac{770 - 1000 \cdot 0,8}{\sqrt{1000 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,37.$$

Так як $x_1 < -5$, то $\Phi(x_1) \approx -0,5$. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $\Phi(x_2) = \Phi(-2,37) = -\Phi(2,37) \approx -0,49$. Отже,

$$P_{1000}(0; 770) \approx \Phi(-2,37) - \Phi(-63,25) = -0,49 + 0,5 = 0,01.$$

Теорема Пуассона

Локальна теорема Муавра – Лапласа дає досить гарне наближення для ймовірностей, що оцінюються у тому випадку, коли ймовірності p або q близькі до $\frac{1}{2}$ (число npq досить велике). Але з наближенням значень p і q до одиниці або до нуля, похибка обчислень за формулою (7) збільшується. Тому в такому випадку краще використовувати теорему Пуассона.

Теорема (Пуассона). Нехай проводиться n ($n \rightarrow \infty$) незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється зі сталою ймовірністю p . Якщо ймовірність p досить мала, то

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{де } \lambda = np \quad (9)$$

Формула (9) називається **формулою Пуассона**.

Формула (9) дає високу точність при невеликих значеннях n , якщо величина λ є малою ($\lambda \leq 7$).

Приклад. Знайти ймовірність того, що серед випадково обраних 100 чоловік у жодної людини не буде день народження 1 січня.

Розв'язання. Ймовірність того, що день народження випаде на даний день року дорівнює $p = \frac{1}{365}$. Так як число $\lambda = np = \frac{100}{365} \approx 0,27$ достатньо мале, то застосуємо формулу Пуассона:

$$P_{100}(k) \approx \frac{0,27^k}{k!} \cdot e^{-0,27}.$$

Для $k = 0$ (жодна людина) маємо $P_{100}(0) \approx 0,76035$.

Лекція 14.

ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

План лекції.

1. Дискретні випадкові величини.
2. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

При дослідженні багатьох проблем виникають такі випадкові події (ВП), наслідком яких є поява деякого числа, заздалегідь невідомого. Тому, такі числові значення випадкові.

Прикладом ВП є кількість очок, що випадає при киданні грального кубика; кількість студентів, які прийдуть на лекцію; кількість цукрового буряку, який планують отримати з одного гектара.

Означення. Випадковою величиною (ВВ) X називається числова функція, яка задана на просторі елементарних подій Ω : $X = f(\omega)$, де ω – елементарні наслідки (або елементарні події, які належать простору Ω).

Позначають ВВ, як правило, великими літерами латинського алфавіту: $X, Y, Z, \dots$, а їх можливі значення – відповідними малими літерами з індексами. Наприклад, якщо X – ВВ, то її можливі значення позначають $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Для повної характеристики ВВ треба вказати усі її можливі значення та ймовірності, з якими ці значення приймаються або закон, за яким знаходять ймовірності кожного значення: $p_k = P(X = x_k) = f(x_k)$.

Випадкові величини поділяються на дискретні та неперервні.

Дискретні випадкові величини

Означення. Дискретною (розривною) випадковою величиною (ДВВ) називають таку величину, яка може приймати відокремлені, ізольовані одне від одного числові значення (їх можна пронумерувати) з відповідними ймовірностями.

Кількість значень ДВВ може бути як скінченною так і нескінченною.

Наприклад:

- а) кількість влучень у мішень при трьох пострілах буде $X : 0, 1, 2, 3$. Отже, X може приймати чотири ізольовані числові значення з різними ймовірностями;
- б) кількість народжених хлопчиків серед 70 новонароджених дітей $X : 0, 1, 2, \dots, 70$;
- в) кількість викликів таксі Z на диспетчерському пункті є ДВВ при $t \rightarrow \infty$. Значення Z зростають, тобто їх кількість прямує до нескінченності $Z : 0, 1, 2, \dots, n, \dots$.

Означення. Законом розподілу ДВВ називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Нехай ДВВ X приймає значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ з відповідними ймовірностям $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Закон розподілу ДВВ X можна задати: таблично, графічно та аналітично.

Означення. Табличним способом задання ДВВ називається ряд розподілу, який зображується у вигляді таблиці, де у першому рядку записуються усі можливі значення X , а у другому – відповідні ймовірності:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Зауваження. Події $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ утворюють повну групу, тому має місце властивість $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. У випадку, коли множина значень X нескінченна (але зліченна), ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ є збіжним, а його сума дорівнює 1.

Приклад. Умовами лотереї передбачено, що один білет дає виграш у 150 грн.; два білети – по 70 грн.; сім білетів – по 10 грн. та 15 білетів – по 5 грн. Знайти закон розподілу суми виграшу власником одного лотерейного білету, якщо у продажу міститься 100 білетів.

Розв'язання. Запишемо можливі значення дискретної випадкової величини X : $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 10$, $x_4 = 70$, $x_5 = 150$. Відповідно ймовірності можливих значень обчислимо за класичним означенням ймовірності $P = \frac{m}{n}$ при $n = 100$:

$$p_1 = \frac{75}{100} = 0,75; \quad p_2 = \frac{15}{100} = 0,15; \quad p_3 = \frac{7}{100} = 0,07; \quad p_4 = \frac{2}{100} = 0,02; \quad p_5 = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Тоді шуканий закон розподілу запишемо у вигляді таблиці:

$X = x_k$	0	5	10	70	150
$P = p_k$	0,75	0,15	0,07	0,02	0,01

Графічний спосіб задання ДВВ полягає у побудові багатокутника розподілу, тобто ламаної лінії, яка з'єднує точки з координатами $(x_k; p_k)$.

Для його побудови по осі абсцис відкладають значення x_k випадкової величини X , а по осі ординат – ймовірності p_k цих значень, після чого точки з координатами $(x_k; p_k)$ послідовно з'єднують відрізками прямих.

Приклад. Дискретна випадкова величина X має закон розподілу ймовірностей, що заданий таблицею:

$X = x_k$	-1	0	2	5	7
$P = p_k$	0,2	0,3	0,2	0,1	0,2

Побудувати багатокутник розподілу.

Розв'язання. Многокутник розподілу (Рис. 1):



Рисунок 1. Многокутник розподілу

Аналітичний спосіб задання ДВВ базується на побудові певної функції, за якою можна знайти ймовірність p_k відповідних значень x_k .

Означення. Функцією розподілу ймовірностей ДВВ називається функція, яка має вид:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p(x_i),$$

де $P(X < x)$ – ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення менше деякого фіксованого числа x , яке пробігає усі дійсні значення.

Властивості функції розподілу ДВВ

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ (за означенням функції $F(x)$ маємо, що $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, а

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1);$$

2) функція розподілу $F(x)$ є неспадною, тобто при $x_2 > x_1$ виконується нерівність $F(x_2) \geq F(x_1)$;

3) ймовірність того, що випадкова величина X потрапить у заданий інтервал обчислюється за формулою

$$P(x_1 \leq X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1).$$

Приклад. Побудувати функцію розподілу ДВВ заданої таблицею розподілу:

X	-5	2,5	10
P	0,5	0,4	0,1

Розв'язання. 1) Для усіх $x \in (-\infty; -5)$ функція $F(x) = 0$. При $x = -5$ функція $F(x)$ також дорівнює нулю – це впливає з означення функції розподілу: $F(-5) = P(X < -5) = 0$, тобто $F(x) = 0$, при $x \leq -5$.

2) При $-5 < x \leq 2,5$ функція $F(x) = P(X < 2,5) = 0,5$, бо лівіше будь-якої точки інтервалу є тільки одне значення $x_1 = -5$, яке з'являється з ймовірністю $p_1 = 0,5$.

3) При $2,5 < x \leq 10$ функція $F(x) = p_1 + p_2 = 0,5 + 0,4 = 0,9$.

4) При $x > 10$, $F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = 0,5 + 0,4 + 0,1 = 1$.

Отже функція розподілу має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -5, \\ 0,5, & -5 < x \leq 2,5, \\ 0,9, & 2,5 < x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Графік функції розподілу (рис. 2):

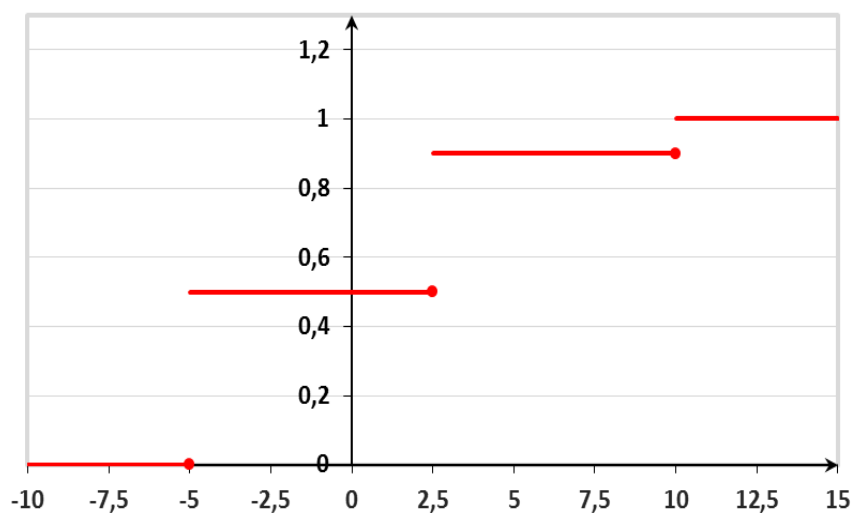


Рисунок 2. Функція розподілу ДВВ

Числові характеристики дискретних випадкових величин

Закон розподілу ДВВ повністю характеризує випадкові величини і дозволяє розв'язувати усі пов'язані з ним задачі. Але в практичній діяльності не завжди вдається одержати закон розподілу або закон надто складний для практичних розрахунків, тому виникла потреба характеризувати ДВВ за допомогою числових

характеристик, які характеризують особливості випадкових величин. Найчастіше використовують три числові характеристики: *математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення*.

Означення. Математичним сподіванням ДВВ X називають число, яке дорівнює сумі добутків усіх можливих значень випадкової величини на відповідні їм ймовірності

$$M(X) = \sum_{k=1}^n x_k p_k. \quad (1)$$

Зауваження. Якщо ДВВ X приймає нескінченну кількість значень, то математичне сподівання обчислюють за формулою

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k,$$

за умови збіжності відповідного ряду.

Далі будемо розглядати випадкові величини, які приймають скінченну кількість значень.

Зауваження. Математичне сподівання ДВВ X відповідає середньому значенню випадкової величини. У практичній діяльності під математичним сподіванням розуміють центр розсіювання цієї величини.

Властивості математичного сподівання

- 1) $M(C) = C, \quad C = \text{const};$
- 2) $M(CX) = C \cdot M(X), \quad C = \text{const};$
- 3) $M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n);$
- 4) якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$ – незалежні дискретні випадкові величини, то
 $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n).$

Приклад. Дві незалежні випадкові величини X та Y розподілені наступним чином:

X	-5	2,5	10
P	0,5	0,4	0,1

Y	8	11
P	0,6	0,4

Знайти математичне сподівання випадкових величин $X \cdot Y$ та $X + Y$.

Розв’язання. З властивості 3 випливає, що $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$. За умовою випадкові величини X та Y – незалежні, тому за властивістю 4 маємо, що $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$. Знайдемо математичні сподівання кожної з випадкових величин:

$$M(X) = -5 \cdot 0,5 + 2,5 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,1 = 4,5, \quad M(Y) = 8 \cdot 0,6 + 11 \cdot 0,4 = 9,2.$$

Тоді

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) = 4,5 \cdot 9,2 = 41,4,$$

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y) = 4,5 + 9,2 = 13,7.$$

Для характеристики розсіювання можливих значень X відносно центру розподілу введемо нову числову характеристику.

Означення. Дисперсією ДВВ X називають число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення ДВВ X від її математичного сподівання

$$D(X) = M((X - M(X))^2). \quad (2)$$

Властивості дисперсії ДВВ

- 1) $D(X) \geq 0$;
- 2) $D(C) = 0, \quad C = \text{const}$;
- 3) $D(CX) = C^2 D(X), \quad C = \text{const}$;
- 4) якщо X та Y незалежні ДВВ, то $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Теорема. Дисперсія ДВВ X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадрата її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \quad (3)$$

Приклад. Обчислити дисперсію випадкової величини X , що задана законом:

X	-5	2,5	4	7
P	0,15	0,45	0,1	0,3

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання за допомогою формули (1)

$$M(X) = -5 \cdot 0,15 + 2,5 \cdot 0,45 + 4 \cdot 0,1 + 7 \cdot 0,3 = 2,875,$$

тоді $M^2(X) = 8,266$.

Щоб знайти $M(X^2)$ складемо закон розподілу для випадкової величини X^2 :

X^2	25	6,25	16	49
P	0,15	0,45	0,1	0,3

Тоді $M(X^2) = 25 \cdot 0,15 + 6,25 \cdot 0,45 + 16 \cdot 0,1 + 49 \cdot 0,3 = 22,863$.

У результаті дисперсія дорівнює $D(X) = 22,863 - 8,266 = 14,597$.

Приклад. Задано два закони розподілу дискретних випадкових величин X та Y . Кожен з яких показує кількість очок, які вибиває перший та другий стрілець.

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,15	0,11	0,04	0,05	0,04	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0,01	0,03	0,05	0,09	0,11	0,24	0,21	0,10	0,10	0,04	0,02

Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості отриманих очок для кожного стрільця та встановити, який з двох стрільців стріляє краще.

Розв'язання. Припустимо, що з двох стрільців краще стріляє той, хто в середньому отримує більшу кількість очок. Таким середнім значенням випадкової

величини є її математичне сподівання. Обчислимо значення $M(X)$ та $M(Y)$ за формулою (1):

$$M(X) = \sum_{k=1}^{11} x_k p_k = 5,36, \quad M(Y) = \sum_{i=1}^{11} y_i p_i = 5,36.$$

Так як значення математичного сподівання для обох розподілів однакове, то сказати, хто є кращим стрільцем не можна. Щоб виявити кращого можна порівнявши відхилення кількості очок відносно середнього значення.

За формулою (3) знаходимо дисперсії обох розподілів:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 13,61, \quad D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 2,04.$$

У результаті маємо, що дисперсія, як характеристика розсіювання відносно середнього значення, є меншою у другого стрільця, отже, краще стріляє саме другий.

У більшості випадків величина X , має розмірність, наприклад метр, міліметр, грам і т.д., тому її дисперсія буде вимірюватися у квадратних одиницях цієї розмірності. У практичній діяльності доцільно знати значення розсіювання випадкової величини в одиницях розмірності вихідної величини. Для цього використовують поняття середнього квадратичного відхилення.

Означення. Середнім квадратичним відхиленням (стандартним відхиленням) називають числову характеристику закону розподілу

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4)$$

Означення. Модою (Mo) дискретної випадкової величини називають таке її значення, ймовірність якого найбільша.

Зауваження. На многокутнику розподілу значенню моди відповідає абсциса найвищої точки.

Означення. Медіаною (Me) випадкової величини X є значення, для якого виконується рівність $P(X < Me) = P(X \geq Me) = 0,5$.

Тобто, щоб знайти медіану необхідно розглянути ймовірності $P(X < x_k)$, де x_k – значення випадкової величини X :

$$P(X < x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = x_i). \quad (5)$$

Зауваження. Не всі дискретні випадкові величини мають медіану.

Приклад. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

X	1	3	5	9
P	0,3	0,2	0,1	0,4

Знайти моду та медіану випадкової величини X .

Розв'язання. Визначимо моду. Найбільшу ймовірність $p_4 = 0,4$ має випадкова величина $x_4 = 9$, отже $Mo = 9$. Знайдемо медіану. Згідно формули (5) маємо:

$$P(X < 1) = 0, \quad P(X < 3) = 0,3, \quad P(X < 5) = 0,3 + 0,2 = 0,5, \quad \text{тобто } Me = 5.$$

Лекція 15.

НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇХ ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

План лекції.

1. Неперервні випадкові величини.
2. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Неперервні випадкові величини

Для неперервних випадкових величин записати таблицю ряду розподілу неможливо (так як кількість значень нескінченна). Тому для характеристики використовують не ймовірність окремих значень $P(x_i)$, а інтегральну та диференціальну функції розподілу.

Означення. Неперервною випадковою величиною (НВВ) називають величину, яка може приймати будь-яке числове значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу $(a;b)$. Кількість можливих значень такої величини є нескінченна та незліченна.

Наприклад, величина похибки, яка може бути при вимірюванні відстані або ваги; час безвідмовної роботи приладу.

Означення. Інтегральною функцією розподілу НВВ (функцією розподілу) називають ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення менше x , тобто

$$F(x) = P(X < x). \quad (1)$$

Зауваження. Будемо розглядати тільки такі важливі для застосування неперервні випадкові величини, у яких функція розподілу $F(x)$ є неперервною та диференційованою майже у всіх точках.

Інтегральна функція НВВ задається формулою

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ f(x), & x \in [a;b], \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

та має графік подібний до представленого на (Рис. 1):

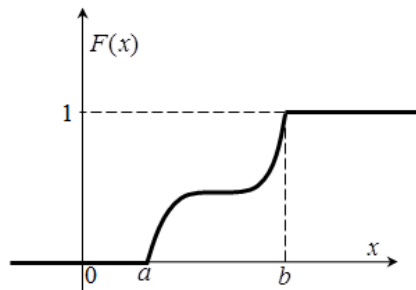


Рисунок 1. Інтегральна функція розподілу

Властивості функції розподілу

- 1) $0 \leq F(x) \leq 1$;
- 2) $F(x)$ – диференційована майже у всіх точках та неперервна у всіх точках;
- 3) $F(x)$ – неспадна функція, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, при $x_2 > x_1$;
- 4) Функція розподілу на нескінченності приймає значення:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

- 5) Ймовірність того, що величина X приймає значення з інтервалу $(a; b]$ дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі, тобто

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Зауваження. Якщо X – неперервна випадкова величина, то ймовірність того, що величина потрапить у інтервал $(a; b)$ не залежить від того, чи є інтервал відкритим, чи є замкненим, тобто

$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$

Приклад. Функція розподілу випадкової величини X має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність того, що випадкова величина буде приймати значення з інтервалу $(1; 3]$.

Розв’язання. Згідно властивості 5, маємо

$$P(1 < X \leq 3) = F(3) - F(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Означення. Щільністю розподілу НВВ (диференціальною функцією розподілу), називається похідна від інтегральної функції розподілу НВВ

$$f(x) = F'(x). \quad (3)$$

Диференціальна функція задається формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a; b], \\ g(x), & x \in [a; b]. \end{cases}$$

Приклад. Функція розподілу випадкової величини X має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти диференціальну функцію розподілу НВВ.

Розв'язання. Знайдемо щільність розподілу за формулою (3):

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Або у компактній формі

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0; 2], \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Властивості щільності розподілу

1) $f(x) \geq 0$ (як похідна неспадної функції $F(x)$);

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ тому, що подія $\{-\infty < X < \infty\}$ достовірна.

Теорема. Ймовірність того, що НВВ X прийме значення з інтервалу $(a; b)$ обчислюється за формулою

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \quad (4)$$

Наслідок. Інтегральну функцію розподілу $F(x)$ можна знайти за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt. \quad (5)$$

Приклад. Випадкова величина має щільність ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} A \cos 2x, & -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт A , функцію розподілу, побудувати графіки функцій інтегрального та диференціального розподілів, визначити ймовірність того, що випадкова величина X буде приймати значення з інтервалу $(\pi/6; 2)$.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнт A , використовуючи властивість 2 диференціальної функції розподілу

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{4}} 0dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} A \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\infty} 0dx = \frac{A \sin 2x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = A = 1.$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу за допомогою формули (5):

1) Якщо $x < -\frac{\pi}{4}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

2) Якщо $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{4}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^x \cos 2t dt = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^x = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$$

3) Якщо $x > \frac{\pi}{4}$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{4}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^x 0 dt = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 1$.

Отже, інтегральна функція розподілу має вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Побудуємо графіки диференціальної та інтегральної функцій, відповідно, (Рис. 2, Рис. 3):

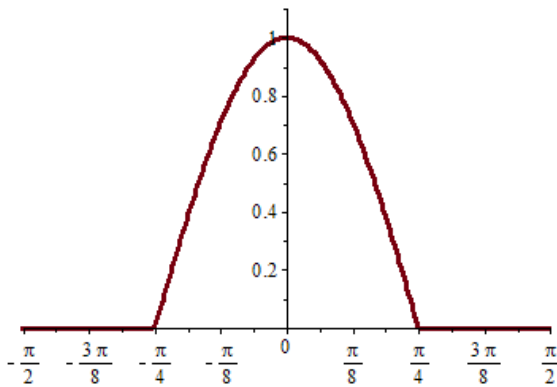


Рисунок 2. Диференціальна функція

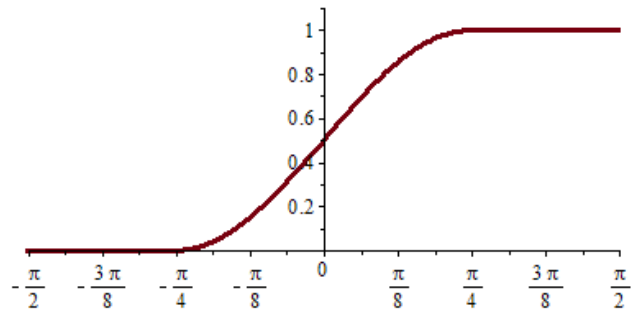


Рисунок 3. Інтегральна функція

Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина потрапляє в заданий інтервал

$\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$ за формулою (4)

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\frac{\pi}{6}}^2 f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^2 0 dx = \frac{\sin 2x}{2} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,067,$$

або за формулою (2):

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sin(\pi/3) + 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,067.$$

Числові характеристики неперервних випадкових величин

У випадку НВВ математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення мають такий же зміст, як і для дискретної випадкової величини (ДВВ), але обчислюються за іншими формулами.

Означення. Математичним сподіванням $a = M(x)$ та дисперсією неперервної випадкової величини з щільністю розподілу $f(x)$ називаються величини, що обчислюються за формулами, відповідно

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx, \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx. \quad (6)$$

Зауваження. Якщо усі можливі значення неперервної випадкової величини знаходяться у відрізку $[a; b]$, то формули для обчислення математичного сподівання та дисперсії мають вид:

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x) dx, \quad D(x) = \int_a^b (x - M(x))^2 \cdot f(x) dx. \quad (7)$$

Зауваження. Усі властивості для математичного сподівання та дисперсії, які були розглянуті для ДВВ справедливі і для НВВ, тому для обчислення дисперсії можна використовувати формулу

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (M(x))^2. \quad (8)$$

Означення. Середнім квадратичним відхиленням НВВ називають число

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (9)$$

Приклад. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{25}, & 0 < x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо щільність ймовірності за формулою (3)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;5), \\ \frac{2x}{25}, & 0 < x < 5. \end{cases}$$

Так як значення НВВ знаходяться в інтервалі (0;5), то числові характеристики будемо знаходити за формулами (7), (8), (9).

Математичне сподівання:

$$M(x) = \int_0^5 x \cdot \frac{2x}{25} dx = \frac{2}{25} \int_0^5 x^2 dx = \frac{2}{25} \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{2}{25} \cdot \frac{125}{3} = \frac{10}{3}.$$

Відповідно, дисперсія має вид

$$D(x) = \int_0^5 x^2 \cdot \frac{2x}{25} dx - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{2}{25} \frac{x^4}{4} \Big|_0^5 - \frac{100}{9} = \frac{25}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}.$$

Приклад. Знайти числові характеристики випадкової величини X , яка задана функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{3}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію НВВ за формулами (6) та (8):

$$M(x) = \int_{-\infty}^1 x \cdot 0 dx + \int_1^{+\infty} x \cdot \frac{3}{x^4} dx = 0 + 3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^3} = \frac{3}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{3}{2},$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^1 x^2 \cdot 0 dx + \int_1^{+\infty} x^2 \cdot \frac{3}{x^4} dx - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 + 3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_1^b \frac{dx}{x^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Означення. Модою (Mo) неперервної випадкової величини називається її найбільш ймовірне значення для якого щільність розподілу $f(x)$ досягає свого максимуму.

Зауваження. Якщо щільність ймовірності досягає максимуму у кількох точках, то розподіл називають **полімодальним**, а якщо ця крива не має максимуму, але має мінімум – **антимодальним**.

Зауваження. У загальному випадку мода та математичне сподівання різні. Але у випадку, коли крива розподілу є симетричною відносно прямої $x = Mo(X)$, математичне сподівання та мода випадкової величини співпадають.

Приклад. Знайти моду випадкової величини X , диференціальна функція якої має вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;1), \\ 3x - 2x^3, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Щоб визначити моду неперервної випадкової величини необхідно знайти точку максимуму функції $f(x)$ за алгоритмом відомим з курсу вищої математики. Знаходимо похідну від функції щільності та визначаємо критичні точки:

$$f'(x) = 3 - 6x^2, \quad 3 - 6x^2 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отримали дві критичні точки, при чому точка $x_2 \notin (0;1)$. Так як друга похідна в точці x_1 менше 0, то x_1 – точка максимуму щільності ймовірності, тобто $Mo(X) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Означення. Медіаною (Me) неперервної випадкової величини X називається таке її значення, для якого

$$F(Me(X)) = P(X < Me(X)) = P(X > Me(X)) = 0,5, \quad (10)$$

тобто ймовірність того, що НВВ буде мати значення менше або більше за медіану дорівнює 0,5.

Зауваження. Геометрично вертикальна пряма $x = Me(X)$ ділить площу фігури під кривою щільності на дві рівні частини.

Зауваження. Для розподілу, симетричного відносно прямої $x = Mo(X)$, математичне сподівання, мода та медіана випадкової величини співпадають.

Приклад. Знайти моду та медіану НВВ з щільністю ймовірності $f(x) = 3x^2$ при $x \in [0;1]$.

Розв'язання. Медіану $Me(X) = b$ знайдемо з умови (10), тобто $\int_{-\infty}^x f(t)dt = 0,5$.

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^b 3x^2dx = x^3 \Big|_0^b = b^3 = \frac{1}{2},$$

звідки $b = Me(X) = \sqrt[3]{0,5} \approx 0,79$.

Так як диференціальна функція розподілу є зростаючою на відрізку $[0;1]$, то свого максимального значення вона набуває при $x = 1$, тобто $Mo(X) = 1$.

Лекція 16.
ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДВВ ТА НВВ.
НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ.

План лекції.

1. Біноміальний закон розподілу дискретних випадкових величин.
2. Нормальний закон розподілу (закон Гаусса) неперервних випадкових величин
3. Розподіл Пірсона та розподіл Стюдента.

Біноміальний закон розподілу дискретних випадкових величин

Існує ряд законів розподілу, що відповідають дискретним випадковим величинам: *біноміальний закон, закон розподілу Пуассона, геометричний та гіпергеометричний закони.*

Означення. Біноміальний закон розподілу – це закон розподілу кількості $X = m$ появи події A у n незалежних випробуваннях, у кожному з яких подія відбувається з однаковою ймовірністю p .

ДВВ має біноміальний закон розподілу, якщо вона приймає значення $0, 1, 2, \dots, n$ з ймовірностями, що обчислюються за формулою Бернуллі:

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad (1)$$

де p – параметр розподілу, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $m = \overline{0, n}$.

Ряд розподілу біноміального закону має вид:

x_i	0	1	2	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

Теорема. Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X , що має біноміальний закон розподілу обчислюються відповідно за формулами

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq. \quad (2)$$

Приклад. До магазину надходить взуття з двох фабрик у співвідношенні 2:3. Було придбано 4 пари взуття. Скласти закон розподілу кількості придбаних пар взуття, що були виготовлені на першій фабриці. Знайти математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Розв’язання. Спочатку визначимо ймовірність того, що випадково обрана пара взуття виготовлена на першій фабриці. Згідно умови до магазину надходить 2 частини взуття від першої фабрики та 3 частини – від другої фабрики (всього взуття – 5 частин). Тоді $p = 2/(3 + 2) = 0,4$.

Нехай $ВВ\ X$ – кількість пар взуття виготовлених першою фабрикою значення якої $x_i: 0, 1, 2, 3, 4$.

Випадкова величина має біноміальний закон розподілу з параметрами $n=4$ та $p=0,4$. Значення ймовірностей p_i обчислюємо за формулою (1):

$$p_1 = C_4^0(0,4)^0(0,6)^4 = 0,1296, \quad p_2 = C_4^1(0,4)^1(0,6)^3 = 0,3456,$$

$$p_3 = C_4^2(0,4)^2(0,6)^2 = 0,3456, \quad p_4 = C_4^3(0,4)^3(0,6)^1 = 0,1536,$$

$$p_5 = C_4^4(0,4)^4(0,6)^0 = 0,0256.$$

Ряд розподілу випадкової величини має вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Легко переконатися, що сума ймовірностей отриманого закону розподілу дорівнює 1.

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію за формулами (2):

$$M(X) = np = 4 \cdot 0,4 = 1,6, \quad D(X) = npq = 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,96.$$

Тоді середнє квадратичне відхилення: $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{0,96} \approx 0,98$.

Нормальний закон розподілу (закон Гаусса) неперервних випадкових величин

Нормальний закон розподілу найчастіше зустрічається на практиці.

Означення. Випадкова величина X має **нормальний закон розподілу** з параметрами a та σ , якщо щільність її ймовірностей має вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Зауваження. Нормальний закон розподілу з параметрами a та σ , зазвичай позначають $N(a; \sigma^2)$.

Графік функції нормального закону розподілу називають нормальною кривою або кривою Гаусса (Рис. 1):

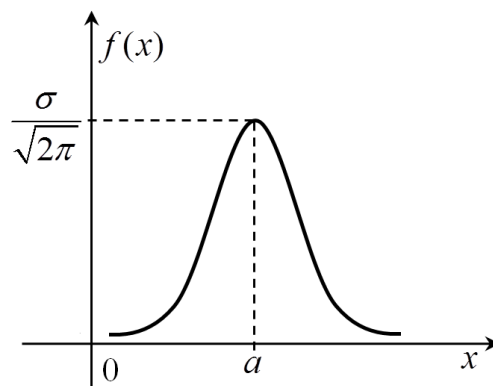


Рисунок 1. Графік функції нормального розподілу

Інтегральна функція нормального розподілу випадкової величини має вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Теорема. Математичне сподівання та дисперсія неперервної величини X , розподіленої за нормальним законом обчислюються за формулами

$$M(X) = a, \quad D(X) = \sigma^2. \quad (3)$$

Тобто параметри нормального розподілу a і σ дорівнюють відповідно математичному сподіванню та середньому квадратичному відхиленню випадкової величини.

Зауваження. Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X буде належати інтервалу $[c; d]$ обчислюється за формулою:

$$P(c \leq X \leq d) = \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right), \quad (4)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, яка є табульованою (Додаток Б).

Приклад. Зріст жінок розподілено за нормальним законом. Математичне сподівання зросту дорівнює 168 см, а середнє квадратичне відхилення – 5 см. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з трьох обраних навмання жінок буде мати зріст від 165 см до 170 см.

Розв’язання. Позначимо через X – нормально розподілену випадкову величину, що відповідає зросту жінок. За умовою математичне сподівання $M(X) = 168$ см, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 5$ см. Нехай подія A – з трьох обраних жінок хоча б одна має зріст з проміжку $[165; 170]$, тоді подія $\bar{A}$ – зріст усіх трьох жінок не належить проміжку $[165; 170]$. Величина X розподілена нормально, тому знайдемо ймовірність того, що зріст однієї жінки належить заданому проміжку за допомогою формули (4):

$$P(165 \leq X \leq 170) = \Phi\left(\frac{170-168}{5}\right) - \Phi\left(\frac{165-168}{5}\right) = \Phi\left(\frac{2}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-3}{5}\right) = \Phi(0,4) + \Phi(0,6),$$

за допомогою таблиці для значень інтегральної функції Лапласа (Додаток Б), отримаємо

$$P(165 \leq X \leq 170) = 0,1554 + 0,2257 = 0,3811.$$

Тоді ймовірність того, що зріст однієї жінки не належить проміжку $[165; 170]$

$$p = 1 - P(165 \leq X \leq 170) = 1 - 0,3811 = 0,6189.$$

Ймовірність того, що зріст усіх трьох жінок не належить проміжку $[165;170]$

$$P(\bar{A}) = (0,6189)^3 \approx 0,237.$$

У результаті ймовірність події A буде дорівнювати

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,237 = 0,763.$$

Характерним для нормального розподілу є правило трьох сигм.

Правило трьох сигм: якщо випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами a та σ , то практично достовірно, що її значення належать інтервалу $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, а ймовірність того, що випадкова величина потрапить у заданий проміжок дорівнює

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Зауваження. Якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але відхилення цієї випадкової величини від її математичного сподівання за абсолютним значенням не перевищує 3σ ($|X - a| < 3\sigma$), то можна припустити, що X розподілена нормально.

Розподіл Пірсона та розподіл Стьюдента

За допомогою нормального закону розподілу було отримано ряд інших важливих розподілів: розподіл Пірсона, розподіл Стьюдента та розподіл Фішера-Снедекора.

Розподіл Пірсона (розподіл χ^2). Розподіл Пірсона з k степенями свободи називається розподілом суми квадратів k незалежних випадкових величин Z_i ($i = \overline{1, k}$), що розподілені за нормованим нормальним законом $N(0;1)$, тобто

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2.$$

Диференціальна функція розподілу χ^2 має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{2}-1}, & x \geq 0, \end{cases}$$

де $\Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1} dt$ – гамма-функція Ейлера, для цілих додатних значень $\Gamma(y+1) = y!$

Зауваження. Розподіл χ^2 визначається лише одним параметром – кількістю степенів свободи k . Зі збільшенням параметру k розподіл повільно прямує до нормального.

Числові характеристики розподілу: $M(\chi^2) = k$, $D(\chi^2) = 2k$.

Розподіл Стюдента. Розподілом Стюдента (T -розподілом) називається розподіл випадкової величини, який дорівнює відношенню нормованої випадкової величини до кореня квадратного незалежної випадкової величини, яка має χ^2 розподіл

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{\chi^2}{k}}},$$

де Z – випадкова величина, яка має нормальний розподіл $N(0;1)$, χ^2 – незалежна випадкова величина, яка має розподіл Пірсона з k степенями свободи.

Диференціальна функція розподілу має вид:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{\pi k}} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

де $\Gamma(y)$ – гамма-функція.

При $k \rightarrow \infty$ розподіл Стюдента швидко наближається до нормального розподілу.

Числові характеристики розподілу: $M(X) = 0$, $D(X) = \frac{k}{k-2}$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик, В.П. Вища математика : навч. посіб. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – К. : Вид-во А.С.К., 2003. – 648 с.
2. Шаран, О.В. Комплексні числа та їх застосування / О.В. Шаран. – Дрогобич : Каменяр, 2004. – 192 с.
3. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М. : Наука, 1960. – 432 с.
4. Виноградова, И.А. Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды) : учеб. пособие / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М. : Факториал, 1996. – 477 с.
5. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1997. – 624 с.
6. Кудрявцев, Л.Д. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды : учеб. пособие / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Физматлит, 2003. – 715 с.
7. Шостак, Р.Я. Операционное исчисление / Р.Я. Шостак. – М. : Наука, 1968. – 192 с.
8. Мантуров, О.В. Курс высшей математики : Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной. Численные методы. Теория вероятностей / О.В. Мантуров. – М. : Высш. шк., 1991. – 448 с.
9. Диткин, В.А. Операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М. : Высш. шк., 1975. – 407 с.
10. Балк, М.Б. Реальные применения мнимых чисел / М.Б. Балк, Г.Д. Балк, А.А. Полухин. – К. : Рад. шк., 1988. – 255 с.
11. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1997. – 479 с.
12. Барковський, В.В. Теорія ймовірностей та математична статистика / В.В. Барковський, Н.В. Барковська, О.К. Лопатін. – К. : ЦУЛ, 2002. – 448 с.
13. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1997. – 400 с.
14. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М. : Высш. шк., 2000. – 480 с.

ДОДАТОК А

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018
3.3	0.0017	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014	0.0013	0.0013
3.4	0.0012	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0009
3.5	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007	0.0007	0.0007	0.0006
3.6	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004
3.7	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003
3.8	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.9	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.00	0.0000	0.5	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.00	0.4772	2.50	0.4938
0.01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3438	1.51	0.4345	2.01	0.4778	2.51	0.4940
0.02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.02	0.4783	2.52	0.4941
0.03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.03	0.4788	2.53	0.4943
0.04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.04	0.4793	2.54	0.4945
0.05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	1.55	0.4394	2.05	0.4798	2.55	0.4946
0.06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.06	0.4803	2.56	0.4948
0.07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.07	0.4808	2.57	0.4949
0.08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.08	0.4812	2.58	0.4951
0.09	0.0359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.09	0.4817	2.59	0.4952
0.10	0.0398	0.6	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.10	0.4821	2.60	0.4953
0.11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.11	0.4826	2.61	0.4955
0.12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.12	0.4830	2.62	0.4956
0.13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	0.3708	1.63	0.4484	2.13	0.4834	2.63	0.4957
0.14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.14	0.4838	2.64	0.4959
0.15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.15	0.4842	2.65	0.4960
0.16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.16	0.4846	2.66	0.4961
0.17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.17	0.4850	2.67	0.4962
0.18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.18	0.4854	2.68	0.4963
0.19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.19	0.4857	2.70	0.4965
0.20	0.0793	0.7	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.20	0.4861	2.72	0.4967
0.21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.21	0.4864	2.74	0.4969
0.22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3888	1.72	0.4573	2.22	0.4868	2.76	0.4971
0.23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3907	1.73	0.4582	2.23	0.4871	2.78	0.4973
0.24	0.0948	0.74	0.2704	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.24	0.4875	2.80	0.4974
0.25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.25	0.4878	2.82	0.4976
0.26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.26	0.4881	2.84	0.4977
0.27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.27	0.4884	2.86	0.4979
0.28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.28	0.4887	2.88	0.4980
0.29	0.1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.29	0.4890	2.90	0.4981
0.30	0.1179	0.8	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2.30	0.4893	2.92	0.4982
0.31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.31	0.4896	2.94	0.4984
0.32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.32	0.4898	2.96	0.4985
0.33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.33	0.4901	2.98	0.4986
0.34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.34	0.4904	3.00	0.4987
0.35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.35	0.4906	3.04	0.4988
0.36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.36	0.4909	3.06	0.4989
0.37	0.1443	0.87	0.3078	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.37	0.4911	3.08	0.4990
0.38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.38	0.4913	3.08	0.4990
0.39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.39	0.4916	3.12	0.4991
0.40	0.1554	0.9	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.40	0.4918	3.16	0.4992
0.41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.41	0.4920	3.20	0.4993
0.42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.42	0.4922	3.26	0.4994
0.43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.43	0.4925	3.32	0.4995
0.44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.44	0.4927	3.40	0.4997
0.45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.45	0.4929	3.60	0.4998
0.46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.46	0.4931	3.80	0.49993
0.47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.47	0.4932	4.00	0.499968
0.48	0.1844	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.48	0.4934	4.50	0.499997
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	2.49	0.4936	5.00	0.4999997