УДК 004.272.2:519.63

І.А. Назарова, канд. техн. наук, доцент,
Донецький національний технічний університет, м. Покровськ, Україна
ianazard@gmail.com

Статичні методи балансування навантаження при паралельному розв'язанні задачі Коші на основі екстраполяційної технології

У роботі досліджено методи статичного балансування навантаження при паралельному розв'язанні багатовимірної початкової задачі, що задається системами звичайних диференційних рівнянь, на базі технології Річардсона. Наведено підходи, що використовують різні види паралелізму, властиві методу локальної екстраполяції. Отримано аналітичні залежності та проведено тестові експерименти для динамічних характеристик якості паралелізму від методу балансування навантаження, кількості процесорів та розміру задачі, параметрів методу в умовах заданої точності розв'язку.

Ключові слова: задача Коші, паралельні екстраполяційні методи, локальна екстраполяція Річардсона, балансування навантаження, ефективність, прискорення.

DOI: 10.31474/1996-1588-2019-1-28-54-60

Вступ

В даній роботі наведено результати досліджень, що присвячені аналізу якості алгоритмів балансування навантаження при розв'язанні задачі Коші для систем звичайних диференційних рівнянь (СЗДР):

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = F\big(x, \bar{y}(x)\big),\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0,$$

$$y: R \to R^m,\ F: R \times R^m \to R^m, \qquad (1)$$

паралельними методами локальної екстраполяції Річардсона (ЛЕР). Технологія ЛЕР призначена для підвищення ефективності інтегрування і належить до методів високоточного розв'язку задачі Коші, але потребує чимало обчислювальних витрат у послідовній реалізації. Потенційно для застосування технології при розв'язанні початкової задачі для систем рівнянь на комп'ютерах з розподіленою пам'яттю існує декілька рівнів паралелізму: системний, екстраполяційний та внутрішній паралелізм опорного методу. Але загальні накладні витрати на паралелізм, велика частка трудомістких обмінів або непродуктивних простоїв, знижують ефект від розпаралелювання екстраполяційного методу. Тому задача дослідження методів ефективного балансування навантаження, безумовно не тільки в даному конкретному випадку, є одним з найважливіших аспектів сучасного етапу розвитку паралельного комп'ютінгу. Очевидно, що нерівномірне використання обладнання, призводить до дисбалансу навантаження і, достатньо ймовірно, до критичного зниження ефективності функціонування паралельної архітектури.

Дана стаття досліджує проблему балансування завантаження мультипроцесорів для таких алгоритмів, як технологія ЛЕР у сукупності з різними топологіями комп'ютерів з розподіленою пам'яттю: гіперкуб, 2D-тор та 1D-тор або кільце.

Мета роботи полягає в розробці та дослідженні ефективності та масштабованості екстраполяційних методів розв'язання початкової задачі Коші для СЗДР, орієнтованих на реалізацію в паралельних комп'ютерних системах.

Завдання дослідження:

– провести аналіз ефективності послідовної реалізації ЛЕР в залежності від типу та порядку опорного методу та складності застосування різних послідовностей для генерування сіток інтегрування;

– розробити алгоритм, паралельну обчислювальну схему відображення технології ЛЕР на паралельну архітектуру з використанням системного паралелізму і оцінити її ефективність;

– розробити паралельні обчислювальні схеми технології ЛЕР з використанням екстраполяційного паралелізму і оцінити їх ефективність при застосуванні різних способів балансування навантаження;

– протестувати розроблені додатки для паралельної реалізації ЛЕР систему з визначенням аналітичних та експериментальних динамічних характеристик таких, як час реалізацій, загальні накладні витрати на паралелізм, прискорення та ефективність від кількості використаних процесорів, розміру СЗДР, машино-залежних констант та параметрів методів.

1 Екстраполяція Річардсона: базові положення

Послідовні і паралельні методи на основі технології локальної екстраполяції Річардсона з використанням явних опорних методів та ефективність їх реалізацій в системах масового паралелізму докладно описані в роботах [1-6].

Введемо базові позначення. У рамках ЛЕР задача Коші для СЗДР багаторазово розв'язується на одному кроці інтегрування: $x_{n+1} = x_n + H$, де H – базова довжина кроку. Задається ряд натуральних чисел $P_j = \{n_{1j}, \dots, n_{kj}\}$, $j = 1,2,\dots$ для отримання сіток, і, відповідно, послідовності кроків інтегрування: $h_i = H/n_i$, а також опорний чисельний метод порядку r_0. Для обчислення значень першого стовпця екстраполяційної таблиці (ЕТ), а саме наближених рішень початкової задачі у точці x_{n+1}: $T_{i,1} = \bar{y}_{h_i} = \bar{y}_{n+1}^{(i)}$, виконується n_i кроків інтегрування довжиною h_i, $i = \overline{1,k}$ за схемою опорного методу. Значення інших елементів ЕТ розраховуються за формулою локальної поліноміальної екстраполяції Ейткена-Невілла [1-2, 7]:

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\left(\frac{n_i}{n_{i-j}}\right)^2 - 1}. \qquad (2)$$

Зауважимо, що тут k – довжина ЕТ, а $T_{k,k}$ – наближений розв'язок найвищого порядку точності, для симетричних опорних методів та парних рядів становить $r = 2k$.

Нехай T_1^{LER} – загальний час на послідовну реалізацію технології локальної екстраполяції Річардсона на базовому кроці. Вочевидь, що

$$T_1^{LER} = T_1^{r_0} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i + T_1^{ext-tab}, \qquad (3)$$

де перший доданок дає повний час обчислень за схемою опорного методу, а другий – час обчислення значень екстраполяційної таблиці.

Досліджено [1-2], що h^2-екстраполяція на основі симетричних опорних методів і парної послідовності для генерації сіток інтегрування є найбільш ефективною з точки зору обчислювальних витрат. Таким чином, вибираючи симетричний явний метод Рунге-Кутти другого порядку, маємо час для виконання одного кроку інтегрування за схемою ЛЕР рівним:

$$T_1^{LER} = m\frac{(r-2)^2}{2}T_F + m\left(\frac{21}{8}r^2 - \frac{42}{8}r + 8\right) + \\ + \frac{(r-2)^2}{2}t_{op},$$

де T_F – сумарний час обчислення правої частини СЗДР, t_{op} – час обчислення однієї операції з плаваючою точкою або флоп.

2 Схеми статичного балансування навантаження для ЛЕР

Паралельна реалізація ЛЕР передбачає, що базові кроки виконуються послідовно, а розподілені обчислення реалізуються всередині H, де визначається ряд апроксимацій вирішення у одній точці із різними кроками інтегрування.

У загальному випадку, проблема балансування навантаження для паралельної, розподіленої обчислювальної системи може бути описана у термінах оптимізаційної задачі з обмеженнями. Саме для даної ЛЕР-проблеми, постановка задачі може бути наступною. Відповідно до вищевикладеного, час паралельної реалізації ЛЕР буде складатися з таких же двох частин, як і у послідовній реалізації, проте кожний з доданків буде враховувати не тільки час на обчислення, а й на комунікацію та непродуктивні витрати:

$$T_p^{LER} = T_{p,comp}^{LER} + T_{p,comm}^{LER}. \qquad (4)$$

Тоді, мінімальний глобальний час виконання може бути досягнутий, якщо розглядати проблему балансування навантаження як задачу математичного програмування із заданими обмеженнями:

$$T_p^{LER*} = Min\left[max_{1 \le i \le k} T_p^{LER}\right], \qquad (5)$$
$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p, \ p_i \ge 1.$$

В такій постановці задача повинна бути більш конкретизована і може бути розв'язана, наприклад, з використанням методу невизначених множників Лагранжа. Але складність її розв'язання безумовно є порівняною зі складністю поставленої задачі, тому далі представлено інші підходи до вирішення задачі балансування для ЛЕР.

В даному дослідженні пропонуються кілька стратегій балансування навантаження, що базуються на різних способах розбиття обчислювальних процесів на k груп (найчастіше за кількістю отриманих розв'язків за опорним методом) при виконанні одного кроку екстраполяції. Зауважимо, що такий підхід використовує на верхньому рівні паралелізм екстраполяції, а на нижньому системний та паралелізм опорного методу. При $k = 1$ отримуємо підхід, що використовує системний паралелізм та паралелізм методу, екстраполяція реалізується послідовно [1-4]. Розглянемо три схеми ЛЕР, які базуються на наступних способах розбиття процесорного поля на групи: регулярний, пропорційний та комбінаційний.

Для регулярного розбиття процесори рівномірно розподіляються на k груп. Кожна група містить однакову кількість процесорів, кожен процесор відповідає за обчислення рівної кількості апроксимацій вирішення. Якщо розмір процесорного поля дорівнює p, кількість рядків в екстраполяційній таблиці – k, то при такому способі буде k груп по $p_i = \lceil p/k \rceil, i = \overline{1,k}$ процесорів у кожній. Кожний процесор i-тої групи містить $m_i = \lceil m/p_i \rceil$ компонент вектору відповідної апроксимації вирішення та екстрапольованого значення. Кожна група відповідає за обчислення певної апроксимації розв'язання: $T_{j1}, j = \overline{1,k},$ час реалізації визначається як максимум з T_{j1} по $j = \overline{1,k}$ та усі групи, окрім останньої, простоюють деякий час.

Час паралельного процесу виконання за регулярним розбиттям складає:

$$T_p^{LER,1} = \max_{i=\overline{1,k}} \left(n_i \cdot T_p^{r_0}\right) + T_p^{ext-tab}.$$

Час виконання арифметичних операцій:

$$T_{p,comp}^{LER,1} = n_k \cdot T_{p,comp}^{r_0=2} + T_{p,comp}^{ext-tab}.$$

Для ряду парних чисел P_2: $n_k = r - 2$ і $m_k = m/2p$, тоді:

$$T_{p,comp}^{LER,1} = \frac{(r^2-2r)m}{p} \cdot T_F + 4\frac{(r^2-2r)m}{p} \cdot t_{op} +$$
$$+(2r-4) \cdot t_{op} + T_{p,comp}^{ext-tab}$$

Час на реалізацію міжпроцесорного обміну також визначається як максимальне значення часу обміну за всіма апроксимаціями рішення:

$$T_{p,comm}^{LER,1} = (r-2) \cdot T_{all-to-all}(m_k, p_k) +$$
$$+T_{p,comm}^{ext-tab} = (r-2) \cdot T_{all-to-all}\left(\frac{mr}{2p}, \frac{2p}{r}\right) +$$
$$+T_{p,comm}^{ext-tab},$$

де $T_{all-to-all}$ – час виконання операції обміну «усі-усім» і конкретний вираз залежить від топології з'єднання процесорів у обчислювальній системі і буде розглянутий далі.

Ідея пропорційного розбиття – збільшення балансування навантаження. Як і у попередньому випадку, процесорне поле розбивається на k груп, але не рівномірно, а відповідно до чисел $n_i, i = \overline{1,k}$:

$$p_1 : p_2 : \ldots : p_k = n_1 : n_2 : \ldots : n_k,$$
$$\sum_{i=1}^{k} p_i = p, p_i = \frac{pn_i}{N(k)}, N(k) = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Завдяки цьому процесор i-тої групи, $i = \overline{1,k}$ обчислює H_i/h_0 кроків, загальна кількість яких дорівнює для гармонійного ряду:

$$\frac{H}{h_0}\sum_{i=1}^{k} i = \frac{H}{h_0}\frac{k(k+1)}{2}.$$

В цьому випадку i-та група виконує наступну частку $\frac{2i}{k(k+1)}$ від цієї суми і таким чином містить $p_i = round(\frac{2i}{k(k+1)}p)$ процесорів, для того щоб розподілити роботу більш рівномірно. У конкретній реалізації p_i повинні бути адаптованими відповідним чином для того, щоб забезпечити співвідношення: $\sum_{i=1}^{k} p_i = p$. Тому алгоритм розбиття на групи виглядає наступним чином: якщо $p \neg \vdots\, N(k)$, то $p_i = \lfloor pn_i/N(k) \rfloor$, а потім процесори, що залишилися по одному додаються у кожну з груп. Врешті, кожна група буде містити тим більшу кількість процесорів, чим більше кроків інтегрування на базовому етапі їй належить виконати для отримання апроксимації рішення. Час виконання паралельного алгоритму ЛЕР при пропорційному розбитті за умови, що $p \vdots N(k)$, тим самим заздалегідь декілька збільшено час виконання за описаною схемою, дорівнює:

$$T_{p,comp}^{LER,2} = \max_{i=\overline{1,k}} (n_i \cdot T_{p_i,comp}^{r_0=2}) + T_{p,comp}^{ext-tab}.$$

$$T_{p,comp}^{LER,2} = \frac{(r^2-2r+4)m}{2p} \cdot T_F +$$
$$+\frac{(2r^2-4r+8)m}{p} \cdot t_{op} + 2(r-2) \cdot t_{op} +$$
$$+T_{p,comp}^{ext-tab}.$$

Таким чином, час на виконання обміну даними за пропорційною схемою з використанням комунікаційних примітивів для операції «усі-усім» дорівнює:

$$T_{p,comm}^{LER,2} = (r-2) \cdot T_{all-to-all}(m_k, p_k) +$$
$$+T_{p,comm}^{ext-tab} = (r-2) \cdot T_{all-to-all}\left(\frac{mN}{pn_k}, \frac{pn_k}{N}\right) +$$
$$+T_{p,comm}^{ext-tab}.$$

Для того, щоб застосувати комбінаційний спосіб розбиття та збільшити балансування навантаження процесорів паралельної системи: об'єднаємо першу і останню групи, другу і передостанню, і так далі, при цьому кількість процесорів у групі повинно бути розраховано за пропорційним підходом. Таким чином, буде необхідність у використанні $\lceil k/2 \rceil$ груп процесорів, причому i-та група буде обчислювати i та $(k-i+1)$ апроксимації вирішення. Відомо, що для отримання i-тої апроксимації необхідно n_i разів виконати звернення до опорного методу рішення, для $(k-i+1)$ – n_{k-i+1} раз [1-2]. Тобто, перша група повинна $(n_1 + n_k)$ разів виконати обчислення за опорним методом, друга група – $(n_2 + n_{k-1})$ та, нарешті, $k1 = \lceil k/2 \rceil$ група – $(n_{k1} + n_{k1+1})$. За рахунок комбінацій симетричних відносно середини груп забезпечується практично рівномірне навантаження груп. Цей факт стосується тільки парної довжини процесорного поля, в іншому випадку розбиття стає менш рівномірним за рахунок непарної групи.

Динамічні характеристики для комбінаційного способу розбиття:

$$T_{p,comp}^{LER,3} = \max_{i=\overline{1,k/2}} (n_i + n_{k-i+1}) \cdot T_{p_i,comp}^{r_0=2} + T_{p,comp}^{ext-tab},$$

$$T_{p,comm}^{LER,3} = (n_1 + n_k) \cdot T_{all-to-all}(m_i, p_i) +$$
$$+T_{p,comm}^{ext-tab}.$$

Загалом, $T_{p,comp}^{LER,3} = \frac{(r^2-2r)m}{2p} \cdot T_F +$

$$+\frac{(17r^2-4.5)m}{p}\cdot t_{op}+2(r-1)\cdot t_{op},$$

$$T_{p,comm}^{LER,3}=(r-1)\cdot T_{all-to-all}\left(\frac{mr}{4p},\frac{4p}{r}\right)+$$

$$+(1.5r-4)T_{p-p}\left(\frac{mr}{4p},\frac{4p}{r}\right)+$$

$$+T_{one-to-all}\left(\frac{mr}{4p},\frac{4p}{r}\right),$$

внаслідок того, що кількість процесорів у кожній групі: $p_i=\lceil 4p/r\rceil$ та число компонент вектору розв'язку для обчислення певної апроксимації: $m_i=\lceil mr/4p\rceil$.

Аналіз часової складової для обмінів при паралельному виконанні ЛЕР-алгоритмів проводився на основі комунікаційних примітивів за лінійною моделлю Хокні у варіанті передачі повідомлень [1-2, 8]:

$$T_{p-p}=t_s+V\cdot l\cdot t_w, t_w=y/B, \qquad (7)$$

де $t_s -$ латентність, $V-$ обсяг повідомлення, що передається, $l-$ довжина маршруту, y $-$ кількість байт у слові, B $-$ пропускна здатність каналу передачі даних (байт/секунда). Не викликає жодних сумнівів той факт, що при всій складності організації процесу обмінів, він зводиться до виконання трьох типів операції обміну: «point-point», «one-to-all», «all-to-all» і не тільки для розроблених алгоритмів, а значно ширше. Тому є сенс у розробленні комунікаційних примітивів для цих трьох операцій на паралельних архітектурах з різними топологіями комп'ютерів для розподіленої пам'яті: гіперкуб, 2D-тор та кільце.

Трудомісткість поодинокої операції пересилання даних між двома процесорами може бути отримана шляхом підстановки довжини максимального шляху (діаметра мережі) в модель Хокні. Для обчислення часу виконання колективної передачі даних в умовах тієї ж моделі застосовується оптимальний алгоритм покоординатної маршрутизації.

Таким чином, для топології «кільце»:

$$T_{p-p}^{R}=t_s+V\cdot t_w\cdot\lfloor p/2\rfloor,$$

$$T_{one-to-all}^{R}=t_s+V\cdot t_w\cdot\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil,$$

$$T_{all-to-all}^{R}=(t_s+V\cdot t_w)\cdot(p-1).$$

Аналогічно, для топології «2D- тор»:

$$T_{p-p}^{M}=t_s+2V\cdot t_w\cdot\lfloor\sqrt{p}/2\rfloor,$$

$$T_{one-to-all}^{M}=t_s+2V\cdot t_w\cdot\left\lceil\frac{\sqrt{p}}{2}\right\rceil,$$

$$T_{all-to-all}^{M}=2t_s(\sqrt{p}-1)+V\cdot t_w\cdot(p-1).$$

Для топології «гіперкуб»:

$$T_{p-p}^{H}=t_s+V\cdot t_w\cdot log_2 p,$$

$$T_{one-to-all}^{H}=(t_s+V\cdot t_w)\cdot log_2 p,$$

$$T_{all-to-all}^{H}=t_s\cdot log_2 p+V\cdot t_w\cdot(p-1).$$

Задля оцінювання ефективності відображення розроблених ЛЕР-алгоритмів на конкретну топологію паралельного комп'ютеру та внаслідок їх багаторазового використання, проведений аналіз складності комунікаційних примітивів. Зіставлення засвідчує, що найбільш ефективною для застосування в ЛЕР-алгоритмах при варіюванні інших різних параметрів (латентність, час передачі слова тощо) є топологія гіперкуб (рис. 1-2), але, як відомо, вона погано масштабується.

Рисунок 1 – Частка операцій обміну до загальних накладних витрат для ЛЕР-алгоритму з пропорційним способом розбиття при тривіальних правих частинах СЗДР для h^2 –екстраполяції

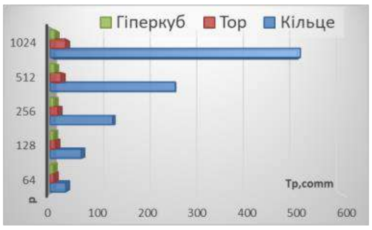


Рисунок 2 – Трудомісткість операцій обміну для ЛЕР-алгоритму з рівномірним способом розбиття від числа процесорів при складних правих частинах СЗДР для h^2 –екстраполяції

Разом з тим, не завжди просто паралельні алгоритми відобразити на таку топологію. Так, операція матричного добутку, що є однією з найбільш трудомістких частин ЛЕР-алгоритмів, природнім чином відображається на топологію замкнута сітка/2D-тор при реалізації на паралельному комп'ютері. З цієї причини виникає необхідність матричної візуалізації топології гіперкуб. Гіперкуб розглядається як матриця, стовпці і рядки якої моделюються гіперкубами меншого розміру. Такий підхід дозволяє достатньо легко логічно перевести алгоритм з топології сітка на гіперкуб. Встановлення відповідності між кільцевою топологією і топологією гіперкуб може бути виконано з використанням двійкового рефлексивного коду Грея [1-2, 8].

Зауважимо, що не зважаючи на складності, з'єднання процесорів в комунікаційну мережу по типу гіперкуб дуже часто використовується в багатьох паралельних архітектурах.

3 Аналіз результатів експерименту

Паралельні алгоритми ЛЕР реалізовано у середовищі Microsoft Visual Studio за допомогою С++ та бібліотеки передачі повідомлень MPI. Визначення динамічних характеристик виконання паралельного алгоритму проводилось аналітично, а також із використанням засобів інтерфейсу MPI. На рисунках 3-6 представлено приклади розбиття процесорного поля на групи за трьома запропонованими методами при варіюванні кількості процесорів та довжини ЕТ та двох найбільш ефективних послідовностей натуральних чисел для отримання сіток інтегрування: множини парних чисел Дойфлхарда, P_2 [9-10] та гармонійного ряду, P_1.

Групи / Тип розбиття	1	2	3	4	
Регулярне	8	8	8	8	32
Пропорційне	5	7	9	11	32
Комбінаційне	16	16			32

Рисунок 3 – Чисельність груп процесорів для різних типів розбиття при $k = 4, p = 32$, $P_2 = \{1,2,4,6,8,...\}$

Групи / Тип розбиття	1	2	3	4	
Регулярне	256	256	256	256	1024
Пропорційне	138	217	295	374	1024
Комбінаційне	512	512			1024

Рисунок 4 – Чисельність груп процесорів для різних типів розбиття при $k = 4, p = 1024$, $P_2 = \{1,2,4,6,8,...\}$

Групи / Тип розбиття	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Регулярне	103	103	103	103	102	102	102	102	102	102	1024
Пропорційне	22	40	58	76	93	111	129	147	165	183	1024
Комбінаційне	205	205	205	205	204						1024

Рисунок 5 – Чисельність груп процесорів для різних типів розбиття при $k = 10, p = 1024$, $P_1 = \{1,2,3,4,5,...\}$

Довжина ЕТ зазвичай не перевершує десяти внаслідок обмежень за пам'яттю.

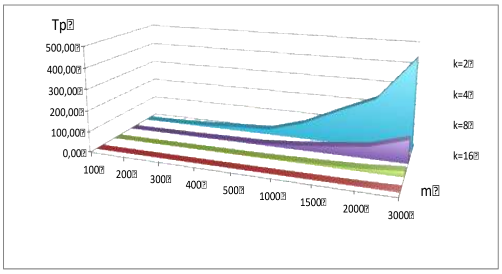
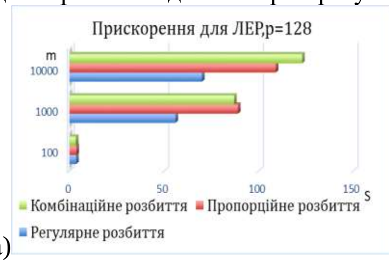
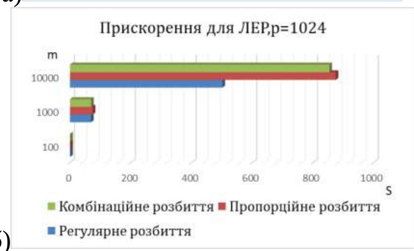


Рисунок 6 – Час паралельних обчислень за ЛЕР від розміру СЗДР для регулярного розбиття при $p = 32$ для різної довжини ЕТ (μc)

Результати експериментів, що відображені у графіках прискорення для паралельних алгоритмів ЛЕР (рис. 7), демонструють той факт, що не має єдиного типу залежності від типу розбиття процесорів на групи при варіюванні інших базових параметрів таких, як розмір СЗДР, кількість процесорів та інше. Так, при малих значеннях p та великих m комбінаційне розбиття дає найкращі показники прискорення паралельних обчислень. Але вже при малих значеннях розміру задачі та великих p ситуація змінюються на протилежну, комбінаційне розбиття дає найгірші результати.



а)



б)

Рисунок 7 – Графіки залежності коефіцієнту прискорення ЛЕР для регулярного, пропорційного та комбінаційного способів розбиття процесорів на групи при а) $p = 128$, б) $p = 1024$

Ситуація ускладнюється, якщо кількість процесорів є непарним числом, однак ця ситуація не є закономірною для паралельних комп'ютерів.

Висновки

Робота присвячена дослідженню ефективності паралельної реалізації початкової задачі для СЗДР великої розмірності на основі технології локальної екстраполяції Річардсона. Незважаючи на те, що екстраполяційні методи є досить трудомісткими у послідовній реалізації, вони мають визначену область застосування - отримання високоточного розв'язку задачі Коші. Стосовно паралельної реалізацій, ЛЕР має досить великий ступінь різного плану паралелізму: системного (за розміром СЗДР), екстраполяційного (за розміром ЕТ) та внутрішнього паралелізму методу (опорний метод може бути багатоточковим). За результатами досліджень запропоновані різні обчислювальні схеми технології екстраполяції з різними методами балансування навантаження, що виконуються статично. Наукова новизна полягає у розробці та удосконаленні паралельних алгоритмів реалізації чисельних методів ЛЕР для розв'язання початкової багатовимірної задачі Коші. Практична цінність полягає в розробці програмної системи, що містить в собі реалізацію чисельних методів ЛЕР з 3 підходами до балансування навантаження. У якості перспективних напрямів продовження дослідження планується використання ізоефективного аналізу для оцінки масштабованості і отримання пріоритетних областей кожного з конкуруючих методів, а також застосування відомих методів динамічного балансування навантаження таких, як Round Robin та його модифікації. .

Список літератури

1. Фельдман Л.П., Назарова И.А. Современные параллельные методы численного решения задачи Коши. – Донецк: ГВУЗ "ДонНТУ", 2013. – 206с.
2. Паралельні однокрокові методи чисельного розв'язання задачі Коші: монографія / Л.П. Фельдман, І.А. Назарова. – Донецьк: «ДВНЗ» ДонНТУ, 2011. – 185 с.: іл.
3. Назарова И.А. Экстраполяционные блочные одношаговые численные методы решения жестких задач Коши // Научно-теоретический журнал ИПИИ НАН Украины «Искусственный интеллект», №3 , 2010. – Донецк: ИПИИ, 2010. – С.116-126.
4. Фельдман Л.П., Назарова И.А. Параллельные алгоритмы экстраполяционных методов решения задачи Коши для компьютеров с распределенной памятью // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка, випуск 11 (164): – Донецьк, ДонНТУ, 2010. - С. 7-13.
5. Фельдман Л.П. Ефективність паралельної реалізації екстраполяційних методів чисельного розв'язання СЗДР на графічних процесорах / Л.П. Фельдман, І.А. Назарова, Я.О. Гризадубова // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка, випуск №2 (23): – Покровськ, ДонНТУ, 2016. - С. 36-44.
6. Фельдман Л.П., Назарова І.А., Гризадубова Я.О., Костін В.І. Ефективність обчислень при паралельному розв'язанні задачі Коші на графічних процесорах екстраполяційними методами // VII Міжнародна конференція «Моделювання і комп'ютерна графіка». – Покровськ, ДонНТУ, 2017. – С. 84-91.
7. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. // М.: Мир, 1990. – 512с.
8. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. – Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2007. – 423с.
9. Deuflhard P. Recent advances in multiple shooting techniques / P. Deuflhard// Computation techniques for ordinary differential equations. – Academic Press, 1980 – p. 217-272.
10. Stoer, J. Introduction to Numerical Analysis /J. Stoer, R. Bulirsch// New York: Springer, 2002 – 609 p.

References

1. Feldman, L. P., Nazarova, I. A. (2013), Modern parallel methods for the numerical solution of the Cauchy's problem *[Sovremennye parallel'nye metody chislennogo resheniya zadachi Koshi]*, Donetsk National Technical University, Donetsk, 206p.
2. Feldman, L. P., Nazarova, I. A. (2011), Parallel one-step methods for the numerical solution of the Cauchy's problem *[Paralel'ni odnokrokovi metodi chisel'nogo rozv'yazannya zadachi Koshi]*, Donetsk National Technical University, Donetsk, 185p.
3. Nazarova, I. A. (2010), Extrapolation block one-step numerical methods for solving stiff Cauchy problems *[Ekstrapolyachionnye blochnye odnoshagovye chislennye metody resheniya zhestkich zadach Koshi]* // The scientific and theoretical journal of the IPAI NAS of Ukraine "Artificial Intelligence", №3, Donetsk: IPAI, P.116-126.
4. Feldman, L. P., Nazarova, I. A. (2010), Parallel algorithms of extrapolation methods for solving the Cauchy problem for computers with distributed memory *[Parallel'nye algoritmy ekstrapolyacionnych metodov resheniya zadachi Koshi dlya komp'yuterov s raspredelennoy pamyat'yu]*, Scientific papers of Donetsk National Technical University. Series: Informatics, Cybernetics and Computer Science, №11(164), Donetsk National Technical University, Donetsk, P. 56-62.
5. Feldman, L. P., Nazarova, I. A. Grizadubova Y.O. (2016), Effectiveness of parallel implementation of extrapolation methods for numerical resolution of SODE on GPU's [*Effektyvnist' paralel'noy realizaciy ekstrapolyaciynyh metodiv chisel'nogo rozv'yazannya CZDR na grafichnyh procesorah*] // Scientific papers of Donetsk National Technical University. Series: Informatics, Cybernetics and Computer Science, №2 (23), Pokrovsk, DonNTU, P. 36-44.
6. Feldman, L. P., Nazarova, I. A. Grizadubova Y.O., Kostin V.I. (2017), Calculation efficiency in parallel solution of the Cauchy problem on GPUs by extrapolation methods [*Effektyvnist' obchislen'pry paralel'nomu rozv'yazannyi zadachi Koshi na grafichnyh procesorah ekstrapolyaciynymy metodamy*] // VII International Conference on Simulation and Computer Graphics, Pokrovsk, DonNTU, P. 84-91.
7. Hairer, E., etc., (1990), Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems [*Reshenie obiknovennih differencialnih uravnenii. Negestkie zadachi*], M.: Mir, 512 p.

8. Gergel′, V.P. (2007), Theory and practice of parallel computing [Teoriya i praktika parallel′nyh vychisleniy], Moskva: Binom, 423p.
9. Deuflhard P., (1980), Recent advances in multiple shooting techniques, Computation techniques for ordinary differential equations, Academic Press, P. 217-272.
10. Stoer, J., Burlisch, R., (2002), Introduction to Numerical Analysis, New York: Springer, 609 p.

Надійшла до редакції 05.10.2019

И.А. НАЗАРОВА
Донецкий национальный технический университет, г. Покровск, Украина

СТАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ БАЛАНСИРОВКИ НАГРУЗКИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ НА ОСНОВЕ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЙ ТЕХНОЛОГИИ

В работе исследованы методы статической балансировки нагрузки при параллельном решении многомерной начальной задачи, заданной системами обыкновенных дифференциальных уравнений на базе технологии Ричардсона. Приведены подходы, использующие различные виды параллелизма, присущие методу локальной экстраполяции. Получены аналитические зависимости и проведены тестовые эксперименты для определения динамических характеристик качества параллелизма в зависимости от метода балансировки нагрузки, количества процессоров и размера задачи, параметров метода в условиях заданной точности решения.

Ключевые слова: задача Коши, параллельные экстраполяционные методы, локальная экстраполяция Ричардсона, балансировка нагрузки, эффективность, ускорение

I.A. NAZAROVA
Donetsk National Technical University, Pokrovsk, Ukraine

STATIC LOAD BALANCING METHODS FOR PARALLEL SOLVING CAUCHY'S PROBLEMS BASED ON EXTRAPOLATION TECHNOLOGY

The paper investigates methods of static load balancing in parallel solution of a multidimensional initial problem given by systems of ordinary differential equations, based on Richardson technology. Approaches using different types of parallelism inherent in the local extrapolation method are presented. Analytical dependencies were obtained and tests were performed to dynamically characterize the quality of concurrency by load balancing methods, number of processors and task size, method parameters under conditions of given solution accuracy.
LER technology is designed to improve integration efficiency and is a high-precision solution to the Cauchy's problem, but it requires a lot of computational cost in sequential implementation. Potentially for the application of technology to solve the initial problem for equation systems on shared memory computers, there are several levels of concurrency: systemic, extrapolation, and internal parallelism of the basic method. But the overall overhead of parallelism, the large proportion of time-consuming exchanges or unproductive downtime, reduce the effect of the parallelization of the extrapolation method. Therefore, the task of researching methods of effective load balancing, certainly not only in this particular case, is one of the most important aspects of the modern stage of development of parallel computing. It is obvious that the uneven use of the equipment leads to a load imbalance and, probably enough, to a critical decrease in the efficiency of the parallel architecture. This study offers several load balancing strategies based on different ways of dividing computing processes into k groups (most often the number of resolutions obtained by the basic method) when performing one extrapolation step. Note that this approach uses extrapolation concurrency at the top level and system and reference method at the bottom. For k = 1, we obtain an approach that uses system parallelism and method parallelism, extrapolation is carried out sequentially. Three LER schemes are considered, based on the following methods of dividing the processor field into groups: regular, proportional, and combinational. Parallel LER algorithms are implemented in Microsoft Visual Studio using C ++ and the MPI messaging library. The dynamic performance of the parallel algorithm was determined analytically as well as using the MPI interface tools. According to the results of the research, different computational schemes of extrapolation technology with different methods of load balancing, which are performed statically, are proposed. The scientific novelty lies in the development and improvement of parallel algorithms for the implementation of numerical LER methods to solve the initial multidimensional Cauchy's problem. The practical value lies in the development of a software system that incorporates the implementation of a numerical LER method with three approaches to load balancing when solving a Cauchy's problem. It is planned to use isoefficiency analysis apparatus to evaluate the scalability and to obtain priority areas for each of the competing methods, as well as to apply known dynamic balancing methods such as Round Robin and its modifications as promising areas of study extension.

Keywords: Cauchy's problem, parallel extrapolation methods, Richardson's local extrapolation, load balancing, efficiency, speed-up