

УДК 004.272.2:519.63

І.А. Назарова, канд. техн. наук., доцент
Донецький національний технічний університет, м. Покровськ, Україна
iryna.nazarova@donntu.edu.ua**Особливості паралельної реалізації вкладених неявних
однокрокових чисельних методів розв'язання багатовимірних
жорстких задач Коші**

Стаття містить результати досліджень, що стосуються питань розробки та обґрунтування паралельних методів розв'язання жорстких задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) великої розмірності на основі однокрокових неявних чисельних схем. Розроблено паралельні алгоритми блокових однокрокових неявних вкладених схем на базі комбінації незалежних та спеціально підібраних форм для керування кроком інтегрування. Здійснена модифікація отриманих методів з метою узагальнення на системи ЗДР. Проведено порівняння ефективності застосування різних неявних вкладених схем: блокових та повністю неявних методів типу Рунге-Кутти з ідентичними характеристиками стійкості. Отримано аналітичні моделі тимчасової комунікаційної складності для процесів обміну даними в режимах передачі повідомлень та пакетів для різних топологій паралельних архітектур. Здійснено перевірку адекватності моделей за допомогою визначення експериментальних показників при різних режимах передачі даних. Проведено аналіз теоретичних динамічних показників якості паралелізму з отриманими експериментальними результатами в залежності від параметрів паралельної системи, характеристик методу та завдання.

Ключові слова: жорстка задача Коші, неявна чисельна схема, однокрокові методи, блокові методи, вкладені методи, паралельна реалізація, прискорення та ефективність

DOI: 10.31474/1996-1588-2020-2-31-83-93

Вступ

Проблема розв'язання багатовимірної задачі Коші для жорстких систем звичайних диференціальних рівнянь виникає при моделюванні складних динамічних процесів різної природи, найчастіше за рахунок апроксимації рівнянь в частинних похідних, а також в багатьох інших важливих додатках [1-6]. Облік великої кількості факторів при побудові таких математичних моделей призводить до розширення класу завдань, що описуються жорсткими системами. В свою чергу, це викликає зростання складності реалізації практичних завдань і потребує застосування паралельної високопродуктивної техніки [6-8].

Метою дослідження є розробка/реалізація та аналіз якості паралельних методів розв'язання жорстких багатовимірних задач Коші на основі неявних однокрокових чисельних схем.

Основні завдання дослідження:

- розробка та обґрунтування паралельних вкладених алгоритмів блокових однокрокових методів;
- побудова відображення отриманих схем на паралельні системи з розподіленою пам'яттю та різними топологічними архітектурами;
- розробка паралельних алгоритмів повністю неявних методів типу Рунге-Кутти;

– проведення порівняння якості паралельних реалізацій розроблених методів на основі аналітичних оцінок динамічних характеристик паралелізму та розв'язання тестових завдань, для оцінки роботи методів обрано набір тестів, що володіють різним ступенем жорсткості [9].

В даному розділі розглядаються особливості паралельних реалізацій методів чисельного розв'язання задачі Коші для одного або системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з заданими початковими умовами та вбудованими засобами оцінки локальної похибки:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_m), & x_1(t_0) = x_{10} \\ x'_2 = f_2(t, x_1, \dots, x_m) & x_2(t_0) = x_{20}, (1) \\ \dots & \dots \\ x'_m = f_m(t, x_1, \dots, x_m) & x_m(t_0) = x_{m0} \end{cases}$$

де F – права частина системи (1), нелінійна в загальному вигляді функція, що задає відображення $F = \bar{f}: R \times R^m \rightarrow R^m$, $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $\bar{x}: R \rightarrow R^m$ – вектор невідомих, $\bar{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0})^T$ – вектор початкових значень.

**Сучасні підходи до аналізу якості
паралельних алгоритмів**

Для об'єктивної оцінки якості паралельних алгоритмів використовують так звані метрики або динамічні характеристики паралельних обчислень. Іншими словами, систему показників, що дозволяє оцінювати переваги, отримані при паралельному розв'язанні завдань на p процесорах у порівнянні з послідовним однопроцесорним варіантом. До загальноприйнятих метрик відносять наступні показники: T_1 – час послідовного розв'язання задачі заданого розміру на однопроцесорному комп'ютері; $T_{p,comp}$ – час паралельного розв'язання задачі заданого розміру з використанням паралельного алгоритму на p -процесорному комп'ютері без урахування операцій передачі даних; $T_{p,comm}$ – комунікаційна трудомісткість паралельного алгоритму; T_p – загальний час для реалізації паралельного алгоритму на паралельному комп'ютері [7-11]:

$$T_p = T_{p,comp} + T_{p,comm}, \quad (2)$$

а також коефіцієнти прискорення: $S_p = T_1 / T_p$ та ефективності: $E_p = S_p / p = T_1 / (p \times T_p)$. Час виконання операції з рухомою точкою будемо позначати: $t_{op} = 1/FLOPS$.

Оцінка трудомісткості операцій передачі даних в паралельних реалізаціях враховує той факт, що існує два принципово різних метода передачі даних в паралельних мультимік'ютерах:

- метод передачі повідомлень;
- метод передачі пакетів.

Метод передачі повідомлень здійснює передачу даних як неподільних/атомарних блоків інформації. Другий спосіб комунікації, а саме, метод передачі пакетів, ґрунтується на представленні повідомлень, що пересилаються, у вигляді блоків інформації меншого розміру – пакетів. Для оцінки часу виконання операції передачі одного повідомлення обсягом V байтів між двома процесорами, локалізованими на різних процесорах/вузлах при розподіленій пам'яті, використовується наступна лінійна модель, запропонована Хокні [11]:

$$T_{p-p} = t_s + t_w \cdot V \cdot l, \quad (3)$$

де t_s – латентність, час на підготовку повідомлення для передачі; l – довжина маршруту (залежить від топології та алгоритму маршрутизації); t_w – час передачі одного байту (тривалість подібної передачі визначається пропускну здатністю комунікаційних каналів мережі).

Модель Хокні можна зробити більш точною за рахунок доданку, пов'язаного з часом передачі службових даних:

$$T_{p-p} = t_s + (t_w \cdot V + t_h) \cdot l \quad (4)$$

де t_h – час передачі службових даних для двох сусідніх процесорів (між якими є фізичний канал), до службових даних відноситься заголовок повідомлення, блок даних для виявлення помилок передачі тощо.

Оскільки паралельні методи розв'язання динамічних задач часто використовують структурну інформаційну взаємодію за типом комунікацій, надається можливість розробити єдині комунікаційні примітиви для різних операцій передачі даних у різних топологіях [10-11]. Розглянемо топології, що найбільш поширені у використанні: лінійка/кільце, сітка/тор, гіперкуб та три основні комунікаційні операції:

- 1) передача даних між двома процесорами мережі – операція "точка-точка" або "point-point";
- 2) передача даних від одного процесора всім іншим процесорам мережі – операція "один-усім" або "one-to-all";
- 3) передача даних від усіх процесорів мережі усім процесорам мережі – множинна пересилка "усі-усім" або "all-to-all".

У якості алгоритму маршрутизації будемо використовувати детермінований оптимальний алгоритм оптимальної покоординатної маршрутизації [10-11]. Тоді, час виконання обмінів для топології кільце в режимі передачі повідомлень складає:

- поодинокі пересилка, "point-point":

$$T_{p-p}^R = t_s + t_w \cdot V \cdot \lfloor p/2 \rfloor;$$

- передача даних від одного процесора всім іншим, "один-усім":

$$T_{one-to-all}^R = (t_s + t_w \cdot V) \cdot \lfloor p/2 \rfloor;$$

- пересилка "усі-усім":

$$T_{all-to-all}^R = (t_s + t_w \cdot V) \cdot (p - 1).$$

Аналогічно, для топології 2D-тор, маємо:

$$T_{p-p}^M = t_s + t_w \cdot 2V \cdot \lfloor \sqrt{p}/2 \rfloor,$$

$$T_{one-to-all}^M = 2(t_s + t_w \cdot V) \cdot \lfloor \sqrt{p}/2 \rfloor,$$

$$T_{all-to-all}^M = 2t_s \cdot (\sqrt{p} - 1) + t_w \cdot V \cdot (p - 1),$$

а, відповідно, до топології гіперкуб:

$$T_{p-p}^H = t_s + t_w \cdot V \cdot \log_2 p,$$

$$T_{one-to-all}^H = (t_s + t_w \cdot V) \cdot \log_2 p,$$

$$T_{all-to-all}^H = t_s \cdot \log_2 p + t_w \cdot V \cdot (p - 1).$$

В режимі передачі пакетів для топології кільце час для виконання поодинокі операції пересилання даних дорівнює:

$$T_{p-p}^R = t_s + t_w \cdot V + t_h \cdot [p/2].$$

Передача даних від одного процесора всім іншим процесорам мережі в режимі передачі пакетів при топології кільце може бути виконана шляхом логічного представлення кільцевої структури мережі у вигляді гіперкубу.

Алгоритм операції «один-усім» в цьому випадку (рис. 1):

– на етапі розсилки процесор-джерело повідомлення передає дані процесору, що знаходиться на відстані $p/2$ від заданого;

– на другому етапі обидва процесори, що вже мають дані після першого етапу, передають повідомлення процесорам, що знаходяться на відстані $p/4$ від кожного з них і так далі.

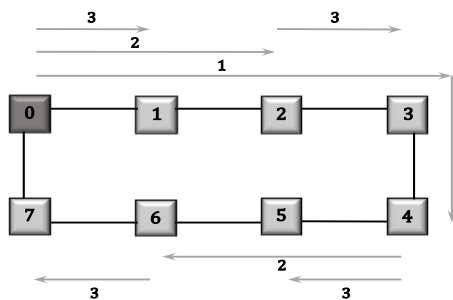


Рисунок 1 – Ілюстрація виконання операції «один-усім» для топології кільце в режимі передачі пакетів, $p = 8$

Трудомісткість здійснення операції розсилки при такому методі:

$$T_{one-to-all}^R = (t_s + t_w \cdot V) \cdot \log_2 p + t_h \cdot (p - 1).$$

Для топології 2D-тор час виконання поодинокі операції передачі даних в режимі передачі пакетів дорівнює:

$$T_{p-p}^M = t_s + t_w \cdot V + 2t_h \cdot [\sqrt{p}/2],$$

а операції «один-усім» (рис. 2):

$$T_{one-to-all}^M = (t_s + t_w \cdot V) \cdot \log_2 p + 2t_h \cdot (\sqrt{p} - 1).$$

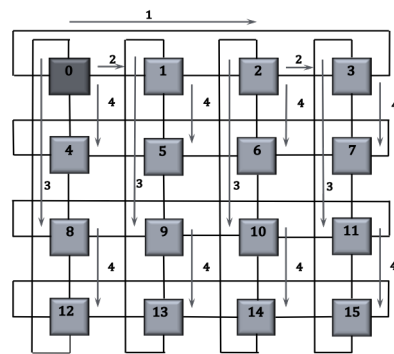


Рисунок 2 – Ілюстрація виконання операції «один-усім» для топології 2-D тор в режимі передачі пакетів, $p = 16$

Для топології гіперкуб трудомісткість поодинокі операції передачі даних для пакетів отримана аналогічно кільцю та тору і складає:

$$T_{p-p}^H = t_s + t_w \cdot V + t_h \cdot \log_2 p.$$

Застосування режиму передачі пакетів для всіх топологій не призводить до якого-небудь поліпшення часу виконання операції множинної розсилки «усі-усім».

Паралельні однокрокові блокові методи інтегрування

Блокові k -точкові однокрокові різницеві методи у застосуванні до одного звичайного диференційного рівняння (ЗДР) описуються наступним чином:

$$x_{n,i} = x_{n,i} + ih[b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j}], \quad (5)$$

$$i = \overline{1, k}, n = \overline{1, N}.$$

Найбільший порядок апроксимації для k -точкового однокрокового методу дорівнює $k + 1$, отже, локальна помилка у вузлах блоку має порядок $O(h^{k+2})$ [1-2]. Описані методи мають в своїй основі неявну різницеву чисельну схему, тому для отримання наближеного розв'язку задачі Коші в точках блоку необхідно розв'язати систему, в загальному випадку, нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНАР).

Одним з найбільш простих засобів обчислення розв'язку (5) є метод простої ітерації:

$$\begin{cases} x_{n,i,0} = x_{n,0} + ihF_{n,0}, i = \overline{1, k}, n = \overline{1, N}, \\ x_{n,i,l+1} = x_{n,0} + ih(b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j,l}), \end{cases} \quad (6)$$

$$l = \overline{0, L-1},$$

де n – номер блоку, i – номер точки блоку, l – номер поточної ітерації, L – максимальне число ненульових ітерацій.

Неявні чисельні схеми у застосуванні для жорстких задач потребують вбудованого

механізму керування кроком інтегрування на основі інформації про локальну крокову похибку. На відміну від явних методів вирішення задачі Коші, паралельна реалізація засобів оцінки апостеріорної локальної похибки на основі блокових методів пов'язана з рядом особливостей. По-перше, немає відповідних послідовних аналогів, отже, потрібно розробити і обґрунтувати метод оцінки крокової похибки. По-друге, зміна кроку інтегрування можлива лише після виконання обчислень у всіх k вузлах поточного n -го блоку і тому, при умові незадовільної оцінки локальної похибки, практично всі обчислення для точок блоку виявляються зайвими.

Ідея вкладених форм, що була запропонована для оцінки локальної апостеріорної похибки чисельного розв'язання СЗДР явними методами Рунге-Кути, може бути використана і для однокрокових блокових/багатоточкових методів [1]. У даному дослідженні наведено застосування цього способу оцінки крокової похибки для паралельних блокових алгоритмів на основі двох різних підходів:

1) комбінації незалежних формул суміжних порядків точності розв'язку;

2) комбінації спеціально підібраних формул різних порядків на базі методу послідовного підвищення порядку точності.

Перший підхід полягає у використанні двох різних незалежних блокових методів суміжних порядків точності $r(\hat{r})$, $r = \hat{r} \pm 1$ на одній і тій же сітці інтегрування Ω_h :

$$\begin{cases} x_{n,i} = x_{n,0} + ih [b_i f(t_{n,0}; x_{n,0}) + g_{n,i}], \\ \hat{x}_{n,i} = \hat{x}_{n,0} + i\hat{h} [\hat{b}_i f(t_{n,0}; \hat{x}_{n,0}) + \hat{g}_{n,i}], \end{cases} \quad (7)$$

$$g_{n,i} = \sum_{j=1}^k a_{ij} f(t_{n,j}; x_{n,j}), \hat{g}_{n,i} = \sum_{j=1}^{\hat{k}} \hat{a}_{ij} \hat{f}(t_{n,j}; \hat{x}_{n,j}),$$

$$i = \overline{1, k}; n = \overline{1, N}, \hat{i} = \overline{1, \hat{k}}; n = \overline{1, \hat{N}}.$$

Нехай для визначеності основним є блоковий метод нижчого порядку точності, тобто $\hat{k} = k + 1$. Локальна похибка наближеного розв'язку за однокроковим k -точковим методом в i -том вузлі блоку для одного рівняння визначається наступною формулою: $x(t_{n,i}) - x_{n,i}^r = O(h^{k+2})$, $i = \overline{1, k}$ і для $(k + 1)$ -точкового методу в тому ж вузлі дорівнює: $x(t_{n,i}) - x_{n,i}^{\hat{r}} = O(h^{k+3})$, $i = \overline{1, \hat{k}}$. З отриманих співвідношень виходить, що оцінка локальної похибки формули меншого порядку точності, k -точкового методу, приблизно може бути обчислена, як: $|x_{n,i}^r -$

$x_{n,i}^{\hat{r}}|$, $i = \overline{1, k}$. Такий підхід до оцінки локальної похибки є ефективнішим в порівнянні з правилом Рунге, оскільки при достатній простоті дозволяє зменшити обчислювальні витрати. Так, для вживання правила дублювання кроку необхідно вирішити три системи нелінійних алгебраїчних рівнянь розміром k , а для застосування вкладеного методу — дві системи: одну тієї же розмірності, другу розмірності $(k + 1)$.

Визначимо час послідовної реалізації даного методу в припущенні ідентичності обчислювальної і ємкісної потужності однопроцесорної і багатопроцесорної ОС. Нехай $T_1^{\text{БМ1}}(k)$ — час послідовних обчислень за k -точковим методом, а $T_1^{\text{БМ1}}(k + 1)$ — аналогічний час, отриманий за $(k + 1)$ -точковим методом.

Загальний час послідовного виконання схеми (7) дорівнює:

$$T_1^{\text{БМ1}} = T_1^{\text{БМ1}}(k) + T_1^{\text{БМ1}}(k + 1).$$

Кожен з блокових методів вимагає застосування ітераційного процесу для обчислення вирішення відповідних систем нелінійних рівнянь. Нехай L — гранична кількість ітерацій при реалізації k -точкового методу, l — поточне число ітерацій, що забезпечує достатню для даного завдання точність $l \leq L$. Аналогічно, для вкладеного методу вищого порядку маємо наступні позначення: $\hat{L}$ і $\hat{l}$, $\hat{l} \leq \hat{L}$. Для забезпечення вищого порядку точності необхідно, щоб $\hat{l} = l + 1$, тоді

$$T_1^{\text{БМ1}} = (2lk + k + l + 3)T_F + [k^2(4l + 2) + 12lk + 6l + 14k + 9] t_{op}.$$

Оскільки $\hat{k} = k + 1$, то оптимальне число процесорів для паралельної реалізації складає: $p = \hat{k}$. Кожен процесорний елемент обчислює вирішення в одному вузлі сітки. Спочатку визначається апроксимація вирішення на основі k -точкового методу, потім $(k + 1)$ -точкового. Для кожної з двох задач послідовно виконуються обчислення нульової та подальших ітерацій.

Тоді час на обчислення і обмінні операції для паралельного вкладеного блокового методу при $\hat{l} = l + 1$ складає:

$$\begin{aligned} T_{p,comp}^{\text{БМ1}} &= (2l + 3)T_F + \\ &+ (4lk + 10l + 2k + 12)t_{op}, \\ T_{p,comm}^{\text{БМ1}} &= (l + \hat{l} + 2)T_{all-to-all}(p) = \\ &= (2l + 3)T_{all-to-all}(k + 1). \end{aligned}$$

Потенційний паралелізм отриманого методу при складній правій частині ЗДР дорівнює:

$$S^{BM1} = [k(l + \hat{l}) + \hat{l} + 2]T_F / [(l + \hat{l} + 2)]T_F \approx \\ \approx k, E^{BM1} = S^{BM1}/p \approx 1,$$

аналогічні характеристики маємо і при $T_F \approx t_{op}$.

Другий підхід до розробки блокових вкладених методів оснований на використанні ідеї послідовного підвищення порядку точності [6-7], і має своєю метою скорочення обчислювальних затрат за рахунок комбінації спеціально підібраних формул суміжних порядків.

Нехай розв'язання задачі Коші для ЗДР на деякому інтервалі інтегрування виконується на основі k -точкового одно-

$$d_{n,i} = |\hat{x}_{n,i} - x_{n,i}| = |x_{n,i,\hat{l}} - x_{n,i,\check{l}}|,$$

$$i = \overline{1, k}, \hat{l} = \check{l} \pm 1,$$

де $x_{n,i,\hat{l}}$ і $x_{n,i,\check{l}} - \hat{l}$ і $\check{l}$ -та апроксимації, отримані при вирішенні (5) ітераційним методом (6).

Введемо наступні позначення:

1) $x_{n,i}^{[v]}, i = \overline{1, k}$ – значення чисельного розв'язку в i -тому вузлі $t_{n,i}$ n -го блоку, обчислене з локальною похибкою $O(h^v)$,

2) $F_{n,i}^{[v]} = f(t_{n,i}, x_{n,i}^{[v]})$ – звернення до правої частини початкового диференційного рівняння, обчислене в точці $(t_{n,i}, x_{n,i}^{[v]})$.

Нехай наближене значення вирішення $t_{n,0}$ в початковій точці n -го блоку обчислене з деякою локальною помилкою $O(h^v)$, що забезпечує достатню для поставленої задачі точність. Тоді, звернення до правої частини початкового диференціального рівняння може бути обчислене з такою ж похибкою: $F_{n,0}^{[v]}$. Виконавши обчислення для нульової ітерації по першій формулі ітераційного методу, отримаємо $x_{n,i,0}^{[2]} = x_{n,0}^{[v]} + ihF_{n,i,0}^{[v]}, i = \overline{1, k}$, оскільки локальна похибка формули Ейлера має порядок $O(h^2)$. Кожне подальше обчислення за другою формулою (6) дає підвищення ладу точності для методу простих ітерацій на 1:

$$l = 0: x_{n,i,1}^{[3]} = x_{n,0}^{[v]} + ih \cdot b_i F_{n,0}^{[v]} +$$

$$+ \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j,0}^{[2]}, i = \overline{1, k},$$

$$l = 1: x_{n,i,2}^{[4]} = x_{n,0}^{[v]} + ih \cdot b_i F_{n,0}^{[v]} +$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j,0}^{[3]}, i = \overline{1, k},$$

...

оскільки $F_{n,j,0}^{[v]} = f(t_{n,j}, x_{n,j,0}^{[v]})$, $j = \overline{1, k}$. Цей процес не може бути продовжений нескінченно, при $l = k - 1$, отримаємо результати, відповідні граничній локальній точності наближених формул (6). Оскільки різниці схеми, відповідні

блоковим однокроковим k -точковим методом, апроксимують диференційне рівняння (1) з порядком $O(h^{k+1})$, то подальші ітерації підвищення порядку точності результатів не дають:

$$l = k - 1: x_{n,i,k}^{[k+2]} = x_{n,0}^{[v]} + ih(b_i F_{n,0}^{[v]} +$$

$$+ \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j,k-1}^{[k+1]}), i = \overline{1, k}.$$

Таким чином, для оцінки локальної похибки можуть бути вибрані дві довільні суміжні апроксимації вирішення $x_{n,i,\hat{l}}$ і $x_{n,i,\check{l}}$ з врахуванням міркувань точності і обмежень: $l < \hat{l} \leq L - 1 = k - 1$. Як правило, $\check{l} = l, \hat{l} = l + 1$. При описаному вкладеному блоковому k -точковому методу, всі додаткові ШАР мають розмірність k . Розрахункові формули для одного, n -го блоку вкладеного багатоточкового алгоритму №2 мають вигляд:

$$\begin{cases} x_{n,i,0} = x_{n,0} + ihF_{n,0}, i = \overline{1, k}, \\ x_{n,i,l+1} = x_{n,0} + ih(b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j,l}), \\ \hat{x}_{n,i,\hat{l}} = x_{n,0} + ih(b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j,\check{l}}), \end{cases} \quad (8)$$

$$l = 0, \check{l} - 1, \check{l} = l, \hat{l} = l + 1.$$

Оцінка часу виконання послідовного алгоритму, визначеного обчислювальною схемою вкладеного блокового методу №2, дорівнює:

$$T_1^{BM2} = (\hat{l}k + 1)T_F + [2\hat{l}(k^2 + 2k) + 3k]t_{op}.$$

Для одного ЗДР внутрішній паралелізм вичерпується незалежними обчисленнями кожної точки блоку і обмежений їх кількістю в блоці. Ітераційний процес вирішення отриманих ШАР є суто послідовним. Після кожного з $l = 0, \hat{l}$ кроків необхідний обмін даними за типом "усі-усім". При реалізації алгоритму на k процесорах можна одночасно обчислювати значення $F_{n,i,l}$, а потім також одночасно набуті по формулах значення $x_{n,i,l}$ для кожного фіксованого l .

Час паралельного обчислення наближених значень вирішення з точністю $O(h^{\hat{l}+2})$ для всіх вузлів блоку при виконанні $\hat{l}$ кроків ітераційного процесу дорівнює:

$$T_{p,comp}^{BM2} = (\hat{l} + 1)T_F + [2\hat{l}k + 4\hat{l} + 3]t_{op}.$$

Час обміну даними при цьому з використанням введених комунікаційних примітивів складає:

$$T_{p,comm}^{BM2} = (\hat{l} + 1)T_{all-to-all}(1, p).$$

Потенційно обидва вкладені блокові методи володіють високим ступенем внутрішнього паралелізму: практично лінійним прискоренням і одиничною ефективністю. Це виходить з приведених нижче співвідношень для коефіцієнтів потенційного прискорення і ефективності алгоритму у випадку, якщо час звернення до правої частини ЗДР домінує над іншими обчисленнями:

$$S^{BM2} \approx \frac{[(\bar{k}+1)T_F]}{[(i+1)T_F]} \approx k = p,$$

$$E^{BM2} = S^{BM2}/p \approx 1.$$

Аналогічний результат маємо для тривіальної правої частини. Найкращою топологією для розроблених методів є топологія гіперкуба, бо має найменший діаметр.

Швидкість збіжності ітераційного процесу при вирішенні систем нелінійних алгебраїчних рівнянь істотно залежить від властивостей конкретної системи, а, отже, коефіцієнтів самого блокового методу, для спільності міркувань проведемо порівняння при гранично допустимому числі ітерацій.

Аналіз теоретичного виконання і проведений експеримент дозволяють зробити наступні висновки:

1) час виконання першого вкладеного блокового алгоритму більше часу виконання другого, як в послідовній, так і паралельній реалізаціях: $T_1^{BM1} > T_1^{BM2}$ і $T_p^{BM1} > T_p^{BM2}$,

причому для паралельних алгоритмів ця різниця більша, ніж для послідовних;

2) коефіцієнти прискорення і ефективності першого вкладеного блокового методу менше відповідних коефіцієнтів другого методу при різних значеннях параметрів завдання, методу і паралельної системи: $S^{BM1} < S^{BM2}$, $E^{BM1} < E^{BM2}$ (рис. 3).

Зазначимо, що вплив чинника "складність правої частини ЗДР" є таким, що багато в чому визначає якість використання паралелізму. При однакових значеннях комунікаційних констант і параметрів, які задають унікальний блоковий метод, коефіцієнти прискорення і ефективності зменшуються практично в два рази при переході від домінуючих до тривіальних правих частин.

Ступінь впливу комунікаційних констант можна оцінити як традиційний для даних методів і типу операцій обміну. Збільшення числа точок в блоці приводить до зростання коефіцієнту прискорення $\uparrow k \Rightarrow \uparrow S$ та к зменшенню коефіцієнту ефективності $\uparrow k \Rightarrow \downarrow E$. Така залежність пояснюється тим, що число точок блоку пов'язане з числом використаних процесорів. Підсумовуючи всі отримані результати, можна зробити висновок, що з двох методів вкладених форм для блокових однокрокових способів вирішення нелінійної задачі Коші для ЗДР, другий вкладений метод володіє безперечними перевагами.

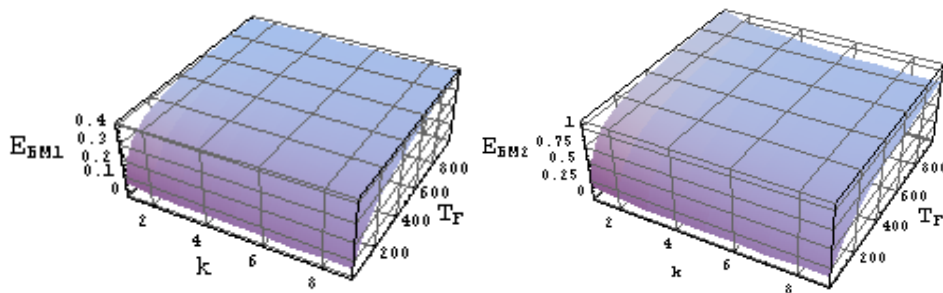


Рисунок 3 – Коефіцієнт ефективності вкладених блокових методів від числа точок блоку і складності правої частини ЗДР

Особливості вкладених блокових методів при інтегруванні СЗДР

Розроблені і обґрунтовані в попередніх підрозділах однокрокові блокові методи розв'язання задачі Коші для одного звичайного диференційного рівняння з оцінкою крокової похибки можна перенести і на випадок системи рівнянь. При переході від одного до системи рівнянь з'являється можливість використовувати

системний паралелізм, який, вочевидь, суттєво більше внутрішнього паралелізму методу.

Блоковий однокроковий k -точковий метод для СЗДР має вигляд:

$$\bar{x}_{n,i} = \bar{x}_{n,i} + ih[b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,j}], \quad (9)$$

$$i = \overline{1, k}, n = \overline{1, N},$$

і вимагає вирішення системи алгебраїчних нелінійних рівнянь розмірності $m \times k$:

$$\begin{cases} x_{n,q,i;0} = x_{n,q,0} + ihF_{n,q,0}, i = \overline{1, k}, \\ x_{n,q,i;l+1} = x_{n,q,0} + ih[b_i F_{n,q,0} + SUM], \end{cases} \quad (10)$$

$$SUM = \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,q,j,l},$$

$$l = \overline{0, L-1}, q = \overline{1, m}, n = \overline{1, N},$$

де $F_{n,q,j,l} = f_q(t_{n,j}; \bar{x}_{n,j,l})$, $q = \overline{1, m}$ є q -та компонента вектору правої частини СЗДР обчислена на l -тій ітерації. Відповідно, $F_{n,q,0} = f_q(t_{n,0}; \bar{x}_{n,0})$.

Особливості паралельного інтегрування систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено на основі вкладених багатоточкових методів, як найбільш ефективних з існуючих засобів оцінки локальної апостеріорної похибки:

$$\begin{cases} x_{n,q,i;0} = x_{n,q,0} + ihF_{n,q,0}, \\ x_{n,q,i} = x_{n,q,i;l+1} = x_{n,q,0} + ih \cdot SUM1, \\ \hat{x}_{n,q,i} = x_{n,q,i;L} = x_{n,q,0} + ih \cdot SUM2, \\ i = \overline{1, k}, n = \overline{1, N}, q = \overline{1, m}, l = \overline{0, L-2}. \end{cases} \quad (11)$$

$$SUM1 = \left[b_i F_{n,q,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,q,j,l} \right],$$

$$SUM2 = \left[b_i F_{n,q,0} + \sum_{j=1}^k a_{ij} F_{n,q,j,L-1} \right].$$

Обчислювальна складність однопроцесорного алгоритму інтегрування СЗДР має наступний вигляд:

$$T_1 = (Lk + 1) \sum_{i=1}^m T_{f_i} + m[2L(k^2 + 2k) + 3k]t_{op}.$$

Ітераційний процес, що описується обчислювальною схемою (11), може бути реалізований лише послідовно. Проте він дозволяє розподілити обчислення поточної l -тої ітерації векторів розв'язку трьома наступними засобами: на k незалежних процесів за числом точок у блоці; на m за числом компонент у системі ЗДР; на mk процесів за максимальною можливою шириною паралельного методу і системи. Досліджені обчислювальні схеми блокового вкладеного методу вирішення СЗДР мають обмеження на число використаних процесорів. Розробимо паралельний алгоритм, що не містить таких обмежень і враховує як паралелізм методу, так і системний. Нехай є паралельна ОС з p процесорами, виконаємо розбиття процесорного поля на k груп за числом точок в блоці. Число процесорів в одній групі дорівнює $\hat{p} = [p/k]$, число компонент системи, обчислюваних одним процесором, складає $\hat{m} =$

$[m/\hat{p}]$. Кожна група відповідає за обчислення вирішення в одній точці блоку для всієї СЗДР на одній ітерації. Час паралельної реалізації такої обчислювальної схеми для топології гіперкуб визначається, як:

$$T_{p,comp}^{BM_SODE} = (L + 1) \sum_{i=1}^{[mk/p]} T_{f_i} + [mk/p][2Lk + 4L + 3]t_{op},$$

$$T_{p,comm}^{BM_SODE} = (L + 1) \left[t_s \log_2 mk + \left\lceil \frac{mk}{p} \right\rceil (mk - 1)t_w \right].$$

Якість паралелізму розробленого алгоритму вирішення СЗДР істотно залежить від співвідношення параметрів задачі, чисельного методу і паралельної системи. Найкращі характеристики паралелізму мають місце для багатовимірних завдань, складних правих частин, високо швидкісних мереж передачі даних.

Порівняльний аналіз неявних однокрокових методів вирішення задачі Коші

Аналіз ефективності розв'язання жорстких задач Коші в даній статті базується на вживанні наступних неявних однокрокових чисельних схем:

- 1) розпаралелених повністю неявних методів типу Рунге-Кутти (ПНМРК);
- 2) паралельних блокових/багатоточкових методів.

Проведемо порівняння двох класів неявних методів на основі найбільш ефективного способу оцінки локальної похибки, тобто вкладених форм.

Чисельне вирішення (1) повністю неявним S -стадійним методом типу Рунге-Кутти можна отримати послідовно по кроках за допомогою наступної обчислювальної схеми:

$$\begin{cases} \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + h \sum_{i=1}^S b_i \bar{k}_i, \\ \bar{k}_i = \bar{f}[t_n + c_i h, \bar{x}_n + h \sum_{i=1}^S a_{ij} \bar{k}_j], \\ i = \overline{1, S}, \end{cases} \quad (12)$$

де S -розмірні вектори $c = (c_1, c_2, \dots, c_S)^T$ і $b = (b_1, b_2, \dots, b_S)^T$ та повністю заповнена матриця $A = [a_{ij}]$, $i, j = \overline{1, S}$ описують унікальний варіант методу і вибираються з міркувань точності. При вирішенні СЗДР з використанням повністю неявних методів ms невідомих стадійних коефіцієнтів повинні бути отримані на основі деякого методу вирішення СНАР, наприклад, ітераційної схеми:

$$\begin{cases} \bar{k}_i^{(0)} = \bar{f}[x_n + c_i h; \bar{g}_i^{(0)}], \\ \bar{k}_i^{(l+1)} = \bar{f}[x_n + c_i h; \bar{g}_i^{(l)}], \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{де } \bar{g}_i^{(0)} = \bar{x}_n, \bar{g}_i^{(l)} = \bar{x}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{k}_j^{(l)},$$

$$i = \overline{1, s}, l = \overline{1, N}.$$

Паралельне вирішення ЗДР на базі ПНМРК також концентрується на виконанні одного кроку інтегрування. Основна макрооперація, вводиться як обчислення всіх коефіцієнтів $K^{(l)} = (k_1^{(l)}, k_2^{(l)}, \dots, k_s^{(l)})$ на одному l -тому кроці ітераційного процесу. Кожен з p процесорів відповідає за обчислення l -тої ітерації i -тої компоненти допоміжного вектору $g_i^{(l)}, i = \overline{1, s}$.

Час обчислень при послідовній реалізації дорівнює:

$$T_1^{\text{ПНМРК}} = (N+1)s \sum_{i=1}^m T_{fi} + (2Nms^2 + 2ms + 2m)t_{op}.$$

В той же час для MIMD систем з врахуванням можливості паралельної реалізації звернення до правої частини СЗДР, час для обчислення ПНМРК дорівнює:

$$T_{p,comp}^{\text{ПНМРК}} = \underbrace{2t_{op} + [ms/p]T_F}_{\bar{k}^{(0)}} + N \underbrace{[ms/p][T_F + 2st_{op}]}_{\bar{k}^{(l)}} + \underbrace{\left[\frac{m}{p}\right](s+1)t_{op}}_{\bar{x}_{n+1}},$$

$$\text{де } T_F = \max_{i=1, \dots, m} T_{fi}.$$

Для топології гіперкуб внутрішньогруповий обмін потребує:

$$T_{p,comm,1}^{\text{ПНМРК,H}} = (N+1) \left[\log_2 \left[\frac{p}{s} \right] \cdot t_s + \left[\frac{ms}{p} \right] \left(\left[\frac{p}{s} \right] - 1 \right) t_w \right],$$

а міжгруповий обмін виконується двічі для обміну стадійними коефіцієнтами і перегруповування даних після обчислення чергової апроксимації вирішення і вимагає наступних тимчасових витрат:

$$T_{p,comm,2}^{\text{ПНМРК,H}} = 2 \log_2 p \cdot t_s + \left[\frac{m}{p} \right] (1+s) \times (p-1)t_w.$$

Основними параметрами, що характеризують ПНМРК, є порядок методу r і число стадій s . Крім того, при вирішенні систем нелінійних алгебраїчних рівнянь для визначення стадійних коефіцієнтів з'являється такий параметр, як необхідне число ітерацій L . Обчислювальна

складність блокових методів залежить від порядку методу r , числа точок в блоці k , а також від числа ітерацій $\hat{L}$ для здобуття вирішення СНАР необхідної точності. Для того, щоб порівняння чисельних методів на базі неявних однокрокових схем було коректним, необхідно: забезпечити один і той же порядок точності r ; отримати рішення в ідентичній кількості нових точок k ; породжувати ітераційні процеси повинні реалізовувати граничне число ітерацій, передбачене кожним з даних методів: $L = 2s$ і $\hat{L} = k$. Відмітимо, що серед множини неявних методів типу Рунге-Кутти для порівняння вибрані саме повністю неявні методи, оскільки вони володіють ідентичними характеристиками стійкості, що і блокові однокрокові методи [1-2], а також через оптимальне співвідношення між порядком і числом стадій.

При домінуванні в обчисленнях часу звернення до правої частини СЗДР $T_F \gg t_{op}$ обсяг обчислень для ПНМРК в s раз більше, ніж для блокових методів:

$$\frac{T_1^{\text{ПНМРК}}}{T_1^{\text{БМ2}}} \approx \frac{ks(L+1)T_F}{(k\hat{L}+1)T_F} \approx s.$$

Аналогічно, для паралельного виконання алгоритмів маємо:

$$\frac{T_p^{\text{ПНМРК}}}{T_p^{\text{БМ2}}} \approx \frac{k(L+1)T_F}{(\hat{L}+1)T_F} \approx 2s.$$

Для тривіальної правої частини виходить аналогічний результат, послідовна і паралельна реалізації обчислення вирішення в нових k точках сітки інтегрування вимагають більших накладних витрат для неявних методів Рунге-Кутти в порівнянні з блоковими методами. Відмітимо, що для паралельних алгоритмів ця різниця збільшується майже в 2 рази, що підтверджується експериментом на тестових задачах (рис. 4).

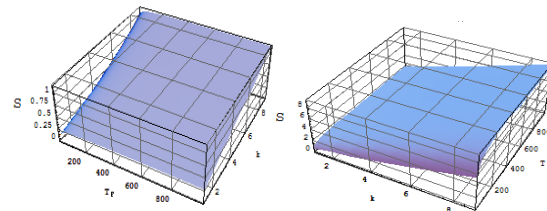


Рисунок 4 – Коефіцієнти прискорення вкладених ПНМРК і блокових однокрокових методів

Висновки

В даному дослідженні запропоновані і теоретично обґрунтовані паралельні методи чисельного вирішення жорстких задач Коші для одного диференційного рівняння на основі блокових неявних однокрокових різницевого схем:

вкладені форми k - і $(k + 1)$ -точкових блокових методів з використанням методу послідовного підвищення порядку точності. Здійснена модифікація алгоритмів, що реалізують різниці блокові методи розпаралелювання для вирішення СЗДР, яка з точки зору тимчасових витрат дозволяє з більшою ефективністю в порівнянні з існуючими алгоритмами знаходити чисельне рішення задачі Коші. Побудовані ітераційні паралельні алгоритми чисельного рішення нелінійної різницевої задачі Коші, що дозволяють отримувати результати із заданим ступенем точності. Приведені порівняльні характеристики чисельного вирішення тестових задач і оцінки паралелізму. Вирішення тестових задач показало, що експериментальні оцінки прискорення і ефективності близькі до потенційних [12-15].

Розроблено схеми відображення алгоритмів на паралельні обчислювальні структури з розподіленою пам'яттю. Для кожного з приведених алгоритмів розраховані аналітичні трудомісткості чисельного вирішення, отримані експериментальні характеристики паралелізму, які свідчать про високу ефективність ($E > 0.7$) запропонованих методів. Розроблені паралельні методи повністю неявних однокрокових схем типу Рунге-Кутти для одного диференційного рівняння. Здійснена модифікація отриманих методів з метою узагальнення на системи ЗДР. Проведено порівняльний аналіз ефективності неявних однокрокових методів рішення загальної задачі Коші на основі блокових k -точкових методів і s -стадійних ПНМРК одного і того ж порядку точності для послідовної і паралельної реалізацій. Встановлено, що динамічні

характеристики якості блокових багатоточкових методів перевершують відповідні характеристики багатостадійних однокрокових методів практично в s раз для послідовної і в $2s$ раз для паралельної реалізацій.

Наукова новизна полягає у розробці та обґрунтуванні вкладених блокових однокрокових паралельних методів на основі комбінації незалежних схем та схем на основі методу послідовного підвищення порядку точності для ефективного розв'язання жорстких завдань Коші.

Практична значимість полягає у розробці програмних додатків, що реалізують представлені методи з використанням інтерфейсу MPI (реалізація MS MPI), отримання динамічних характеристик методів для визначення пріоритетних областей їх використання в залежності від параметрів ОС, методу та чисельної схеми.

У якості майбутнього напрямку досліджень планується розробка та дослідження ефективності паралельних алгоритмів напів'явних методів Розенброка, що мають достатні характеристики точності та стійкості для розв'язання жорстких СЗДР [15]. Однак при реалізації даних методів матриця Якобі включається безпосередньо в обчислювальні формули, що призводить до певних складнощів з її заморожуванням (застосуванням однієї матриці на декількох кроках інтегрування). Внаслідок цього використання паралельних архітектур для реалізації безітераційних методів типу Розенброка, хоча і є нетривіальною задачею, але може дати ефективні результати для застосування нових однокрокових чисельних схем розв'язання проблем жорсткості.

Список літератури

1. Hairer E., Nørsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems. 2nd edition. Springer, 2011. 528 p.
2. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer, 2010. 614p.
3. Worland P.B. Parallel methods for the numerical solution of ordinary differential equations. IEEE Transactions on Computer. 1976. Vol. 25, No. 10. P.1045-1048.
4. Franklin M.A. Parallel solution of Ordinary Differential Equations. IEEE Transactions on Computer. 1978. Vol. 27, No. 5. P.413-420.
5. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to Numerical Analysis. New York. Springer, 2002. 609 p.
6. Числові методи моделювання динамічних об'єктів в мультипроцесорних системах / О.А. Дмитрієва, Н.Г. Гуськова, Є.О. Башков, І.А. Назарова: монографія. Покровськ: ДВНЗ "ДонНТУ", 2020. 268 с.
7. Фельдман Л.П., Назарова И.А. Современные параллельные методы численного решения задачи Коши. Донецк: ГВУЗ "ДонНТУ", 2013. 206с.
8. Паралельні однокрокові методи чисельного розв'язання задачі Коші: монографія / Л.П. Фельдман, І.А. Назарова. Донецьк: "ДВНЗ" ДонНТУ, 2011. 185 с.
9. Арушунян О.Б., Залеткин С.Ф., Калиткин Н.Н. Тесты для вычислительного практикума по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Вычислительные методы и программирование. 2002, т.3. С. 11-19.

10. Назарова І.А., Дмитрієва О.А. Паралельні обчислення. Покровськ: ДВНЗ "ДонНТУ", 2020. 246с.
11. Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений. Москва: Бином. Лаборатория знаний, 2007. 423с.
12. Назарова І.А. Паралельні неявні блокові методи чисельного розв'язання жорстких динамічних задач із зосередженими параметрами. Научно-теоретический журнал ИПИИ НАН Украины "Искусственный интеллект". №3. 2009. Донецк: ИПИИ. С. 404-412.
13. Назарова І.А. Моделювання паралельних процесів при розв'язанні багатовимірних жорстких задач Коші. Матеріали XII Міжнародної науково-практичної конференції "Інформаційні технології і автоматизація". Одеса: ОНАХТ, 2019. С. 36-37.
14. Назарова І.А. Паралельне моделювання динамічних жорстких процесів на базі блокових методів. Актуальні питання розвитку інформаційних технологій: тези доповідей Всеукраїнської конференції молодих учених. Маріуполь: ПДТУ, 2019. С. 43-45.
15. Назарова І.А. Розробка та дослідження ефективності паралельних алгоритмів розв'язання жорстких задач Коші для мультикомп'ютерів. III Всеукраїнська науково-практична інтернет-конференція "Комп'ютерні технології в енергетиці, електромеханіці та системах управління". Бахмут: ННППІ УІПА, 2020. С.30-31.

References

1. Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G. (2011), *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. 2nd edition, Springer, 528 p.
2. Hairer, E., Wanner, G. (2010), *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer. 614 p.
3. Worland, P. B. (1976), "Parallel methods for the numerical solution of ordinary differential equations", *IEEE Transactions on Computer*, Vol. 25, No. 10, pp.1045-1048.
4. Franklin, M. A. (1978), "Parallel solution of Ordinary Differential Equations", *IEEE Transactions on Computer*, Vol. 27, No. 5, pp. 413-420.
5. Stoer, J., Bulirsch, R. (2002), *Introduction to Numerical Analysis*, New York, Springer, 609 p.
6. Dmitrieva, O., Huskova, N., Bashkov, E., Nazarova, I. (2020), *Numerical methods for modeling dynamic objects in multiprocessor systems [Chyslovi metody modeliuвання dynamichnykh ob'ektiv v multyprotsesornykh systemakh]*, Pokrovsk: DVNZ "DonNTU", 268 p.
7. Feldman, L. P., Nazarova, I. A. (2013), *Modern parallel methods for the numerical solution of the Cauchy's problem [Sovremennye parallel'nye metody chislennogo resheniya zadachi Koshi]*, Donetsk National Technical University, Donetsk, 206 p.
8. Feldman, L. P., Nazarova, I. A. (2011), *Parallel one-step methods for the numerical solution of the Cauchy's problem [Parallel'ni odnokrokovyi metody chisel'nogo rozv'yazannya zadachi Koshi]*, Donetsk National Technical University, Donetsk, 185 p.
9. Arushunyan, O. B., Zaletkin, S. F., Kalitkin N. N. (2002), "Tests for computational workshop on ordinary differential equations" ["Testy dlya vychislitel'nogo praktikuma po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam"], *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, Vol. 3, pp. 11-19.
10. Nazarova, I. A., Dmitrieva, O. A. (2020), *Parallel computation [Parallel'nye vychisleniya]*, Pokrovsk: Donetsk National Technical University, 246 p.
11. Gergel', V. P. (2007), *Theory and practice of parallel computing [Teoriya i praktika parallel'nykh vychisleniy]*, Moskva: Binom, 423 p.
12. Nazarova, I. A. (2009), "Parallel implicit block methods for numerical solution of stiff dynamic problems with concentrated parameters" ["Paralelni neiyavni blokovi metody chyselnoho rozv'yazannya zhorstkykh dynamichnykh zadach iz zoseredzhenymy parametramy"], *Nauchno-teoreticheskij zhurnal IPII NAN Ukrainy «Iskusstvennyy intellekt»*, №3, Donetsk: IPAI, pp. 404-412.
13. Nazarova, I. A. (2019), "Simulation of parallel processes in solving multidimensional stiff Cauchy problems" ["Modeliuвання paralelnykh protsesiv pry rozv'yazanni bahatovymirnykh zhorstkykh zadach Koshi"], *Materialy XII Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Informatsiini tekhnolohii i avtomatyzatsiia»*, Odessa, pp. 36-37.
14. Nazarova, I. A. (2019), "Parallel modeling of dynamic stiff processes based on block methods" ["Paralelne modeliuвання dynamichnykh zhorstkykh protsesiv na bazi blokovykh metodiv"], *Aktualni pytannia rozvytku informatsiinykh tekhnolohii: tezy dopovidei Vseukrainskoi konferentsii molodykh uchenykh*, Mariupol, pp. 43-45.
15. Nazarova, I. A. (2020), "Development and research of efficiency of parallel algorithms for solving stiff Cauchy problems for multicomputers" ["Development and research of efficiency of parallel algorithms for solving rigid Cauchy problems for multicomputers"], *III Vseukrainska naukovo-praktychna internet-*

konferentsiia "Kompiuterni tekhnolohii v enerhetytsi, elektromekhanitsi ta systemakh upravlinnia", Bakhmut, pp. 30-31.

Надійшла до редакції 03.12.2020

I.A. NAZAROVA

Donetsk National Technical University, Pokrovsk, Ukraine
iryna.nazarova@donntu.edu.ua

FEATURES OF PARALLEL REALIZATION OF EMBEDDED IMPLICIT ONE-STEP NUMERICAL METHODS FOR SOLVING MULTIDIMENSIONAL STIFF CAUCHY PROBLEMS

The article contains the results of research related to the development and justification of parallel methods for solving stiff Cauchy problems for ordinary differential equations (ODE) of large dimension based on one-step implicit numerical schemes. Parallel algorithms for block one-step implicit nested circuits have been developed based on a combination of independent and specially selected forms for controlling the integration step. The obtained methods are modified in order to generalize to ODE systems. A comparison is made of the efficiency of using different implicit nested schemes: block and completely implicit methods of the Runge-Kutta type with identical stability estimates. Analytical models of temporal communication complexity for data exchange processes in message and packet transfer modes for various topologies of parallel architectures are obtained. The adequacy of the models was checked by determining the experimental indicators for various modes of data transmission. The analysis of theoretical dynamic indicators of parallelism quality is carried out to the obtained experimental results depending on the parameters of the parallel system, characteristics of the method and the problem. In this research, parallel methods of numerical solution of Cauchy stiff problems for one differential equation based on block implicit one-step difference schemes are proposed and theoretically substantiated: embedded forms of k - and $(k + 1)$ -point block methods using the method of sequential increase of the order of accuracy. Modification of algorithms that implement difference block parallelization methods for solving SODE, which in terms of time costs allows to find a numerical solution of the Cauchy problem with greater efficiency in comparison with existing algorithms. Iterative parallel algorithms for numerical solution of the nonlinear Cauchy difference problem are constructed, which allow to obtain results with a given degree of accuracy. Comparative characteristics of numerical solution of test problems and evaluation of parallelism are given. Solving test problems showed that experimental estimates of acceleration and efficiency are close to potential. Schemes for mapping algorithms to parallel computing structures with distributed memory have been developed. For each of the above algorithms, the analytical complexity of the numerical solution is calculated, the experimental characteristics of parallelism are obtained, which indicate the high efficiency ($E > 0.7$) of the proposed methods. Parallel methods of completely implicit one-step Runge-Kutta schemes for one differential equation are developed. Modification of the received methods for the purpose of generalization on ODE systems is carried out. A comparative analysis of the efficiency of implicit one-step methods for solving the general Cauchy problem on the basis of block k -point methods and s -stage full IRK of the same order of accuracy for serial and parallel implementations is performed. It is established that the dynamic quality characteristics of block multipoint methods exceed the corresponding characteristics of multistage one-step methods by almost s times for series and $2s$ times for parallel implementations. The scientific novelty lies in the development and substantiation of nested block one-step parallel methods based on a combination of independent schemes and schemes based on the method of sequential increase of the order of accuracy for effective solution of Cauchy stiff problems. The practical significance lies in the development of software applications that implement the developed methods using the MPI interface, obtaining dynamic characteristics of the methods to determine the priority areas of their use depending on the parameters of the OS, method and numerical scheme. As a future direction of research, it is planned to develop and study the effectiveness of parallel algorithms of semi-explicit Rosenbrock methods that have sufficient accuracy and stability characteristics to solve stiff SODE.

Key words: *Cauchy stiff problem, implicit numerical scheme, one-step methods, block methods, embedded methods, parallel implementation, speedup and efficiency.*