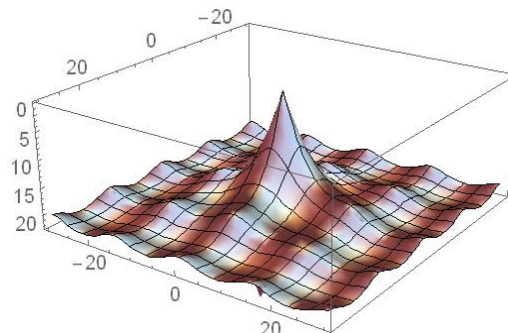


**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ**



**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ  
ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ І САМОСТІЙНИХ РОБІТ  
ЗА КУРСОМ  
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ**  
для студентів спеціальностей  
121 Інженерія програмного забезпечення,  
122 Комп'ютерні науки  
всіх форм навчання



**ПОКРОВСЬК, 2020**

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Державний вищий навчальний заклад**  
**«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ**  
**ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ І САМОСТІЙНИХ РОБІТ**  
**ЗА КУРСОМ**  
**МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ**  
для студентів спеціальностей  
121 Інженерія програмного забезпечення,  
122 Комп'ютерні науки  
всіх форм навчання

**Покровськ, 2020**

УДК

Методичні вказівки і завдання до виконання практичних і самостійних робіт за курсом «Математичні методи дослідження операцій» для студентів спеціальностей 121 Інженерія програмного забезпечення, 122 Комп'ютерні науки всіх форм навчання/ укл. Дмитрієва О.А. – Покровськ: ДонНТУ, 2020. – 110 с.

Методичні вказівки і завдання до виконання практичних і самостійних робіт за курсом «Математичні методи дослідження операцій» призначені для закріплення знань студентів, що навчаються за спеціальностями 121 Інженерія програмного забезпечення, 122 Комп'ютерні науки галузі знань 12 Інформаційні технології, одержуваних при вивченні лекційного матеріалу. Методичні вказівки спрямовані на формування системного мислення, оволодіння теоретичними основами операційних досліджень, засвоєння підходів, що використовуються при розв'язанні завдань лінійного, нелінійного, цілочисельного та динамічного програмування.

При виконанні практичних і самостійних робіт необхідно застосовувати викладені в методичних вказівках теоретичні положення для вирішення поставлених задач. Студентам пропонується виконати ряд індивідуальних завдань, варіанти яких наведено в методичних вказівках. Таким чином, самостійна робота студентів дозволить розвинути навички розв'язання практичних задач. За кожною темою наводяться основні теоретичні відомості, контрольні запитання і змістовні завдання, що дозволяють опанувати на практиці вивчений матеріал.

Укладач: Дмитрієва О.А., д.т.н., проф., зав. кафедри прикладної математики та інформатики

Рецензент: Цололо С.О., к.т.н., доц., доцент кафедри комп'ютерної інженерії

Відповідальний за випуск: Ковальов С.О., к.т.н., доц., декан факультету комп'ютерних наук і технологій

Затверджено навчально-методичним відділом ДВНЗ «ДонНТУ»,  
протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_ .2020 р.

Розглянуто на засіданні кафедри прикладної математики та інформатики,  
протокол № 5 від 21 квітня 2020 р.

## ЗМІСТ

|     |                                                      |    |
|-----|------------------------------------------------------|----|
|     | Вступ.....                                           | 6  |
| 1   | Побудова математичних оптимізаційних моделей .....   | 10 |
| 1.1 | Основні теоретичні відомості.....                    | 10 |
| 1.2 | Розв’язання типових прикладів.....                   | 11 |
| 1.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....       | 15 |
| 1.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт..... | 16 |
| 2   | Розв’язання завдань лінійного програмування.....     | 25 |
| 2.1 | Основні теоретичні відомості.....                    | 25 |
| 2.2 | Розв’язання типових прикладів.....                   | 26 |
| 2.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....       | 30 |
| 2.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт..... | 30 |
| 3   | Розв’язання завдань транспортного типу .....         | 34 |
| 3.1 | Основні теоретичні відомості.....                    | 34 |
| 3.2 | Розв’язання типових прикладів.....                   | 35 |
| 3.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....       | 39 |
| 3.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт..... | 39 |
| 4   | Розв’язання завдань про призначення.....             | 44 |
| 4.1 | Основні теоретичні відомості.....                    | 44 |
| 4.2 | Розв’язання типових прикладів.....                   | 46 |
| 4.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....       | 49 |
| 4.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт..... | 49 |
| 5   | Методи нелінійної одновимірної оптимізації.....      | 54 |
| 5.1 | Основні теоретичні відомості.....                    | 54 |
| 5.2 | Розв’язання типових прикладів.....                   | 56 |
| 5.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....       | 62 |
| 5.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт..... | 62 |

|     |                                                        |     |
|-----|--------------------------------------------------------|-----|
| 6   | Багатовимірна нелінійна оптимізація. Побудова моделей. |     |
|     | Класична теорія оптимізації.....                       | 64  |
| 6.1 | Основні теоретичні відомості.....                      | 64  |
| 6.2 | Розв'язання типових прикладів.....                     | 68  |
| 6.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....         | 72  |
| 6.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт.....   | 72  |
| 7   | Цілочисельне лінійне програмування.....                | 78  |
| 7.1 | Основні теоретичні відомості.....                      | 78  |
| 7.2 | Розв'язання типових прикладів.....                     | 81  |
| 7.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....         | 88  |
| 7.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт.....   | 88  |
| 8   | Комбінаторна оптимізація. Динамічне програмування..... | 92  |
| 8.1 | Основні теоретичні відомості.....                      | 92  |
| 8.2 | Розв'язання типових прикладів.....                     | 97  |
| 8.3 | Контрольні питання для самостійної роботи.....         | 101 |
| 8.4 | Варіанти завдань для виконання практичних робіт.....   | 102 |
|     | Список рекомендованої літератури.....                  | 108 |

## ВСТУП

Методичні вказівки і завдання до виконання практичних і самостійних робіт за курсом «Математичні методи дослідження операцій» спрямовані на формування системного мислення, оволодіння теоретичними основами операційних досліджень, засвоєння підходів, що використовуються при розв'язанні завдань лінійного, нелінійного, цілочисельного та динамічного програмування;

До виникнення напрямку дослідження операцій на базі математичного програмування, всі рішення (економічні, політичні, фінансові, суб'єктивні) приймалися з урахуванням наявного досвіду окремої людини або групи людей без застосування будь-яких моделей і методів. Здатність формулювати загальні цілі і потім шукати оптимальні розв'язання для практичних задач прийняття рішень великої складності з'явилися революційним досягненням [1].

Екстремальними завданнями людина цікавиться з античних часів. У Стародавній Греції вже давно (у всякому разі до VI століття до н.е.) знали про екстремальні властивості кола і кулі: серед плоских фігур з однаковим периметром найбільшу площу має коло (розв'язання ізопараметричного екстремального завдання); куля має максимальний обсяг серед просторових фігур з однаковою площею поверхні (розв'язання ізопіфанного екстремального завдання).

Після загибелі античної цивілізації наукове життя в Європі стала відроджуватися тільки в XV столітті. Екстремальні задачі виявилися серед тих, якими цікавилися кращі уми того часу І. Ньютон, Я. Бернуллі, Г. Лейбніц, І. Бернуллі. Відкрита І. Кеплером основна властивість екстремумів була потім оформлена у вигляді теореми П. Ферма (для многочленів), потім І. Ньютоном і Г. Лейбніцем для довільних функцій.

З кінця XVII до середини XX століття теорія екстремальних задач пройшла величезний шлях. В її розвитку взяли участь майже всі великі математики минулого. Екстремальними завданнями займалися Х. Гюйгенс, К. Гаусс, А. Лежандр, П. Діріхле, Б. Ріман, У. Гамільтон, К. Якобі, К. Вейерштрасс, Д. Гільберт і ін. Але клас математичних завдань, для вирішення яких вдається побудувати зручні формули, надзвичайно вузький. Єдиний шлях – це побудова ефективних алгоритмів, які за певну кількість ітерацій призводять до шуканого розв’язку (точного або наближеного).

До середини XX століття математика мало використовувалася для розв’язання прикладних завдань, а в основному знаходила різноманітні застосування в інших розділах природознавства. Ситуація стала помітно змінюватися напередодні другої світової війни. В економіці і техніці стали виникати завдання, для розв’язання яких практичний досвід і здоровий глузд виявлялися вже недостатніми. Був потрібен науковий підхід, що передбачає складання математичної моделі досліджуваного практичного явища або процесу, дослідження моделі відповідними математичними методами, складання алгоритмів розв’язання і реалізацію цих алгоритмів у вигляді програм для ЕОМ.

Піонером лінійного програмування був Л. Канторович, робота якого «Математичні методи організації і планування виробництва» отримала Нобелівську премію з економіки. Канторович показав, що всі економічні проблеми розподілу можуть розглядатися як проблеми максимізації при численних обмеженнях, і, отже, можуть бути вирішені за допомогою методів лінійного програмування. Досліджуючи спеціальні завдання лінійного програмування, Л. Канторович спільно з М. Гавурінім дослідив транспортну задачу в матричній і мережевій постановках. Запропонований ними метод потенціалів і його узагальнення в подальшому широко використовувалися в економічній практиці.

Паралельно (але трохи пізніше) ці напрямки розвивалися в інших країнах світу. У США поява цього напрямку була викликана практикою військового планування. Одним з основоположників і лідером був Д. Данциг, який працював радником з математики у Генерального інспектора ВПС США і займався механізацією процесу планування, а точніше, розробкою програми поетапного розгортання, підготовки і тилового постачання. Під час другої світової війни Т. Купманс (економіст із Чиказького університету) працював над транспортною моделлю для Судноплавної колегії союзників. Купманс став лідером для ряду молодих американських вчених, які розкрили можливості моделей лінійного програмування. Їх дослідження пізніше були відзначені кількома Нобелівськими преміями.

Завдання прийняття рішень до 1946 р не мали цільової функції. Використання лінійного виразу в якості цільової функції для пошуку екстремуму стало новим словом. Перші роботи велися ще до появи комп'ютера (наприкінці 1946 р деякі вчені в США дізналися, що він на підході). У 1947 Г. фон Нейману з О. Моргенштерном закінчили книгу з теорії ігор (розділ математичного програмування). У 1949 році в університеті Чикаго відбулася перша в світі конференція з математичного програмування (проводяться донині в різних містах).

З 1950 по 1960 рр. стали виникати нові напрямки дослідження операцій. Нелінійне програмування виникло приблизно в 1951 р. з появою знаменитої теореми Куна-Такера, що пішла від теореми Фріца-Джона (1948р.). Комерційні програми розпочато в 1951 р. Чарнзом і Купером. Незабаром після цього практичне використання почало домінувати. Теорія потоків в мережах почала розвиватися близько 1954 р. Форд, Фалкерсон і Хофман показали зв'язки з теорією графів. Початок розвитку методів великої розмірності пов'язують з 1955 р. (Данциг і Вулф). Стохастичне програмування веде свій відлік з 1955 р. (Данциг). Цілочислове



програмування розпочато в 1958 р. роботою Р. Гоморі. На відміну від більш ранньої роботи по завданню комівояжера, запропонованою Фалкерсоном, Джонсоном і Данцигом, Гоморі показав, як раціонально отримувати січні площині. Метод гілок і границь, який виявився найбільш ефективним для розв'язання цілочислових завдань, був досліджений Е. Баласом.

Поліноміально-розв'язні і NP-важкі завдання – новий підхід до класифікації завдань оптимізації та алгоритмів їх розв'язання. У 1978 р Л. Хачіян показав, що алгоритм еліпсоїдного типу може вирішити будь-яке завдання лінійного програмування за поліноміальний час. Цей важливий теоретичний прорив був відзначений міжнародною премією.

Ще одним напрямом сучасної теорії екстремальних задач, вважається проблема оптимізації систем в умовах невизначеності. При постановці завдань цього напрямку передбачається, що поряд з основним учасником оптимізації присутні ще інші, які заважають (свідомо чи несвідомо) основному учаснику. При оптимізації таких систем мова йде про отримання гарантованого результату навіть при самих несприятливих ситуаціях.

Наступний період розвитку дослідження операцій пов'язують з розробкою ефективного програмного забезпечення для різних класів завдань оптимізації великих обсягів. Ці програми і системи забезпечені розвиненими системами підготовки вихідних даних, засобами їх аналізу і представлення отриманих результатів. Сьогодні «Математичні методи дослідження операцій» – науковий і прикладний напрямок, що бурхливо розвивається. Зростаюче населення, ресурсна база, що скорочується, зростаючий розрив між багатими і бідними країнами, політичні ускладнення на міжнародній арені – все це вимагає раціональних, а, точніше, оптимальних підходів у розв'язанні виникаючих проблем.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Luenberger D.G. Linear and Nonlinear Programming/ D.G. Luenberger, Y. Ye. – Heidelberg: Springer, 2016. – 546 p.
2. Garfinkel A. Modeling Life/ A. Garfinkel, J. Shevtsov, Y. Guo. – Cham: Springer, 2017. – 446 p.
3. Дмитрієва О.А. Електронний конспект лекцій за курсом «Математичні методи дослідження операцій». – Донецьк: ДонНТУ, 2012. – 72 с.
4. Ситнікова О.Д., Михайлова Т.В., Дмитрієва О.А. Методичні вказівки і завдання за курсом “Математичне програмування і дослідження операцій”, Донецьк, Доннту, 2013. – 64 с.
5. Габасов р.ф. Экстремальные задачи в современной науке и приложениях. режим доступа: <http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/352.html>
6. Таха Х.А Введение в исследование операций / Таха Хэмди А. ; Х. А. Таха ; Пер. с англ. А.А. Минько. – 7-е изд. М. : Вильямс, 2016. – 1056 с.
7. Ричардс Д. Машинное обучение/ Д. Ричардс, Х. Бринк, М. Феверолф Питер, 2016.- 336 с.
8. Carter M.W., Price C.C., Rabadi G. Operations research: a practical approach Boca Raton: CRC Press, 2019. — 471 p.
9. Горлач Б. А. Исследование операций. – СПб.: Лань. – 2013. – 448 с.
10. Есипов Б. А. Методы исследования операций. – СПб.: Лань, 2013. – 256 с.
11. Кремер Н. Ш., Путко Б. А., Тришин И. М., Фридман М. Н. Исследование операций. – М.: Юрайт – 2012. – 432 с.
12. Невежин В. П., Кружилов С. И., Невежин Ю. В. Исследование операций и принятие решений. – М.: Форум. – 2012. – 400 с.
13. Стронгин Р. Г. Исследование операций. Модели экономического поведения. – М.: Бином. Лаборатория знаний. – 2017. – 208 с.

14. Захаров, М.С. Методы исследования операций: Учебное пособие / М.С. Захаров, Н.Г. Корвет и др. – СПб.: Лань, 2010. – 256 с.

15. Захарова, О.Ю. Методы исследования операций: Учебное пособие / О.Ю. Захарова. – СПб.: Лань, 2013. – 256 с.

16. Минько, Э.В. Методы прогнозирования и исследования операций: Учебное пособие / Э.В. Минько, А.Э. Минько. – М.: Финансы и статистика, 2012. – 480 с.

17. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций: Учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – М.: Дашков и К, 2016. – 400 с.

18. М.І.Самойленко, Б.Г.Скоков Електронний посібник з дослідження операцій. Навч. посібник. – Харків: ХНАМГ, 2015. – 176 с. режим доступу: <http://eprints.kname.edu.ua/12811/1/BA-2.pdf>

19. Бейко І. В., Телейко А. Б. Навчальна програма дисципліни “Математичні методи дослідження операцій” (для бакалаврів). — К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2012. — 12 с.: режим доступу: [http://library.iapm.edu.ua/metod\\_disc/pdf/4162\\_Mat\\_metod\\_op.pdf](http://library.iapm.edu.ua/metod_disc/pdf/4162_Mat_metod_op.pdf)

Методичні вказівки і завдання до виконання  
практичних і самостійних робіт за курсом  
МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ  
для студентів спеціальностей  
121 Інженерія програмного забезпечення,  
122 Комп'ютерні науки  
всіх форм навчання

Укладач: Ольга Анатоліївна Дмитрієва