

Гогольєва Н.Ф., доцент кафедри, к.ф.-м.н., доцент (nataliia.hoholieva@donntu.edu.ua)
Державний вищий навчальний заклад «Донецький національний технічний університет»,
м. Покровськ, Україна

НОВИЙ ВИПАДОК ІНТЕГРОВАНOSTІ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЗАДАЧІ ПРО РУХ ДВОХ ГІРОСКОПІВ ЛАГРАНЖА

Актуальність питання. Динаміка неголономних систем є одним з найбільш складних розділів механіки. Теорії руху неголономних систем завжди приділялася досить велика увага. Ці системи є механічними моделями багатьох технічних об'єктів. Багато технічних пристроїв представляють у вигляді системи твердих тіл, сполучених між собою шарнірами.

У гіроскопії і механіці твердого тіла немало прикладів, коли побудовано точні розв'язки досліджуваних рівнянь в загальних або окремих випадках, методи побудови яких можуть бути використані в аналогічних випадках. Дослідження можливостей точної інтеграції рівнянь руху має теоретичне і практичне значення. Нерідко точна інтеграція значно спрощує дослідження нелінійних рівнянь і має свої переваги. Точний розв'язок задачі служить еталоном для наближених методів і може служити початковим наближенням для складніших задач.

Раніше вже були розглянуті деякі інтегровані випадки задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лангранжа, з'єднаних неголономним шарніром [1], [2].

Знаходження точних розв'язків є початковим етапом для побудови повних розв'язків, які в наочній формі дають вичерпну інформацію про особливості руху кожного з тіл системи.

Постановка мети та задач дослідження. Метою роботи є перетворення рівнянь руху двох тіл, з'єднаних неголономним шарніром, побудова нових аналітичних і повних розв'язків цієї задачі.

О. П. Харламов і М. П. Харламов запропонували реалізацію неголономної в'язі – неголономний шарнір [3], коли до внутрішньої або зовнішньої поверхні сферичної оболонки кріпиться рамка, що несе коліщатка (диски). Можливі різні конструкції такої в'язі, що забезпечують рівність компонент кутових швидкостей ω_* і Ω_* , з'єднаних цим шарніром тіл S і S_0 у напрямі e , фіксованому в одному з них (ортогонально площині, що містить осі коліщаток): $\omega_* \cdot e = \Omega_* \cdot e$. Ця в'язь виключає відносні повороти тіл S і S_0 навколо осі неголономності, що має напрям e .

Постановка задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром, надано у роботі [4] М. Ю. Лесіної і О. П. Харламова. Система, що розглядається, замкнена: дванадцять рівнянь зв'язують дванадцять величин.

Взаємодію тіл S і S_0 в неголономному шарнірі забезпечує момент $L = Le_3^0$, що характеризує дію через цей шарнір тіла S_0 на S .

$$L = -e_2 L \sin \theta + e_3 L \cos \theta, \text{ протидія } -L \text{ прикладена до } S_0.$$

У системі координат, що рухається поступально разом з O , $K = B(\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2) + n_0 e_3$ – момент відносно точки O кількості руху тіла S .

$$K_0 = B_0(\Omega_1 e_1^0 + \Omega_2 e_2^0) + n_0 e_3^0 - \text{аналогічний вектор для тіла } S_0.$$

Записуючи зміну вектора K в системі координат, що рухається поступально з прискоренням W_* , слід окрім моменту пружних сил $e_1 \Pi'(\theta)$ ввести момент переносних сил інерції $r \times (-mW_*)$. У проекціях на третю вісь рівняння встановить несталість величини n , а перші два записуються у вигляді

$$A(\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) + n \omega_2 = -\Pi'(\theta) + N[-(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \sin \theta + (\dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3) \cos \theta],$$

$$A(\dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1) - n \omega_1 = N(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1) - L \sin \theta, \quad \dot{n} = L \cos \theta.$$

При складанні рівнянь руху тіла S_0 , окрім моменту $-\epsilon_1^0 \Pi'(\theta)$, потрібно врахувати момент $\mathbf{r}_0 \times (-m\mathbf{W}_*)$:

$$A_0(\dot{\Omega}_1 - \Omega_2 \Omega_3) + n_0 \Omega_2 = \Pi'(\theta) + N[(\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \theta + (\dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3) \cos \theta],$$

$$A(\dot{\Omega}_2 + \Omega_3 \Omega_1) - n_0 \Omega_1 = N(\dot{\omega}_2 + \omega_3 \Omega_1), \quad \dot{n}_0 = -L.$$

Система рівнянь, розв'язана відносно похідних, має вигляд:

$$\dot{\phi} = n/J - \omega_3, \quad \dot{\Phi} = n_0/J_0 - \Omega_3, \quad \dot{n} = L \cos \theta, \quad \dot{n}_0 = -L,$$

$$\dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 + [-(A_0 - N \cos \theta) \Pi'(\theta) - N n_0 \Omega_2 \cos \theta - A_0 n \omega_2 - A_0 N (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \sin \theta + N^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \theta \cos \theta] / (A A_0 - N^2 \cos^2 \theta),$$

$$\dot{\omega}_2 = -\omega_1 \omega_3 + (A_0 n \omega_1 - N n_0 \Omega_1 - A_0 L \sin \theta) / (A A_0 - N^2),$$

$$\dot{\Omega}_1 = \Omega_2 \Omega_3 + [(A - N \cos \theta) \Pi'(\theta) - N n \omega_2 \cos \theta - A n_0 \Omega_2 + A N (\omega_1^2 + \omega_2^2) \sin \theta - N^2 (\Omega_1^2 + \Omega_2^2) \sin \theta \cos \theta] / (A A_0 - N^2 \cos^2 \theta),$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\Omega_1 \Omega_3 + (N n \omega_1 - A n_0 \Omega_1 - N L \sin \theta) / (A A_0 - N^2).$$

Ці рівняння слід доповнити кінематичними співвідношеннями

$$\Omega_1 = \omega_1 + \dot{\theta}, \quad \Omega_2 = \omega_2 \cos \theta + \omega_3 \sin \theta, \quad \Omega_3 = -\omega_2 \sin \theta + \omega_3 \cos \theta, \quad \dot{\Phi} = \dot{\phi} \cos \theta.$$

Інтеграл, що виражає сталість моменту кількості руху системи відносно її центру мас:

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2,$$

$$G_1 = (A - N \cos \theta) \omega_1 + (A_0 - N \cos \theta) \Omega_1,$$

$$G_2 = (A - N \cos \theta) \omega_2 + (A_0 \cos \theta - N) \Omega_2 - n_0 \sin \theta,$$

$$G_3 = (A_0 \Omega_2 - N \omega_2) \sin \theta + n_0 \cos \theta + n$$

і інтеграл енергії

$A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) - 2N(\Omega_1 \omega_1 \cos \theta + \Omega_2 \omega_2) + n^2/J + n_0^2/J_0 + 2\Pi(\theta) = 2h$, де $\Pi(\theta)$ – довільна диференційована функція кута θ .

Основний матеріал і результати досліджень. Виключаючи послідовно $\omega_2(\theta)$, $k'(\theta)$ отримаємо для змінної $k_0(\theta)$ лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, де замість параметрів A , A_0 , J , J_0 , N введемо нові безрозмірні параметри $B_* = 1 + H/A_0 J_0$, $D_* = H/A_0 J - 1$, $E_* = N/A_0$,

$$(B_* + D_* \cos^2 \theta) k_0''(\theta) + (E_* - 3D_* \cos \theta) k_0'(\theta) \sin \theta + (B_* - 1 + 2E_* \cos \theta) k_0(\theta) = 0.$$

Прийнявши обмеження, що тіло S сферично симетрично і одно з тіл системи закріплене в центрі мас отримано новий розв'язок задачі про рух за інерцією двох гіроскопів Лагранжа, з'єднаних неголономним шарніром.

$$n_0(\theta) = C \sin(\lambda \theta + \beta), \quad n(\theta) = \frac{C \lambda}{(1 - \lambda^2)} [\lambda \sin(\lambda \theta + \beta) \cos \theta - \cos(\lambda \theta + \beta) \sin \theta],$$

$$\omega_2(\theta) = -\frac{C}{B \lambda (1 - \lambda^2)} [\lambda \sin(\lambda \theta + \beta) \sin \theta + \cos(\lambda \theta + \beta) \cos \theta], \quad \Omega_2(\theta) = -\frac{C}{B \lambda (1 - \lambda^2)} \cos(\lambda \theta + \beta),$$

$$\zeta - 1 = 2A_0/(A_0 - J_0), \quad \Omega_3(\theta) = \frac{C}{B(1 - \lambda^2)} \sin(\lambda \theta + \beta), \quad \omega_3(\theta) = \frac{C}{B \lambda (1 - \lambda^2)} [\lambda \sin(\lambda \theta + \beta) \cos \theta - \cos(\lambda \theta + \beta) \sin \theta],$$

$$\Omega_1(\theta) = \frac{2A_0}{A_0 - J_0} \kappa(\theta), \quad \omega_1(\theta) = 2 \frac{2A_0 - J_0}{A_0 - J_0} \kappa(\theta), \quad \dot{\Phi}(\theta) = 0, \quad \phi^*(\theta) = 0,$$

$$\kappa^2(\theta) = \frac{(A_0 - J_0)^2}{4(A_0^2 + 2A_0 J - J J_0)^2} \left\{ \left[g^2 - \frac{(J + J_0)^2 C^2}{J_0^2} \right] - \frac{(A_0^2 + 2A_0 J - J J_0)(J + J_0) C^2}{J J_0^2} \cos^2(\lambda \theta + \beta) \right\}.$$

Знайдено потенційну енергію пружного елемента $2h_1 - 2\Pi(\theta) = \tilde{M}_* \cos^2(\lambda \theta + \beta)$, де

$$\tilde{M}_* = -\frac{C^2(\mu_* - 1 + \lambda^2)(2\mu_* - 1 + \lambda^2)}{B(1 - \lambda^2)^2(\mu_*^2 + 2\mu_* \lambda^2 + \lambda^4 - \lambda^2)},$$
 а в постійну h_1 включені $2h$ й інші постійні.

Висновки.

За допомогою напівзворотнього методу отримано розв'язок задачі на лінійному по других і третіх компонентах кутових швидкостей тіл інваріантному співвідношенні спеціального вигляду, при обмеженнях – тіло S сферично симетрично і одно з тіл системи закріплене в центрі мас.

Швидкість власного обертання тіла S_0 дорівнює нулю, тому напіврухомий базис $\mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^0$ співпадає з базисом $\mathbf{e}_1^{*0} \mathbf{e}_2^{*0} \mathbf{e}_3^0$. Швидкість власного обертання тіла S також дорівнює нулю, тому, аналогічно, напіврухомий базис $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ співпадає з базисом $\mathbf{e}_1^* \mathbf{e}_2^* \mathbf{e}_3^*$.

Перелік посилань:

1. Гоголева, Н.Ф. Новый случай интегрируемости задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром / Н.Ф. Гоголева, М.Е. Лесина // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія : обчислювана техніка та автоматизація, №1 (28) – Донецьк , 2015. – С. 24 – 32.
2. Гоголева, Н.Ф. Задача про рух по інерції двох гіроскопів Лагранжа, сполучених неголономним шарніром: інтегрований випадок / Наталія Федорівна Гоголева// Науковий Вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: Комп'ютерні системи та компоненти. – Том.4, випуск 4. – Чернівці: ЧНУ, 2013. – С.74–77.
3. Харламов, А.П. Неголономный шарнир / А.П. Харламов, М.П. Харламов // Механика твердого тела. – 1995. – Вып.27. – С.1–7.
4. Лесина, М.Е. Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром / М.Е. Лесина, А.П. Харламов // Механика твердого тела. – 1995. – Вып.27. – С.15–21.