Лекция №3

Масса системы. Центр масс системы.

Движение механической системы зависит не только от действующих на нее сил, а и от ее совокупности масс и расположения масс.

Арифметическая сумма масс всех точек или тел, которые образуют механическую систему, называется массой системы.

$$M = \sum m_k \text{ - масса системы} \qquad (3.1)$$

Центр масс (центром инерции) материальной системы называется геометрическая точка <u>*С*</u>*, положение которой определяется формулой:*

$$\bar{r}_c = \frac{\sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{\sum m_k} = \frac{\sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{M};$$

$$\bar{r}_c = \frac{\sum (m_k \cdot \bar{r}_k)}{M} \text{ - центр масс системы} \qquad (3.2)$$

где: $\bar{r}_{ñ}$ - радиус – вектор центра масс;

$\bar{r}_k$ - радиус – вектор <u>*k*</u>-ой точки системы;

m_k - масса <u>*k*</u>-ой точки системы;

M – масса системы.

Момент инерции. Радиус инерции.

Моментом инерции точки относительно оси называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния до этой оси.

$$I_z = m \cdot h^2 \text{ - момент инерции точки.} \qquad (3.3)$$

Для системы материальных точек

$$I_z = \sum m_k \cdot h_k^{\,2} \text{ - момент инерции системы.} \qquad (3.4)$$

где: m_k - масса <u>*k*</u>-ой точки системы;

h_k - расстояние от <u>*k*</u>-ой точки системы до данной оси.

Единицы измерения $[I] = \hat{e}\tilde{a} \cdot \grave{i}^{\,2}$

В практических расчетах часто используют понятие радиуса инерции *(i)*, тогда момент инерции относительно оси равен:

$$I_z = M \cdot i_z^2 \text{ - момент инерции через радиус инерции.} \qquad (3.5)$$

где: $M = \sum m_k$ - масса всего тела.

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{M}} \text{ - радиус инерции.} \qquad (3.6)$$

Момент инерции тела относительно плоскости, оси, полюса.

На теле возьмем произвольную т. M_k с координатами $(x_k\,;\ y_k\,;\ z_k)$.

Найдем моменты инерции относительно плоскостей.

$$\begin{array}{l} пл.\ XOY: \\ пл.\ ZOX: \\ пл.\ ZOY: \end{array} \begin{cases} I_{xoy} = \sum m_k \cdot z_k^2; \\ I_{zox} = \sum m_k \cdot y_k^2; \\ I_{zoy} = \sum m_k \cdot x_k^2; \end{cases} \qquad (3.7)$$

Формула (3.7) – момент инерции относительно плоскостей.

Момент инерции тела относительно плоскости равняется сумме произведений точек тела на квадрат координаты, которая не входит в индекс плоскости.

Опустим $\perp$ из т. M_k на оси: на ось: <u>x</u> - $M_k N_k$;

на ось: <u>y</u> - $M_k L_k$;

на ось: <u>z</u> - $M_k P_k$.

Найдем моменты инерции относительно осей (осевые моменты инерции).

$$I_x = \sum m_k \cdot (M_k N_k)^2;$$

Из треугольника имеем:

$$(M_k N_k)^2 = z_k^2 + y_k^2;$$

тогда
$$\begin{cases} I_x = \sum m_k \left(z_k^2 + y_k^2\right); \\ I_y = \sum m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right); \\ I_z = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right). \end{cases} \tag{3.8}$$

Момент инерции относительно оси равен сумме произведений масс точек тела на сумму квадратов координат, которые не входят в индекс оси.

Соединим т.О – полюс с т. M_k – радиус – вектором $\bar{r}_k$. Определим момерт инерции относительно полюса (полярный момент инерции).

$$I_i = \sum m_k \cdot r_k^{\ 2} \text{ - полярный момент инерции} \tag{3.9}$$

Т.к. $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \quad \Rightarrow$

$$I_i = \sum m_k \cdot \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right) \tag{3.9'}$$

Сложим осевые моменты инерции:

$$\begin{cases} I_x = \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right); \\ I_y = \sum m_k \left(x_k^2 + z_k^2\right); \\ I_z = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right). \end{cases}$$

$$I_x + I_y + I_z = \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2 + x_k^2 + z_k^2 + x_k^2 + y_k^2\right) = 2\sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right).$$

На основе формулы (3.9') будем иметь:

$$I_x + I_y + I_z = 2I_o;$$

$$I_o = \frac{I_x + I_y + I_z}{2} \text{ - полярный момент инерции} \tag{3.10}$$

Центробежный момент инерции

Центробежный момент инерции равняется сумме произведений масс *точек тела на координаты, которые входят в индекс момента.*

$$\begin{cases} I_{xy} = \sum m_k \cdot x_k \cdot y_k\,; \\ I_{xz} = \sum m_k \cdot x_k \cdot z_k\,; \\ I_{zy} = \sum m_k \cdot z_k \cdot y_k\,. \end{cases}$$ - центробежные моменты инерции тела (3.11)

Единицы измерения $[I_{xy}] = \hat{e}\tilde{a} \cdot \grave{i}^{\,2}$.

Главные оси инерции

Ось инерции называется главной, если два центробежных момента инерции, которые в индексе имеют одну и ту же ось равняются нулю:

$I_{xy} = 0$; $I_{xz} = 0$ - ось <u>x</u> – главная ось инерции.

Если все центробежные моменты инерции равны нулю – все оси *(x; y; z)* – являются главными осями инерции.

Теорема о моменте инерции твердого тела относительно параллельных осей. (Теорема Штейнера - Гюйгенса)

<u>Теорема.</u>

<u>Момент инерции</u> твердого тела относительно некоторой оси <u>z</u> равен сумме момента инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела (I_{zc}), и произведения массы тела на квадрат расстояния (d) между этими осями.

<u>Доказательство.</u>

Выберем в центре масс <u>C</u> тела начало координат осей xyz. Возьмем в теле т. M_k $(x_k\ ;\ y_k\ ;\ z_k)$ массы m_k. Проведем на расстоянии d оси z и z_1. Тогда момент инерции относительно этой оси (z_1):

$$I_{z_1} = \sum m_k \cdot h_k^2 = \sum m_k \cdot \left[x_k^2 + \left(y_k - d\right)^2\right] = \sum m_k \cdot x_k^2 + \sum m_k \cdot y_k^2 - 2\sum m_k \cdot y_k \cdot d + \sum m_k \cdot d^2;$$

где: $\sum m_k \cdot x_k^2 + \sum m_k \cdot y_k^2 = \sum m_k \cdot \left(x_k^2 + y_k^2\right) = \sum m_k \cdot r_k^2 = I_{zc}$ - момент инерции тела, относительно оси проходящей через центра масс.

$\sum m_k \cdot d^2 = d^2 \cdot \sum m_k = M \cdot d^2$;

$2\sum m_k \cdot y_k \cdot d = 2d \ \cdot \sum m_k \cdot y_k = 2d \cdot M \cdot y_c = 0$

Т.к. $y_c = 0$ (начало координат взято в центре масс), тогда

$$I_{z_1} = I_{z\tilde{n}} + M \cdot d^2 \qquad (3.12)$$

Момент инерции некоторых тел.

1. Стержень

$$I_{z_1} = \frac{ml^2}{12} \tag{3.13}$$

$$I_z = I_{z\tilde{n}} + M \cdot d^2 = \frac{ml^2}{12} + m \cdot d^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2 + 3ml^2}{12} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{ml^2}{3};$$

$$I_z = \frac{ml^2}{3} \tag{3.14}$$

2. Кольцо радиусом R

$$I_o = m \cdot R^2 \tag{3.15}$$

3. Диск однородный или однородная пластина радиусом R

$$I_o = \frac{mR^2}{2} \tag{3.16}$$

$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4} \tag{3.17}$$

4. Однородный цилиндр

$$I_z = \frac{mR^2}{2} \tag{3.18}$$