ЗМІСТ

ВСТУП

Дані методичні вказівки мають на меті ознайомити студентів механічних спеціальностей з послідовністю і порядком виконання розрахунково-графічних робіт з динаміки матеріальної точки.

Методичні вказівки включають в себе відомості з розділу "Динаміка матеріальної точки" курсу теоретичної механіки. Особлива увага приділяється розгляду питання складання розрахункових схем механічних об'єктів і послідовності розв'язку задач з динаміки матеріальної точки.

В методичних вказівках наведені приклади виконання розрахунково-графічних робіт.

1 ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ (КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ)

1.1 Короткі теоретичні відомості

Момент кількості руху (або кінетичний момент) – друга міра механічного руху, яка застосовується в основному для характеристики обертального руху.

Моментом кількості руху $\overline{l}_O$ точки відносно центра O називається величина, що дорівнює векторному добутку радіуса - вектора $\overline{r}$ матеріальної точки, проведеного з центра O, на кількість руху цієї точки:

$$\overline{l}_O = \overline{r} \times m\overline{v} .$$

Кінетичним моментом $\overline{L}_O$ матеріальної системи, або головним моментом кількості руху системи матеріальних точок відносно центра O називається векторна сума моментів кількостей руху точок системи відносно того ж самого центра:

$$\overline{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{l}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times m_i \overline{v}_i ,$$

де $\overline{l}_{Oi}$ – момент кількості руху i-ї точки;
$\overline{r}$ – радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр O з i-ю точкою системи;
$\overline{v}_i$ – швидкість i-ї точки.

Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Oz, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно нерухомої осі обертання на кутову швидкість:

$$L_z = J_z \cdot \omega .$$

Кінетичний момент твердого тіла при складному русі може бути визначений так:

1. Кінетичний момент тіла відносно нерухомого центра A дорівнює моменту кількості руху тіла, прикладеного в полюсі O, відносно того самого центра A ($\bar{r}_O \times \bar{Q}$), складеному з векторним добутком $\bar{\rho}_C \times m\bar{v}_O$, також з моментом кількості руху тіла в обертальному русі навколо полюса O ($\bar{L}_O^{\omega}$):

$$\bar{L}_A = \bar{r}_O \times \bar{Q} + \bar{\rho}_C \times m\bar{v} + \bar{L}_O^{\omega},$$

де $\bar{r}_O$ – радіус-вектор, який визначає положення початку рухомої системи координат $Oxyz$ (точки O) в нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$;

$\bar{Q} = m\bar{v}_C$ – кількість руху твердого тіла;

$\bar{\rho}_C$ – радіус-вектор центра мас C твердого тіла в рухомій системі координат $Oxyz$;

m – маса твердого тіла;

$\bar{v}_O$ – швидкість початку руху рухомої системи координат;

$\bar{L}_O^{\omega}$ – кінетичний момент твердого тіла, зумовлений лише обертанням рухомої системи координат відносно полюса O.

2. Якщо початок рухомої системи координат збігається з центром мас, то кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомого центра A дорівнює сумі моменту кількості руху тіла відносно того самого центра A ($\bar{r}_C \times \bar{Q}$) у припущенні, що вся маса тіла зосереджена в центрі мас, і моменту кількості руху тіла в обертальному русі навколо центра мас C ($\bar{L}_C^{\omega}$):

$$\bar{L}_A = \bar{r}_C \times \bar{Q} + \bar{L}_C^{\omega}$$

Теорема про зміну моменту кількості руху точки**.** Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра O (або осі) дорівнює моменту $\bar{M}_O$ рівнодіючої всіх сил $\bar{F}$, прикладених до точки, відносно того самого центра (або осі):

$$\frac{d\bar{l}_O}{dt} = \bar{M}_O ,$$

або

$$m\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} .$$

Звідки

$$m\frac{d}{dt}\; y\dot{z} - z\dot{y} \; = yF_z - zF_y ,$$

$$m\frac{d}{dt}\; z\dot{x} - x\dot{z} \; = yF_x - zF_z ,$$

$$m\frac{d}{dt}\; x\dot{y} - y\dot{x} \; = yF_y - zF_x ,$$

де x, y, z – координати матеріальної точки;
$\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ – проекції швидкості цієї точки на осі координат;
F_x, F_y, F_z – проекції рівнодіючої сили на ті самі осі координат.

Теорема про зміну кінетичного моменту системи. Похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомого центра O дорівнює головному моменту зовнішніх сил $\bar{M}_O^e$ відносно того самого центра:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^e .$$

Теорема про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі або теорема моменту імпульсів зовнішніх сил. Приріст кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомого центра O за деякий проміжок часу t_0, t дорівнює головному моменту імпульсів $\bar{L}_O^e$ зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу:

$$\bar{L}_O\ t\ - \bar{L}_O\ t_0\ = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^e dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \dot{\bar{S}}_i^e dt = \bar{L}_O^e .$$

Теорема Резаля. Швидкість $\bar{v}_k$ кінця вектора кінетичного моменту системи відносно нерухомої точки O дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки:

$$\bar{v}_k = \frac{\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_O^e .$$

Для твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі Oz, вираз теореми про зміну кінетичного моменту набуває вигляду (диференціальне рівняння обертального руху тіла):

$$J_z \cdot \varepsilon = M_z^e ,$$

де $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ – кутове прискорення тіла;

J_z – момент інерції тіла навколо осі обертання Oz.

Закони збереження кінетичного моменту:

1. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки O дорівнює нулю $\bar{M}_O^e = 0$, то кінетичний момент системи відносно тієї самої точки буде сталим як за величиною, так і за напрямком, тобто

$$\bar{L}_O = const = \bar{L}_O\ t_0\ .$$

2. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно однієї з координатних осей дорівнює нулю $M_z^e = 0$, то відповідний кінетичний момент системи відносно даної осі буде сталим:

$$\overline{L}_z = const\ .$$

1.2 Порядок розв'язування задач

При розв'язуванні задач на застосування теореми про зміну головного моменту кількості руху системи можна дотримуватись такого порядку:

1. Визначити, які тіла і точки складаються в систему.
2. Скласти схему зовнішніх сил системи, приклавши до неї також реакції зв'язків.
3. Вибрати координатні осі.
4. Знайти головний момент зовнішніх сил системи відносно відповідної осі (осі обертання).
5. Визначити кінетичний момент системи відносно цієї осі.
6. В тому випадку, коли головний момент зовнішніх сил системи відносно осі обертання дорівнює нулю, використовується закон збереження кінетичного моменту системи відносно цієї осі. Постійна величина кінетичного моменту при цьому визначається з початкових умов руху.
7. Якщо головний момент зовнішніх сил системи відносно осі обертання не дорівнює нулю, складається диференційне рівняння.
8. Інтегрується це рівняння, з початкових умов руху визначаються сталі інтегрування.

1.3 Приклад розрахунку

1.3.1 Умова задачі

Тіло H масою m_1 обертається навколо вертикальної осі z з постійною кутовою швидкістю ω_0, при цьому у точці O жолоба AB тіла H на відстані AO від точки A, закріплена матеріальна точка K

масою m_2. В деякий момент часу ($t=0$) на систему починає діяти пара сил з моментом $M_z = M_z \; t$. При $t=\tau$ дія пари сил припиняється; одночасно точка K починає відносний рух з точки O вздовж жолобу AB (в напрямку до точки B) за законом $OK = s \; t$ при $t > \tau$.

Необхідно визначити кутову швидкість ω_τ тіла H у момент часу $t=\tau$ і кутову швидкість ω_T тіла H при $t=T$, нехтуючи опором обертанню тіла H . Тіло H розглядати як пластину, що має форму, показану на схемі.

1.3.2 Приклад №1

Вихідні дані: $m_1 = 200$ кг; $m_2 = 80$ кг; $M_z = 592t$ Н·м; $\omega_0 = -2$ рад/с; $AO = 0{,}8$ м; $R = 2{,}4$ м; $a = 1{,}2$ м; $\tau = 4$ с; $OK = s = s \; t \; = 0{,}5 \; t - \tau \; ^2$; $T = 6$ с.

Схема наведена на рисунку 1.1.

Визначити: ω_τ; ω_T.

Розв'язок.

Для розв'язання задачі застосовуємо теорему про зміну кінетичного моменту (моменту кількості руху) системи матеріальних точок:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^e , \qquad (1.1)$$

де L_z –кінетичний момент системи,яка складається з тіла H і точки K , відносно осі z ;

$\sum M_z^e$ –головний момент зовнішніх сил, які прикладені до системи, відносно осі z .

На систему в період часу з $t=0$ до $t=\tau$ діють наступні сили (рис. 1.2):

- власна вага тіла H : $m_1\bar{g}$;

- власна вага точки K : $m_2\bar{g}$;
- пара сил з моментом M_z ;
- реакції опор: в точці D – $\bar{X}_D$ і $\bar{Y}_D$, в точці E – $\bar{X}_E$ і $\bar{Y}_E$.

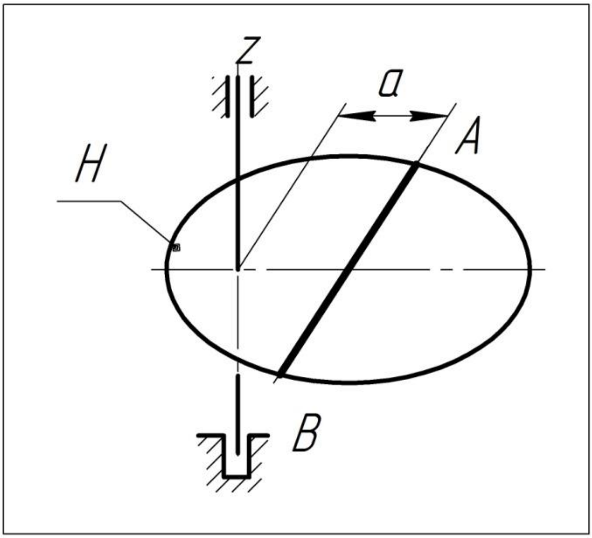


Рисунок 1.1 – Задана схема

Нехай тіло обертається проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись збоку додатного напрямку осі z . Будемо вважати цей напрямок додатнім для визначення знаку кінетичного моменту. Визначимо кінетичний момент системи L_z , який складається з кінетичного моменту тіла H і кінетичного моменту точки K :

$$L_z = L_z^H + L_z^K, \tag{1.2}$$

де $L_z^H = J_z \cdot \omega$ – кінетичний момент тіла H ;

J_z – осьовий момент інерції тіла H ;

$$J_z = J_{z_C} + m_1 \cdot a^2, \tag{1.3}$$

де J_z – осьовий момент інерції однорідної пластини (якою є тіло H) відносно вертикальної осі, яка проходить через центр мас тіла паралельно осі z;

$$J_{z_C} = \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2 , \tag{1.4}$$

$$J_z = \frac{1}{2} m_1 \cdot R^2 + m_1 \cdot a^2 = \frac{1}{2} 200 \cdot 2,4^2 + 200 \cdot 1,2^2 = 864 \text{ кг·м}^2,$$

$$L_z^H = 864\omega ,$$

де L_z^K – кінетичний момент точки K;

$$L_z^K = m_2 v \cdot OO_1 ,$$

де $m_2 v$ – кількість руху точки K;

$v = \omega \cdot OO_1$ – швидкість точки K;

$$L_z^K = m_2 \cdot \omega \cdot OO_1^2 .$$

З рисунку 1.2 знаходимо:

$$OO_1^2 = OC^2 + O_1C^2 ,$$

$$OC = AC - AO = R - AO = 2,4 - 0,8 = 1,6 \text{ м},$$

$$O_1C = a = 1,2 \text{ м},$$

$$OO_1^2 = 1,6^2 + 1,2^2 = 4 ,$$

$$L_z^K = 80 \cdot \omega \cdot 4 = 320\omega .$$

Таким чином рівняння (1.2) має вигляд:

$$L_z = 864\omega + 320\omega = 1184\omega . \tag{1.5}$$

Підставимо (1.5) в (1.1), отримаємо:

$$\frac{d\left(1184\omega\right)}{dt} = 592 \cdot t \,. \qquad (1.6)$$

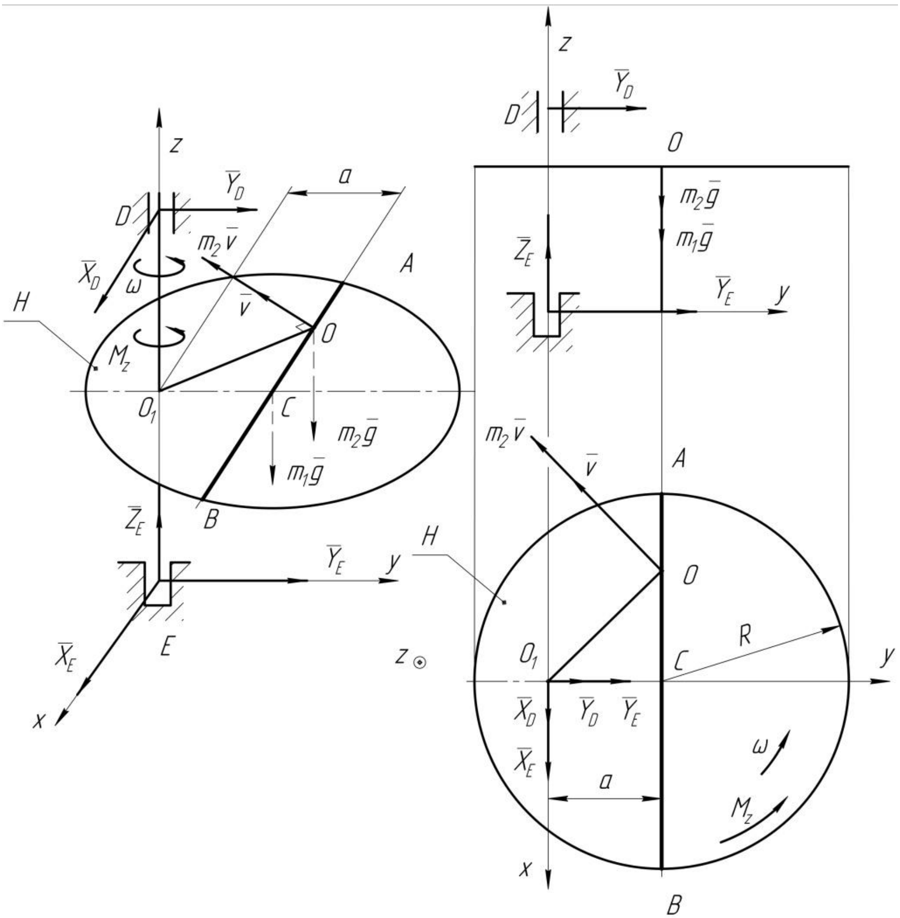


Рисунок 1.2 – Розрахункова схема

Розділяючи змінні й інтегруючі рівняння (1.6):

$$d\left(1184\omega\right) = 592 \cdot t dt \,, \qquad (1.7)$$

враховуючи, що з моменту часу $t = 0$ до $t = \tau$, кутова швидкість змінилася з ω_0 до ω_τ, отримаємо:

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega_\tau} d\ \ 1184\omega\ \ = \int\limits_0^{\tau} 592 \cdot t dt\,, \tag{1.8}$$

$$1184\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega_\tau} = \frac{592 \cdot t^2}{2}\Bigg|_0^{\tau}\,, \tag{1.9}$$

$$1184\ \ \omega_\tau - \omega_0\ \ = 296 \cdot \tau^2\,, \tag{1.10}$$

$$4\ \ \omega_\tau - \omega_0\ \ = \tau^2\,, \tag{1.11}$$

$$\omega_\tau - \omega_0 = \frac{\tau^2}{4}\,, \tag{1.12}$$

$$\omega_\tau = \frac{\tau^2}{4} + \omega_0 = \frac{4^2}{4} + \ \ -2\ \ = 4 - 2 = 2 \text{ рад/с.} \tag{1.13}$$

Після припинення дії моменту M_z в момент часу $t = \tau$, тіло H буде обертатися за інерцією (рис. 1.3). На систему, окрім пари сил M_z , діють ті ж самі зовнішні сили. Тоді, теорема про зміну кінетичного моменту прийме наступний вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^e = 0\,, \tag{1.14}$$

тобто

$$L_z = const\,,$$
$$L_{z_\tau} = L_{z_T}\,, \tag{1.15}$$

де L_{z_τ} – значення кінетичного моменту системи в момент часу $t = \tau$;

$$L_{z_\tau} = 1184\omega_\tau = 1184 \cdot 2 = 2368 \text{ кг·м²/с,} \tag{1.16}$$

де L_{z_T} – значення кінетичного моменту системи в момент часу $t = T$;

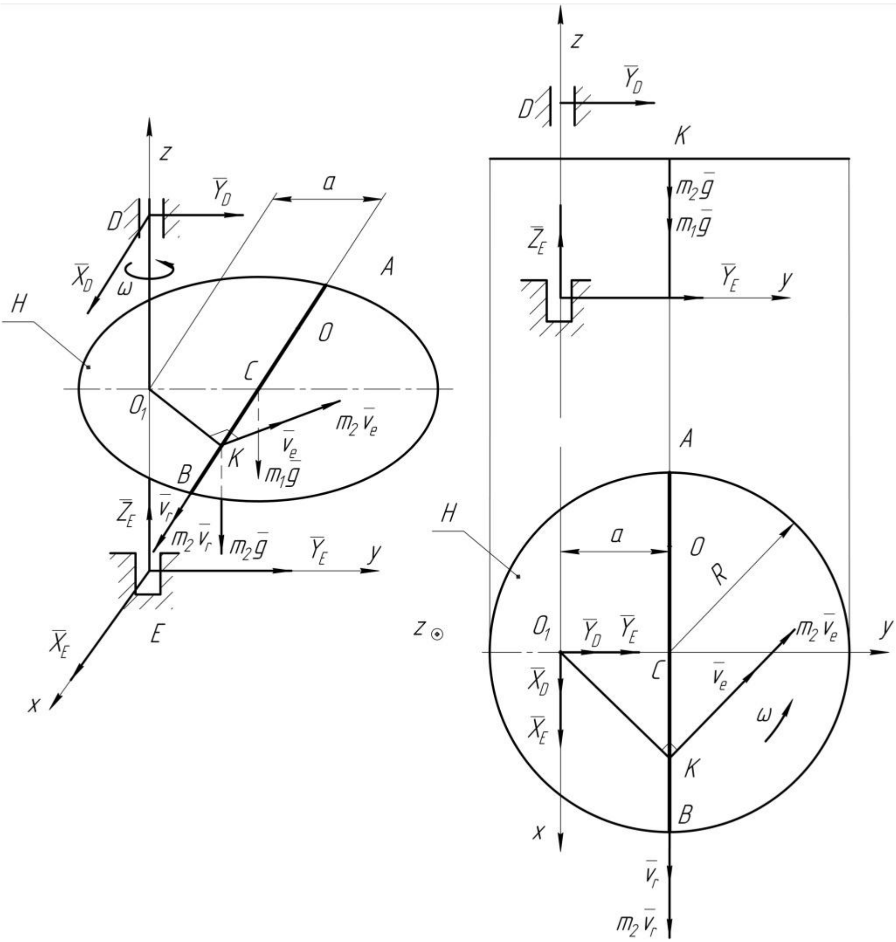


Рисунок 1.3 – Розрахункова схема

$$L_{z_T} = L_{z_T}^{H} + L_{z_T}^{K} , \tag{1.17}$$

$$L_{z_T}^{H} = J_z \cdot \omega_T = 864\omega_T ,$$

де $L_{z_T}^{K}$ – значення кінетичного моменту точки K в момент часу $t = T$.

Визначимо положення точки K на траєкторії AB, для чого визначимо відстань OK:

$$OK_T = 0{,}5\ \ 6-4\ ^{2} = 0{,}5\cdot 2^2 = 2 \text{ м.}$$

Точка K рухається відносно тіла H, тому її швидкість складається з відносної швидкості $\bar{v}_r$, по відношенню до тіла H, і переносної швидкості $\bar{v}_e$ в русі, разом з тілом H. Тому при $t = T$ покажемо два вектори кількості руху точки K: $m_2\bar{v}_r$ і $m_2\bar{v}_e$. Тоді:

$$L_{z_T}^{K} = m_2 v_e \cdot O_1K - m_2 v_r \cdot O_1C, \tag{1.18}$$

$$L_{z_T}^{K} = m_2 \omega_T \cdot O_1K^2 - m_2 v_r \cdot O_1C, \tag{1.19}$$

$$O_1K^2 = O_1C^2 + CK^2, \tag{1.20}$$

$$CK = AO + OK - AC = 0{,}8 + 2 - 2{,}4 = 0{,}4 \text{ м,} \tag{1.21}$$

$$O_1K^2 = 1{,}2^2 + 0{,}4^2 = 1{,}44 + 0{,}16 = 1{,}6 \text{ м,} \tag{1.22}$$

$$v_r = \dot{s} = \frac{ds}{dt} = \ \ 0{,}5\ \ t-\tau\ ^{2}\ ' = 0{,}5\cdot 2\ \ t-\tau\ = t-\tau, \tag{1.23}$$

$$v_r\big|_{t=T} = 6 - 4 = 2 \text{ м/с.} \tag{1.24}$$

Тоді:

$$L_{z_T}^{K} = 80\cdot\omega_T\cdot 1{,}6 - 80\cdot 2\cdot 1{,}2 = 128\omega_T - 192, \tag{1.25}$$

$$L_{z_T} = 864\omega_T + 128\omega_T - 192 = 992\omega_T - 192, \tag{1.26}$$

$$2368 = 992\omega_T - 192, \tag{1.27}$$

$$992\omega_T = 2368 + 192 = 2560, \tag{1.28}$$

$$\omega_T = \frac{2560}{992} = 2{,}58 \text{ рад/с.} \tag{1.29}$$

Відповідь: $\omega_\tau = 2$ рад/с, $\omega_T = 2{,}58$ рад/с.

1.3.3 Приклад №2

Вихідні дані: $m_1 = 36$ кг; $m_2 = 8$ кг; $M_z = 20t$ Н·м; $\omega_0 = -5$ рад/с; $AO = 0$; $R = 0{,}5$ м; $\tau = 2$ с; $OK = s = s(t) = \dfrac{\pi R}{6}(t-\tau)^2$; $T = 4$ с.

Схема наведена на рисунку 1.4.

Визначити: ω_τ; ω_T.

Розв'язок.

До розв'язання задачі застосовуємо теорему про зміну кінетичного моменту (моменту кількості руху) системи матеріальних точок:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^e, \tag{1.30}$$

де L_z –кінетичний момент системи, яка складається з тіла H і точки K, відносно осі z;

$\sum M_z^e$ –головний момент зовнішніх сил, які прикладені до системи, відносно осі z.

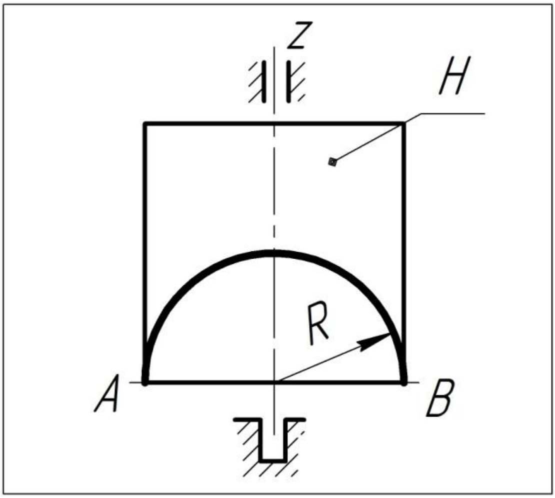


Рисунок 1.4 – Задана схема

На систему в період часу з $t = 0$ до $t = \tau$ діють наступні сили (рис. 1.5):

- власна вага тіла H : $m_1\bar{g}$;
- власна вага точки K : $m_2\bar{g}$;
- пара сил з моментом M_z ;
- реакції опор: в точці D – $\bar{X}_D$ і $\bar{Y}_D$, в точці E – $\bar{X}_E$ і $\bar{Y}_E$.

Нехай тіло обертається проти ходу годинникової стрілки, якщо дивитись збоку додатного напрямку осі z . Будемо вважати цей напрямок додатнім для визначення знаку кінетичного моменту. Визначимо кінетичний момент системи L_z , який складається з кінетичного моменту тіла H і кінетичного моменту точки K :

$$L_z = L_z^H + L_z^K, \tag{1.31}$$

де $L_z^H = J_z \cdot \omega$ – кінетичний момент тіла H ;

J_z – осьовий момент інерції тіла H ;

$$J_{z_C} = \frac{1}{3} m_1 \cdot R^2 = \frac{1}{3} 36 \cdot 0,5^2 = 3 \text{ кг·м²}, \tag{1.32}$$

$$L_z^H = 3\omega,$$

де L_z^K – кінетичний момент точки K ;

$$L_z^K = m_2 v \cdot OO_1,$$

де $m_2 v$ – кількість руху точки K ;

$v = \omega \cdot OO_1$ –швидкість точки K ;

$$L_z^K = m_2 \cdot \omega \cdot OO_1^2,$$

$$L_z^K = 8 \cdot \omega \cdot 0,5^2 = 2\omega.$$

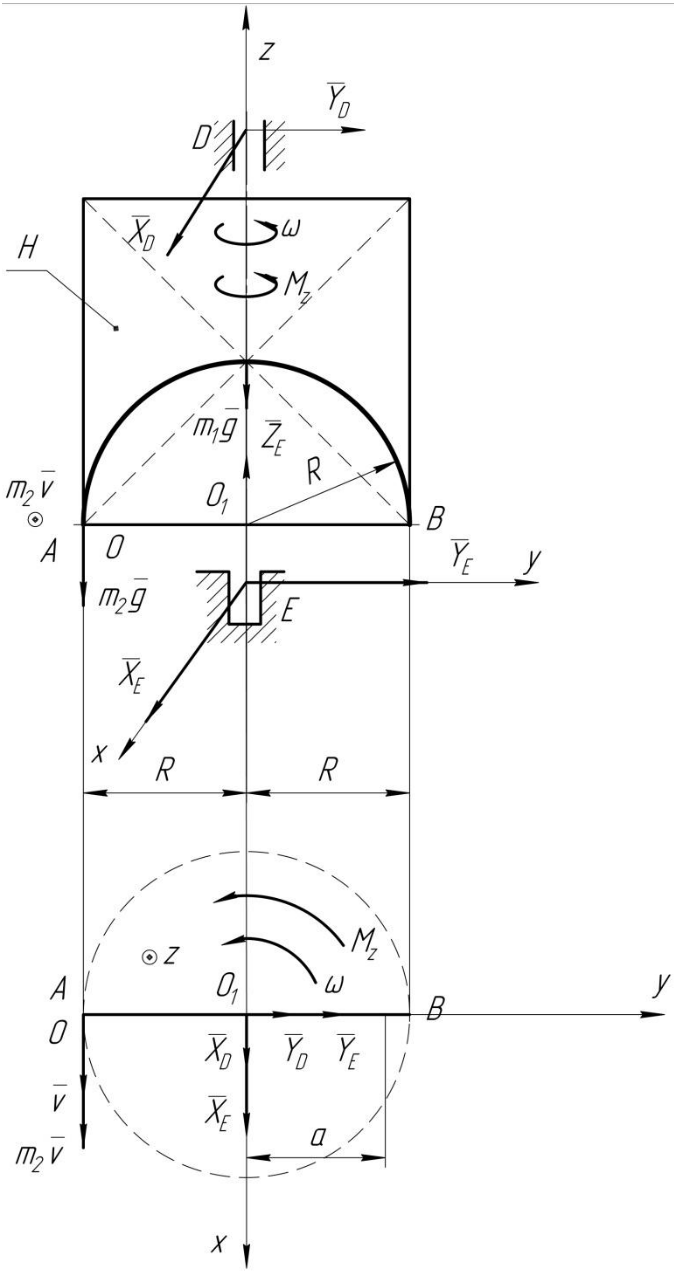


Рисунок 1.5 – Розрахункова схема

Таким чином отримаємо:

$$L_z = 3\omega + 2\omega = 5\omega, \qquad (1.33)$$

$$\frac{d(5\omega)}{dt} = 20 \cdot t\,. \qquad (1.34)$$

Розділяючи змінні й інтегруючі рівняння:

$$d(5\omega) = 20 \cdot t dt\,, \qquad (1.35)$$

враховуючи, що з моменту часу $t = 0$ до $t = \tau$, кутова швидкість змінилася з ω_0 до ω_τ, отримаємо:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_\tau} d(5\omega) = \int_0^{\tau} 20 \cdot t dt\,, \qquad (1.36)$$

$$5\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega_\tau} = \frac{20 \cdot t^2}{2}\Bigg|_0^{\tau}, \qquad (1.37)$$

$$5(\omega_\tau - \omega_0) = 10 \cdot \tau^2, \qquad (1.38)$$

$$\omega_\tau - \omega_0 = 2\tau^2, \qquad (1.39)$$

$$\omega_\tau = 2\tau^2 + \omega_0 = 2 \cdot 2^2 + (-5) = 8 - 5 = 3 \text{ рад/с}. \qquad (1.40)$$

Після припинення дії моменту M_z в моменту часу $t = \tau$, тіло H буде обертатися за інерцією (рис. 1.6). На систему, окрім пари сил M_z, діють ті ж самі зовнішні сили. Тоді, теорема про зміну кінетичного моменту прийме наступний вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^e = 0\,, \qquad (1.41)$$

тобто

$$L_z = const\,,$$

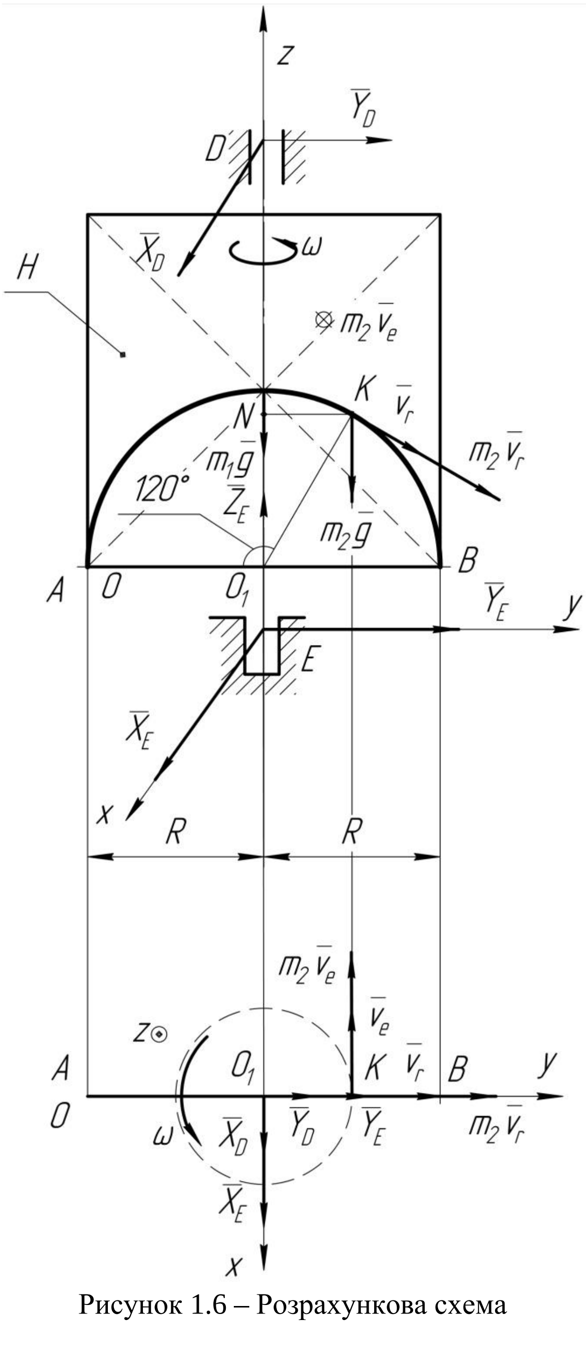


Рисунок 1.6 – Розрахункова схема

$$L_{z_\tau} = L_{z_T}\ , \tag{1.42}$$

де L_{z_τ} – значення кінетичного моменту системи в момент часу $t = \tau$;

$$L_{z_\tau} = 5\omega_\tau = 5\cdot 3 = 15 \text{ кг·м}^2\text{/с}, \tag{1.43}$$

де L_{z_T} – значення кінетичного моменту системи в момент часу $t = T$;

$$L_{z_T} = L_{z_T}^H + L_{z_T}^K\ , \tag{1.44}$$

$$L_{z_T}^H = J_z\cdot\omega_T = 3\omega_T\ ,$$

де $L_{z_T}^K$ – значення кінетичного моменту точки K в момент часу $t = T$.

Визначимо положення точки K на траєкторії AB , для чого визначимо відстань OK . Щоб спростити розрахунки, визначимо допоміжну величину – кут, на який повернулася точка K відносно центра дуги кола AB :

$$\varphi = \frac{OK_T}{R} = \frac{\pi R}{6\cdot R}(t-\tau)^2 = \frac{\pi}{6}(t-\tau)^2,$$

$$\varphi\big|_{t=T} = \frac{\pi}{6}(4-2)^2 = \frac{\pi}{6}2^2 = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \text{ рад},$$

$$\varphi\big|_{t=T} = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{180°}{\pi} = 120°\ .$$

Точка K рухається відносно тіла H , тому її швидкість складається з відносної швидкості $\bar{v}_r$, по відношенню до тіла H , і переносної швидкості $\bar{v}_e$ в русі, разом з тілом H . Тому при $t = T$ покажемо два вектори кількості руху точки K : $m_2\bar{v}_r$ і $m_2\bar{v}_e$. Тоді:

$$L_{z_T}^K = m_2 v_e \cdot NK + m_2 v_r \cdot 0 \,, \tag{1.45}$$

$$v_e = \omega_T \cdot NK \,, \tag{1.46}$$

$$L_{z_T}^K = m_2 \cdot \omega_T \cdot NK^2 \,, \tag{1.47}$$

$$NK = R\sin\ 120^\circ - 90^\circ\ = R\sin 30^\circ = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м.} \tag{1.48}$$

Тоді:

$$L_{z_T}^K = 8 \cdot \omega_T \cdot 0,25^2 = 0,5\omega_T \,, \tag{1.49}$$

$$L_{z_T} = 3\omega_T + 0,5\omega_T = 3,5\omega_T \,, \tag{1.50}$$

$$15 = 3,5\omega_T \,, \tag{1.51}$$

$$\omega_T = \frac{3,5}{15} = 4,27 \text{ рад/с.} \tag{1.52}$$

Відповідь: $\omega_\tau = 3$ рад/с, $\omega_T = \dfrac{3,5}{15} = 4,27$ рад/с.

2 ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

2.1 Короткі теоретичні відомості

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху точки в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси m точки на квадрат її швидкості $\overline{v}$:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{2.1}$$

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій усіх точок, що належать до системи:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 , \tag{2.2}$$

де m_i – маса точок;
v_i – швидкість точок.

Кінетична енергія тіла, що рухається поступово:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_C^2 , \tag{2.3}$$

де M – маса тіла;
v_C – швидкість центра мас тіла (або будь-якої іншої).

Кінетична енергія тіла, що обертається навколо нерухомої осі (в формулі – Oz):

$$T = \frac{1}{2} J_z \cdot \omega^2 , \tag{2.4}$$

де J_z – момент інерції тіла відносно осі обертання;

ω – кутова швидкість тіла.

Для загального випадку руху тіла:

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega^2, \qquad (2.5)$$

де M – маса тіла;
v_C – швидкість центра мас тіла (або будь-якої іншої);
J_C – момент інерції тіла відносно миттєвої осі обертання, яка проходить через центр мас (для плаского руху ця вісь перпендикулярна до площини руху);
ω – миттєва кутова швидкість тіла.

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки: приріст кінетичної енергії матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, що прикладена до точки, на цьому відрізку дуги траєкторії:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \qquad (2.6)$$

де m – маса точки;
v, v_0 – відповідно кінцева і початкова швидкість точки;
A – робота сили.

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на точку:

$$dT = dA. \qquad (2.7)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок: приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки протягом того ж проміжку часу:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j , \qquad (2.8)$$

де T і T_0 – відповідно кінцева і початкова кінетична енергія системи точок;

$\sum_{i=1}^{n} A_i^e$ і $\sum_{i=1}^{n} A_i^j$ – відповідно сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил.

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладення:

$$A = \bar{F} \cdot d\,\bar{r} = F \cdot ds \cdot \cos\ \bar{F}\bar{\tau}\ = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz , \qquad (2.9)$$

де $\bar{F}$ – сила, що діє на точку;
$d\,\bar{r}$ – вектор елементарного переміщення;
s – дугова координата;
$\bar{\tau}$ – орт дотичної до траєкторії точки;
dx, dy, dz – проекції вектору $d\,\bar{r}$ на декартові вісі координат.

Робота сили на кінцевому переміщенні матеріальної точки вздовж дуги L визначається інтегралом:

$$A = \int_L \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_L F_\tau \cdot ds = \int_L\ F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz\ . \qquad (2.10)$$

Робота сили ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги на різницю висот $\pm h$ початкового і кінцевого положення точки:

$$A = \pm mgh . \qquad (2.11)$$

Робота центральної сили не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, на яку діє центральна сила, а залежить тільки від початкового та кінцевого положень точки:

$$A=\int_{r_1}^{r_2} F\ \ r\ \ dr\ . \qquad (2.12)$$

Робота сили пружності у випадку, коли кінці пружини закріплено шарнірно, а пружна сила пропорційна подовженню Δr ($F=c\cdot\Delta r$), визначається з виразу:

$$A=-\frac{c}{2}\ \ \Delta r_2^2-\Delta r_1^2\ \ , \qquad (2.13)$$

$$\Delta r_1=r_1-r_0,\ \Delta r_2=r_2-r_0\ ,$$

де Δr_1 та Δr_2 – початкове та кінцеве подовження пружини;

r_1 та r_2 – довжина пружини в початковому та кінцевому положенні;

r_0 – довжина недеформованої пружини;

c – жорсткість пружини.

Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла, дорівнює сумі роботи головного вектора зовнішніх сил, яка здійснюється на елементарному переміщенні полюса O , роботи головного моменту цих сил, обчисленого відносно центра O , на елементарному обертальному переміщенні $d\varphi$ тіла навколо осі, що проходить через цей центр:

$$dA=\bar{F}^e\cdot d\ \bar{r}_O+\bar{M}_O^e\cdot d\bar{\varphi}\ . \qquad (2.14)$$

Елементарна та повна робота сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо осі Oz ,

$$dA=M_z\cdot d\varphi,\ A=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi\ , \qquad (2.15)$$

де M_z – головний момент усіх зовнішніх сил відносно осі обертання Oz .

Сума робіт усіх внутрішніх сил абсолютно твердого тіла дорівнює нулю.

Потужність зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює сумі скалярного добутку головного вектора на швидкість полюса О і скалярного добутку головного моменту цих сил відносно даного полюса на кутову швидкість обертання тіла:

$$N = \bar{F}^e \cdot \bar{v}_O + \bar{M}_O^e \cdot \bar{\omega}. \qquad (2.16)$$

В окремому випадку, коли тіло здійснює обертання навколо нерухомої осі, наприклад, Oz і $M_z = const$, потужність і робота зовнішніх сил визначається за формулами:

$$N = M_z \cdot \omega, \; A = M_z \cdot \; \varphi - \varphi_0 \;\;, \qquad (2.17)$$

де φ, φ_0 – кінцеве і початкове значення кута повороту тіла.

2.2 Порядок розв'язування задач

За допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки розв'язують задачі, в яких потрібно дослідити дію сил, що прикладені до точки масою m на деякому шляху s.

Якщо сили, що діють на матеріальну точку постійні, можна скористатись теоремою про зміну кінетичної енергії в скінченній формі, якщо ж сили залежать від відстані, швидкості або часу, необхідно користуватись теоремою в диференціальній формі.

Задачі даного типу можна розв'язувати в наступному порядку.

1. Вибирають систему координатних осей.
2. Складають схему сил, які діють на матеріальну точку: активних і сил реакції зв'язків (якщо рух матеріальної точки є невільним). При цьому потрібно мати на увазі, що точку, рух якої вивчається, потрібно на рисунку подати в довільному положенні.
3. Визначають початкову v_0 і кінцеву v_1 швидкості матеріальної точки на початку і в кінці її переміщення.
4. За відповідними формулами обчислюють роботу всіх сил за час руху матеріальної точки. Робота сил, що чинять опір рухові

до точки, буде від'ємною.

5. Після цього складають рівняння зміни кінетичної енергії матеріальної точки, з якого і визначають шукану величину.

2.3 Приклад розрахунку

Механічна система внаслідок дії сили ваги тіла 1 починає рухатись після стану спокою (рис. 2.1). Враховуючи тертя ковзання тіла 1 та опір коченню тіла 2, що котиться без ковзання, нехтуючи масами ниток, які вважаються нерозтяжними, знайти швидкість v_1 тіла 1 у той момент, коли ним буде пройдено шлях s .

Дано: $m_1 = 3m$; $m_2 = 2m$; $m_3 = m$; $m_4 = m$; $m_5 = m$;

$R_2 = R_4 = 12$ см; $R_3 = 20$ см; $r_2 = 0{,}5R_2$; $r_3 = 0{,}75R_3$;

$i_{2_x} = 8$ см; $i_{3_x} = 10$ см; $\alpha = 30°$;

$f = 0{,}1$; $\delta = 0{,}2$ см; $s = 2$ м.

Розв'язування.

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи (2.8):

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i^e + \sum_{i=1}^{n} A_i^j .$$

Для заданої системи, яка складається із абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками, сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^j = 0 .$$

Крім того, оскільки у початковому положенні система перебуває у стані спокою, то

$$T_0 = 0 .$$

Кінетична енергія T системи в кінцевому її положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 .$$

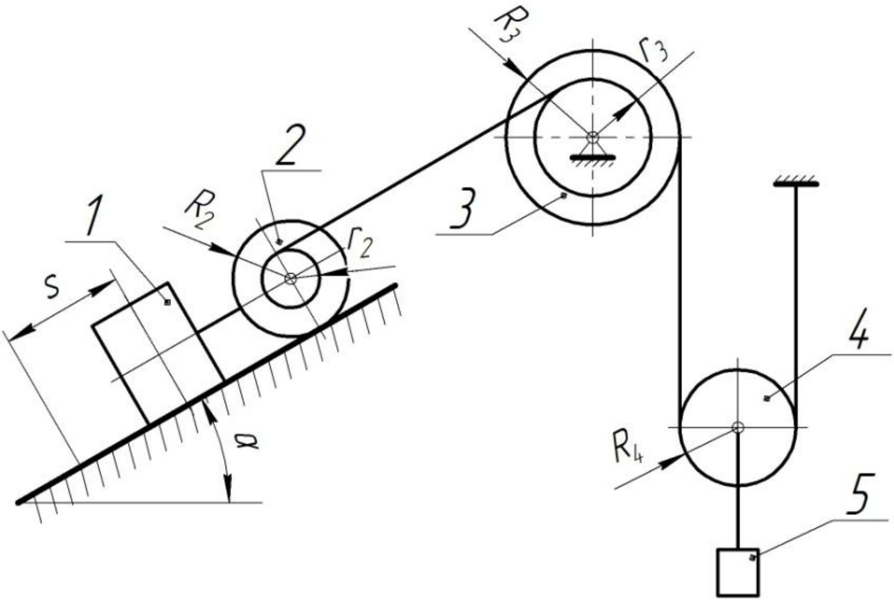


Рисунок 2.1 – Задана схема

Тягар 1 рухається поступально. Тому його кінетична енергія

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{3mv^2}{2} .$$

Кінетична енергія котка 2, який здійснює плоский рух,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} J_{C_2} \omega_2^2 ,$$

де v_{C_2} – швидкість центра мас C_2 котка 2;

$$v_{C_2} = v ,$$

J_{C_2} – момент інерції котка 2 відносно його центральної горизонтальної поздовжньої осі:

$$J_{C_2} = m_2 i_{2_x}^2 = 2m i_{2_x}^2 ,$$

ω_2 – миттєва кутова швидкість котка 2.

Оскільки коток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей перебуває у точці Q. Тому

$$\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{R_2} = \frac{v}{R_2} .$$

З урахуванням виразів для J_{C_2} і ω_2 попередня формула набуває вигляду:

$$T_2 = \frac{1}{2} 2mv^2 + \frac{1}{2} 2m i_{2_x}^2 \left(\frac{v}{R_2} \right)^2 = mv \left[1 + \left(\frac{i_{2_x}}{R_2} \right)^2 \right] .$$

Кінетична енергія блока 3, який обертається відносно нерухомої осі:

$$T_3 = \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2 ,$$

де J_3 – момент інерції блока 3 відносно осі обертання;

$$J_3 = m_3 i_{3_x}^2 ,$$

ω_3 – кутова швидкість тіла 3;

$$\omega_3 = \frac{v_E}{r_3} .$$

Швидкість точки E блока 3 дорівнює швидкості точки D котка 2, яку можна знайти із співвідношення:

$$\frac{v_D}{v_{C_2}} = \frac{R_2 + r_2}{R_2},$$

оскільки

$$v_{C_2} = v, \; R_2 = 2r_2,$$

то

$$\frac{v_D}{v} = \frac{3}{2}$$

і

$$v_E = v_D = \frac{3}{2} v.$$

Тоді

$$\omega_3 = \frac{3v}{2r_3}.$$

Із урахуванням виразів для J_3 і ω_3 формулу для кінетичної енергії блока 3 запишемо так:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 i_{3_x}^2 \left(\frac{3v}{2r_3} \right)^2 = \frac{9m}{8} \left(\frac{i_{3_x}}{r_3} \right)^2 v^2.$$

Кінетична енергія блока 4, який здійснює плоский рух,

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{C_4}^2 + \frac{1}{2} J_{C_4} \omega_4^2,$$

де v_{C_4} – швидкість центра мас C_4 котка 4;

J_{C_4} –момент інерції блока (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної (горизонтальної) осі;

$$J_{C_4} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2 ,$$

ω_4 – миттєва кутова швидкість блока 4.

Оскільки блок 4 рухається таким чином, що нитка відносно поверхні блока не проковзує, то миттєвий центр швидкостей перебуває у точці P. Тому

$$\omega_4 = \frac{v_{C_4}}{R_4} .$$

Швидкість точки C_4 блока $v_{C_4} = \frac{v_M}{2}$, а $v_M = v_L = v_K$.

Швидкість v_K точки K блока 3 знайдемо із співвідношення

$$\frac{v_K}{v_E} = \frac{R_3}{r_3} .$$

Враховуючи те, що $r_3 = 0,75 R_3$, з попередніх кінематичних співвідношень одержимо

$$v_{C_4} = v , \ \omega_4 = \frac{v}{R_3} .$$

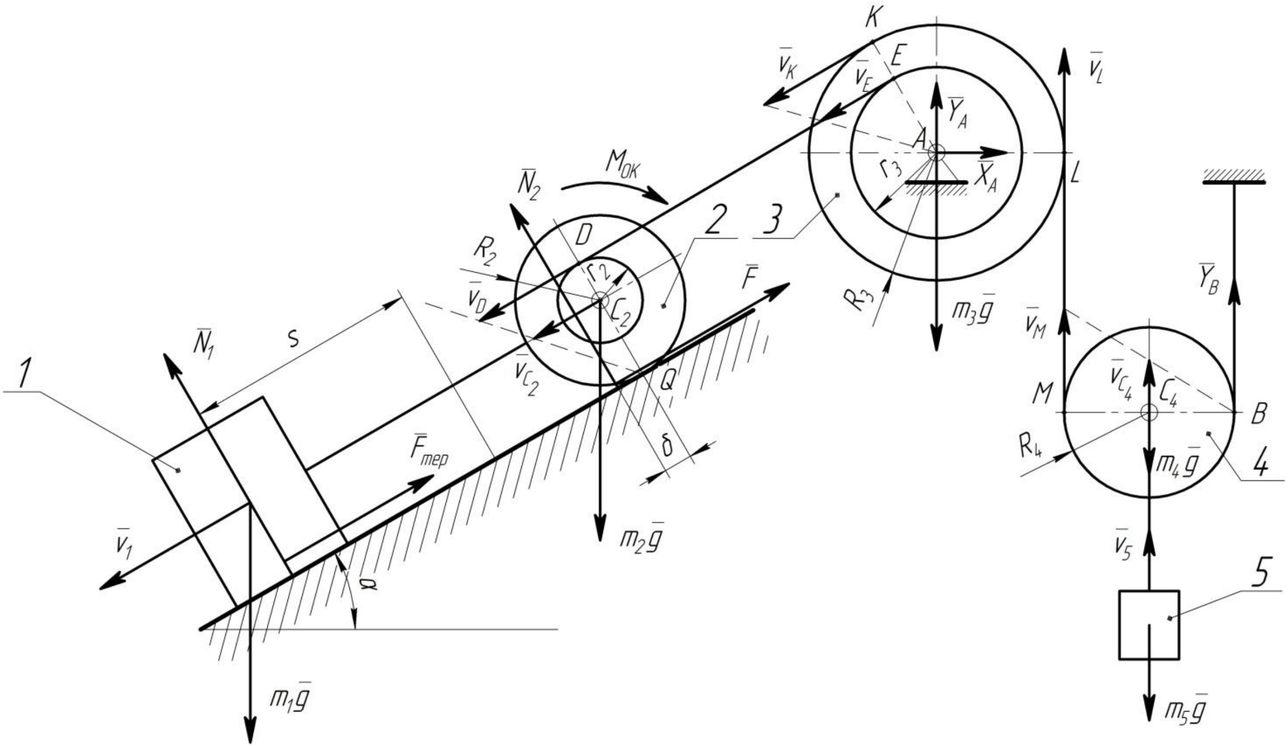


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема

Тоді кінетична енергія блока 4

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v^2 + \frac{m_4 v^2}{4} = \frac{3 m_4 v^2}{4} = \frac{3 m v^2}{4} .$$

Кінетична енергія тягаря 5, який рухається поступально:

$$T_5 = \frac{m_5 v_5^2}{2} ,$$

де v_5 – швидкість тягаря 5; $v_5 = v$.

Тому

$$T_5 = \frac{m v^2}{2} .$$

Кінетична енергія всієї механічної системи з урахуванням одержаних формул для T_1, T_2, T_3, T_4, T_5:

$$T = \frac{m v^2}{2} \left\{ 3 + \frac{9}{4} \left(\frac{i_{4_x}}{r_4} \right)^2 + \frac{3}{2} + 2 \left[1 + \left(\frac{i_{2_x}}{R_2} \right)^2 \right] \right\},$$

або

$$T = \frac{67 m v^2}{12} .$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи, на заданому переміщенні. Покажемо усі зовнішні сили, що діють на систему (рис. 2.2)

Робота сили ваги $m_1 \bar{g}$

$$A \;\; m_1 \bar{g} \;\; = m_1 g \cdot S \cdot \sin \alpha .$$

Робота сили тертя ковзання

$$A\ \ F_{тер}\ \ = -F_{тер} \cdot S\ .$$

Оскільки

$$F_{тер} = fN_1 = fm_1 g \cdot \cos\alpha\ ,$$

де N_1 – нормальна складова реакції похилої площини, то:

$$A\ \ F_{тер}\ \ = -\, fm_1 g \cdot S \cdot \cos\alpha\ .$$

Робота сил ваги $m_4\overline{g}$ і $m_5\overline{g}$

$$A\ \ m_4\overline{g}\ \ = -m_4 g \cdot h_4,\ A\ \ m_5\overline{g}\ \ = -m_5 g \cdot h_5\ ,$$

де $h_4 = h_5 = h$ – вертикальне переміщення центра мас C_4 блока 4 і тягаря 5.

Для визначення величини переміщення h слід врахувати те, що між лінійними переміщеннями точок такі ж залежності, як і між їх швидкостями. Оскільки

$$v_{C_4} = v\,,$$

отримаємо

$$h = S\ .$$

Тому

$$A\ \ m_4\overline{g}\ \ = -m_4 g \cdot h,\ A\ \ m_5\overline{g}\ \ = -m_5 g \cdot h\ ,$$

Робота сили ваги $m_2\overline{g}$

$$A\ \ m_2\bar{g}\ \ = m_2 g\cdot h_2 = m_2 g\cdot S\cdot \sin\alpha\ .$$

Робота пари сил опору кочення котка 2:

$$A\ \ M_{о.к.}\ \ = -M_{о.к.}\cdot\varphi_2\ ,$$

де $M_{о.к.} = \delta N_2 = \delta m_2 g\cdot\cos\alpha -$ момент пари сил опору кочення котка 2;

$\varphi_2 -$ кут повороту котка 2.

Оскільки коток 2 котиться без ковзання, то кут його повороту

$$\varphi_2 = \frac{S_{C_2}}{R_2}\ ,$$

де S_{C_2} – переміщення центра мас C_2 котка 2, причому

$$S_{C_2} = S\ .$$

Тому

$$A\ \ M_{о.к.}\ \ = -\delta m_2 g\cdot\cos\alpha\cdot\frac{S_{C_2}}{R_2} = -m_2 g\cdot S\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\delta}{R_2}\ .$$

Робота сили ваги $m_3\bar{g}$ і реакцій X_A , Y_A підшипника осі обертання блока 3 дорівнює нулю, оскільки ці сили прикладені до нерухомої точки.

Робота сили зчеплення $\bar{F}$ котка 2 дорівнює нулю, тому що сила прикладена в миттєвому центрі швидкостей котка. Точка прикладання реакції Y_B троса знаходиться в точці B (миттєвому центрі швидкостей тіла 4), тобто є нерухомою, тому робота реакції Y_B дорівнює нулю.

Сума робіт зовнішніх сил визначається додаванням робіт, обчислених за вищенаведеними виразами:

$$\sum A_i^e = m_1 g\cdot S\cdot\sin\alpha - fm_1 g\cdot S\cdot\cos\alpha - m_4 g\cdot h - m_5 g\cdot h - m_2 g\cdot S\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\delta}{R_2} =$$

$$= mg\cdot S\left[5\sin\alpha - \left(3f + \frac{2\delta}{R_2}\right)\cos\alpha - 2\right] = 0,21mg\cdot S$$

Відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи прирівняємо значення T і $\sum A_i^e$:

$$\frac{67mv^2}{12} = 0,21mg\cdot S\ , \qquad (2.18)$$

звідки:

$$v = \sqrt{\frac{12\cdot 0,21g\cdot S}{67}} = \sqrt{\frac{12\cdot 0,21\cdot 9,81\cdot 2}{67}} = 0,86 \text{ м/с.}$$

Теорема про зміну кінетичної енергії дає змогу окрім швидкості визначати також і прискорення. Продиференціювавши вираз (2.18) за часом, вважаючи пройдений тілом 1 шлях S змінною величиною, отримаємо:

$$\frac{67}{12}2v\dot{v} = 0,21g\dot{S}\ .$$

Оскільки $\dot{S} = \frac{dS}{dt} = v$, а $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = a$, то, скоротивши на v , одержимо:

$$\frac{67}{12}2a = 0,21g\ ,$$

$$a = \frac{12\cdot 0,21g}{67} = \frac{12\cdot 0,21\cdot 9,81}{67} = 0,184 \text{ м/с}^2.$$

Відповідь: $v = 0,86$ м/с.

ДОДАТОК А

А.1 Вихідні дані до розрахунку контрольної роботи з використанням теореми про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту)

Тіло H масою m_1 обертається навколо вертикальної осі z з постійною кутовою швидкістю ω_0; до того ж в точці O жолоба AB тіла H на відстані AO від точки A, що відкладається вздовж жолоба, знаходиться матеріальна точка K масою m_2. В деякий момент часу ($t = 0$) на систему починає діяти пара сил з моментом $M_z = M_z \; t$. При $t = \tau$ дія пари сил припиняється.

Визначити кутову швидкість ω_τ тіла H у момент часу $t = \tau$.

В момент часу $t = \tau$, коли припинилася дія пари M_z, точка K (самохідний механізм) починає відносний рух з точки O вздовж жолоба AB (в напрямку до B) згідно закону $OK = s \; t$.

Визначити кутову швидкість ω_T тіла H в момент часу $t = T$.

Тіло H розглядати як однорідну пластину. Необхідні для розрахунку дані наведені в таблиці А.1, а схеми завдань на рисунках А.1 – А.5.

А.2 Вихідні дані до розрахунку контрольної роботи з використанням теореми про зміну кінетичної енергії

Механічна система під дією сил тяжіння приходить до руху з стану спокою, початкове положення системи показане на схемі. Враховуючи сили тертя ковзання і опором коченню, нехтуючи іншими силами опору і масою ниток, що вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла 1 в той момент, коли пройдений ним шлях стане рівним S .

Необхідні для розрахунку дані наведені в таблиці А.2, розрахункові схеми – на рисунках А.6 – А.10.

Таблиця А.1 – Вихідні дані до розрахунку

Номер варіанту	Номер схеми	m_1, кг	m_2, кг	ω_0, с$^{-1}$	a, м	b, м	R, м	α, град	АО, м	M_z, Н·м	τ, с	T, с	$OK = s$, м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
000	0	80	20	1	2	-	2,5	-	0	$100t$	3	4	$\pi a/2 \cdot t-\tau$
010	0	120	60	-1	3	-	4	-	πa/3	$-100\sqrt{t}$	1	5	$\pi a/8 \cdot t-\tau$
020	0	120	60	2	1,5	-	2	-	πa/6	$120\sqrt{t}$	4	5	$2\pi a/3 \sqrt{t-\tau}$
030	0	180	100	-1	3	-	3,5	-	πa/2	$-240\sqrt{t}$	4	6	$\pi a/16 \cdot t-\tau^{2}$
040	0	140	60	3	2	-	3	-	0	$120t^2$	3	5	$5\pi a/24 \quad t-\tau^{2}$
050	0	100	40	1,5	2,5	-	3	-	πa/4	$300t$	3	4	$\pi a/4 \cdot t-\tau$
060	0	200	50	0	3	-	4	-	πa/3	$150t$	2	4	$\pi a/2\sqrt{2} \sqrt{t-\tau}$
070	0	80	60	-2	3	-	3,5	-	πa/6	$180\sqrt{t}$	4	5	$\pi a/3 \cdot t-\tau^{2}$
080	0	150	100	-1	3	-	4	-	πa/2	$160t^2$	3	5	$\pi a/8 \cdot t-\tau^{2}$
090	0	160	100	-1	4	-	5	-	πa/3	$-50\sqrt{t}$	1	2	$\pi a/2 \cdot\sqrt{t-\tau}$
001	1	80	40	-1	3	-	4	-	0	$200t$	2	3	$\pi a/2 \cdot t-\tau$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
011	1	100	50	3	2	-	3	-	πa/3	$120t^2$	1	4	$\pi a/18 \cdot t-\tau^{2}$
021	1	200	60	1,5	2,5	-	3	-	πa/6	$300t$	2	3	$2\pi a/3 \cdot \sqrt{t-\tau}$
031	1	80	40	3	2	-	2,5	-	πa/2	$-240\sqrt{t}$	1	2	$\pi a/2 \cdot t-\tau^{2}$
041	1	150	60	1,5	2,5	-	3	-	0	$-100\sqrt{t}$	1	2	$\pi a/4 \cdot t-\tau$
051	1	200	60	-1	3	-	5	-	πa/4	$90t$	3	4	$\pi a/4 \cdot t-\tau$
061	1	80	60	3	2	-	3	-	πa/3	$-110\sqrt{t}$	1	2	$\pi a/6 \cdot \sqrt{t-\tau}$
071	1	150	60	1,5	2,5	-	3	-	πa/6	$90\sqrt{t}$	1	3	$\pi a/3 \cdot t-\tau^{2}$
081	1	120	40	2	2	-	3	-	πa/2	$-50\sqrt{t}$	4	5	$\pi a/4 \cdot t-\tau^{2}$
091	1	120	40	3	1	-	3	-	πa/3	$50\sqrt{t}$	4	5	$\pi a/2 \cdot \sqrt{t-\tau}$
002	2	120	40	-1	3	-	-	-	1	$-60\sqrt{t}$	4	5	$1/2 \cdot t-\tau^{2}$
012	2	120	60	2	2	-	-	-	0	$120t^2$	2	4	$t-\tau$
022	2	120	60	-1	2,5	-	-	-	0,5	$210t^2$	2	3	$9/2 \cdot t-\tau^{2}$
032	2	80	40	3	2	-	-	-	0,5	$-320t^2$	2	4	$7/8 \cdot t-\tau^{2}$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
042	2	150	60	3	2,5	-	-	-	1	$160t^2$	2	5	$1/2\cdot\ t-\tau$
052	2	200	60	3	3	-	-	-	0	$100t^2$	2	3	$3/2\cdot\sqrt{t-\tau}$
062	2	80	60	1,5	2	-	-	-	0	$200\sqrt{t}$	1	2	$1/2\cdot\ t-\tau$
072	2	150	60	-1	2,5	-	-	-	0,5	$60t^2$	2	3	$2\cdot\sqrt{t-\tau}$
082	2	120	60	-1	2	-	-	-	1	$180\sqrt{t}$	1	2	$t-\tau\ ^2$
092	2	120	60	-1	2	-	-	-	1	$50t$	3	4	$\sqrt{t-\tau}$
003	3	150	60	1,5	3	2	-	-	0	$80t^2$	3	4	$\sqrt{13}\ \cdot\ t-\tau$
013	3	200	60	3	2	2	-	-	$\sqrt{2}$	$320\sqrt{t}$	1	2	$\sqrt{2}/2\cdot\ t-\tau$
023	3	80	60	1,5	2,5	2	-	-	0	$110t^2$	2	3	$\sqrt{41}\ \cdot\ t-\tau\ ^2$
033	3	180	100	-1	2	1,5	-	-	$\sqrt{25}/2$	$50t$	6	8	$\sqrt{25}/4\cdot\ t-\tau$
043	3	140	60	-1	2,5	2	-	-	0	$120t^2$	1	3	$\sqrt{41}/4\cdot\ t-\tau\ ^2$
053	3	100	40	3	3	2	-	-	0	$-280\sqrt{t}$	1	2	$\sqrt{13}\cdot\ t-\tau$
063	3	200	50	-1	2	1	-	-	$\sqrt{5}$	$310\sqrt{t}$	1	2	$\sqrt{5}\cdot\ t-\tau$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
073	3	100	40	3	2,5	2	-	-	$\sqrt{41}/2$	$90t$	4	5	$\sqrt{41}/4 \cdot t-\tau^{\ 2}$
083	3	200	30	1,5	2	1	-	-	0	$140t$	3	4	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{t-\tau}$
093	3	120	40	1,5	2	1,5	-	-	0	$450\sqrt{t}$	1	4	$\sqrt{25/3} \cdot t-\tau$
004	4	80	20	3	2	-	3	-	0	$120t^2$	1	2	$\pi a/2 \cdot t-\tau$
014	4	120	60	-1	3	-	3,5	-	πa/3	$160\sqrt{t}$	1	4	$2\pi a/9 \cdot t-\tau$
024	4	120	60	1	1,5	-	2	-	πa/6	$200t$	1	2	$\pi a/3 \cdot\sqrt{t-\tau}$
034	4	180	100	-1	3	-	4	-	πa/2	$425\sqrt{t}$	1	2	$\pi a/2 \cdot t-\tau^{\ 2}$
044	4	140	60	1,5	2	-	3	-	0	$180\sqrt{t}$	4	5	$\pi a/4 \cdot t-\tau$
054	4	100	40	3	2,5	-	3	-	πa/4	$-400\sqrt{t}$	1	2	$\pi a/4 \cdot t-\tau$
064	4	200	50	-2	3	-	4	-	πa/3	$150t^2$	2	3	$\pi a/6 \cdot\sqrt{t-\tau}$
074	4	80	60	0	2	-	3,5	-	πa/6	$320t^2$	1	3	$\pi a/6 \cdot t-\tau^{\ 2}$
084	4	150	100	-1	3	-	3,5	-	πa/2	$190\sqrt{t}$	1	2	$\pi a/4 \cdot t-\tau^{\ 2}$
094	4	150	100	-1	4	-	5	-	πa/3	$200t$	3	6	$\pi a/9 \cdot t-\tau$
005	5	150	60	1,5	-	-	3	-	1	$-100t$	3	5	$1/2 \cdot t-\tau^{\ 2}$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
015	5	200	60	3	-	-	1,5	-	0,5	$-200t$	3	4	$\sqrt{t-\tau}$
025	5	80	60	-1	-	-	2,5	-	0	$90\sqrt{t}$	1	2	$3/2\cdot\ t-\tau\ ^{2}$
035	5	180	100	1,5	-	-	2	-	1	$50t^{2}$	3	4	$t-\tau\ ^{2}$
045	5	140	60	3	-	-	2	-	0	$-60t^{2}$	3	4	$\sqrt{t-\tau}$
055	5	100	40	3	-	-	3	-	0,5	$-80t^{2}$	2	3	$3/2\cdot\sqrt{t-\tau}$
065	5	200	50	-1	-	-	1,5	-	1	$240\sqrt{t}$	1	2	$1/2\cdot\ t-\tau$
075	5	150	60	-1	-	-	2,5	-	0	$70t^{2}$	3	4	$3/2\cdot\sqrt{t-\tau}$
085	5	140	60	1,5	-	-	2	-	1	$-50\sqrt{t}$	4	5	$t-\tau\ ^{2}$
095	5	100	40	2,5	-	-	3	-	2	$-160t$	3	4	$\sqrt{t-\tau}$
006	6	150	60	1,5	2	1	-	-	0	$-20t^{2}$	2	3	$\sqrt{t-\tau}$
016	6	200	60	-1	2,5	2	-	-	0,5	$80t^{2}$	2	3	$3/2\cdot\sqrt{t-\tau}$
026	6	80	60	-1	2,5	1,5	-	-	0	$200t$	3	6	$1/2\cdot\ t-\tau$
036	6	180	100	3	3	2	-	-	1	$-60\sqrt{t}$	4	5	$\sqrt{t-\tau}$
046	6	140	60	-1	2	2	-	-	0	$200t$	3	4	$3/2\cdot\sqrt{t-\tau}$
056	6	100	40	3	3	2	-	-	0,5	$-80t^{2}$	1	3	$3/2\cdot\ t-\tau$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
066	6	200	50	-1	2	1	-	-	0,5	$150t$	3	5	$1/4\cdot t-\tau$
076	6	150	60	-1	2,5	2	-	-	0	$50\sqrt{t}$	1	3	$1/2\cdot t-\tau^{2}$
086	6	180	120	1,5	2	1	-	-	0	$-70\sqrt{t}$	1	3	$t-\tau$
096	6	140	80	1,5	2	2	-	-	1	$20t^2$	1	3	$1/2\cdot t-\tau$
007	7	150	60	1,5	3	-	-	10	1	$-20t$	5	6	$2\cdot\sqrt{t-\tau}$
017	7	200	60	-1	1,5	-	-	15	0	$100t^2$	2	4	$1/2\cdot t-\tau$
027	7	80	60	-1	2,5	-	-	25	1	$200t$	5	6	$t-\tau$
037	7	180	100	3	2	-	-	30	1	$-450\sqrt{t}$	1	4	$1/3\cdot t-\tau$
047	7	140	60	-1	2	-	-	35	0	$50\sqrt{t}$	4	5	$2\cdot t-\tau^{2}$
057	7	100	40	3	3	-	-	40	0,5	$120t^2$	2	3	$2\cdot\sqrt{t-\tau}$
067	7	200	50	-1	1,5	-	-	45	1	$200t$	3	4	$3/2\cdot\sqrt{t-\tau}$
077	7	150	60	-1	2,5	-	-	55	0	$100t$	3	4	$2\cdot t-\tau^{2}$
087	7	120	40	1,5	2	-	-	60	1	$-100t$	2	3	$1/2\cdot t-\tau$
097	7	150	60	2,5	3	-	-	75	1	$-120t^2$	2	3	$3/2\cdot t-\tau$
008	8	150	60	1,5	3	2	-	-	0	$-60\sqrt{t}$	4	6	$\sqrt{13}\cdot t-\tau$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
018	8	200	60	3	2	2	-	-	0	$-100t$	5	6	$\sqrt{2}/2\cdot\ t-\tau$
028	8	80	60	1,5	2,5	1,5	-	-	0	$-120\sqrt{t}$	1	3	$\sqrt{30}/8\cdot\ t-\tau\ ^{2}$
038	8	180	100	-1	2	1	-	-	1	$120\sqrt{t}$	4	6	$\sqrt{5}/2\cdot\ t-\tau$
048	8	140	60	-1	2,5	1	-	-	0	$120t^2$	1	2	$1/3\cdot\ t-\tau\ ^{2}$
058	8	100	40	3	3	3	-	-	$\sqrt{3}/2$	$-250\sqrt{t}$	1	2	$\sqrt{3}\cdot\ t-\tau$
068	8	200	50	-1	2	1	-	-	0,5	$100t$	6	8	$t-\tau$
078	8	150	60	3	2,5	2	-	-	1	$-120t$	3	5	$3/4\cdot\ t-\tau\ ^{2}$
088	8	120	40	1,5	2	1	-	-	0	$-110t$	5	6	$2\sqrt{5}\cdot\sqrt{t-\tau}$
098	8	200	50	1,5	2	1	-	-	1	$-80t$	3	4	$\sqrt{5}\cdot\ t-\tau$
009	9	80	20	3	-	-	2,5	10	1	$-100t$	3	4	$3/2\cdot\ t-\tau$
019	9	120	60	-1	-	-	2	20	1	$70t$	3	5	$1/2\cdot\ t-\tau$
029	9	120	60	1	-	-	2,5	25	0	$60t^2$	2	4	$5/4\cdot\ t-\tau\ ^{2}$
039	9	180	100	-1	-	-	3	30	0,5	$100t$	3	4	$5/2\cdot\ t-\tau\ ^{2}$
049	9	140	60	1,5	-	-	2	40	0	$-200t$	3	4	$3\cdot\sqrt{t-\tau}$

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
059	9	100	40	3	-	-	2,5	45	1,5	$-350\sqrt{t}$	1	2	$\sqrt{t-\tau}$
069	9	200	50	-2	-	-	2	50	0,5	$120t^2$	1	3	$t-\tau$
079	9	80	60	0	-	-	2	55	0	$400\sqrt{t}$	4	6	$1/2\cdot t-\tau^{\;2}$
089	9	150	100	-1	-	-	2,5	60	2	$200t$	1	2	$3\cdot\sqrt{t-\tau}$
099	9	150	100	-1	-	-	2	70	0,5	$350\sqrt{t}$	1	2	$3/2\cdot t-\tau^{\;2}$

Таблиця А.2 – Вихідні дані до розрахунку

Номер варіанта	Схема	m_1	m_2	m_3	m_4	R_1	R_2	i_{2_x}	i_{3_ξ}	α	β	f	δ	S
						см		см		град.			см	м
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
00	0	m	4m	1/5 m	1/3 m	-	-	-	-	60	-	0,12	-	2,7
10	0	m	4m	1/10m	1/12m	-	-	-	-	15	-	0,05	-	2,1
20	0	m	5m	1/6 m	1/8 m	-	-	-	-	25	-	0,14	-	2,4
30	0	m	3m	1/5 m	1/8 m	-	-	-	-	30	-	0,2	-	2,9
40	0	m	5m	1/2 m	1/6 m	-	-	-	-	45	-	0,12	-	2,6
50	0	m	6m	1/8 m	1/5 m	-	-	-	-	55	-	0,17	-	2,7

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
60	0	m	4m	2/7 m	m	-	-	-	-	75	-	0,17	-	2,6
70	0	m	2m	1/4 m	1/8 m	-	-	-	-	20	-	0,05	-	2,9
80	0	m	3m	1/5 m	1/5 m	-	-	-	-	30	-	0,18	-	2,7
90	0	m	5m	1/7 m	1/4 m	-	-	-	-	35	-	0,16	-	2,8
01	1	m	3m	1/2 m	1/6 m	-	-	-	-	-	45	0,21	-	3,4
11	1	m	4m	1/8 m	1/5 m	-	-	-	-	-	55	0,15	-	2,6
21	1	m	3m	2/7 m	1/2 m	-	-	-	-	-	45	0,05	-	3,7
31	1	m	5m	1/4 m	1/8 m	-	-	-	-	-	55	0,12	-	2
41	1	m	6m	1/5 m	1/5 m	-	-	-	-	-	75	0,12	-	3,6
51	1	m	4m	1/8 m	1/8 m	-	-	-	-	-	45	0,12	-	3,2
61	1	m	2m	1/8 m	1/4 m	-	-	-	-	-	30	0,05	-	2,8
71	1	m	3m	1/4 m	1/8 m	-	-	-	-	-	60	0,17	-	2,3
81	1	m	3m	1/5 m	1/5 m	-	-	-	-	-	60	0,05	-	2,2
91	1	m	5m	1/7 m	1/4 m	-	-	-	-	-	35	0,15	-	3
02	2	m	1/2 m	5m	2m	-	20	-	-	-	-	-	0,21	2
12	2	m	1/8 m	4m	3m	-	32	-	-	-	-	-	0,15	2,4
22	2	m	1/5 m	3m	m	-	18	-	-	-	-	-	0,05	3
32	2	m	1/8 m	5m	1/2 m	-	22	-	-	-	-	-	0,12	3

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
42	2	m	1/4 m	4m	2m	-	33	-	-	-	-	-	0,12	2,4
52	2	m	1/8 m	5m	2m	-	20	-	-	-	-	-	0,12	1,8
62	2	m	1/8 m	2m	4m	-	31	-	-	-	-	-	0,05	1,6
72	2	m	2/7 m	3m	2m	-	27	-	-	-	-	-	0,17	2,8
82	2	m	1/2 m	4m	2m	-	20	-	-	-	-	-	0,05	2,1
92	2	m	1/8 m	4m	m	-	21	-	-	-	-	-	0,15	2,7
03	3	m	1/2 m	1/4 m	2/7 m	23	-	17	-	60	-	0,05	-	2
13	3	m	1/8 m	1/8 m	1/8 m	24	-	19	-	35	-	0,12	-	2,4
23	3	m	1/5 m	2/7 m	1/5 m	21	-	12	-	25	-	0,12	-	3
33	3	m	1/8 m	1/4 m	1/8 m	33	-	24	-	30	-	0,12	-	3
43	3	m	1/4 m	1/5 m	1/5 m	16	-	11	-	45	-	0,14	-	2,4
53	3	m	1/8 m	1/8 m	1/8 m	17	-	7	-	55	-	0,2	-	1,8
63	3	m	1/8 m	1/8 m	1/4 m	21	-	15	-	75	-	0,12	-	1,6
73	3	m	2/7 m	1/8 m	1/8 m	33	-	27	-	20	-	0,17	-	2,8
83	3	m	1/2 m	2/7 m	1/2 m	24	-	15	-	30	-	0,17	-	2,1
93	3	m	1/8 m	1/2 m	m	22	-	16	-	35	-	0,05	-	2,7
04	4	m	1/2 m	1/8 m	-	30	24	18	-	60	30	0,15	0,12	1,6
14	4	m	1/8 m	2/7 m	-	27	18	10	-	35	45	0,05	0,14	3

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
24	4	m	1/5 m	1/2 m	-	20	27	20	-	25	55	0,12	0,2	3
34	4	m	1/8 m	1/4 m	-	30	20	8	-	30	75	0,12	0,12	2,4
44	4	m	1/4 m	1/5 m	-	17	33	9	-	45	35	0,14	0,12	1,8
54	4	m	1/8 m	1/8 m	-	32	31	18	-	55	25	0,2	0,12	1,8
64	4	m	1/8 m	1/8 m	-	31	34	9	-	75	60	0,12	0,05	1,6
74	4	m	2/7 m	1/8 m	-	21	30	13	-	20	35	0,17	0,12	2,8
84	4	m	1/2 m	1/6 m	-	32	24	12	-	30	25	0,17	0,14	2,1
94	4	m	1/8 m	1/4 m	-	31	21	16	-	35	30	0,05	0,2	2,7
05	5	m	1/2 m	1/4 m	-	19	19	-		60	25	0,05	0,12	2
15	5	m	1/8 m	1/8 m	-	26	15	-		35	30	0,12	0,14	2,4
25	5	m	1/5 m	2/7 m	-	27	22	-		25	45	0,12	0,2	3
35	5	m	1/8 m	1/4 m	-	22	16	-		30	55	0,12	0,12	3
45	5	m	1/4 m	1/5 m	-	18	30	-		45	60	0,14	0,12	2,4
55	5	m	1/8 m	1/8 m	-	28	27	-		55	35	0,2	0,12	1,8
65	5	m	1/8 m	1/8 m	-	33	20	-		75	25	0,12	0,05	1,6
75	5	m	2/7 m	1/8 m	-	20	27	-		20	25	0,17	0,12	2,8
85	5	m	1/2 m	2/7 m	-	29	32	-		30	30	0,17	0,14	2,1
95	5	m	1/8 m	1/2 m	-	26	18	-		35	45	0,05	0,2	2,7

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
06	6	m	1/8 m	1/8 m	1/8 m	31	31	25	-	60		0,05	-	2
16	6	m	1/10m	1/8 m	1/5 m	27	16	20	-	35	-	0,12	-	2,4
26	6	m	1/2 m	1/10m	1/10m	24	33	15	-	25	-	0,12	-	3
36	6	m	1/4 m	1/8 m	1/8 m	15	34	6	-	30	-	0,12	-	3
46	6	m	1/8 m	1/5 m	1/5 m	18	33	12	-	45	-	0,14	-	2,4
56	6	m	1/8 m	1/8 m	1/8 m	19	15	14	-	55	-	0,2	-	1,8
66	6	m	1/8 m	1/8 m	1/4 m	18	22	10	-	75	-	0,12	-	1,6
76	6	m	3/8 m	1/8 m	1/10m	18	20	9	-	60	-	0,17	-	2,8
86	6	m	1/2 m	1/5 m	1/6 m	31	25	26	-	45	-	0,17	-	2,1
96	6	m	1/8 m	1/4 m	1/5 m	22	21	16	-	55	-	0,05	-	2,7
07	7	m	1/2 m	1/4 m	2/7 m	33	21	-	26	30		0,2	-	3
17	7	m	1/8 m	1/8 m	1/8 m	24	33	-	19	45	-	0,12	-	2,4
27	7	m	1/5 m	2/7 m	1/5 m	35	27	-	30	55	-	0,17	-	1,8
37	7	m	1/8 m	1/4 m	1/8 m	18	17	-	11	75	-	0,12	-	1,6
47	7	m	1/4 m	1/5 m	1/5 m	23	23	-	17	45	-	0,14	-	2,4
57	7	m	1/8 m	1/8 m	1/8 m	19	16	-	11	55	-	0,2	-	3
67	7	m	1/8 m	1/8 m	1/4 m	25	32	-	19	75	-	0,12	-	2,4
77	7	m	2/7 m	1/8 m	1/8 m	16	33	-	8	60	-	0,17	-	1,8

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
87	7	m	1/2 m	2/7 m	1/2 m	21	33	-	14	35	-	0,17	-	2,1
97	7	m	1/8 m	1/2 m	1/4 m	34	29	-	29	25	-	0,05	-	2,7
08	8	m	1/8 m	1/4 m	1/8 m	32	28	-	-	55		0,05	-	1,8
18	8	m	1/4 m	1/5 m	1/5 m	15	23	-	-	75	-	0,12	-	1,6
28	8	m	1/5 m	1/8 m	1/5 m	18	27	-	-	60	-	0,12	-	2,4
38	8	m	1/8 m	1/58m	1/10m	23	16	-	-	35	-	0,12	-	3
48	8	m	3/8 m	1/8 m	1/10m	19	24	-	-	45	-	0,14	-	2,4
58	8	m	1/2 m	1/8 m	1/6 m	25	28	-	-	55	-	0,2	-	3
68	8	m	1/8 m	1/4 m	1/5 m	21	21	-	-	75	-	0,12	-	2,4
78	8	m	2/7 m	1/8 m	1/12m	33	33	-	-	45	-	0,17	-	1,8
88	8	m	1/8 m	1/8 m	1/8 m	24	28	-	-	55	-	0,17	-	2,1
98	8	m	1/5 m	1/5 m	1/8 m	34	20	-	-	45	-	0,05	-	2,7
09	9	m	1/2 m	1/4 m	-	15	26	5	-	60		0,2	-	2
19	9	m	1/8 m	1/8 m	-	33	17	23	-	35	-	0,12	-	2,4
29	9	m	1/5 m	2/7 m	-	23	19	15	-	25	-	0,17	-	3
39	9	m	1/8 m	1/4 m	-	32	24	27	-	30	-	0,12	-	3
49	9	m	1/4 m	1/5 m	-	17	25	9	-	45	-	0,14	-	2,4
59	9	m	1/8 m	1/8 m	-	23	26	16	-	55	-	0,2	-	1,8

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
69	9	m	1/8 m	1/8 m	-	17	34	12	-	75	-	0,12	-	1,6
79	9	m	2/7 m	1/8 m	-	22	22	16	-	20	-	0,05	-	2,8
89	9	m	1/2 m	2/7 m	-	19	15	11	-	30	-	0,12	-	2,1
99	9	m	1/8 m	1/2 m	-	30	25	24	-	35	-	0,12	-	2,7

Таблиця А.3 – Тригонометричні функції деяких аргументів

$\alpha°$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
α, рад	0	0,262	0,524	0,785	1,047	1,309	1,571
	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	0,259	0,5	0,707	0,866	0,966	1
$\cos\alpha$	1	0,966	0,866	0,707	0,5	0,259	0

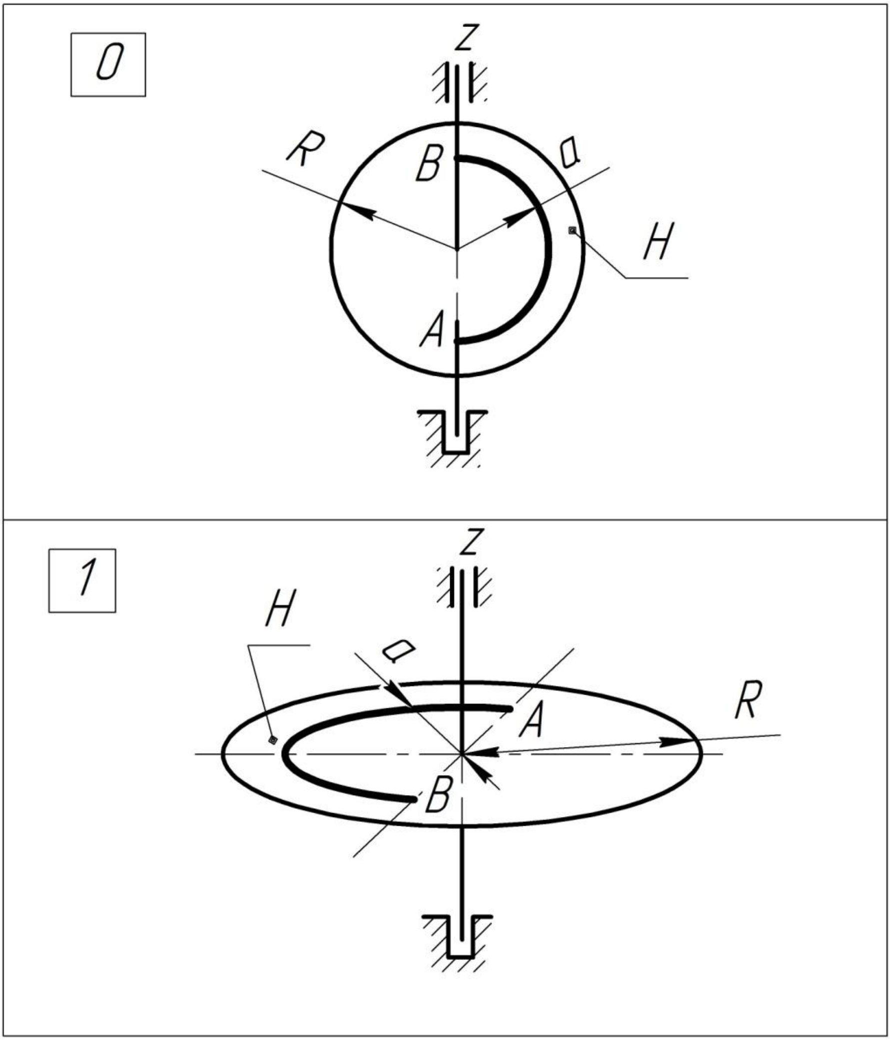


Рисунок А.1 – Розрахункові схеми

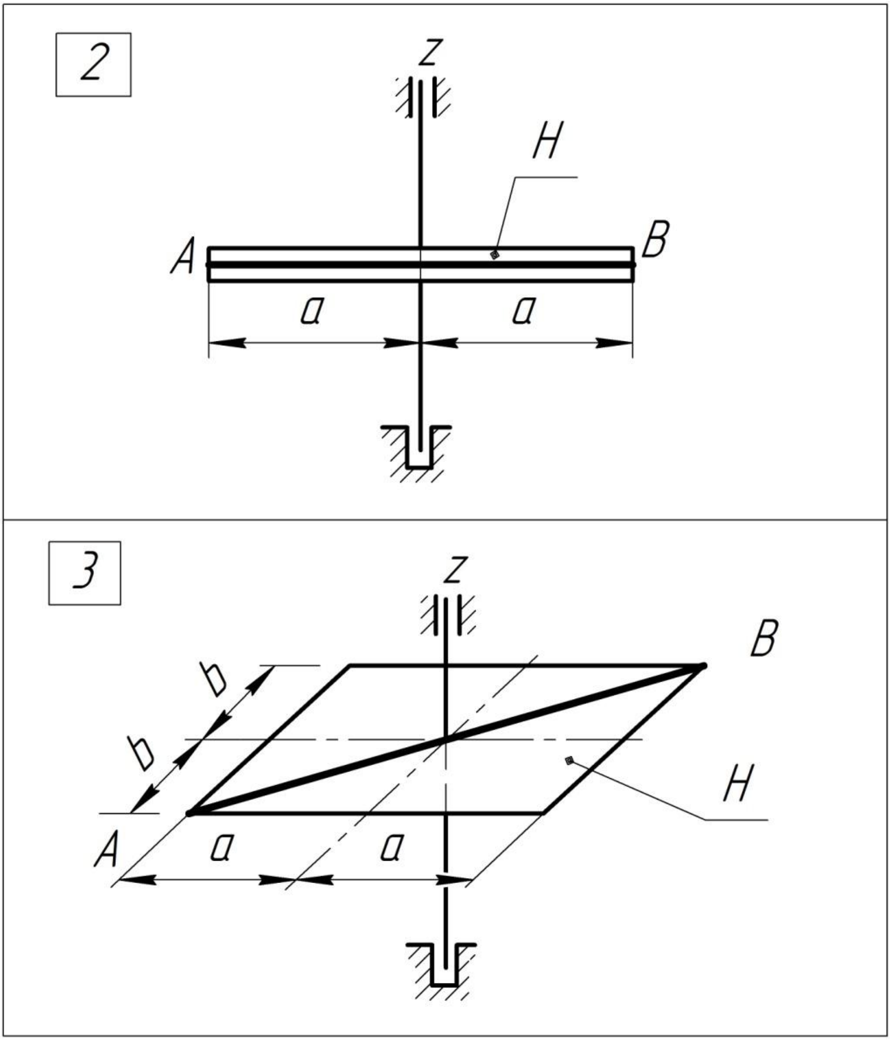


Рисунок А.2 – Розрахункові схеми

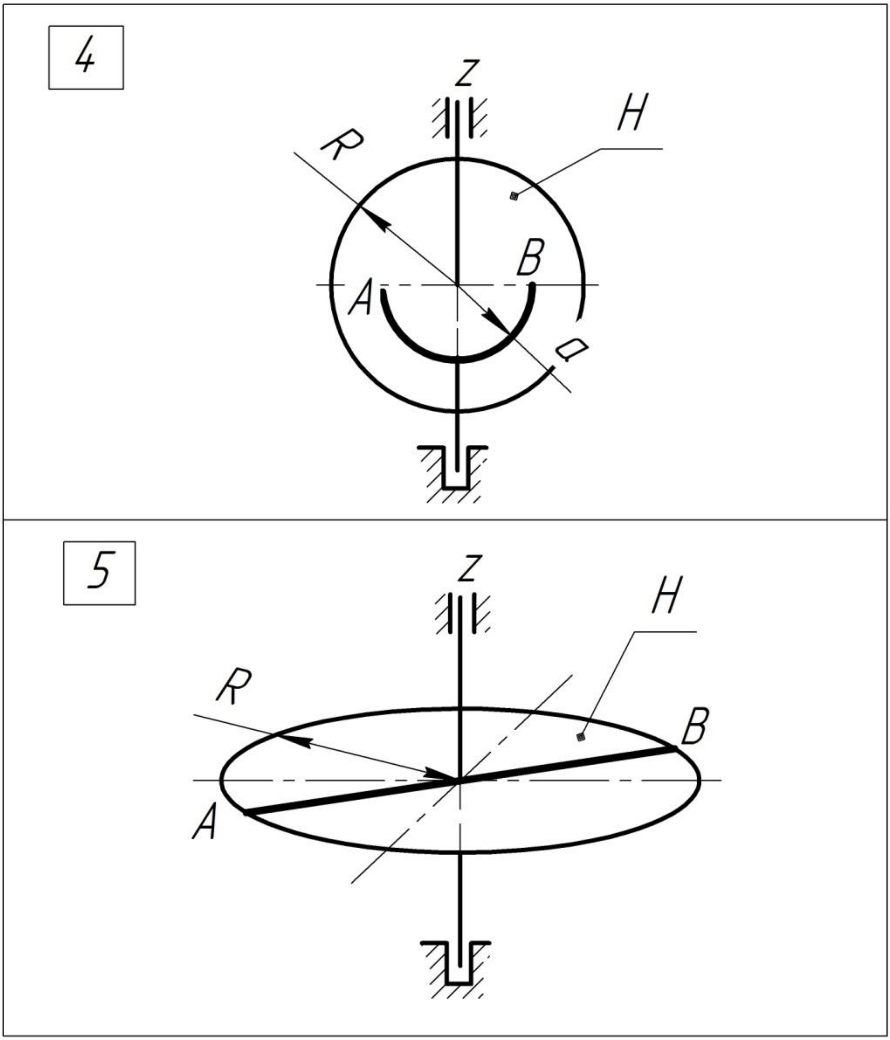
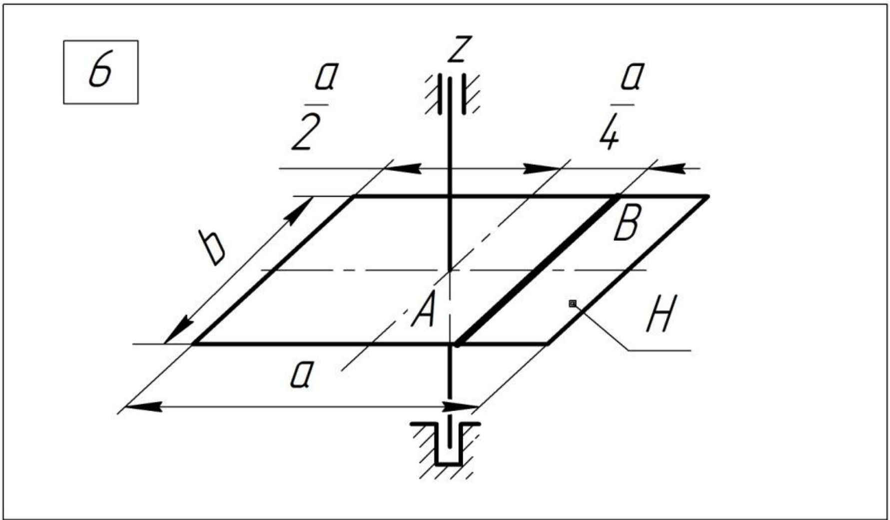


Рисунок А.3 – Розрахункові схеми



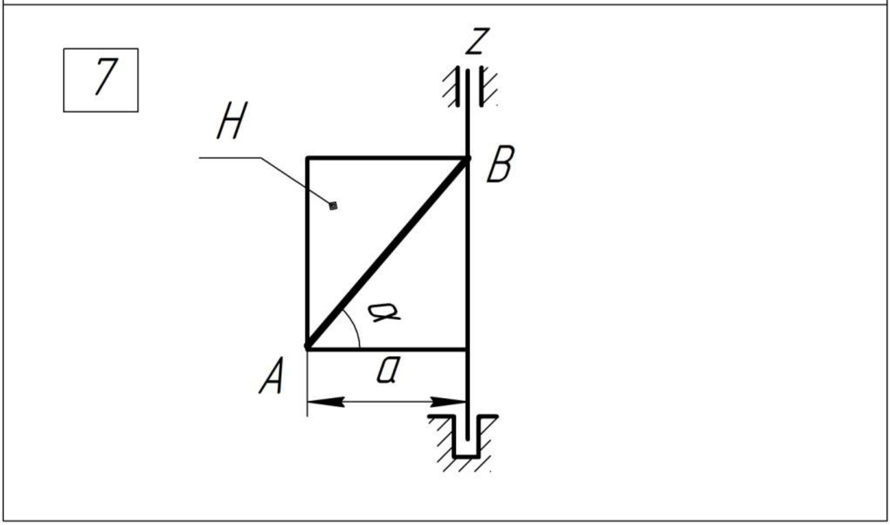


Рисунок А.4 – Розрахункові схеми

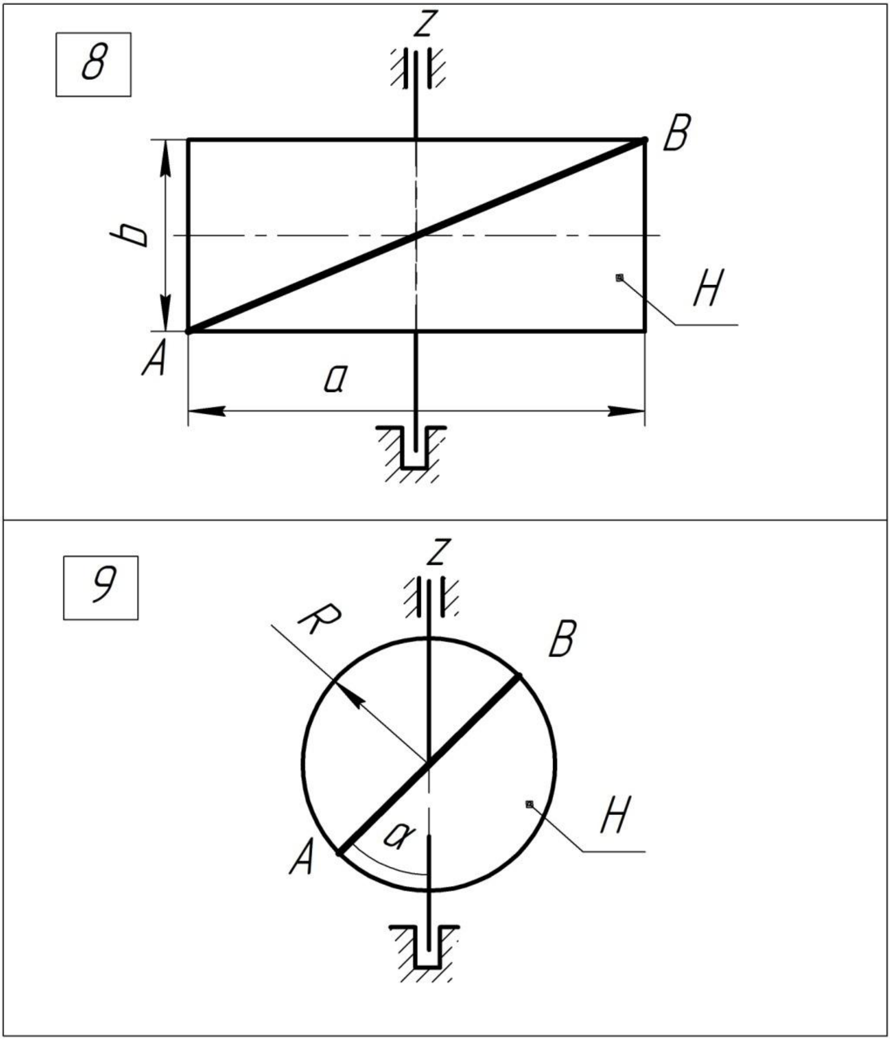


Рисунок А.5 – Розрахункові схеми

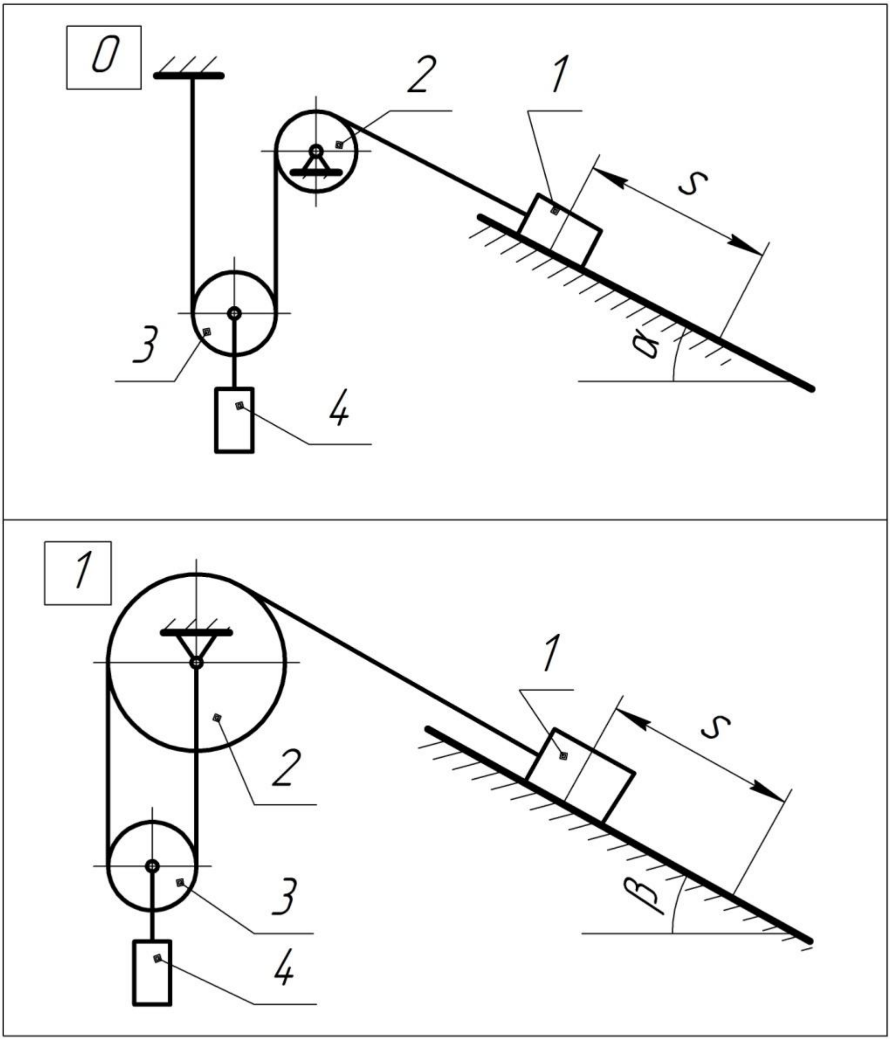


Рисунок А.6 – Розрахункові схеми

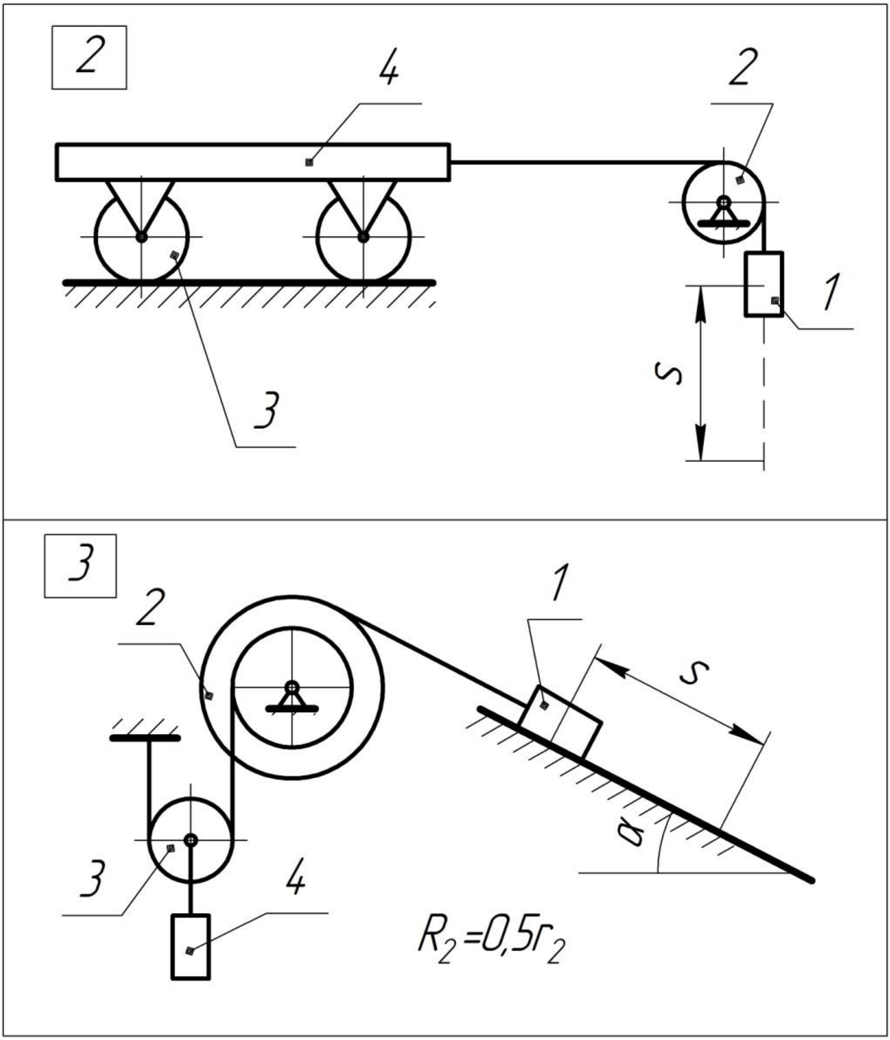


Рисунок А.7 – Розрахункові схеми

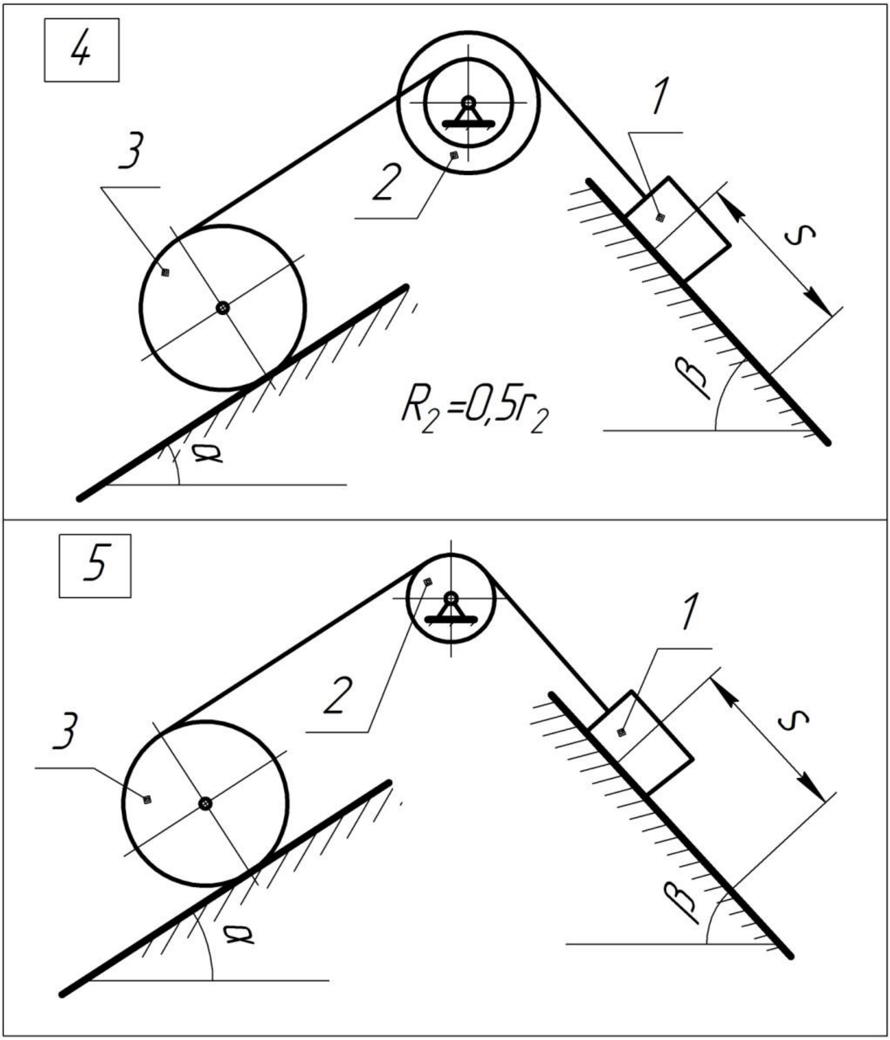


Рисунок А.8 – Розрахункові схеми

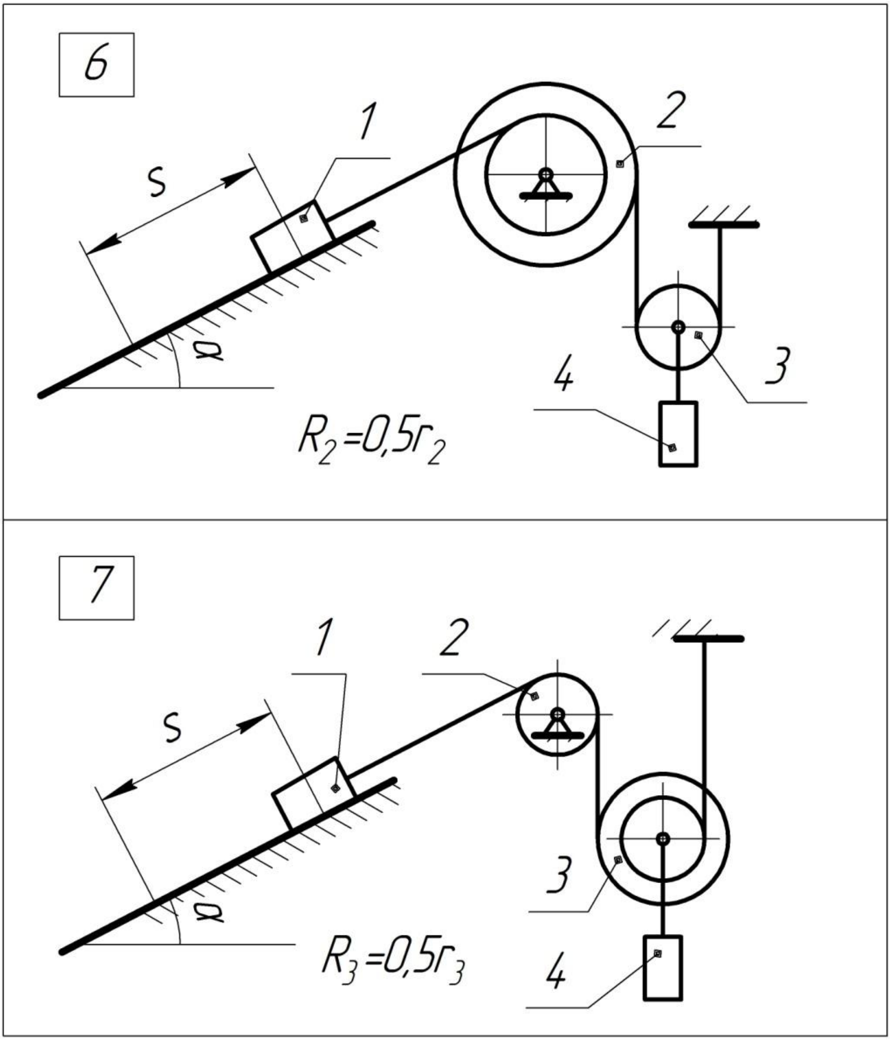


Рисунок А.9 – Розрахункові схеми

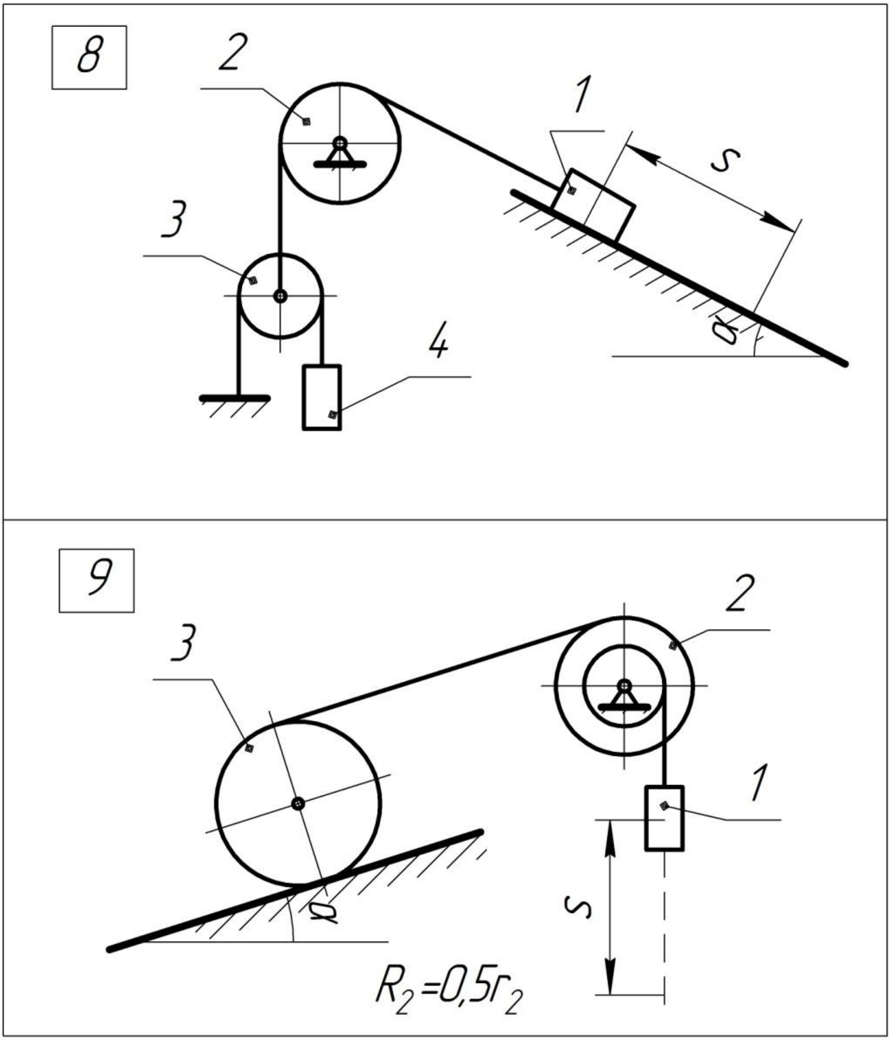
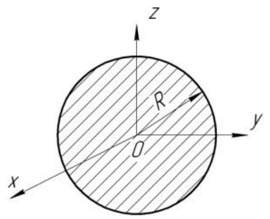
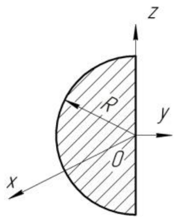
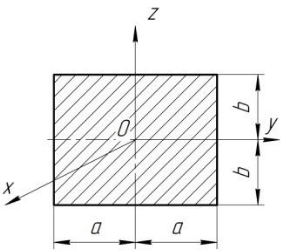
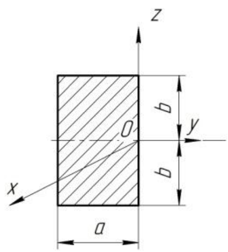
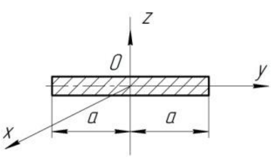


Рисунок А.10 – Розрахункові схеми

Таблиця А.3 – Осьові моменти інерції однорідних пластин

Переріз	Осьовий момент інерції відносно осі			Переріз
	x	y	z	
	J_x	J_y	J_z	
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m\ \ a^2+b^2}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$