Лекция 5

Момент количества движения точки (МКД) или кинетический момент.

Пусть т. M движется по криволинейной траектории со скоростью $\overline{V}$.

Соединим т. O и т. M – радиус – вектором $\overline{r}$, тогда:

$$l_0 = r \cdot m\overline{V} \tag{5.1}$$

Опустим $\perp$ из т. O на л.д. ($m\overline{V}$), тогда модуль

$$l_0 = (mV) \cdot h \tag{5.2}$$

Спроецируем $\overline{l_0}$ на ось z.

$l_z = |\overline{l_0}| \cdot cos\,\alpha$ – момент количества движения относительно оси z.

Если точка совершает сложное движение, её скорость определяется по формуле: $\overline{V}_{\text{àáñ}} = \overline{V}_r + \overline{V}_e$; тогда МКД относительно оси z определяется по теореме Вариньона:

$$l_z = m_z(m \cdot \overline{V}_r) + m_z(m \cdot \overline{V}_e) \tag{5.3}$$

<u>Пример №1</u>. Конус вращается с угловой скоростью <u>ω</u>. По образующей конуса со скоростью $\overline{V}_r$ движется точка массой <u>m</u>. Определить МКД точки относительно оси z, когда она находится на расстоянии a/2 от вершины. Радиус основания R.

Точка М участвует в сложном движении: в относительном – движении по контуру со скоростью $\overline{V}_r$ и в переносном – вращении корпуса. Переносная скорость: $\overline{V}_e = \omega \cdot \dfrac{R}{2}$.

Кинетический момент точки (МКД) относительно оси z:

$$l_z = m_z\left(m \cdot \overline{V}_e\right) + m_z\left(m \cdot \overline{V}_r\right)$$

Вектор ($m\overline{V}_r$) пересекает ось z, поэтому его момент равен нулю, т.е. $m_z(m\overline{V}_r)=0$.

Тогда:

$$l_z = m_z\left(m \cdot \overline{V}_e\right) = (m \cdot V_e) \cdot \frac{R}{2} = m \cdot \left(\omega \cdot \frac{R}{2}\right) \cdot \frac{R}{2} = m \cdot \omega \cdot \frac{R^2}{4}.$$

Ответ: $l_z = m \cdot \omega \cdot \frac{R^2}{4}$.

Теорема об изменении МКД материальной точки. (теорема моментов)

Пусть т. М движется по криволинейной траектории со скоростью $\overline{V}$, под действием силы $\overline{F}$.

Соединим т.М и т.О радиус-вектором $\bar{r}$. Два треугольника находятся одной плоскости.

Запишем: $\overline{m}_0(\overline{F}) = \overline{F} \times \bar{r}$;

$\bar{l}_0 = m\overline{V} \times \bar{r}$.

Следовательно, вектора $\bar{l}_O$ и $\overline{m}_0(\overline{F})$ совпадают.

Возьмем производную от (5.1):

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{r} \times m\overline{V}] = \left(\frac{d}{dt}\bar{r} \times m\overline{V}\right) + \left(\bar{r} \times \frac{d(m\overline{V})}{dt}\right) = (\overline{V} \times m\overline{V}) + \left(\bar{r} \times \frac{md\overline{V}}{dt}\right)$$

$$= 0 + (\bar{r} \times m\bar{a}) = \bar{r} \times \overline{F} = \overline{m}_0(\overline{F}).$$

$(\overline{V} \times m\overline{V}) = 0, \text{т. к.}\, \overline{V} \parallel (m\overline{V}).$

Итак:

$$\boxed{\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \overline{m}_0(\overline{F})}$$ - теорема об изменении МКД материальной точки. (5.4)

Спроецируем (5.4) на координатные оси.

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} \dfrac{dl_x}{dt} = m_x(\overline{F}); \\ \dfrac{dl_y}{dt} = m_y(\overline{F}); \\ \dfrac{dl_z}{dt} = m_z(\overline{F}). \end{cases}$$ – та же теорема в проекции на координатные оси. (5.5)

Из теоремы вытекает следствия, которые представляют собой теорему о сохранении м.к.д. относительно оси и центра.

1. Если $\overline{m}_0(\overline{F})=0$, (формула 5.4) $\Rightarrow \dfrac{d\bar{l}_0}{dt}=0 \Rightarrow \bar{l}_0 = const$.

2. Если, например $m_x(\overline{F})=0 \Rightarrow \dfrac{dl_x}{dt}=0 \Rightarrow l_x = const$.

МКД системы материальных точек

М.К.Д системы материальных точек обозначается $\overline{L}_0$, и равен:

$$\boxed{\overline{L}_0 = \sum \overline{m}_0(m_k \cdot \overline{V}_k) = \sum \bar{l}_{ok}}$$

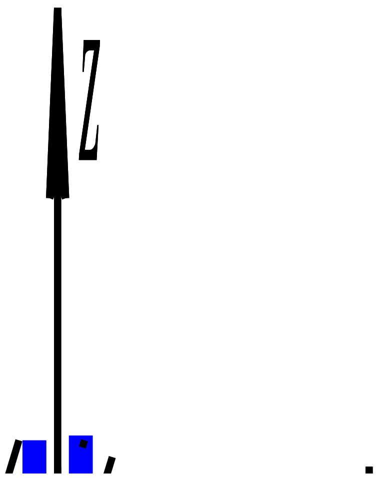
– М.К.Д или кинетический момент системы материальных точек. (5.6)

Спроецируем (5.6) на координатные оси:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} L_x = \sum m_x(m_k \cdot \overline{V}_k) = \sum l_{ox}; \\ L_y = \sum m_y(m_k \cdot \overline{V}_k) = \sum l_{oy}; \\ L_z = \sum m_z(m_k \cdot \overline{V}_k) = \sum l_{oz}. \end{cases}$$

– кинетический момент относительно осей. (5.7)

Кинетический момент тела, которое вращается вокруг оси вращения



Пусть твердое тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω. Рассмотрим т. $M_к$ на расстоянии $h_к$ от оси z.

$$L_z = \sum m_z(m_k \cdot \overline{V}_k); \tag{5.8}$$

$$m_z(m_k \cdot \overline{V}_k) = (m_k \cdot \overline{V}_k) \cdot h_k;$$

Т. к. линейная скорость при вращательном движении равна:

$$V_k = \omega \cdot h_k \Rightarrow m_z(m_k \cdot \overline{V}_k) = m_k(\omega \cdot h_k) \cdot h_k = m_k \cdot \omega \cdot h_k^2 = \omega(m_k \cdot h_k^2).$$

Подставляя в (5.8) будем иметь:

$$L_z = \sum m_z(m_k \cdot \overline{V}_k) = \sum (m_k \cdot h_k^2) \cdot \omega = \omega \cdot \sum (m_k \cdot h_k^2) = I_z \cdot \omega$$

Итак: $L_z = I_z \cdot \omega$. (5.9)

Для системы материальных точек:

$$L_z = L_{z1} + L_{z2} + \dots + L_{zn} = \sum L_{zk};$$

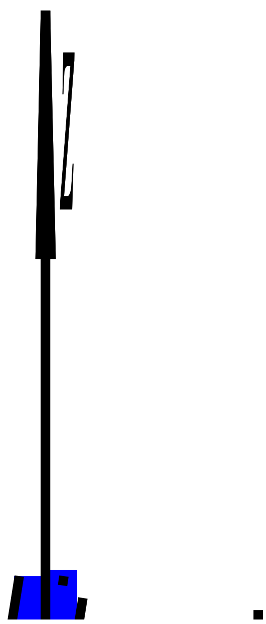
или $L_z = I_{z1} \cdot \omega_1 + I_{z2} \cdot \omega_2 + \dots + I_{zn} \cdot \omega_n = \sum I_{zk} \cdot \omega_k$.

Пример №2.

Дано: $I_{z2} = 0{,}05$ кг·м^2 ; $m_1 = 2$ кг; $m_3 = 1$ кг; ω = 8 рад/с; $R_2 = 0{,}2$ м; $r_2 = 0{,}1$ м.

Определить: L_z – ?

Решение.



Механизм состоит из трёх тел, следовательно: $L_z = L_{z1} + L_{z2} + L_{z3}$.

Тело 1 совершает поступательное движение:

$$L_{z1}=(m_1\cdot V_1)\cdot R_2=m_1(\omega\cdot R_2)\cdot R_2=m_1\cdot\omega\cdot R_2^2=2\cdot 8\cdot 0{,}2^2=0{,}64\ \frac{\text{кгм}^2}{\text{с}}.$$

Тело 2 совершает вращательное движение:

$$L_{z2}=I_{z2}\cdot\omega=0{,}05\cdot 8=0{,}4\ \frac{\text{кгм}^2}{\text{с}}.$$

Тело 3 совершает поступательное движение:

$$L_{z3}=(m_3\cdot V_3)\cdot r_2=m_3(\omega\cdot r_2)\cdot r_2=m_3\cdot\omega\cdot r_2^2=1\cdot 8\cdot 0{,}1^2=0{,}08\ \frac{\text{кгм}^2}{\text{с}};$$

$$L_z=0{,}64+0{,}4+0{,}08=1{,}12\left(\frac{\text{кгм}^2}{\text{с}}\right).$$

Ответ: $L_z = 1{,}12$ кгм^2/с.

III общая теорема динамики. Теорема об изменении (МКД) кинетического момента системы материальных точек относительно оси и центра.

Рассмотрим систему материальных точек и для каждой запишем теорему об изменении кинетического момента относительно одного и того же центра (оси).

$$+\begin{cases}\dfrac{d\bar{l}_{01}}{dt}=\bar{m}_0\left(\bar{F}_1^{\text{e}}\right);\\ \dfrac{d\bar{l}_{02}}{dt}=\bar{m}_0\left(\bar{F}_2^{\text{e}}\right);\\ \dfrac{d\bar{l}_{0n}}{dt}=m_0\left(\bar{F}_n^{\text{e}}\right).\end{cases}$$

$$\frac{d\bar{l}_{01}}{dt}+\frac{d\bar{l}_{02}}{dt}+\cdots+\frac{d\bar{l}_{0n}}{dt}=\bar{m}_0\left(\bar{F}_1^{\text{e}}\right)+\bar{m}_0\left(\bar{F}_2^{\text{e}}\right)+\cdots+\bar{m}_0\left(\bar{F}_n^{\text{e}}\right);$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sum\frac{d\bar{l}_{0k}}{dt} \qquad\qquad\qquad\qquad \sum\bar{m}_0\left(\bar{F}_k^{\text{e}}\right)$$

Итак:

$$\sum\frac{d\bar{l}_{0k}}{dt}=\sum\bar{m}_0\left(\bar{F}_k^{\text{e}}\right);\text{т.к.}\sum d\bar{l}_{0k}=d\sum\bar{l}_{0k}=d\bar{L}_0\Rightarrow$$

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt}=\sum\bar{m}_0\left(\bar{F}_k^{\text{e}}\right)\qquad(5.10)-\text{теорема в дифференциальной форме.}$$

Спроецируем (5.10) на координатные оси:

$$x:\ y:\ z: \begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = \sum m_x\left(\overline{F}_k^{e}\right); \\ \dfrac{dL_y}{dt} = \sum m_y\left(\overline{F}_k^{e}\right); \\ \dfrac{dL_z}{dt} = \sum m_z\left(\overline{F}_k^{e}\right). \end{cases}$$

(5.11) – та же теорема в проекции на координатные оси.

Из теоремы вытекают следствия, которые представляют собой закон сохранения МКД системы:

1. Если $\Sigma m_0\left(\overline{F}_k^{e}\right) = 0$; (формула 5.10) $\Rightarrow$ $\dfrac{d\overline{L}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \overline{L}_o = const$.

2. Если, например, $\Sigma m_y\left(\overline{F}_k^{e}\right) = 0$; (формула 5.11) $\Rightarrow \dfrac{dL_y}{dt} = 0; \Rightarrow L_y = const$.

Эта теорема используется для решения задач, в которых определяют угловую скорость и угловое ускорение.

По этой теме выдаётся задача №2 ДКР.

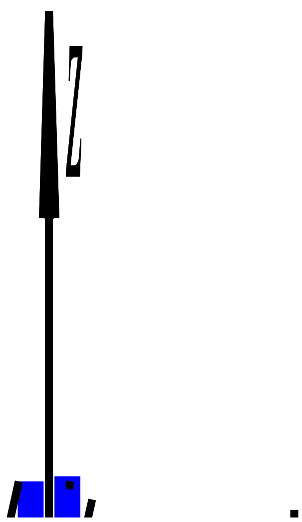
Смотри м/у № 10/3

<u>Пример №1.</u>

Рассмотрим пример решения задачи №2.

Дано: $m_1 = 2$ т; $m_2 = 4$ т; R_2; $M_{вр}$. Определить: a_1 – ?

Решение.



Для решения используем теорему об изменении момента количества движения.

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z^{\text{вр}}; \tag{1}$$

где: $M_z^{\text{вр}} = M_{\text{вр}} - m_1 g \cdot R_2;$

$$L_z = L_{z1} + L_{z2}.$$

Тело 1– совершает поступательное движение:

$$L_{z1} = (m_1 V_1) \cdot R_2 = 2mV_1 \cdot R_2;$$

Тело 2– совершает вращательное движение:

$$L_{z2} = I_{z2} \cdot \omega_2;$$

$$I_{z2} = \frac{m_2 R_2^2}{2} = \frac{4mR_2^2}{2} = 2mR_2^2;$$

$$\omega_2 = \frac{V_A}{R_2} = \frac{V_1}{R_2};$$

$$L_{z2} = 2mR_2^2 \cdot \frac{V_1}{R_2} = 2mR_2 V_1.$$

Итак: $L_z = L_{z1} + L_{z2} = 2mV_1R_2 + 2mR_2V_1 = 4mR_2V_1$;

Из (1) $\rightarrow$ $\dfrac{d}{dt}[4mR_2V_1] = M_{\text{вр}} - m_1 g R_2;$

$$4mR_2 \frac{dV_1}{dt} = M_{\text{вр}} - m_1 g R_2;$$

$$4mR_2 a_1 = M_{\text{вр}} - m_1 g R_2;$$

$$a_1 = \frac{M_{\text{вр}} - m_1 g R_2}{4mR_2} = \frac{M_{\text{вр}} - 2mgR_2}{4mR_2} \left[{}^{\text{м}}/_{\text{с}^2}\right].$$

Ответ: $a_1 = \dfrac{M_{\text{вр}} - 2mgR_2}{4mR_2} \quad \dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}.$