Лекция № 6

Дифференциальные уравнения вращательного движения твердого тела.

Твердое тело вращается вокруг оси z с угловой скоростью w под действием внешних сил $\overline{\mathbf{F}}_1^e$, $\overline{\mathbf{F}}_2^e$, …, $\overline{\mathbf{F}}_{n1}^e$. В т. A и т. B возникают реакции $\overline{x}_A$; $\overline{x}_B$; $\overline{y}_A$; $\overline{y}_B$; $\overline{z}_A$.

Чтобы исключить из уравнений эти реакции, используем теорему моментов относительно оси z.

$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\overline{F}_k^e)$; если $\sum m_z(\overline{F}_k^e) = M_z^e$, тогда

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e \tag{6.1}$$

- вращательный момент.

Т.к. $L_z = I_z \cdot w; \;\; \Rightarrow \;\; (6.1) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{d(I_z w)}{dt} = M_z^e;$

$$I_z \frac{dw}{dt} = M_z^e \qquad \text{если } I_z - \text{const} \tag{6.2}$$

- дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела.

$$\text{Т.к. } \frac{dw}{dt} = \varepsilon; \;\; \Rightarrow \;\; (6.2) \;\; \Rightarrow \;\; I_z \cdot \varepsilon = M_z^e \tag{6.3}$$

$$\text{Т.к. } \varepsilon = \ddot{\varphi}; \;\; \Rightarrow \;\; (6.2) \;\; \Rightarrow \;\; I_z \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e \tag{6.4}$$

<u>Пример № 1</u>.

Диск вращается вокруг оси под действием M_z^e = 6 нм, масса диска m = 12 кг, радиус инерции i_z = 1,73 м. Определить угловую скорость w через t = 3 сек от начала вращения, если w_0 = 0.

Решение.

Для решения задачи используем формулу(6.2) $I_z \frac{dw}{dt} = M_z^e$. По условию задачи M_z^e = 6 нм и $I_z = m \cdot i_z^2 = 12 \cdot 1{,}73^2 = 36\,кгм^2$, тогда

$$36\frac{dw}{dt} = 6; \quad \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{6}{36}; \quad \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{1}{6};$$

разделим переменные: $dw = \frac{1}{6}dt \quad \Rightarrow$ интегрируем:

$$\int_{w_0}^{w} dw = \frac{1}{6}\int_0^t dt; \quad \Rightarrow \quad w\Big|_{w_0}^{w} = \frac{1}{6}t\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad w - w_0 = \frac{1}{6}t; \quad \Rightarrow \quad w = w_0 + \frac{1}{6}t;$$ т.к.

$$w_0 = 0; \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1}{6}t; \quad \Rightarrow \quad при \quad t = 3\,сек;\ w = \frac{1}{6} \cdot 3 = 0{,}5\,рад/с.$$

Ответ: $w = 0{,}5\,рад/с.$

Пример № 2

Однородный цилиндр вращается вокруг оси z по закону $\varphi = t^3 - 5t^2$, радиус цилиндра R = 1,41 м, масса m = 60 кг. Определить вращающий момент M_z^e через t= 2 сек от начала вращения.

Решение.

Используем формулу 6.4:

$$I_z \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e,$$

где момент инерции I_z цилиндра относительно оси z будет равен $I_z = \frac{mR_2}{2} = \frac{60 \cdot 1{,}41^2}{2} = 60\,кгм^2$.

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \left[t^3 - 5t^2\right] = 3t^2 - 10t;$$

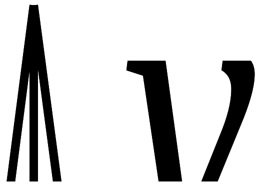
$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \left[3t^2 - 10t\right] = 6t - 10;$$

при = 2 сек; $\ddot{\varphi} = 6t - 10 = 6 \cdot 2 - 10 = 2\,рад/с^2$;

тогда $M_z^e = I_z \cdot \ddot{\varphi} = 60 \cdot 2 = 120\,(нм)$.

Ответ: $M_z^e = 120\,нм$.

Пример № 3



Стержень АВ = l = 1 м вращается вокруг оси z под действием вращающего момента $M_z^e = 4t$ (нм), масса m = 3 кг. Записать закон вращения $\varphi = f(t)$ через t = 2 сек от начала вращения, если $\varphi_0 = 0$; $w_0 = 0$.

Решение.

Чтобы записать закон вращения $\varphi = f(t)$, используем формулу (6.2):

$I_z \dfrac{dw}{dt} = M_z^e$; $\Rightarrow$ разделим переменные

$dw = \dfrac{M_z^e}{I_z} \cdot dt$; где I_z - момент инерции стержня.

$I_z = \dfrac{ml^2}{3} = \dfrac{3 \cdot 1^2}{3} = 1\,\text{кг} \cdot \text{м}^2$;

$dw = 4t \cdot dt$; $\Rightarrow$ интегрируем $\int dw = 4\int t\,dt$; $\Rightarrow$ $w = 4\dfrac{t^2}{2} + C_1$; или $w = 2t + C_1$.

Постоянную интегрирования C_1 определяем из начальных условий. При t = 0; $w = w_0 = 0$; $\Rightarrow$

$0 = 2 \cdot 0 + C_1$; $\Rightarrow$ $C_1 = 0$.

Итак, закон изменения угловой скорости принимает вид:

$w = 2t^2$ (рад/с);

Т.к. $w = \dfrac{d\varphi}{dt}$; $\Rightarrow$ $\dfrac{d\varphi}{dt} = 2t^2$; разделим переменные:

$d\varphi = 2t^2 \cdot dt$; $\Rightarrow$ интегрируем

$\int d\varphi = 2\int t^2\,dt$; $\Rightarrow$ $\varphi = \dfrac{2}{3}t^3 + C_2$;

Постоянную интегрирования C_2 определяем из начальных условий. При t = 0; $\varphi = \varphi_0 = 0$; $\Rightarrow$

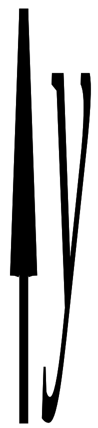
$0 = \dfrac{2}{3} \cdot 0 + C_2$; $\Rightarrow$ $C_2 = 0$; тогда $\varphi = \dfrac{2}{3}t^3$ (рад) – закон вращения.

При = 2 сек; $\varphi = \dfrac{2}{3} \cdot 2^3 = \dfrac{16}{3} = 5{,}3$ (рад).

Ответ: $\varphi = 5{,}3$ рад.

Физический маятник и его колебания.

Физическим маятником называется твердое тело, вращающееся вокруг горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела, и движущееся под действием силы тяжести.



Ось z проходит через т. O перпендикулярно к плоскости чертежа.

Запишем дифференциальное уравнение вращательного движения:

$I_0 \cdot \ddot{\varphi} = M_z^e$;

$M_z^e = -P \cdot OC \cdot \sin\varphi$; т.к. отклонения малы, $\sin\varphi \approx \varphi$.

Тогда $M_z^e = -P \cdot a \cdot \varphi; \;\Rightarrow$

$I_0 \cdot \ddot{\varphi} = -P \cdot a \cdot \varphi; \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{P}{I_0} \cdot a \cdot \varphi;$

Обозначим через $k^2 = -\frac{P_a}{I_0}; \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = -k^2 \cdot \varphi; \quad \Rightarrow$

$$\ddot{\varphi} + k^2 \cdot \varphi = 0 \qquad (6.5)$$

- дифференциальное уравнение малых колебаний физического маятника.

Характеристическое уравнение

$z^2 + k^2 = 0; \quad z_{1,2} = \pm i\,k$ - корни мнимые.

Решением уравнения (6.5) будет уравнение вида:

$$\begin{cases} \varphi = C_1 \cdot \sin(kt) + C_2 \cdot \cos(kt); \Rightarrow \text{продифференцируем} \\ \dot{\varphi} = C_1 k \cdot \cos(kt) - C_2 k \cdot \sin(kt) \end{cases}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем из начальных условий. При $t=0$; $\varphi = \varphi_0$; $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$:

$$\begin{cases} \varphi_0 = C_1 \cdot \sin(k \cdot 0) + C_2 \cdot \cos(k \cdot 0); \Rightarrow C_2 = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_0 = C_1 \cdot k \cos(k \cdot 0) - C_2 \cdot k \sin(k \cdot 0) \Rightarrow C_1 = \dfrac{\dot{\varphi}_0}{k} \end{cases};$$

Тогда

$\varphi = \dfrac{\dot{\varphi}_0}{k} \cdot \sin(kt) + \varphi_0 \cdot \cos(kt)$; или

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(kt) + \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \cdot \sin(kt) \tag{6.6}$$

- закон вращения,

где $k = \sqrt{\dfrac{P \cdot a}{I_0}}$

Период колебаний: $$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{P \cdot a}} \tag{6.7}$$

Формула (6.7) служит для определения I_0 опытным путем.

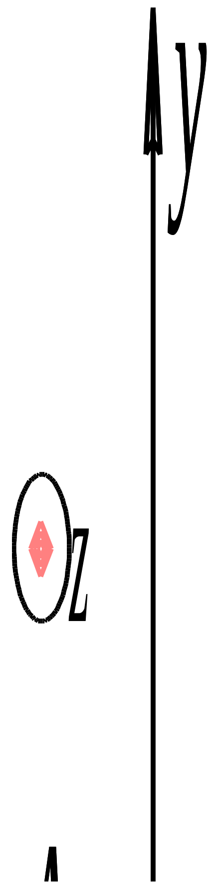
Способ подвеса.

Определить момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через точку С.

Пусть тело сделало <u>n</u> - качаний за <u>t</u> сек.

Период колебаний - $T = \dfrac{t}{n}$.

Тело является физическим маятником (ось <u>z</u> проходит через т. О).



Используем формулу (6.7):

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_0}{P \cdot a}};$$

где P - вес тела (взвешивают); а - расстояние, определяется опытным путем.

Возведем в квадрат левую и правую части (6.7):

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \sqrt{\frac{I_0}{P \cdot a}}; \quad \Rightarrow \quad I_0 = \frac{T^2 \cdot P \cdot a}{4\pi^2};$$

или $I_0 = \frac{P \cdot a}{4\pi^2} \cdot \left(\frac{t}{n}\right)^2; \quad \Rightarrow$

$I_0 = \frac{P \cdot a \cdot t^2}{4\pi^2 \cdot n^2};$ - момент инерции относительно подвеса, т.е. т. О.

Используя теорему Штейнера - Гюйгенса будем иметь:

$$I_0 = I_{zc} + m \cdot (OC)^2; \quad \Rightarrow$$

$I_{zc} = I_0 - m \cdot (OC)^2 = I_0 - ma^2 = \frac{Pat^2}{4\pi^2 n^2} - \frac{P}{g} \cdot a^2;$ где $m = \frac{P}{g}$.