Лекция №4

Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы.

I общая теорема динамики. Теорема о движении и сохранении движения центра масс.

Центр масс системы движется, как одна материальная точка, масса которой равна массе всей системы и на нее действуют все внешние силы, которые приложены к системе.

Для доказательства запишем:

$\bar{r}_c = \dfrac{\sum(m_k \bar{r}_k)}{M}$ x $M \Rightarrow M \cdot \bar{r}_c = \sum(m_k \bar{r}_k) \Rightarrow$ продифференцируем по времени левую и правую части

$$\frac{M \cdot d\bar{r}_c}{dt} = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} \Rightarrow M\bar{V}_c = \sum m_k \bar{V}_k \Rightarrow \frac{M \cdot d\bar{V}_c}{dt} = \sum m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} \Rightarrow M \cdot \bar{a}_c = \sum m_k \bar{a}_k,$$

т.к. $\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e \Rightarrow$

$$M \cdot \bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e \ ; \qquad (4.1)$$

$$\text{или} \quad M\frac{d\bar{V}_c}{dt} = \sum \bar{F}_k^e \ ; \qquad (4.2)$$

$$\text{или} \quad M \cdot \frac{d^2\bar{r}_c}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e \qquad (4.3)$$

Спроецируем уравнение (4.1) на координатные оси:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} M \cdot \ddot{x}_c = \sum F^e_{kx}; \\ M \cdot \ddot{y}_c = \sum F^e_{ky}; \\ M \cdot \ddot{z}_c = \sum F^e_{kz}. \end{cases} \qquad (4.4)$$

- дифференциальные уравнения движения центра масс системы.

Из теоремы вытекают три следствия, которые представляют собой **теорему о сохранении движения центра масс системы.**

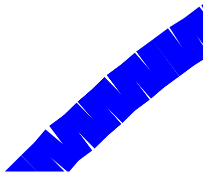
1. Если $\sum \bar{F}_k^e = 0, \Rightarrow M\dfrac{d\bar{V}_c}{dt} = 0; M \neq 0; \dfrac{d\bar{V}_c}{dt} = 0 \rightarrow \bar{V}_c = \text{const}$.

2. Если , например, $\sum F^e_{kx} = 0 \rightarrow M\ddot{x}_c = 0; M \neq 0; \ddot{x}_c = 0 \rightarrow$ тогда

$\dot{x}_c = \text{const}$ или $\dot{x}_c = V_{cx} = \text{const}$

3. Если $\sum F_{kx}^{e} = 0 \rightarrow M\ddot{x}_c = 0;\ M \neq 0;\ \ddot{x}_c = 0 \rightarrow$, если в начальный момент система находилась в покое, тогда центр масс системы не будет двигаться, т.е. $\dot{x}_c = V_{cx} = 0 \rightarrow x_c = 0$.

Пример № 1. К концу троса подвешен груз массой m_2 = 20 кг. Барабан массы m_1 = 10 кг может вращаться вокруг горизонтальной оси. Определить реакцию оси, если груз начнет двигаться с постоянным ускорением a_2 = 2 м/с^2.



Покажем внешние силы: $m_1\overline{g}, m_2\overline{g},\ \overline{R}_0$. Запишем теорему о движении центра масс механической системы:

$$M\overline{a}_c = m_1\overline{g} + m_2\overline{g} + \overline{R}_0; \qquad (*)$$

Выберем начало оси x в т. O и направим ее вниз. Спроецируем векторное равенство (*) на эту ось:

$$M \cdot \ddot{x}_c = m_1 g + m_2 g - R_0 = (m_1 + m_2)g - R_0;$$

Отсюда

$$R_0 = (m_1 + m_2)g - M \cdot \ddot{x}_c;$$

Запишем координату центра масс:

$x_c = \dfrac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2}{m_1 + m_2}$; т.к. $x_1 = 0$, а $(m_1 + m_2) = M \Rightarrow$

$x_c = \dfrac{m_2 \cdot x_2}{M} \Rightarrow$ продифференцируем дважды, определим ускорение центра масс.

$\ddot{x}_c = \frac{m_2 \cdot \ddot{x}_2}{M}$; или $\ddot{x}_c = \frac{m_2 \cdot a_2}{M}$, тогда

$$R_0 = (m_1 + m_2)g - M \cdot \frac{m_2 \cdot a_2}{M} = (m_1 + m_2)g - m_2 a_2 = m_1 g + m_2 (g - a_2) =$$
$$= 10 \cdot 9{,}8 + 20(9{,}8 - 2) = 254(н)$$

Ответ: R =254 н.

Импульс силы. Количество движения материальной точки.

Введем понятие элементарного импульса.

Произведение силы на элементарный промежуток времени действия называется элементарным импульсом.

$$d\overline{S} = \overline{F} \cdot dt \qquad (4.5)$$

Направление элементарного импульса совпадает с направлением линии действия силы.

Полный импульс за промежуток времени t представляет собой определенный интеграл от элементарного импульса, взятый в пределах от 0 до t, т.е.

$$\overline{S} = \int_0^t \overline{F} \cdot dt \qquad (4.6)$$

Если $F = const$, тогда импульс силы определяют по формуле:

$$\overline{S} = \overline{F} \cdot t \qquad (4.7)$$

Спроецируем (4.6) на координатные оси:

$$\begin{array}{l} x: \\ y: \\ z: \end{array} \begin{cases} S_x = \int_0^t F_x dt; \\ S_y = \int_0^t F_y dt; \\ S_z = \int_0^t F_z dt \end{cases} \qquad (4.8)$$

- проекция импульса на координатные оси.

Полный импульс определяем через проекции на координатные оси:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \tag{4.9}$$

- полный импульс.

Направление вектора $\overline{S}$ определяем по направляющим косинусов:

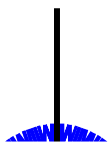
$$\begin{cases} \cos\left(\overline{S}\,\hat{}\,x\right) = \dfrac{S_x}{S}; \\ \cos\left(\overline{S}\,\hat{}\,y\right) = \dfrac{S_y}{S}; \\ \cos\left(\overline{S}\,\hat{}\,z\right) = \dfrac{S_z}{S}. \end{cases} \tag{4.10}$$

- направляющие косинусов.

Единицы измерения $[S] = [н \cdot с]$.

Количество движения материальной точки.

Вектор $\overline{q}$*, равный произведению массы точки на вектор ее скорости* $[m\overline{V}]$ *называется количеством движения материальной точки.*



$$\overline{q} = m\overline{V} \tag{4.11}$$

Направление вектора количества движения $\overline{q}$ совпадает с направлением вектора скорости. Единицы измерения $\overline{q} = \left[\dfrac{кг \cdot м}{с}\right]$.

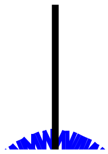
Теорема об изменении количества движения материальной точки.

Пусть т. М движется по криволинейной траектории.

При $t_0 \rightarrow$ положение т. $M_0 \rightarrow \overline{V}_0$;

$t_1 \rightarrow$ положение т. $M_1 \rightarrow \overline{V}_1$;

рассмотрим промежуточное положение при $t \rightarrow$ т. $M \rightarrow \overline{V}$.



Запишем II закон динамики:

$m\bar{a} = \bar{F}$;

где $\bar{\mathbf{F}}$ - одна сила или равнодействующая нескольких сил.

Т.к. $\bar{a} = \dfrac{d\bar{V}}{dt}; \Rightarrow m\dfrac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F}; \Rightarrow$ внесем m под дифференциал

$$\frac{d(m\bar{V})}{dt} = \bar{F} \tag{4.12}$$

- теорема в дифференциальной форме.

Спроецируем (4.12) на координатные оси:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} \dfrac{d(mv_x)}{dt} = F_x; \\ \dfrac{d(mv_y)}{dt} = F_y; \\ \dfrac{d(mv_z)}{dt} = F_z. \end{cases} \tag{4.13}$$

Разделим переменные в (4.12) и проинтегрируем:

$$d(m\bar{V}) = \bar{F}dt; \Rightarrow \int_{\bar{V}_0}^{\bar{V}_1} d(m\bar{V}) = \int_0^t \bar{F}dt; \qquad \int_0^t \bar{F}dt = \bar{S} \Rightarrow$$

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \bar{S} \tag{4.14}$$

- теорема в интегральной форме.

Спроецируем (4.14) на координатные оси:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} mv_{1x} - mv_{0x} = S_x; \\ mv_{1y} - mv_{0y} = S_y; \\ mv_{1z} - mv_{0z} = S_z. \end{cases} \tag{4.15}$$

- та же теорема, только в проекциях на координатные оси.

Из теоремы вытекают два следствия, которые представляют собой **теорему о сохранении количества движения материальной точки.**

1. Если $\overline{F} = 0$; (формула 4.12) $\Rightarrow \dfrac{d(m\overline{V})}{dt} = 0; \Rightarrow m\overline{V} = const$.

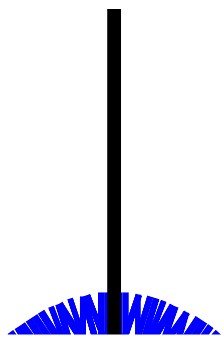
2. Если, например, $\overline{F}_y = 0$; (формула 4.13) $\Rightarrow \dfrac{d(mV_y)}{dt} = 0; \Rightarrow mV_y = const$.

Пример № 2

Материальная точка массы m =1 кг движется по окружности с постоянной скоростью V = 10 м/с из т. $M_{0.}$

Определить импульс сил, действующих на точку, за время, в течение которого точка пройдет ¾ длины окружности.

Решение.



Применим теорему об изменении количества движения материальной точки в интегральной форме, только в проекции на координатные оси.

Зная направления скоростей, покажем направления векторов количества движения.

$$x: \quad S_x = mV_x - mV_{0x} = -mV - 0 = -mV;$$

$$y: \quad S_y = mV_y - mV_{0y} = 0 - mV_0 = -mV_0.$$

Т.к. V=const по условию задачи, следовательно,

$V = V_0 = 10 м/с$.

Импульс силы

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \sqrt{(-mV)^2 + (-mV_0)^2} = \sqrt{(-10m)^2 + (-10m)^2} = 10m\sqrt{2} =$$
$$= 1 \cdot 10 \cdot 1{,}41 = 14{,}1(нс)$$

Ответ: S =14,1 (нс)/

Количество движения системы материальных точек.

Количеством движения системы материальных точек будем называть векторную величину $\overline{Q}$*, равную геометрической сумме количеств всех точек системы:*

$$\overline{Q} = \sum \left(m_k \overline{V}_k \right) \tag{4.16}$$

Запишем радиус-вектор центра масс.

$$\bar{r}_c = \frac{\sum (m_k \bar{r}_k)}{M}; \quad \Big| \quad x \; M \quad \Rightarrow$$

$\bar{r}_c \cdot M = \sum m_k \bar{r}_k \quad \Rightarrow$ продифференцируем:

$M \cdot \dfrac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum m_k \cdot \dfrac{d\bar{r}_k}{dt}$, где $\dfrac{d\bar{r}_c}{dt} = \overline{V}_c$, $\dfrac{d\bar{r}_k}{dt} = \overline{V}_k$, тогда $M \cdot \overline{V}_c = \sum m_k \cdot \overline{V}_k \quad \Rightarrow$

$$Q = M \cdot \overline{V}_c \tag{4.17}$$

- количество движения системы.

Спроецируем (4.17) на координатные оси:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} Q_x = M \cdot \dot{x}_c; \\ Q_y = M \cdot \dot{y}_c; \\ Q_z = M \cdot \dot{z}_c. \end{cases} \tag{4.18}$$

- количество движения системы в проекциях на координатные оси.

Зная проекции, можно определить полное количество движения системы:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} \tag{4.19}$$

- полное количество движения системы.

II общая теорема динамики. Теорема об изменении и сохранении количества движения системы материальных точек.

Рассмотрим систему материальных точек. Запишем (4.17):

$\overline{Q} = M \cdot \overline{V}_c \Rightarrow$ продифференцируем по времени левую и правую части:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = M\frac{d\overline{V}_c}{dt}; \Rightarrow \frac{d\overline{Q}}{dt} = M\overline{a}_c; \text{ т.к. } M\overline{a}_c = \sum \overline{F}_k^e; \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e \tag{4.20}$$

- теорема об изменении количества движения системы материальных точек в дифференциальной форме.

Спроецируем (4.20) на координатные оси:

$$\begin{array}{l} x: \\ y: \\ z: \end{array} \begin{cases} \dfrac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e; \\ \dfrac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e; \\ \dfrac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \end{cases} \tag{4.21}$$

- та же теорема, только в проекциях на координатные оси.

Проинтегрируем (4.20):

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_k^e \quad \Bigg| \quad x(dt) \quad \Rightarrow \quad d\overline{Q} = \sum \overline{F}_k^e \cdot dt; \quad \Rightarrow$$

$$\int_{\overline{Q}_0}^{\overline{Q}_1} d\overline{Q} = \int_0^t \overline{F}_k^e \cdot dt; \quad \Rightarrow \quad \overline{Q}\Big|_{\overline{Q}_0}^{\overline{Q}_1} = \sum \overline{S}^e; \quad \Rightarrow$$

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}^e \tag{4.22}$$

- теорема в интегральной форме.

Спроецируем (4.22) на координатные оси:

$$\begin{array}{l} x: \\ y: \\ z: \end{array} \begin{cases} Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_x^e; \\ Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_y^e; \\ Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_z^e. \end{cases} \tag{4.23}$$

- та же теорема, только в проекции на координатные оси.

Из теоремы вытекают следствия, которые представляют собой **закон сохранения движения системы материальных точек.**

1. Если $\sum \overline{F}_k^e = 0;$ (формула 4.20) $\Rightarrow \dfrac{d\overline{Q}}{dt} = 0; \Rightarrow \overline{Q} = const$

2. Если, например, $\sum \overline{F}_{kz}^e = 0;$ (формула4.21) $\Rightarrow \dfrac{d\overline{Q}_z}{dt} = 0; \Rightarrow \overline{Q}_z = const$.