Лекция № 1

Динамика материальной точки и системы материальных точек.

Динамика – это раздел теоретической механики, который устанавливает зависимость движения точки и системы материальных точек от действия приложенных сил.

Материальная точка – это геометрическая точка, обладающая массой.

Материальными точками называются также частицы, на которые мысленно разбивается твердое тело при определении некоторых его динамических характеристик.

Масса – мера инертности тела.

Обозначается m, единицы измерения – кг.

Сила – это результат механического взаимодействия.

Обозначается $\vec{F}$, единицы измерения – н, кн.

В динамике сила может быть величиной:

постоянной $F = const \to F = 2кн$;

функцией времени $F = f_1(t) \to F = 4t^2$;

функцией скорости $F = f_2(V) \to F = -3V$;

функцией перемещения $F = f_3(x) \to F = 6x$.

В основу динамики положены законы Галилея – Ньютона.

Первый закон. (Закон инерции).

Если на материальную точку не действуют никакие силы, то она находится в состоянии покоя или движется равномерно и прямолинейно.

Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил или под действием уравновешенной системы сил, называется движением по инерции.

Второй закон. (Основной закон динамики).

Произведение массы точки на ускорение равно по величине силе, действующей на точку, а направление ускорения совпадает с направлением силы.

$$m\bar{a} = \bar{F} \quad – \text{ II закон динамики} \qquad (1.1)$$

Если на точку действует система сходящихся сил (с.с.с.) второй закон динамики записывается:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_к \quad \text{– II закон динамики для с.с.с.} \qquad (1.2)$$

Третий закон. (Закон взаимодействия).

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, но в противоположные стороны.

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2;$$

$$m_1 a_1 = m_2 a_2;$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Четвертый закон. (Закон независимости действия сил).

Если на материальную точку действует с.с.с., то ускорение, которое она получает, равно геометрической сумме ускорений, которые получает точка от действия каждой силы в отдельности:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_n = \Sigma \bar{a}_k .$$

Рассмотрим действие каждой силы на т. М в отдельности.

Запишем II закон динамики:

$$\begin{cases} \bar{F}_1 = m\bar{a}_1; \\ \bar{F}_2 = m\bar{a}_2; \\ + ... \\ \bar{F}_k = m\bar{a}_k; \\ \bar{F}_n = m\bar{a}_n \end{cases}$$

$$\underbrace{\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + ... + \bar{F}_n + ... + \bar{F}_n}_{\sum\limits_{k=1}^{n} F_k} = m\underbrace{(\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + ... + \bar{a}_k + ... + \bar{a}_n)}_{\bar{a}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = m\bar{a} \ , \tag{1.3}$$

$$\text{т. к. } \sum_{k=1}^{n} F_k = \overline{R}\text{, следовательно}$$

$$m\bar{a} = \overline{R}\,, \tag{1.3'}$$

где $\overline{R}$ - равнодействующая с.с.с.

Все законы динамики выведены для инерционной (неподвижной) системы отсчета.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Координатный способ задания движения точки.

Рассмотрим движение материальной точки в пространстве под действием системы сходящихся сил ($\overline{F}_1; \overline{F}_2; \ldots; \overline{F}_n$).

Заданы законы движения в координатной форме:

$$\begin{cases} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t). \end{cases} \quad \text{- координатный способ задания движения точки} \tag{1.4}$$

Для данной точки запишем II закон динамики:

$$m\bar{a} = \sum \overline{F}_k \ ; \qquad (*)$$

Спроецируем (*) на координатные оси:

$$\begin{matrix} x: \\ y: \\ z: \end{matrix} \begin{cases} ma_x = \sum F_{kx}; \\ ma_y = \sum F_{ky}; \\ ma_z = \sum F_{kz}. \end{cases} \qquad \text{т.к.} \qquad \begin{cases} a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}; \\ a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}; \\ a_z = \dfrac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \end{cases} \quad \text{следовательно:}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \\ m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \end{cases} \tag{1.5}$$

- дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки.

Смотри пример №1.

Естественный способ задания движения точки.

Дано: закон движения в виде $S = f(t)$; система сходящихся сил $\overline{F}_1$; $\overline{F}_2$; …; $\overline{F}_n$

.

Через т. M проводим естественные оси (τnb), причем в $\perp$ пл. τn.

Запишем II закон динамики в виде:

$$m\bar{a} = \sum \overline{F}_k$$

Спроецируем его на естественные оси.

$$\begin{cases} ma_\tau = \sum F_{k\tau}; \\ ma_n = \sum F_{kn}; \\ ma_b = \sum F_{kb}. \end{cases} \quad \text{т.к.} \quad \begin{cases} a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2S}{dt^2}; \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho}; \\ a_b = 0. \end{cases} \quad \text{следовательно:}$$

$$\begin{cases} m\dfrac{dv}{dt} = \Sigma F_{k\tau}; \\ m\dfrac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{kn}; \\ 0 = \Sigma F_{kb}. \end{cases} \tag{1.6}$$

- дифференциальные уравнения движения точки в естественных осях. Уравнения Эйлера.

Смотри пример №2.

Пример 1

Материальная точка массой m = 8 кг движется в плоскости OXY согласно уравнениям $x = 0{,}05\ t^3$; $y = 0{,}3\ t^2$ (м). Определить силу, действующую на точку через t = 4 сек, от начала движения.

Решение.

Проекции силы $\overline{F}$ на оси координат $\overline{F}_x \perp \overline{F}_y$, следовательно $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

$$F_x = m\ddot{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[0{,}05t^3\right] = 0{,}15t^2; \\ \ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[0{,}15t^2\right] = 0{,}3t. \end{cases}$$ при t = 4 сек; $\ddot{x} = 0{,}3t = 0{,}3 \cdot 4 = 1{,}2\ м/с^2$

$$F_x = m\ddot{x} = 8 \cdot 1{,}2 = 9{,}6\ (н);$$

$$F_y = m\ddot{y} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y} = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[0{,}3t^2\right] = 0{,}6t\ ; \\ \ddot{y} = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[0{,}6t\ \right] = 0{,}6\ м/с^2. \end{cases}$$

$$F_y = m\ddot{y} = 8 \cdot 0{,}6 = 4{,}8\ (н);$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{9{,}6^2 + 4{,}8^2} = 10{,}73\ (н)$$

Пример 2

Точка массой m = 22 кг движется по окружности R = 10 м, согласно закону $S = 0{,}3t^2$. Определить силу, действующую на точку через t = 5 сек, от начала движения.

Решение.

Так как $\overline{F}_n \perp \overline{F}_\tau \to F = \sqrt{F_n^2 + F_\tau^2}$.

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[0{,}3t^2\right] = 0{,}6t; \\ a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left[0{,}6t\right] = 0{,}6\ м/с^2. \end{cases}$$

$$F_\tau = 22 \cdot 0{,}6 = 13{,}2(н).$$

$$F_n = ma_n = m\frac{v_2}{\rho} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{ds}{dt} = 0{,}6t; \\ при\ t = 5сек,\ \rho = R = 10м \quad v = 0{,}6 \cdot 5м/с \end{cases}$$

$$F_n = 22 \cdot \frac{3^2}{10} = 19{,}8(н).$$

$F = \sqrt{13{,}2^2 + 19{,}8^2} = 23{,}8\ (н)$.

Ответ: $F = 23{,}8\ н$.

Две задачи динамики точки.

Первая (прямая) задача.

Зная закон движения $[x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t)]$ *и массу точки, определить силу, действующую на точку.*

Для решения этой задачи дважды дифференцируем уравнения движения, умножаем их на массу и получаем проекции силы $\overline{F}$ на оси x, y, z, т.е.

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2};\quad \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2};\quad \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2};\quad \Rightarrow\quad F_x = m\ddot{x};\quad F_y = m\ddot{y};\quad F_x = z = m\ddot{z};\quad \Rightarrow$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\ .$$

Направление вектора $\overline{F}$ определяют по направляющим косинусов:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{F_x}{F} \to \alpha \\ \cos\beta = \dfrac{F_y}{F} \to \beta \\ \cos\gamma = \dfrac{F_z}{F} \to \gamma \end{cases} \text{ - направляющие косинусов} \qquad (1.7)$$

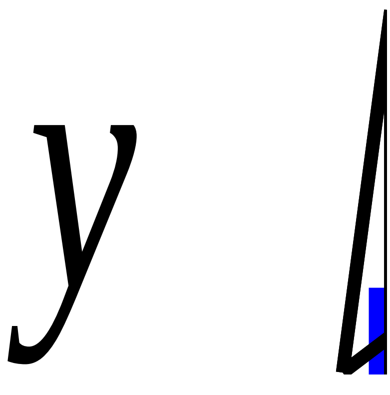
См. пример №1.

Зная величины $F_x = 9{,}6\ н;\ .F_y = 4{,}8\ н;\ F = 10{,}73\ (н)$ можно определить угол наклона вектора $\overline{F}$.

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{9{,}6}{10{,}73} = 0{,}8947 \to \quad \alpha = 26{,}53^0.$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{4{,}8}{10{,}73} = 0{,}4473 \to \quad \beta = 63{,}43^0.$$

$$\angle\alpha + \angle\beta = 26{,}53^0 + 63{,}43^0 = 89{,}96^0 \approx 90^0.$$



Т.к. проекции $F_x \rangle 0$ и $F_y \rangle 0$, откладываем их по осям координат в положительные стороны.

Вторая (обратная) задача.

Зная действующие на точку силы ($\overline{\mathrm{F}}_1$*;* $\overline{\mathrm{F}}_2$*; ...;* $\overline{\mathrm{F}}_\mathrm{n}$*), ее массу и начальные условия* $x_0; y_0; z_0; \dot{x}_0; \dot{y}_0; \dot{z}_0$*, определить закон движения точки или какие-либо другие кинематические характеристики.*

Решение задач этого типа сводиться к составлению дифференциальных уравнений (или одного уравнения) движения материальной точки и их последующему решению путем непосредственного интегрирования.

Примеры решения обратной задачи динамики рассмотрим в лекции №2.