Лекция 7

Работа силы. Мощность.

Для характеристики действия силы на тело, при некотором его перемещении, введем понятие о работе силы. Сначала введем понятие оюэлементарной работе.

$$dA = F\tau \cdot ds \text{ – элементарная работа} \qquad (7.1)$$

Пусть точка движется из пол M_0 в пол. M_1 под действием силы $\overline{F}$, со скоростью $\overline{V}$. Через т.М проведем касательную τ и нормаль n. Спроецируем силу $\overline{F}$ на эти оси ($\overline{F_n}$ и $\overline{F_\tau}$).

Составляющая $\overline{F_\tau}$ изменяет модуль скорости, так как $\overline{F_\tau} = ma_\tau = m\dfrac{dV}{dt}$.

Составляющая $\overline{F_n}$ изменяет или направление вектора скорости $\overline{V}$, или силу давления на связь.

Так как $\overline{F_\tau} = F \cdot cos\alpha$, следовательно (7.1) примет вид:

$$dA = F \cdot cos\alpha \ ds \text{ - элементарная работа} \qquad (7.2)$$

Если 0 < α < 90º - работа положительная по знаку;

Если α = 0º - $dA = Fds$;

Если α > 90º - работа отрицательная по знаку;

Если α = 180º - $dA = -Fds$;

Если α = 90º - $dA = 0$, так как $cos90^o = 0$.

Полная работа на конечном перемещении M_0 M_1:

$$A = \int\limits_{M_0M_1} F \cdot cos\alpha \ ds \text{ - полная работа на конечном перемещении} \qquad (7.3)$$

Работа силы на каком-либо перемещении M_0 M_1 равняется взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

В векторном виде элементарная работа имеет вид:

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad (7.4)$$

Запишем элементарную работу в аналитической форме.

Обозначим проекции силы $\overline{F}(x; y; z)$, а проекции радиус-вектора $d\overline{r}(dx; dy; dz)$, тогда (7.4) принимает вид:

$dA = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ - аналитическая форма элементарной работы (7.5)

<u>Пример №1.</u>

Дано: F = $3S^2$, S = 2 м.

Определить: A - ?

$$A = \int_0^S F\ ds = \int_0^2 3S^2 ds = \frac{3}{3} \cdot S^3 \Big|_0^2 = S^3 \Big|_0^2 = 2^3 = 8\ (\text{Äæ}).$$

Единицы измерения работы $[\text{À}] = [\text{Äæ}] = [\text{Íì}] = \left[\frac{\text{êã ì}^2}{\text{ñ}^2}\right]$.

Теорема о работе равнодействующей.

Работа равнодействующей силы на каком-либо перемещении, равняется алгебраической сумме работ от каждой силы на том же самом перемещении.

Пусть т.М движется из положения M_0 в положение M_1, под действием сил $\overline{F_1}; \overline{F_2} \dots \overline{F_n}$.

Требуется доказать: $A(\overline{R}) = \sum A(\overline{F}_k)$.

Через т.М проведем естественные оси координат, покажем элементарные перемещения $d\overline{S}$.

Спроецируем все действующие силы на касательную. Запишем элементарную работу от каждой силы на этом перемещении:

$$\begin{cases} dA_1 = F_{1\tau} \cdot dS; \\ dA_2 = F_{2\tau} \cdot dS; \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ dA_n = F_{n\tau} \cdot dS. \end{cases}$$

$$dA_1 + dA_2 + \ldots + dA_n = F_{1\tau} \cdot dS + F_{2\tau} \cdot dS + \ldots + F_{n\tau} \cdot dS$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\sum dA_k \qquad\qquad\qquad\qquad \sum F_{k\tau} \cdot dS$$

Имеем: $\sum dA_k = \sum F_{k\tau} \cdot dS$ (*)

Если $\sum \overline{F}_k = \overline{R}$, тогда ее проекция на касательную будет: $R_\tau = \sum F_{k\tau}$.

Домножим левую и правую части на *dS:*

$$R_\tau \ dS = \sum F_{k\tau} \ dS \qquad (**)$$

Подставим (**) в (*):

$\sum dA_k = R_\tau \ dS \ \Rightarrow$ проинтегрируем вдоль перемещения M_0M_1.

$$\int\limits_{ì_0}^{ì_1} \sum dA_k = \int\limits_{ì_0}^{ì_1} R_\tau \ dS \quad \Rightarrow$$

$$\sum \int\limits_{ì_0 ì_1} dA_k = \int\limits_{ì_0 ì_1} R_\tau \ dS$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$\sum A(\overline{F}_k) = A(\overline{R}) \ \Rightarrow \ A(\overline{R}) = \sum A(\overline{F}_k)$ - работа равнодействующей (7.6)

Пример вычисления работы.

1. Работа силы тяжести.

Пусть т.М, на которую действует вес $\overline{Ð}$, перемещается т.M_0 (x_0; y_0; z_0) в т.M_1 (x_1; y_1; z_1).

Спроецируем силу $\overline{Ð}$ на координатные оси:

x: x = 0;

y: y = 0;

z: z = - P.

Подставим проекции в (7.5):

$$dA = x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy + (-P)dz = -P\,dz\,.$$

$dA = -P\,dz \quad \Rightarrow$ найдем полную работу

$$A = \int\limits_{M_0 M_1} (-P\,dz) = -\int\limits_{z_0}^{z_1} P\,dz = -Pz\Big|_{z_0}^{z_1} = -P(z_1 - z_0)\,;$$

$A = P(z_1 - z_0)$, т.к. $z_1 - z_0 = h \quad \Rightarrow \quad A = \pm P \cdot h$ - работа силы тяжести (7.7)

Так как $P = mg \quad \Rightarrow \quad A = \pm\, mgh$ (7.8)

Работа силы тяжести равняется, взятому со знаком плюс или минус, произведению силы на вертикальное перемещение точки ее приложения (h).

2. Работа упругой силы.

Пусть точка движется из положения M_0 в положение M_1, под действием силы $\overline{F} = -c \cdot \overline{r}$.

Запишем элементарную работу: $dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = -c\overline{r} \cdot d\overline{r}$; внесем радиус-вектор $\overline{r}$ под дифференциал: $dA = -\frac{c}{2} \cdot d\left(r^2\right)$.

Полная работа: $A = -\int\limits_{M_0M_1} \frac{c}{2} \cdot d\left(r^2\right) = -\frac{c}{2}\int\limits_{r_0}^{r_1} d\left(r^2\right) = \frac{c}{2} \cdot r^2 \Big|_{r_0}^{r_1} = -\frac{c}{2}\left(r_1^2 - r_0^2\right) = \frac{c}{2}\left(r_1^2 - r_0^2\right)$

$$A = \frac{c}{2}\left(r_1^2 - r_0^2\right) \text{ - работа упругой силы} \qquad (7.9)$$

Работа упругой силы равняется половине произведения коэффициента жесткости пружины на разность квадратов радиус-векторов начального и конечного положения точки.

3. Работа силы, приложенной к абсолютно твердому телу, которое вращается вокруг неподвижной оси.

Пусть твердое тело вращается вокруг оси z под действием силы $\overline{F}$ приложенной в т.$М_к$. Через эту точку проведем естественные оси *втп*. Сила $\overline{F}$ приложена на расстоянии $М_кО = h_k$ от оси z. Разложим силу на составляющие:

1. Сила $\overline{F_{\hat{a}}}$ параллельна оси z – вызывает сдвиг тела вдоль этой оси;
2. Сила $\overline{F_n}$ перпендикулярна оси z – не перемещает тело;
3. Сила $\overline{F_\tau}$ – поворачивает тело на угол $d\varphi$, при этом точка перемещается на $d\overline{S}$ вдоль траектории.

Элементарная работа силы $\overline{F_\tau}$ будет равна: $dA = F_\tau \ dS$;

где $dS = h \cdot d\varphi$; $\quad d\varphi$ - элементарный угол поворота твердого тела.

$dA = F_\tau \cdot h \cdot d\varphi$, т.к. $F_\tau \cdot h = \grave{I}_z^{\hat{a}\eth} \quad \Rightarrow$

$dA = \grave{I}_z^{\hat{a}\eth} \cdot d\varphi$ - элементарная работа момента (7.10)

Полная работа:

$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_z^{\hat{a}\eth} \cdot d\varphi$ - полная работа момента (7.11)

Если $\grave{I}_z^{\hat{a}\eth} = const \quad \Rightarrow \quad A = M_{\hat{a}\eth}(\varphi - \varphi_0)$ (7.12)

Мощность.

Мощностью называется величина, которая определяет работу, выполненную силой за единицу времени.

Мощность, в данный момент времени, вычисляют отношением элементарной работы к элементарному времени.

$$N = \frac{dA}{dt} \tag{7.13}$$

Т.к. $dA = F_\tau \ dS \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{F_\tau \ dS}{dt} = F_\tau \cdot V = F \cdot cos\alpha \cdot V$, тогда

$$N = \overline{F} \cdot \overline{V} \tag{7.14}$$

Из равенства $N = F_\tau \cdot V$ видно, что у двигателя, который имеет данную мощность, сила тяги $\overline{F_\tau}$ будет тем больше, чем меньше скорость $\overline{V}$. Поэтому, например, на подъеме, или плохой дороге у автомобиля переходят к пониженность скорости.

Так как при вращательном движении $dA = \grave{I}_z^{\hat{a}\eth} \cdot d\varphi$, следовательно:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\text{Ì}_z^{\text{âð}} \cdot d\varphi}{dt} = \text{Ì}_z^{\text{âð}} \cdot \omega \, ;$$

$N = \text{Ì}_z^{\text{âð}} \cdot \omega$ - этой формулой пользуются при подборе двигателя (7.15)

Единицы измерения: $[N] = [\text{Âò}] = \left[\frac{\text{Äæ}}{\text{ñ}} \right]$.