

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ЕЛЕКТРОННОЇ ТЕХНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних занять та розрахункової роботи
з дисципліни: «Аналіз та розрахунок характеристик
електромагнітних полів»
для студентів денної та заочної форм навчання
усіх спеціальностей

УДК 621.3:537.8](072)

М 54

Методичні вказівки до виконання практичних занять та розрахункової роботи з дисципліни: «Аналіз та розрахунок характеристик електромагнітних полів» для студентів денної та заочної форм навчання усіх спеціальностей [Електронний ресурс] / уклад.: О.В. Вовна, Г.О. Шеїна. – Луцьк : ДонНТУ, 2022. – 152 с.

Методичні вказівки є практикумом з дисципліни «Аналіз та розрахунок характеристик електромагнітних полів», у них викладено необхідні положення під час підготовки до лабораторних робіт, порядок виконання та завдання до лабораторних робіт, зміст звіту та контрольні запитання.

Укладачі: Вовна О.В. – професор, д.т.н., зав. каф. електронної техніки.

Шеїна Г.О. – к.т.н, доц. каф. електронної техніки.

Рецензент: Лактіонов І.С. – професор, д.т.н., зав. каф. автоматики та телекомунікацій.

Відповідальний за випуск: Вовна О.В. – завідувач кафедри електронної техніки, д.т.н., професор.

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ,
протокол № 10 від 31.05.2022 р.

Розглянуто на засіданні кафедри електронної техніки,
протокол № 11 від 30.05.2022 р.

© ДонНТУ, 2022 рік

ЗМІСТ

ВСТУП	4
Тема 1. Електричне поле	5
1.1 Теоретичні положення	5
1.2 Практична частина	9
Індивідуальні завдання до теми 1	70
Тема 2. Електричне поле в провідному середовищі	76
2.1 Теоретичні положення	76
2.2 Практична частина	77
Індивідуальні завдання до теми 2	98
Тема 3. Магнітне поле постійного струму	102
3.1 Теоретичні положення	102
3.2 Практична частина	104
Індивідуальні завдання до теми 3	146
4. Порядок оформлення розрахункової роботи	151
Список рекомендованої літератури	152

ВСТУП

Електромагнітне поле – це вид матерії, що є носієм електромагнітної енергії та характеризується силовим впливом на нерухомі та рухомі заряди. Воно складається з взаємопов'язаних електричного та магнітного полів. У ряді випадків кожне з цих полів може існувати окремо.

Електричне поле – одна зі сторін електромагнітного поля, створюваного електричними зарядами або магнітним полем, що змінюється, що характеризується силовим впливом на електричні заряди. Електричне поле визначається та вимірюється за силовим впливом на нерухомі заряди.

Магнітне поле – одна із сторін електромагнітного поля, створюваного рухомими електричними зарядами або електричним полем, що змінюється, що характеризується силовим впливом на заряди, що рухаються (провідник зі струмом).

Теорія електромагнітного поля є важливою для розуміння фізичних процесів, які виникають в багатьох електротехнічних пристроях.

У даних методичних вказівках поєднані основні теоретичні положення теорії електромагнітного поля та приклади розв'язання задач. До кожного розділу викладається теорія, потім надається розбір типових завдань. Після цього для можливості самостійного оволодіння матеріалом приводяться індивідуальні завдання у відповідності з варіантом.

Мета даних методичних вказівок – сформувати наступні уміння:

- розуміння фізичних процесів, які виникають в електротехнічних пристроях;
- вміння формувати математичну модель електротехнічних пристроїв;
- вміння розраховувати процеси в електротехнічних пристроях та аналізувати отримані результати.

ТЕМА 1. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ

1.1 Теоретичні положення

Нерухомі електричні заряди створюють *електричне поле* (*електростатичне поле*), що є незмінним у часі. Вплив магнітного поля виключається, так як магнітне поле діє лише на рухомі заряди, і не впливає на нерухомі електричні заряди.

Вибір системи відліку, де всі вільні тіла рухаються прямолінійно та рівномірно або спочивають, не впливає на заряд тіла. Заряд є інваріантним, так як інваріантним є відношення зарядів у системах відліку.

Якщо заряд нерухомий в одній системі відліку, то в іншій системі відліку, що рухається відносно першої, цей заряд буде рухомий. У першій системі відліку на заряд діє сила \vec{F} , що є лише електричною, а в другій системі відліку на заряд діє сила \vec{F} , що складається з електричних і магнітних сил.

Вибір системи відліку впливає на поділ полів на електричне та магнітне. Тому теорія електромагнітних полів є *релятивістською*.

Напруженість електричного поля \vec{E} [Н/м] – це сила, що діє на одиничний нерухомий електричний заряд q [Кл]. Для характеристики електричного поля застосовують силові лінії. Вони починаються на позитивних зарядах, закінчуються на негативних зарядах, їх дотичні в будь-якій точці співпадають з напрямком вектору \vec{E} , а щільність цих ліній відповідає величині напруженості \vec{E} електричного поля.

Сила \vec{F} [Н], що діє на нерухомий точковий заряд q в електричному полі з напруженістю \vec{E} , визначається:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}. \quad (1.1)$$

Сила \vec{F}_{12} , що діє на точковий заряд q_2 з боку точкового заряду q_1 (закон Кулона) в залежності від радіус-вектору \vec{r}_{12} визначається:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 (\vec{r}_{12})^2}, \quad (1.2)$$

$$\text{де } \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot c^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ м/с.}$$

Для лінійних τ , поверхневих σ та об'ємних ρ зарядів справедливі такі співвідношення:

$$\tau = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum q}{l} = \frac{dq}{dl}; \quad \sigma = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\sum q}{S} = \frac{dq}{dS}; \quad \rho = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\sum q}{V} = \frac{dq}{dV}. \quad (1.3)$$

Для опису властивостей електростатичного поля вводиться поняття *потіку вектору* Φ – це потік вектору напруженості електричного поля \vec{E} через нескінченно малу площадку $d\vec{S}$:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (1.4)$$

Якщо розглянути довільну замкнуту поверхню S , позитивна нормаль до якої направлена зовні \vec{n} , то потік вектору напруженості Φ електричного поля крізь замкнуту поверхню S дорівнює відношенню сумарного електричного заряду q , що знаходиться всередині цієї поверхні S (теорема Гауса для напруженості електричного поля \vec{E}):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (1.5)$$

У диференційній формі теорема Гауса приймає вигляд:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{або} \quad \nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (1.6)$$

Систему з двох точкових зарядів, що дорівнюються між собою за величиною, але протилежні за напрямом (*електричний диполь*) характеризують за допомогою електричного моменту диполя (*дипольний момент*) \bar{p} :

$$\bar{p} = q \cdot \bar{l}, \quad (1.7)$$

де \bar{l} – радіус вектор, що спрямований від від’ємного заряду до позитивного.

Напруженість електричного поля \bar{E} в точці вздовж осі диполя ($\bar{E} \parallel \bar{p}$) на відстані r визначається:

$$\bar{E}_{\parallel} = \frac{2q \cdot \bar{l}}{r^3} = \frac{2\bar{p}}{r^3}.$$

Для точки, що перпендикулярна осі диполя ($\bar{E} \perp \bar{p}$):

$$\bar{E}_{\perp} = -\frac{q \cdot \bar{l}}{r^3} = -\frac{\bar{p}}{r^3}.$$

Вектор поляризованості діелектрика визначається:

$$\bar{P} = \chi \varepsilon_0 \bar{E}, \quad (1.8)$$

де χ – безрозмірна величина, діелектрична сприйнятливість речовини.

Вектор електричної індукції \bar{D} :

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}. \quad (1.9)$$

Теорема Гауса для поля вектору електричної індукції \bar{D} :

$$\oint \bar{D} \cdot d\bar{S} = q. \quad (1.10)$$

В диференційній формі теорема Гауса для вектору електричної індукції \bar{D} :

$$\operatorname{div} \bar{D} = \rho \quad \text{або} \quad \nabla \cdot \bar{D} = \rho. \quad (1.11)$$

Потенціал φ [В] – скалярна величина, що визначає роботу сил поля під час переміщення одиничного позитивного заряду з точки 1 до точки 2, і яка не залежить від шляху між цими точками:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}. \quad (1.12)$$

Різниця потенціалів – це напруга між двома точками: $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$.

Напруженість електричного поля визначається через потенціал за такою залежністю:

$$\bar{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \bar{k} \right) \quad \text{або} \quad \bar{E} = -\nabla \varphi. \quad (1.13)$$

З наведених вище рівнянь (1.6) і (1.13) може бути отримано рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.14)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.15)$$

1.2 Практична частина

Приклад 1.1. Точковий заряд, циліндричний заряд. Необхідно отримати формули для визначення потоку вектору електростатичної індукції \vec{D} :

а) від точкового заряду q через сферичну поверхню радіусу R ;

б) лінійного заряду τ через циліндричну поверхню радіусу r .

Спочатку визначимо замкнену поверхню. Для випадку а) проведемо навколо точкового заряду q сферичну поверхню S радіусу R (див. рис. 1.1).

Далі застосуємо теорему Гауса для поля вектору електричної індукції \vec{D} (1.10):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

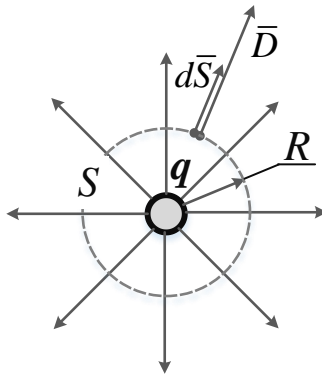


Рисунок 1.1 – Електростатичне поле від точкового заряду

Оскільки заряд симетричний, то силові лінії направлено радіально та перпендикулярно до поверхні S . Таким чином, вектор індукції електричного поля \vec{D} співпадає за напрямком з вектором $d\vec{S}$, а їх скалярний добуток буде визначатися добутком їх модулів.

Крім того, через симетричність заряду значення вектору \vec{D} буде однакове у всіх рівновіддалених від заряду q точках поверхні S . Його значення, як постійна величина, виноситься за знак інтегралу:

$$q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D \cdot dS \cdot \underbrace{\cos(\angle \vec{D}, d\vec{S})}_{\cos(0^\circ)=1} = D \oint_S dS = D \cdot S_{\text{сфера}} = D \cdot 4\pi R^2.$$

Значення індукції D та напруженості E електричного поля точкового заряду q на відстані R визначаються за такими формулами:

$$D = \frac{q}{4\pi \cdot R^2}; \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot R^2}. \quad (1.16)$$

Аналогічно виконано для випадку б. Проведено навколо осі з лінійним зарядом τ циліндричну поверхню S радіусом r довжиною l та застосовано теорему Гауса для поля вектору електричної індукції \vec{D} (1.10)

$$q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}.$$

Для випадку б) у схемі на рис. 1.1 необхідно замінити q на τ , і R на r , ось z направити перпендикулярно до площини рисунку.

Припустимо, що довжина об'єкту l значно більше його радіусу r : $l \gg r$. Це дозволяє знехтувати викривленням плоскопаралельного поля вздовж торців циліндра S і вважати, що силові лінії вектору \vec{D} скрізь направлені радіально.

Для торцевих частин циліндричної поверхні кут між векторами \vec{D} і $d\vec{S}$ дорівнює 90° , тому $\cos(\angle \vec{D}, d\vec{S}) = 0$, а потік вектору \vec{D} через торцеві частини буде дорівнювати нулю. У всіх точках бокових частин циліндричної поверхні вектори \vec{D} і \vec{S} за напрямком співпадають, тому їх скалярний добуток замінюється добутком модулів. Крім того, значення вектору \vec{D} в усіх рівновіддалених від осі z точках бокової частини поверхні S однакове, його значення, як постійна величина, виноситься за знак інтегралу:

$$q = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{\text{бок}}} D \cdot dS \cdot \underbrace{\cos(\angle \vec{D}, d\vec{S})}_{\cos(0^\circ)=1} = D \cdot S_{\text{бок}} = D \cdot \underbrace{2\pi \cdot r \cdot l}_{S_{\text{бок}}}.$$

Значення індукції D та напруженості E електричного поля зарядженої осі з лінійним зарядом τ на відстані r визначаються за формулами:

$$D = \frac{q}{2\pi \cdot r \cdot l} = \frac{\tau}{2\pi \cdot r}; \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{2\pi \cdot \varepsilon_a \cdot r \cdot l} = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_a \cdot r}. \quad (1.17)$$

Відповідь: а) $q = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = D 4\pi R^2$;

б) $q = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = D 2\pi r l$.

Приклад 1.2. Плaskий конденсатор. Необхідно визначити формули для розрахунку поля та ємності плаского конденсатора, де S – площа пластини, d – відстань між ними (див. рис. 1.2).

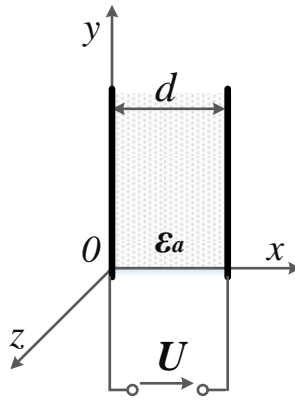


Рисунок 1.2 – Схема для розрахунку поля плаского конденсатора

Так як площа пластини S значно більше відстані d між ними, то поле між пластинами можна вважати рівномірним.

Диференціальна форма теореми Гауса для вектору електричної індукції \vec{D} (1.11)

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

і властивість потенційності електростатичного поля, яка виражається теоремою про циркуляцію вектору електричної напруженості \vec{E} ,

$$\text{rot } \vec{E} = 0$$

дають уявлення про граничні умови для плаского конденсатора. Для тангенціальної складової вектору \vec{E} : $E_{\tau} = 0$. Для проекції вектору електростатичної індукції \vec{D} на нормаль \vec{n} : $D_n = \sigma$, де σ – поверхневий заряд (1.3).

Якщо прийняти заряд конденсатора q , то величина вектору електростатичної індукції:

$$D = \sigma = \frac{q}{S}.$$

Напруженість електричного поля E однозначно визначається через електричну індукцію D :

$$E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{S \cdot \varepsilon_a},$$

де ε_a – абсолютна діелектрична проникність середовища.

Зауважимо, що напруга на конденсаторі буде визначатися через напруженість електричного поля E :

$$U = E \cdot d = \frac{q \cdot d}{S \cdot \varepsilon_a}.$$

З попереднього виразу випливає, що ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{S \cdot \varepsilon_a}{d}.$$

Потенціал $\varphi(x)$ визначається за співвідношенням:

$$\vec{E} = -grad(\varphi).$$

В системі координат Декарта

$$grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

Якщо початок координат поєднати з лівою пластиною, а координату x направити вправо, то потенціал φ буде залежати тільки від однієї координати x :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Вектор \bar{E} буде направлений вздовж осі Ox , тому

$$\bar{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Для потенціалу $\varphi(x)$ остаточно отримуємо:

$$\varphi = -\int \bar{E} dx = -E x + const. \quad (1.18)$$

Якщо конденсатор багат шаровий, то ємність кожного шару:

$$C_i = \frac{S \cdot \varepsilon_{ai}}{d_i}, \quad (1.19)$$

напруга на кожному шарі:

$$U_i = \frac{q}{C_i},$$

напруженість поля кожного шару:

$$E_i = \frac{U_i}{d_i} = \frac{q}{C_i \cdot d_i}.$$

Загальна ємність всього конденсатору визначається послідовним з'єднанням ємності шарів:

$$C = \left(\sum \frac{1}{C_i} \right)^{-1}.$$

Відповідь: $D = \frac{q}{S}$, $E = \frac{q}{S \cdot \varepsilon_a}$, $U = \frac{q \cdot d}{S \cdot \varepsilon_a}$, $C = \frac{S \cdot \varepsilon_a}{d}$.

Приклад 1.3. Кульовий конденсатор. Визначити формули для розрахунку поля й ємності кульового конденсатора (рис. 1.3), в якого внутрішній та зовнішній радіуси діелектричного шару відповідно складають r_1 і R_1 , а діелектрична проникність – ε_a .

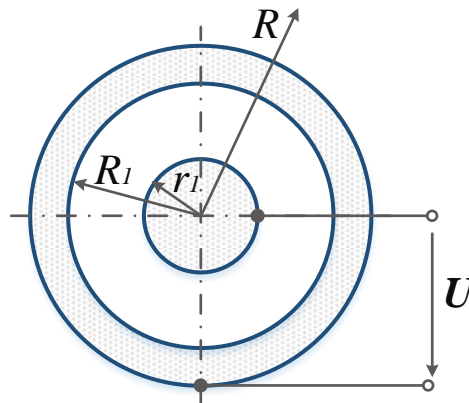


Рисунок 1.3 – Схема для розрахунку поля кульового конденсатора

Нехай конденсатор має заряд q . Для розрахунку поля застосовуємо теорему Гауса для поля вектору електричної індукції \vec{D} (1.10)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q.$$

На основі формули (1.16)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 4\pi \cdot R^2 = q$$

тоді

$$D = \frac{q}{4\pi \cdot R^2}; \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot R^2}.$$

Потенціал $\varphi(R)$ визначається за співвідношенням $\vec{E} = -grad(\varphi)$. В сферичній системі координат (рис. 1.4)

$$grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \vec{R}_0 + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \cdot \vec{\theta}_0 + \frac{1}{R \cdot \sin(\theta)} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot \vec{\alpha}_0.$$

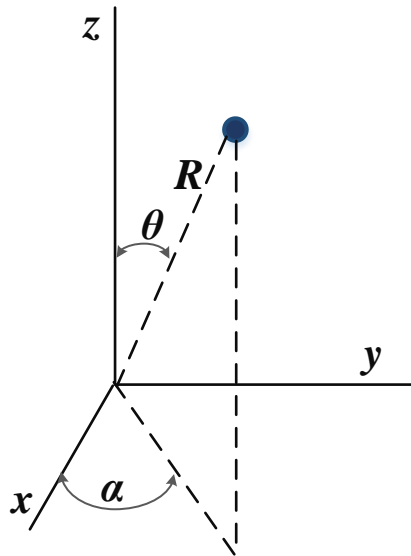


Рисунок 1.4 – Позначення сферичної системи координат

Очевидно, що потенціал φ залежить тільки від однієї координати R , а

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \text{ і } \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0.$$

Вектор \vec{E} направлений вздовж осі OR , тому маємо

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial R}.$$

Звідси

$$\varphi = -\int \vec{E} dR = -\int \frac{q}{4\pi \varepsilon_a R^2} dR = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a R} + A. \quad (1.20)$$

Потенціал зовнішньої оболонки $\varphi = 0$ при $R = R_1$, тому $A = \frac{-q}{4\pi \varepsilon_a R_1}$.

Формула для потенціалу:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Напруга прикладена до конденсатора:

$$U = \varphi(R = r_1) - \varphi(R = R_1) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_1} \right).$$

Ємність одношарового конденсатору:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi \varepsilon_a}{(1/r_1 - 1/R_1)}.$$

Якщо конденсатор має декілька шарів, то ємність кожного шару:

$$C_i = \frac{4\pi \varepsilon_{ai}}{(1/r_i - 1/R_i)}; \quad (1.21)$$

напруга на кожному шарі:

$$U_i = \frac{q}{C_i};$$

напруженість поля у кожному шарі:

$$E_i = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_{ai} \cdot R^2}.$$

Ємність всього конденсатору:

$$C = \left(\sum \frac{1}{C_i} \right)^{-1}.$$

$$\text{Відповідь: } D = \frac{q}{4\pi \cdot R^2}, \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_a \cdot R^2}, \quad \varphi(R) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right),$$

$$C_i = \frac{4\pi \varepsilon_{ai}}{(1/r_i - 1/R_i)}.$$

Приклад 1.4. Циліндричний конденсатор. Визначити формули для розрахунку поля й ємності циліндричного конденсатору (рис. 1.5), в якого внутрішній та зовнішній радіуси діелектричного шару – r_1 і R_1 , довжина l , діелектрична проникність – ε_a .

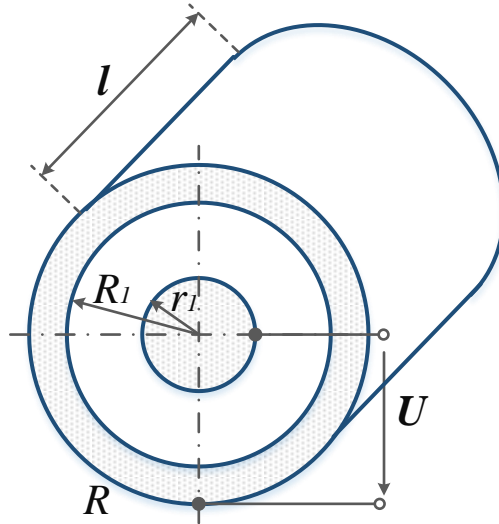


Рисунок 1.5 – Схема для розрахунку поля циліндричного конденсатора

Нехай циліндричний конденсатор має заряд q . Далі застосуємо теорему Гауса для поля вектору електричної індукції \bar{D} (1.10):

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = q.$$

На основі формули (1.17)

$$\oint_S \bar{D} d\bar{S} = q = D 2\pi r l,$$

тоді $D = \frac{q}{2\pi \cdot r \cdot l}, E = \frac{D}{\epsilon_a} = \frac{q}{2\pi \cdot \epsilon_a \cdot r \cdot l}.$

Потенціал $\varphi(r)$ визначається за співвідношенням: $\bar{E} = -grad(\varphi)$. В циліндричній системі координат (рис. 1.6):

$$grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \bar{r}_0 + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot \bar{\alpha}_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \bar{z}_0.$$

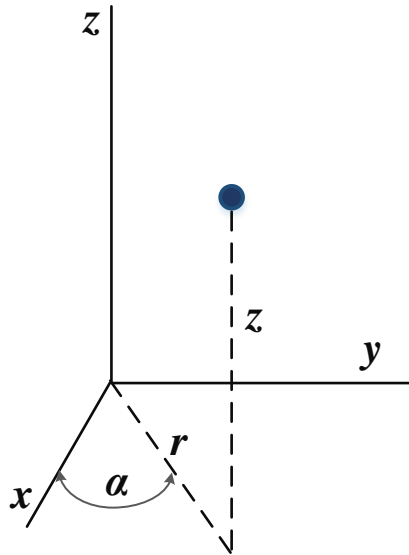


Рисунок 1.6 – Позначення циліндричної системи координат

Очевидно, що потенціал φ залежить тільки від однієї координати r , а

$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$ і $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Вектор \vec{E} направлений вздовж осі Or , тому маємо:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Звідси

$$\varphi = -\int \vec{E} dr = -\int \frac{q}{2\pi \varepsilon_a r l} dr = \frac{-q}{2\pi \varepsilon_a l} \ln r + A. \quad (1.22)$$

Потенціал зовнішньої оболонки $\varphi = 0$ при $r = R_1$, тому $A = \frac{q}{2\pi \varepsilon_a l} \ln R_1$.

Формула для потенціалу:

$$\varphi = \frac{q}{2\pi \varepsilon_a l} \cdot \ln \frac{R_1}{r}.$$

Напруга, прикладена до конденсатора:

$$U = \varphi(r = r_1) - \varphi(r = R_1) = \frac{q}{2\pi \varepsilon_a l} \cdot \ln\left(\frac{R_1}{r_1}\right).$$

Ємність одношарового конденсатору:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi \varepsilon_a l}{\ln(R_1/r_1)}.$$

Якщо конденсатор має декілька шарів, то ємність кожного шару:

$$C_i = \frac{2\pi \varepsilon_a l}{\ln(R_i/r_i)}; \quad (1.23)$$

напруга на кожному шарі:

$$U_i = \frac{q}{C_i};$$

напруженість поля у кожному шарі:

$$E_i = \frac{q}{2\pi \cdot \varepsilon_{ai} \cdot l \cdot r}.$$

Ємність всього конденсатору:

$$C = \left(\sum \frac{1}{C_i} \right)^{-1}.$$

$$\text{Відповідь: } D = \frac{q}{2\pi \cdot r \cdot l}, \quad E = \frac{D}{\varepsilon_a} = \frac{q}{2\pi \cdot \varepsilon_a \cdot r \cdot l}, \quad \varphi = \frac{q}{2\pi \varepsilon_a l} \cdot \ln \frac{R_1}{r},$$

$$C = \frac{2\pi \varepsilon_a l}{\ln(R_1/r_1)}.$$

Приклад 1.5. Принцип накладення. Визначити напруженість \bar{E} електричного поля, яке створене двома зарядами в місці розташування третього; і силу \bar{F} , що діє на третій заряд, в системі точкових зарядів, зображених на рис. 1.7, де $q_a = 4 \cdot 10^{-12}$ Кл, $q_b = 15 \cdot 10^{-12}$ Кл, $q_c = 15 \cdot 10^{-12}$ Кл.

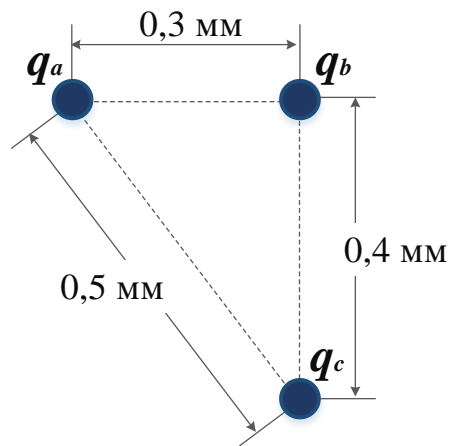


Рисунок 1.7 – Схема розташування зарядів

Напруженість \bar{E} електростатичного поля, яке створюється одним точковим зарядом у вакуумі, визначається за допомогою формули (1.1) і законом Кулона (1.2):

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0 r^2}.$$

В точці розташування заряду q_c заряди q_a і q_b створюють напруженість \bar{E} електричного поля, що визначаються відповідно (рис. 1.7):

$$E' = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0|l_{ac}|^2} = \frac{4 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})^2} = 143,9 \cdot 10^3 \frac{H}{м} = 143,9 \frac{\kappa H}{м};$$

$$E'' = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0|l_{bc}|^2} = \frac{15 \cdot 10^{-12}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (0,4 \cdot 10^{-3})^2} = 843,0 \cdot 10^3 \frac{H}{м} = 843,0 \frac{\kappa H}{м}.$$

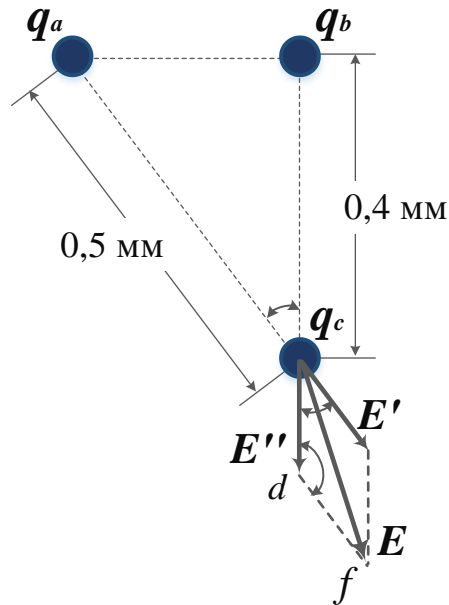


Рисунок 1.8 – Схема для застосування принципу накладення

Кут при вершині c трикутника abc :

$$\cos(\angle acb) = \frac{0,4}{0,5} = 0,8;$$

$$\angle acb = \arccos(0,8) = 36,87^\circ \approx 36,9^\circ.$$

Кут при вершині d трикутника cdf визначається на основі властивості пари односторонніх кутів, утворених січною паралельних прямих:

$$\angle cdf = 180 - 36,9 = 143,1^\circ.$$

Відповідно до принципу накладення, результуючий вектор напруженості \vec{E} електричного поля визначається векторною сумою (рис. 1.7):

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}''.$$

За теоремою косинусів:

$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= \sqrt{(\vec{E}')^2 + (\vec{E}'')^2 - 2 \cdot |\vec{E}'| \cdot |\vec{E}''| \cdot \cos(\angle cdf)} = \\ &= \sqrt{(143,9)^2 + (843,0)^2 - 2 \cdot |143,9| \cdot |843,0| \cdot \cos(143,1^\circ)} = 961,96 \frac{\kappa H}{м} \approx 962 \frac{\kappa H}{м}. \end{aligned}$$

Сила, що діє на заряд q_c , у відповідності з визначенням напруженості електростатичного поля:

$$F = q_c \cdot E = 15 \cdot 10^{-12} \cdot 962 \cdot 10^3 = 14,4 \cdot 10^{-6} \text{ Н}.$$

Відповідь: $E = 962 \frac{\kappa H}{м}$; $F = 14,4 \cdot 10^{-6} \text{ Н}$.

Приклад 1.6. Принцип накладення. Дві кулі радіусами $R_1=0,2$ см і $R_2=0,5$ см знаходяться на відстані $d=20$ см в діелектрику з відносною проникністю $\varepsilon=4$ (рис. 1.9). Заряди куль величиною $q=10^{-10}$ Кл різного знаку. Знайти енергію поля і найбільшу напруженість.

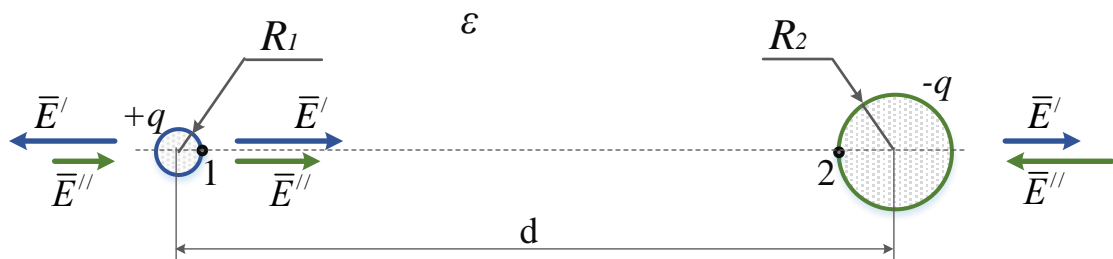


Рисунок 1.9 – Схема розташування зарядів

Для спрощення математичних розрахунків приймаємо, що геометричні та електричні центри куль збігаються, так як відстань d між кулями значно перевищує радіуси куль: $d \gg R_1$, $d \gg R_2$.

На рис. 1.9 позначимо величину напруженості, що створюється кулею із зарядом $+q$, як \bar{E}' , а ту, що створюється зарядом $-q$, як \bar{E}'' . Якщо врахувати напрямки силових ліній, які починаються лише на позитивних зарядах, а закінчуються лише на негативних зарядах, то між кулями напруженості \bar{E}' і \bar{E}'' складаються, а зовні – віднімаються.

Очевидно, що найбільше значення напруженості електричного поля буде між кулями. З віддаленням від центру кулі напруженість поля зменшується, отже, максимальне значення напруженості – в точці на поверхні кулі.

Перша куля має менший радіус (менше віддалення від центру точок його поверхні), тому найбільша напруженість поля буде в точці 1 (рис. 1.9). Для розрахунку поля в цій точці можна застосувати принцип накладання. На підставі формул (1.1) і (1.2):

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1' + E_1'' = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R_1^2} + \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot d^2} = \\ &= \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4} \left(\frac{1}{(0,2 \cdot 10^{-2})^2} + \frac{1}{(20 \cdot 10^{-2})^2} \right) = 56,2 \cdot 10^3 \frac{B}{м} = 56,2 \frac{кВ}{м}. \end{aligned}$$

Потенціал поля однієї відокремленої кулі (див. задача 1.3, формула (1.20)):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi \varepsilon_a R} + A.$$

Якщо $\varphi=0$ при $R=\infty$, то $A=0$. Таким чином, потенціали куль рівні:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \varphi_1' + \varphi_1'' = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R_1} + \frac{-q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot d} = \\ &= \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4} \left(\frac{1}{0,2 \cdot 10^{-2}} + \frac{-1}{20 \cdot 10^{-2}} \right) = 111,27 \text{ В}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \varphi_2' + \varphi_2'' = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot d} + \frac{-q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R_2} = \\ &= \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4} \left(\frac{1}{20 \cdot 10^{-2}} + \frac{-1}{0,5 \cdot 10^{-2}} \right) = -43,84 \text{ В}.\end{aligned}$$

Напруга між кулями:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = 111,27 - (-43,84) = 155,11 \text{ В}.$$

Ємність пристрою:

$$C = \frac{q}{U_{12}} = \frac{10^{-10}}{155,11} = 0,645 \cdot 10^{-12} \text{ Ф}.$$

Потенційна енергія поля:

$$W = C \frac{U_{12}^2}{2} = 0,645 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{155,11^2}{2} = 7,76 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}.$$

$$\text{Відповідь: } E_1 = 56,19 \frac{\text{кВ}}{\text{м}}; W = 7,76 \cdot 10^{-9} \text{ Дж}.$$

Приклад 1.7. Плaskий конденсатор. Рівняння Пуассона і Лапласа. Дві провідні пластини розділені трьома шарами діелектрика з діелектричними проникностями $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$ та $\varepsilon_3 = 3$. Товщина шарів діелектрика: $d_1 = 1$ см, $d_2 = 2$ см та $d_3 = 3$ см (рис. 1.10). Пристрій підключений до джерела постійної напруги $U = 1000$ В.

Область першого діелектрика заповнена вільним зарядом із рівномірною щільністю $\rho = 10^{-10}$ Кл/см³.

Побудувати графіки зміни напруженості електростатичного поля та потенціалу залежно від координат простору, вважаючи заземленою праву пластину.

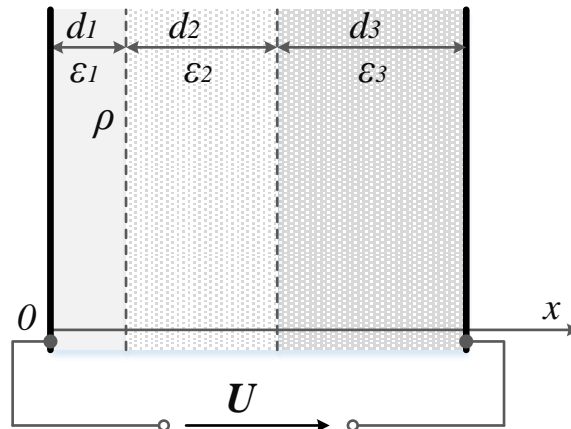


Рисунок 1.10 – Схема плоского конденсатора

Розподіл потенціалу φ у просторі підпорядковується диференціальному рівнянню Пуассона (1.14):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \text{ або } 0.$$

Для межі пластина - пластина зручно користуватися декартовою системою координат, для якої оператор Лапласа (1.15):

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Зауважимо, що в даній задачі потенціал φ залежить тільки від однієї координати x , тобто $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Таким чином, для трьох різних областей отримуємо:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} & 0 \leq x \leq d_1 \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = 0 & d_1 \leq x \leq d_1 + d_2 \\ \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = 0 & d_1 + d_2 \leq x \leq d_1 + d_2 + d_3 \end{cases}$$

Дворазове інтегрування дає:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= -\frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_2; \\ \varphi_2(x) &= A_3 \cdot x + A_4; \\ \varphi_3(x) &= A_5 \cdot x + A_6. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Для напруженості аналогічно (1.18) отримуємо:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot x - A_1; \\ E_2(x) &= -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = -A_3; \\ E_3(x) &= -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = -A_5. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Постійні інтегрування знаходимо, використовуючи граничні умови.

При $x = 0$ згідно (1.24) потенціал $\varphi_1(0) = U$ (потенціал лівої пластини):

$$\varphi_1(0) = -\frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_2 = A_2 = U ;$$

$$A_2 = U . \quad (*)$$

При $x = d_1$ згідно (1.24) потенціал $\varphi_1(d_1) = \varphi_2(d_1)$:

$$-\frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot (d_1)^2 + A_1 \cdot d_1 + A_2 = A_3 \cdot d_1 + A_4 ;$$

$$A_1 \cdot d_1 + A_2 - A_3 \cdot d_1 - A_4 = \frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot d_1^2 . \quad (*)$$

При $x = d_1 + d_2$ згідно (1.24) потенціал $\varphi_2(d_1 + d_2) = \varphi_2(d_1 + d_2)$:

$$A_3 \cdot (d_1 + d_2) + A_4 = A_5 \cdot (d_1 + d_2) + A_6 \quad (*)$$

При $x = d_1 + d_2 + d_3$ згідно (1.24) потенціал $\varphi_3 = 0$ (потенціал правої пластини):

$$\varphi_3(d_1 + d_2 + d_3) = A_5 \cdot (d_1 + d_2 + d_3) + A_6 = 0 ;$$

$$A_5 \cdot (d_1 + d_2 + d_3) + A_6 = 0 . \quad (*)$$

На межі двох діелектриків при відсутності сторонніх зарядів існують наступні граничні умови для нормальних складових векторів електростатичної індукції D_n і тангенціальних складових векторів електричної напруженості E_t :

$$D_{1n} = D_{2n} ; \quad E_{1t} = E_{2t} .$$

Для умов даної задачі вектори \overline{D} і \overline{E} спрямовані за віссю Ox , тому вони мають тільки нормальні складові: $E_\tau = 0$.

При $x = d_1$ згідно (1.25) граничні умови векторів електростатичної індукції \overline{D} :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 \cdot E_1 &= \varepsilon_2 \cdot E_2; \\ \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot d_1 - \varepsilon_1 \cdot A_1 &= -\varepsilon_2 \cdot A_3.\end{aligned}\quad (*)$$

При $x = d_1 + d_2$ згідно (1.25)

$$\begin{aligned}\varepsilon_2 \cdot E_2 &= \varepsilon_3 \cdot E_3; \\ -\varepsilon_2 \cdot A_3 &= -\varepsilon_3 \cdot A_5.\end{aligned}\quad (*)$$

Шість рівнянь (*) утворюють систему, вирішуючи яку, знаходимо постійні інтегрування:

$$\left\{ \begin{aligned} A_2 &= U; \\ A_1 \cdot d_1 + A_2 - A_3 \cdot d_1 - A_4 &= \frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot d_1^2; \\ A_3 \cdot (d_1 + d_2) + A_4 - A_5 \cdot (d_1 + d_2) - A_6 &= 0; \\ A_5 \cdot (d_1 + d_2 + d_3) + A_6 &= 0; \\ -\varepsilon_1 \cdot A_1 + \varepsilon_2 \cdot A_3 &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot d_1; \\ -\varepsilon_2 \cdot A_3 + \varepsilon_3 \cdot A_5 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Перетворення системи до виду $A \cdot X = B$:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = U; \\ A_1 \cdot d_1 + A_2 + A_3 \cdot (-d_1) - A_4 = \frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot d_1^2; \\ \quad + A_3 \cdot (d_1 + d_2) + A_4 - A_5 \cdot (d_1 + d_2) - A_6 = 0; \\ \quad \quad + A_5 \cdot (d_1 + d_2 + d_3) + A_6 = 0; \\ A_1 \cdot (-\varepsilon_1) + A_3 \cdot \varepsilon_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot d_1; \\ \quad + A_3 \cdot (-\varepsilon_2) + A_5 \cdot \varepsilon_3 = 0. \end{array} \right.$$

Значення матриць після підстановки значень:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.01 & 1 & -0.01 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.03 & 1 & -0.03 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.06 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \times 10^3 \\ 564.972 \\ 0 \\ 0 \\ -1.13 \times 10^5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рішення системи має вигляд:

$$x = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 6.083 \times 10^4 \\ 1 \times 10^3 \\ -2.608 \times 10^4 \\ 1.304 \times 10^3 \\ -1.739 \times 10^4 \\ 1.043 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = 60830, A_2 = 1000, A_3 = -26080, A_4 = 1304, A_5 = -17390, A_6 = 1043.$$

Система (1.24) для потенціалу φ (В) набуває вигляд (залежність на рис. 1.11, а):

$$\varphi_1(x) = -5,65 \cdot 10^6 \cdot x^2 + 60830 \cdot x + 1000;$$

$$\varphi_2(x) = -26080 \cdot x + 1304;$$

$$\varphi_3(x) = -17390 \cdot x + 1043.$$

Система (1.25) для напруженості E (В/м) набуває вигляд (залежність на рис. 1.11, б):

$$E_1(x) = 1,13 \cdot 10^7 \cdot x - 60830;$$

$$E_2(x) = -26080;$$

$$E_3(x) = -17390.$$

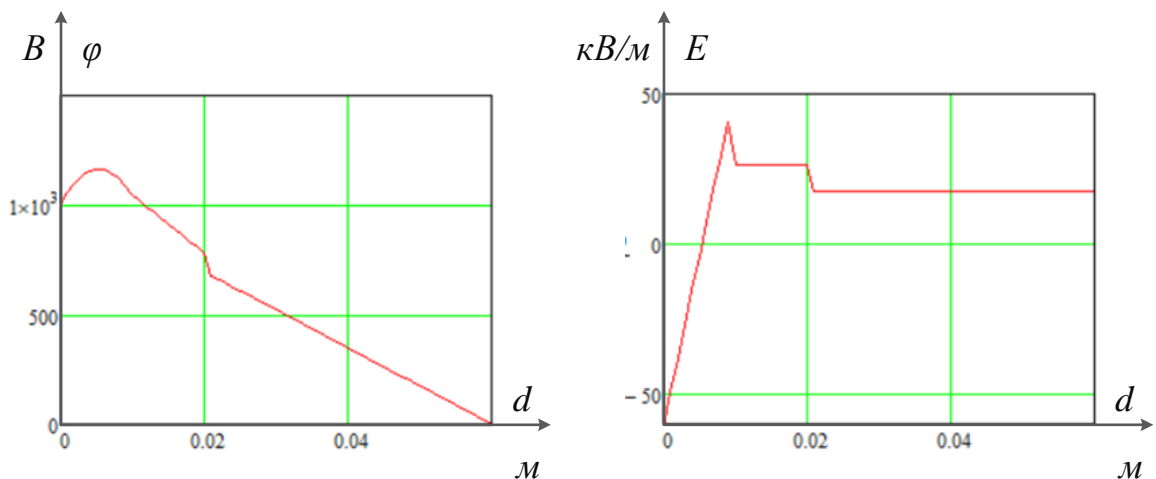


Рисунок 1.11 – Графіки залежності потенціалу φ і напруженості E

Відповідь:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1 = -5,65 \cdot 10^6 \cdot x^2 + 60830 \cdot x + 1000, & B & 0 \leq x \leq d_1 \\ \varphi_2 = -26080 \cdot x + 1304, & B & d_1 \leq x \leq d_1 + d_2 \\ \varphi_3 = -17390 \cdot x + 1043, & B & d_1 + d_2 \leq x \leq d_1 + d_2 + d_3 \end{cases}$$

$$E(x) = \begin{cases} E_1 = 11,3 \cdot 10^6 \cdot x - 60830, & B / m & 0 \leq x \leq d_1 \\ E_2 = 26080, & B / m & d_1 \leq x \leq d_1 + d_2 \\ E_3 = 17390, & B / m & d_1 + d_2 \leq x \leq d_1 + d_2 + d_3 \end{cases}$$

Приклад 1.8. Промінь електронів. Рівняння Пуассона і Лапласа. Розрахувати поле циліндричного проміння електронів: $\rho = -10^{-10}$ Кл/см³, $\varepsilon = 2$, $d = 2$ мм. Завдання вирішити за допомогою рівнянь Пуассона та Лапласа.

Розподіл потенціалу φ у просторі підпорядковується диференціальному рівнянню Пуассона (1.14):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \text{ або } 0.$$

Для циліндричного проміння електронів зручно користуватися циліндричною системою координат (рис. 1.6), для якої оператор Лапласа записується як:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

Зауважимо, що в даній задачі потенціал φ залежить тільки від однієї координати r , тобто $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Таким чином, для двох різних областей отримуємо:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}; & \text{якщо } 0 \leq r \leq \frac{d}{2} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) = 0; & \text{якщо } r \geq \frac{d}{2} \end{cases}$$

Дворазове інтегрування дає:

$$\begin{cases} \varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} r^2 + A_1 \cdot \ln(r) + A_2; \\ \varphi_2(r) = A_3 \cdot \ln(r) + A_4. \end{cases}$$

Складова $A_1 \cdot \ln(r)$ через наявність логарифмічної функції при $r=0$ не визначена, тому для існування функції $\varphi_1(0)$ постійна інтегрування $A_1 = 0$. Якщо прийнемо, що $\varphi_1=0$ при $r=0$, то $A_2 = 0$ і

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4 \varepsilon \varepsilon_0} r^2 = -\frac{-10^{-10} \cdot 10^6}{4 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot r^2 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2.$$

Для напруженості

$$\bar{E} = -grad \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \bar{r}_0 - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot \bar{\alpha}_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \bar{z}_0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \bar{r}_0.$$

Таким чином

$$\begin{cases} E_1(r) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\rho}{4 \varepsilon \varepsilon_0} r^2 \right) = \frac{\rho}{2 \varepsilon \varepsilon_0} r = \frac{-10^{-10} \cdot 10^6}{2 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot r = -2,825 \cdot 10^6 \cdot r; \\ E_2(r) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (A_3 \cdot \ln(r) + A_4) = -\frac{A_3}{r}. \end{cases}$$

На межі проміння електронів при відсутності сторонніх зарядів існують наступні граничні умови для нормальних складових векторів електростатичної індукції D_n і тангенціальних складових векторів електричної напруженості E_t :

$$D_{1n} = D_{2n}; \quad E_{1t} = E_{2t}.$$

Для умов даної задачі вектори \vec{D} і \vec{E} спрямовані за віссю Or , тому вони мають тільки нормальні складові: $E_\tau = 0$. Для граничної умови $D_{\text{in}} = D_{\text{2n}}$:

$$\varepsilon_1 \cdot E_1 = \varepsilon_2 \cdot E_2.$$

Для умов даної задачі: $\varepsilon \cdot E_1 = E_2$.

Якщо врахувати, що $E_1(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0}r$ і $E_2(r) = -\frac{A_3}{r}$, то на межі проміння електронів, для величини радіуса $r = \frac{d}{2}$:

$$\varepsilon \cdot E_1(r) = E_2(r)$$

$$\varepsilon \frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \frac{d}{2} = -\frac{A_3}{d/2};$$

$$A_3 = -\frac{\rho}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = -\frac{-10^{-10} \cdot 10^6}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 = 5,65.$$

Визначена постійна A_3 дозволяє отримати рішення для напруженості електричного поля:

$$E_2(r) = -\frac{A_3}{r} = -\frac{5,65}{r}.$$

Так само на межі проміння електронів для величини потенціалу електричного поля $\varphi(r)$, коли радіус $r = \frac{d}{2}$:

$$\varphi_1(r) = \varphi_2(r);$$

$$1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2 = 5,65 \cdot \ln(r) + A_4;$$

$$A_4 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2 - 5,65 \cdot \ln(r) = 1,412 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2 - 5,65 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2}\right) = 40,44.$$

Остаточно залежність для потенціалу електричного поля проміння електронів:

$$\begin{cases} \varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} r^2 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2, \text{ В} & 0 \leq r \leq 0,001 \text{ м}; \\ \varphi_2(r) = 5,65 \cdot \ln(r) + 40,44, \text{ В} & r \geq 0,001 \text{ м}. \end{cases}$$

і напруженості електричного поля проміння електронів:

$$\begin{cases} E_1(r) = \frac{\rho}{2 \varepsilon \varepsilon_0} r = -2,825 \cdot 10^6 \cdot r, \text{ В/м} & 0 \leq r \leq 0,001 \text{ м}; \\ E_2(r) = -\frac{5,65}{r}, \text{ В/м} & r \geq 0,001 \text{ м}. \end{cases}$$

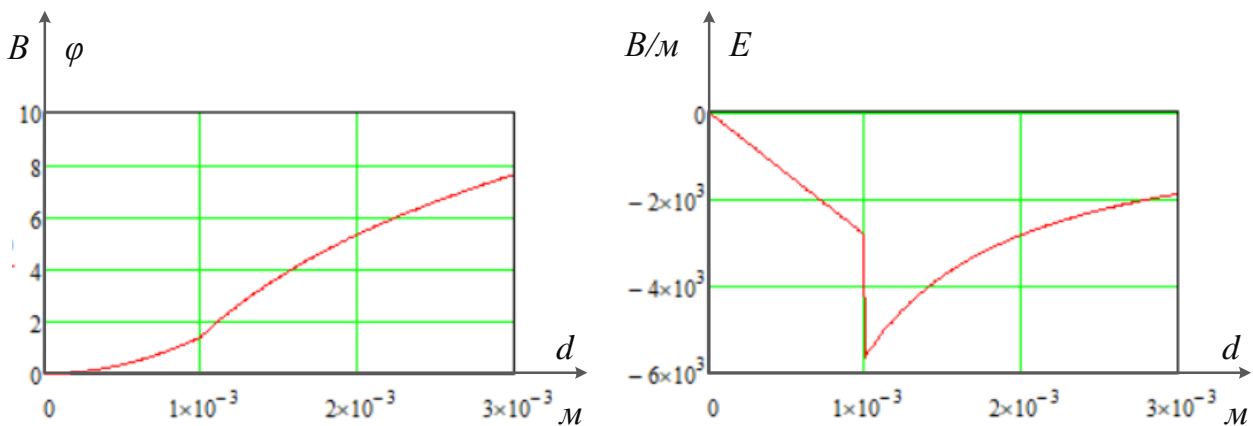


Рисунок 1.12 – Графіки залежності потенціалу φ і напруженості E

Відповідь:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \varphi_1 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2, \text{ В} & 0 \leq r \leq 0,001 \text{ м} \\ \varphi_2 = 5,65 \cdot \ln(r) + 40,44, \text{ В} & r \geq 0,001 \text{ м} \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} E_1 = -2,825 \cdot 10^6 \cdot r, \text{ В/м} & 0 \leq r \leq 0,001 \text{ м} \\ E_2 = -\frac{5,65}{r}, \text{ В/м} & r \geq 0,001 \text{ м} \end{cases}$$

Приклад 1.9. Промінь електронів. Теорема Гауса в інтегральній формі. Розв'язати задачу 1.8 за допомогою теореми Гауса в інтегральній формі.

Теорема Гауса для поля вектору електричної індукції \vec{D} (1.10):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q.$$

Ліва частина рівняння (1.10) в циліндричній системі координат згідно (1.17) визначається як:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot S_{\text{бок}} = D \cdot \underbrace{2\pi \cdot r \cdot l}_{S_{\text{бок}}}.$$

Права частина рівняння (1.10) в області $r \leq d/2$ визначається через об'ємну щільність заряду:

$$\sum q = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi r^2 \cdot l.$$

Для першої області, де $r \leq d/2$, виконується співвідношення $D \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \rho \cdot \pi r^2 \cdot l$, яке визначає електричну індукцію:

$$D_1(r) = \frac{\rho}{2} \cdot r.$$

Зв'язок між вектором електричної індукції \vec{D} та вектором електричної напруженості \vec{E} визначає останню:

$$E_1(r) = \frac{D_1(r)}{\varepsilon \varepsilon_0} = \frac{\rho}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot r.$$

Потенціал електричного поля визначається через напруженість:

$$\varphi_1(r) = -\int \bar{E} \cdot dr = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} \cdot r^2 + A_1.$$

Для визначення постійної інтегрування приймаємо потенціал $\varphi_1=0$ при $r=0$. Отримуємо $A_1=0$. Після підстановки числових значень маємо:

$$E_1(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0} \cdot r = \frac{-10^{-10} \cdot 10^6}{2 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot r = -2,825 \cdot 10^6 \cdot r, \frac{B}{m};$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon\varepsilon_0} \cdot r^2 = \frac{-10^{-10} \cdot 10^6}{4 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot r^2 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2, B.$$

В області поза зоною проміння електронів, коли $r > d/2$, виконується співвідношення $D \cdot 2\pi \cdot r \cdot l = \rho \cdot \pi \left(d/2\right)^2 \cdot l$, яке визначає електричну індукцію:

$$D_2(r) = \frac{\rho \cdot \left(d/2\right)^2}{2 \cdot r}.$$

Величина електричної напруженості:

$$E_2(r) = \frac{D_2(r)}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \left(d/2\right)^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 r} = \frac{-10 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \left(2 \cdot 10^{-3}/2\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{r} = -5,65 \cdot \frac{1}{r}.$$

Потенціал електричного поля:

$$\varphi_2(r) = -\int \bar{E} \cdot dr = -\frac{\rho \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot \ln(r) + A_2.$$

На межі двох зон, коли $r = \frac{d}{2}$: $\varphi_1\left(\frac{d}{2}\right) = \varphi_2\left(\frac{d}{2}\right)$.

$$1,412 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = -\frac{\rho \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{d}{2}\right) + A_2.$$

Звідси знаходимо необхідну постійну часу:

$$\begin{aligned} A_2 &= 1,412 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{\rho \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{d}{2}\right) = \\ &= 1,412 \cdot 10^6 \cdot \left(2 \cdot 10^{-3} / 2\right)^2 + \frac{-10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \left(2 \cdot 10^{-3} / 2\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \ln\left(2 \cdot 10^{-3} / 2\right) = 40,44. \end{aligned}$$

Отримуємо:

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot \ln(r) + A_2 = 5,65 \cdot \ln(r) + 40,44.$$

Відповідь:

$$\begin{cases} E_1(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon \varepsilon_0} \cdot r = -2,825 \cdot 10^6 \cdot r, & \frac{B}{M}; \\ E_2(r) = \frac{\rho \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2\varepsilon \varepsilon_0 r} = -5,65 \cdot \frac{1}{r}, & \frac{B}{M}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(r) = -\frac{\rho}{4\varepsilon \varepsilon_0} \cdot r^2 = 1,412 \cdot 10^6 \cdot r^2, & B; \\ \varphi_2(r) = 5,65 \cdot \ln(r) + 40,44, & B. \end{cases}$$

Приклад 1.10. Заряджена куля (сфера). Теорема Гауса в інтегральній формі. Металева куля радіусом $R_1=0,8$ см має заряд $q=2,5 \cdot 10^{-8}$ Кл. Зверху заряду знаходиться область радіусом $R_2=1,6$ см, яка заряджена рівномірно з об'ємною щільністю $\rho = -10^{-10}$ Кл/см³ і має відносну діелектричну проникність $\varepsilon_1 = 2$. Наступна область не містить вільних зарядів і характеризується відотною діелектричною проникністю $\varepsilon_2 = 1,5$. Зовні знаходиться порожниста металева куля з внутрішнім $R_3=3,2$ см і зовнішнім $R_4=3,6$ см радіусами. Розрахувати та побудувати графіки залежності напруженості електростатичного поля \vec{E} та потенціалу φ від відстані до центру кулі.

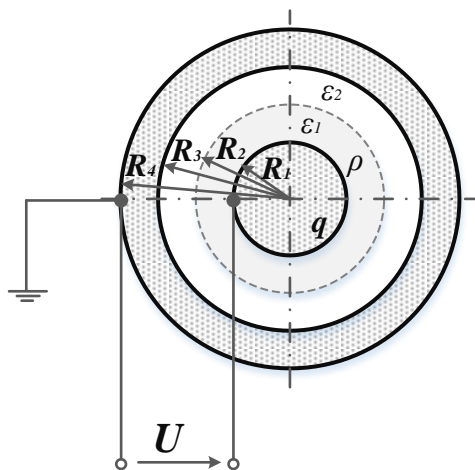


Рисунок 1.13 – Схема зарядженої кулі

В областях $0 < R < R_1$, $R_3 < R < R_4$ знаходиться провідний матеріал, тому електростатичне поле в цих областях відсутнє: $\vec{E} = 0$, $\vec{D} = 0$, $\varphi = const$. Поле відсутнє також за межами кулі, оскільки оболонка кулі заземлена.

В областях $R_1 < R < R_2$ і $R_2 < R < R_3$ розрахунок поля виконуємо за допомогою теореми Гауса для поля вектору електричної індукції \vec{D} (1.10):

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q.$$

Ліва частина рівняння (1.10), як для точкового заряду згідно (1.16), визначається:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 4\pi \cdot R^2.$$

Права частина рівняння (1.10) в області $R_1 < R < R_2$ через об'ємну щільність заряду:

$$\sum q = q + \rho \cdot V = q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R^3 - R_1^3).$$

Для області $R_1 < R < R_2$ виконується співвідношення $D \cdot 4\pi \cdot R^2 = q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R^3 - R_1^3)$, яке визначає електричну індукцію:

$$D_1(R) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R^3 - R_1^3)}{4\pi \cdot R^2}.$$

Електрична напруженість визначається за співвідношенням:

$$E_1(R) = \frac{D_1(R)}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} = \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_1^3}{4\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\rho}{3 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R; \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} E_1(R) &= \frac{2,5 \cdot 10^{-8} - (-10 \cdot 10^{-10}) \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0,8^3}{4\pi \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{(-10 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^6}{3 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot R = \\ &= 122,04 \cdot \frac{1}{R^2} - 1,88 \cdot 10^7 \cdot R, \quad \frac{B}{м}. \end{aligned}$$

Потенціал електричного поля визначається через напруженість:

$$\varphi_1(R) = -\int E_1(R) dR = \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} - \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R^2 + A_1; \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(R) &= \frac{2,5 \cdot 10^{-8} - (-10 \cdot 10^{-10}) \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0,8^3}{4 \pi \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{R} - \frac{(-10 \cdot 10^{-10}) \cdot 10^6}{6 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot R^2 + A_1 = \\ &= 122,04 \cdot \frac{1}{R} + 9,416 \cdot 10^6 \cdot R^2 + A_1, \text{ В.} \end{aligned}$$

Для області $R_2 < R < R_3$ виконується співвідношення

$D \cdot 4 \pi \cdot R^2 = q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)$, яке визначає електричну індукцію:

$$D_2(R) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \cdot \pi \cdot R^2}.$$

Електрична напруженість визначається за співвідношенням:

$$E_2(R) = \frac{D_2(R)}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2}; \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} E_2(R) &= \frac{2,5 \cdot 10^{-8} + (-10 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6) \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,016^3 - 0,008^3)}{4 \pi \cdot 1,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{R^2} = \\ &= 59,87 \cdot \frac{1}{R^2}, \frac{\text{В}}{\text{м}}. \end{aligned}$$

Потенціал електричного поля визначається через напруженість:

$$\varphi_2(R) = -\int E_2(R) dR = \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} + A_2. \quad (1.29)$$

Для визначення постійної інтегрування приймаємо $\varphi_2 = 0$ при $R = R_3$, і врахувавши, що потенціал – безперервна функція:

$$\varphi_2(R_3) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_3} + A_2 = 0.$$

Звідси знаходимо необхідну постійну часу:

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot R_3} = \\ &= -\frac{2,5 \cdot 10^{-8} + (-10 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6) \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (0,016^3 - 0,008^3)}{4 \pi \cdot 1,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,032} = -1871 \end{aligned}$$

Отримуємо:

$$\begin{aligned} \varphi_2(R) &= \frac{q + \rho \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} + A_2 = \\ &= \frac{2,5 \cdot 10^{-8} + (-10 \cdot 10^{-10} \cdot 10^6) \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (0,016^3 - 0,008^3)}{4 \pi \cdot 1,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{R} - 1871 = 59,87 \cdot \frac{1}{R} - 1871, \text{ В} \end{aligned}$$

На межі, коли $R = R_2$

$$\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_2);$$

$$122,04 \cdot \frac{1}{R_2} + 9,416 \cdot 10^6 \cdot R_2^2 + A_1 = \frac{59,87}{R_2} - 1871;$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{59,87}{R_2} - 1871 - 122,04 \cdot \frac{1}{R_2} - 9,46 \cdot 10^6 \cdot R_2^2 = \\ &= \frac{59,87}{0,016} - 1871 - 122,04 \cdot \frac{1}{0,016} - 9,416 \cdot 10^6 \cdot 0,016^2 = -8167. \end{aligned}$$

Отримуємо:

$$\varphi_1(R) = 122,04 \cdot \frac{1}{R} + 9,46 \cdot 10^6 \cdot R^2 - 8167, \text{ В.}$$

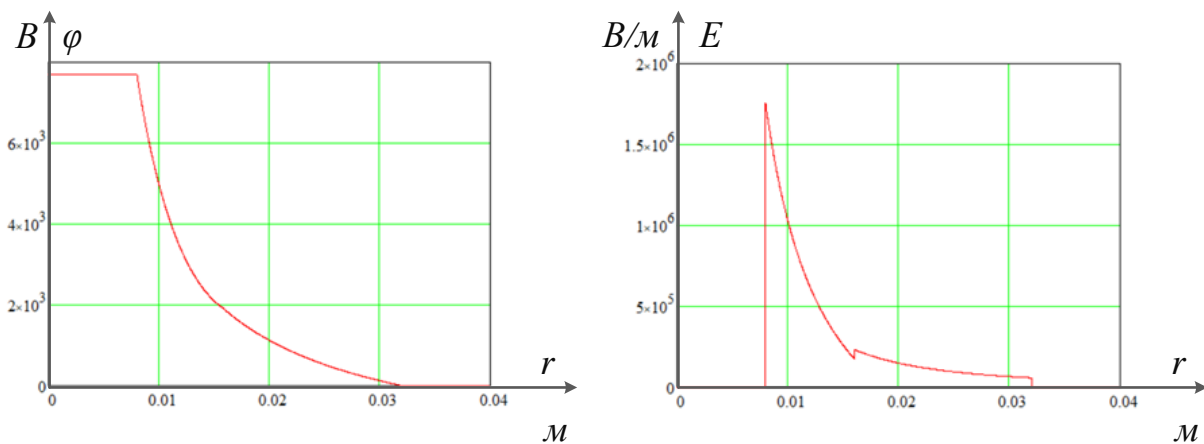


Рисунок 1.14 – Графіки залежності потенціалу φ і напруженості E

Відповідь: $\varphi_1(R) = 122,04 \cdot \frac{1}{R} + 9,46 \cdot 10^6 \cdot R^2 - 8167, \text{ В.}$

$$E_1(R) = 122,04 \cdot \frac{1}{R^2} - 1,88 \cdot 10^7 \cdot R, \frac{\text{В}}{\text{м}}; \quad \varphi_2(R) = 59,87 \cdot \frac{1}{R} - 1871, \text{ В.}$$

$$E_2(R) = 59,87 \cdot \frac{1}{R^2}, \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Приклад 1.11. Заряджена куля (сфера). Теорема Гауса в інтегральній формі. Провідна куля радіусом $R_1=1$ см має заряд q . Навколо неї шар діелектрика з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon_1=2$ і вільним зарядом з рівномірною об'ємною щільністю $\rho=10^{-10}$ Кл/см³. Наступним йде металевий прошарок з внутрішнім радіусом $R_2=3$ см і зовнішнім радіусом $R_3=4$ см, навколо якого розміщений шар діелектрика з відносною діелектричною проникністю

$\varepsilon_2 = 1$. Зовнішній металевий шар має радіус $R_4 = 5$ см. Куля підключена до джерела постійної напруги $U = 1000$ В.

Побудувати графіки зміни напруженості електростатичного поля $E(R)$ та потенціалу $\varphi(R)$ залежно від координат простору, вважаючи зовнішню оболонку заземленою. Розрахувати також ємність шару діелектрика, в якому $\rho = 0$.

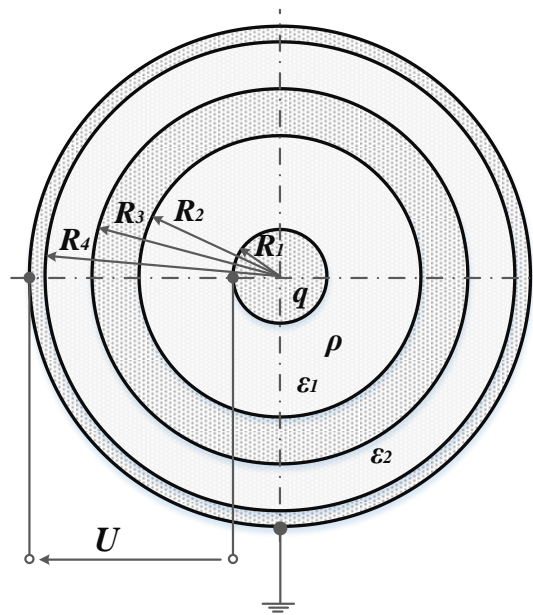


Рисунок 1.15 – Схема зарядженої кулі

Постановка задачі зворотна, порівняно із завданням 1.10.

Як і в попередній задачі 1.10 в діелектричних областях $R_1 < R < R_2$ і $R_3 < R < R_4$ розрахунок поля виконуємо аналогічно за допомогою теореми Гауса для поля вектору електричної індукції \vec{D} .

Для області $R_1 < R < R_2$ (шар першого діелектрика) відповідно до формул (1.26) і (1.27) задачі 1.10:

$$E_1(R) = \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\rho}{3 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R;$$

$$\varphi_1(R) = -\int E_1(R) dR = \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} - \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R^2 + A_1.$$

Для області $R_3 < R < R_4$ (шар другого діелектрика) відповідно до формул (1.28) і (1.29) задачі 1.10:

$$E_2(R) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2};$$

$$\varphi_2(R) = -\int E_2(R) dR = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} + A_2.$$

Так як зовнішня оболонка заземлена, то $\varphi_2(R_4) = 0$. З цієї умови визначаємо постійну:

$$\varphi_2(R_4) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_4} + A_2 = 0;$$

$$A_2 = -\frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_4}.$$

Потенціал електричного поля другого шару діелектрика:

$$\varphi_2(R) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_4} \right).$$

Для визначення наступної постійної використаємо умову для потенціалів металевого прошарку:

$$\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_3);$$

$$\frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_2} - \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^2 + A_1 = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right);$$

$$A_1 = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) - \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^2.$$

Потенціал електричного поля першого шару діелектрика:

$$\begin{aligned} \varphi_1(R) &= \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} - \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R^2 + \\ &+ \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) - \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_2} + \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^2 = \\ &= \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot (R_2^2 - R^2) + \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned}$$

Визначимо напругу, прикладену до пристрою:

$$\begin{aligned}
U &= \varphi_1(R_1) = \\
&= \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot (R_2^2 - R_1^2) + \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \\
&= \frac{q + 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (0,03^3 - 0,01^3)}{4\pi \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{0,04} - \frac{1}{0,05} \right) + \frac{10^{-10} \cdot 10^6}{6 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot (0,03^2 - 0,01^2) + \\
&+ \frac{q - 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0,01^3}{4\pi \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{0,01} - \frac{1}{0,03} \right) = \\
&= q \cdot 4,496 \cdot 10^{10} + 4,896 \cdot 10^2 + 7,533 \cdot 10^2 + q \cdot 2,997 \cdot 10^{11} - 1,255 \cdot 10^2 = \\
&= q \cdot 3,447 \cdot 10^{11} + 1117 \text{ В.}
\end{aligned}$$

Останній вираз дозволяє визначити заряд внутрішньої кулі:

$$q = \frac{U - 1117}{3,447 \cdot 10^{11}} = \frac{1000 - 1117}{3,447 \cdot 10^{11}} = -3,406 \cdot 10^{-10} \text{ Кл.}$$

Отримане значення заряду дозволяє спростити значення напруженості поля:

$$\begin{aligned}
E_1(R) &= \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{\rho}{3 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R = \\
&= \frac{-3,406 \cdot 10^{-10} - 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 0,01^3}{4\pi \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{R^2} + \frac{10^{-10} \cdot 10^6}{3 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot R;
\end{aligned}$$

$$E_1(R) = -\frac{3,414}{R^2} + 1,883 \cdot 10^6 \cdot R, \frac{B}{M}, \quad 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м};$$

$$E_2(R) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} =$$

$$= \frac{-3,406 \cdot 10^{-10} + 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (0,03^3 - 0,01^3)}{4 \pi \cdot 1,8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{1}{R^2};$$

$$E_2(R) = \frac{94,87}{R^2}, \frac{B}{m}, \quad 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м};$$

Також спростити значення потенціалу поля:

$$\varphi_1(R) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) + \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot (R_2^2 - R^2) +$$

$$+ \frac{q - \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{-3,406 \cdot 10^{-10} + 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (0,03^3 - 0,01^3)}{4 \pi \cdot 1,8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{0,04} - \frac{1}{0,05} \right) + \frac{10^{-10} \cdot 10^6}{6 \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot (0,03^2 - R^2) +$$

$$+ \frac{-3,406 \cdot 10^{-10} - 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_1^3}{4 \pi \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{0,03} \right);$$

$$\varphi_1(R) = -9,416 \cdot 10^5 \cdot R^2 - 3,414 \cdot \frac{1}{R} + 1436, \text{ В}, \quad 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м};$$

$$\varphi_2(R) = \frac{q + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)}{4 \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_4} \right) =$$

$$= \frac{-3,406 \cdot 10^{-10} + 10^{-10} \cdot 10^6 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (0,03^3 - 0,01^3)}{4 \pi \cdot 1,8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{0,05} \right);$$

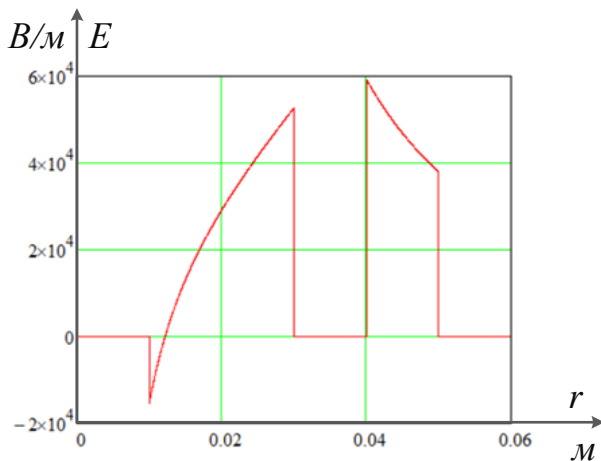
$$\varphi_2(R) = 94,87 \cdot \frac{1}{R} - 1897, \text{ В}, \quad 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м}.$$

На рис. 1.16 приведені графіки зміни напруженості електростатичного поля $E(R)$ (рис. 1.16, а)

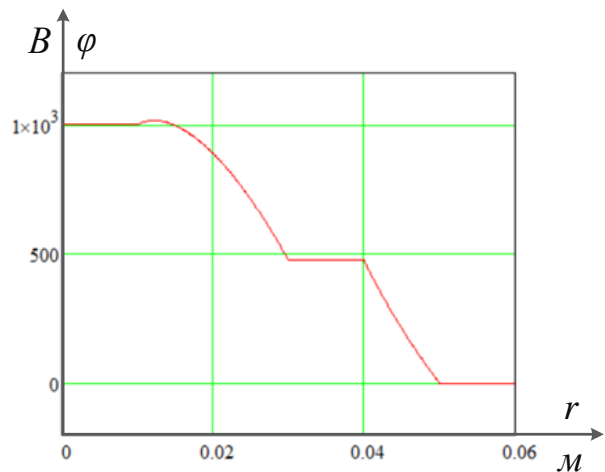
$$E(R) = \begin{cases} E_1(R) = -\frac{3,414}{R^2} + 1,883 \cdot 10^6 \cdot R, \frac{B}{M}, & 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м} \\ E_2(R) = \frac{94,87}{R^2}, \frac{B}{M}, & 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м} \end{cases}$$

та потенціалу $\varphi(R)$ (рис. 1.16, б)

$$\varphi(R) = \begin{cases} \varphi_1(R) = -9,416 \cdot 10^5 \cdot R^2 - 3,414 \cdot \frac{1}{R} + 1436, B, & 0,01 \leq R \leq 0,03 \text{ м} \\ \varphi_2(R) = 94,87 \cdot \frac{1}{R} - 1897, B, & 0,04 \leq R \leq 0,05 \text{ м}. \end{cases}$$



а)



б)

Рисунок 1.16 – Графіки залежності потенціалу $\varphi(R)$ і напруженості $E(R)$

Ємність другого шару діелектрика на основі (1.6):

$$C = \frac{4\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0}{\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}} = \frac{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{\frac{1}{0,04} - \frac{1}{0,05}} = 22,24 \cdot 10^{-12} = 22,24 \text{ нФ}.$$

Відповідь: $C = 22,24 \text{ нФ}$; графіки залежності потенціалу $\varphi(R)$ і напруженості $E(R)$ приведені на рис. 1.16.

Приклад 1.12. Заряджена куля (сфера). Рівняння Пуассона і Лапласа.

Задачу 1.11 розв'язати з використанням рівнянь Пуассона і Лапласа.

Розподіл потенціалу φ у просторі підпорядковується диференціальному рівнянню Пуассона (1.14):

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_a} \text{ або } 0.$$

Для кулі зручно користуватися сферичною системою координат (рис. 1.4), для якої оператор Лапласа записується як:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right).$$

Зауважимо, що в даній задачі потенціал φ залежить тільки від однієї координати R , тобто $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$. Таким чином, для двох різних областей кулі отримуємо:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \right) = \begin{cases} -\frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}; & \text{якщо } R_1 \leq R \leq R_2; \\ 0; & \text{якщо } R_3 \leq R \leq R_4. \end{cases}$$

Для першої зони кулі ($R_1 \leq R \leq R_2$):

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right] \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0};$$

$$R^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = -\frac{\rho}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{R^3}{3} + A_1;$$

$$\varphi_1(R) = -\frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot R^2 - A_1 \cdot \frac{1}{R} + A_2.$$

Для другої зони кулі ($R_3 \leq R \leq R_4$):

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \right] \right) = 0;$$

$$R^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = A_3;$$

$$\varphi_2(R) = -\frac{A_3}{R} + A_4.$$

Для напруженості справедливе співвідношення для сферичної системи координат:

$$\bar{E} = -grad(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \bar{R}_0 - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \bar{\theta}_0 - \frac{1}{R \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \bar{\alpha}_0;$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial R} \bar{R}_0.$$

Таким чином:

$$E_1(R) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = \frac{\rho}{3\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot R - A_1 \cdot \frac{1}{R^2};$$

$$E_2(R) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial R} = -\frac{A_3}{R^2}.$$

Система рівнянь для потенціалу:

$$\varphi(R) = \begin{cases} -\frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R^2 - A_1 \cdot \frac{1}{R} + A_2; & \text{якщо } R_1 \leq R \leq R_2; \\ -\frac{A_3}{R} + A_4; & \text{якщо } R_3 \leq R \leq R_4. \end{cases}$$

і для напруженості

$$E(R) = \begin{cases} \frac{\rho}{3 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R - A_1 \cdot \frac{1}{R^2}; & \text{якщо } R_1 \leq R \leq R_2; \\ -\frac{A_3}{R^2}; & \text{якщо } R_3 \leq R \leq R_4. \end{cases}$$

Постійні інтегрування знаходимо, використовуючи граничні умови для межі діелектрик-провідник. Для тангенціальної складової вектору \vec{E} : $E_\tau = 0$. Для проекції вектору електростатичної індукції \vec{D} на нормаль \vec{n} : $D_n = \sigma$. Для потенціалу: $\varphi = const$.

При $R = R_1$ $\varphi_1(R_1) = U$, тому:

$$-\frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_1^2 - A_1 \cdot \frac{1}{R_1} + A_2 = U.$$

При $R = R_2$ $\varphi_1(R_2) = \varphi_{\text{прошарку}}$ і при $R = R_3$ $\varphi_2(R_3) = \varphi_{\text{прошарку}}$, тому:

$$\varphi_1(R_2) = \varphi_2(R_3);$$

$$-\frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^2 - A_1 \cdot \frac{1}{R_2} + A_2 = -\frac{A_3}{R_3} + A_4.$$

Значення напруженості E електричного поля відповідно до (1.16):

$$E_1(R_2) = -\frac{-q}{4\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0 \cdot R_2^2};$$

$$E_2(R_3) = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot R_3^2}.$$

Якщо з двох попередніх рівнянь визначити значення заряду, то отримуємо:

$$4\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0 \cdot R_2^2 \cdot E_1(R_2) = 4\pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0 \cdot R_3^2 \cdot E_2(R_3);$$

$$\varepsilon_1 \cdot R_2^2 \cdot \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2 - A_1 \cdot \frac{1}{R_2^2} \right) = \varepsilon_2 \cdot R_3^2 \cdot \left(-\frac{A_3}{R_3^2} \right).$$

При $R = R_4$ $\varphi_2(R_4) = 0$, тому:

$$-\frac{A_3}{R_4} + A_4 = 0.$$

Остаточна система рівнянь для визначення постійних інтегрування:

$$\begin{cases} -\frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_1^2 - A_1 \cdot \frac{1}{R_1} + A_2 = U; \\ -\frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^2 - A_1 \cdot \frac{1}{R_2} + A_2 = -\frac{A_3}{R_3} + A_4; \\ \varepsilon_1 \cdot R_2^2 \cdot \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2 - A_1 \cdot \frac{1}{R_2^2} \right) = \varepsilon_2 \cdot R_3^2 \cdot \left(-\frac{A_3}{R_3^2} \right); \\ -\frac{A_3}{R_4} + A_4 = 0. \end{cases}$$

Для розв'язання системи рівнянь виконаємо перетворення:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{R_1} \right) \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 = U + \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_1^2; \\ \left(-\frac{1}{R_2} \right) \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + \left(\frac{1}{R_3} \right) \cdot A_3 + (-1) \cdot A_4 = \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^2; \\ (-\varepsilon_1) \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + (\varepsilon_2) \cdot A_3 + 0 \cdot A_4 = -\frac{\rho}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^3; \\ 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 - \frac{1}{R_4} \cdot A_3 + A_4 = 0. \end{array} \right.$$

Значення матриць після підстановки значень:

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R_2} & 1 & \frac{1}{R_3} & -1 \\ -\varepsilon_1 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_4} & 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} U + \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_1^2 \\ \frac{\rho}{6 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^2 \\ \frac{-\rho}{3 \cdot \varepsilon_0} \cdot R_2^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -100 & 1 & 0 & 0 \\ -33.333 & 1 & 25 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1.094 \times 10^3 \\ 847.458 \\ -101.695 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Рішення системи рівнянь, яке визначає постійні інтегрування, має вигляд:

$$X := A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3.414 \\ 1.436 \times 10^3 \\ -94.866 \\ -1.897 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Отже: $A_1 = 3,414$; $A_2 = 1436$, $A_3 = -94,866$; $A_4 = -1897$.

Остаточно маємо:

$$\varphi(R) = \begin{cases} -9,416 \cdot 10^5 \cdot R^2 - 3,414 \cdot \frac{1}{R} + 1436; & \text{якщо } R_1 \leq R \leq R_2; \\ 94,866 \cdot \frac{1}{R} - 1897; & \text{якщо } R_3 \leq R \leq R_4. \end{cases}$$

$$E(R) = \begin{cases} 1,883 \cdot 10^6 \cdot R - 3,414 \cdot \frac{1}{R^2}; & \text{якщо } R_1 \leq R \leq R_2; \\ 94,866 \cdot \frac{1}{R^2}; & \text{якщо } R_3 \leq R \leq R_4. \end{cases}$$

Відповідь: отриманий результат співпадає з відповіддю задачі 1.11.

Приклад 1.13. Провід над провідною поверхнею. Рівняння Максвелла.

Провідник радіусом $r_0 = 1$ см розташований паралельно поверхні землі $\varepsilon = 1$ на висоті $h = 1$ м. Робоча напруга $U = 1$ кВ. Визначити лінійний заряд τ провідника та ємність C між ним та землею (на 1 погонний метр).

Для циліндричного заряду згідно (1.17):

$$E = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r}.$$

Потенціал визначається між проводом та його дзеркальним відображенням:

$$\varphi = - \int E dr = \int_{r_0}^{2h} \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r} dr = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \ln \left(\frac{2h}{r_0} \right).$$

Наведене рівняння відповідає першій групі рівнянь Максвелла для одиночного провідника:

$$\varphi_1 = \alpha_{11} \cdot \tau_1, \quad (1.30)$$

де α_{11} – потенціальний коефіцієнт

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} \ln \left(\frac{2h}{r_0} \right) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \left(\frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 10^{-2}} \right) = 9,528 \cdot 10^{10} \frac{\text{м}}{\Phi}.$$

Таким чином, відповідно до формули (1.30) лінійний заряд τ провідника визначається

$$\tau_1 = \frac{\varphi_1}{\alpha_{11}} = \frac{1000}{9,528 \cdot 10^{10}} = 1,05 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

Ємність C між провідником та землею:

$$c = \frac{\tau_1}{\varphi_1} = \frac{1}{\alpha_{11}} = \frac{1}{9,528 \cdot 10^{10}} = 1,05 \cdot 10^{-11} = 10,5 \frac{\text{нФ}}{\text{м}}.$$

Відповідь: $\tau_1 = 1,05 \cdot 10^{-8}$ Кл/м; $c = 10,5$ нФ/м.

Приклад 1.14. Провід над провідною поверхнею. Метод дзеркальних зображень. Над металевою поверхнею на висоті $h=4$ м розташований циліндричний провідник радіусом $r_0=2$ см і лінійним зарядом $\tau=10^{-8}$ Кл/м. Визначити потенціал провідника, а також напруженість і потенціал у точках A ($\varepsilon=1$) та B (рис. 1.17, а).

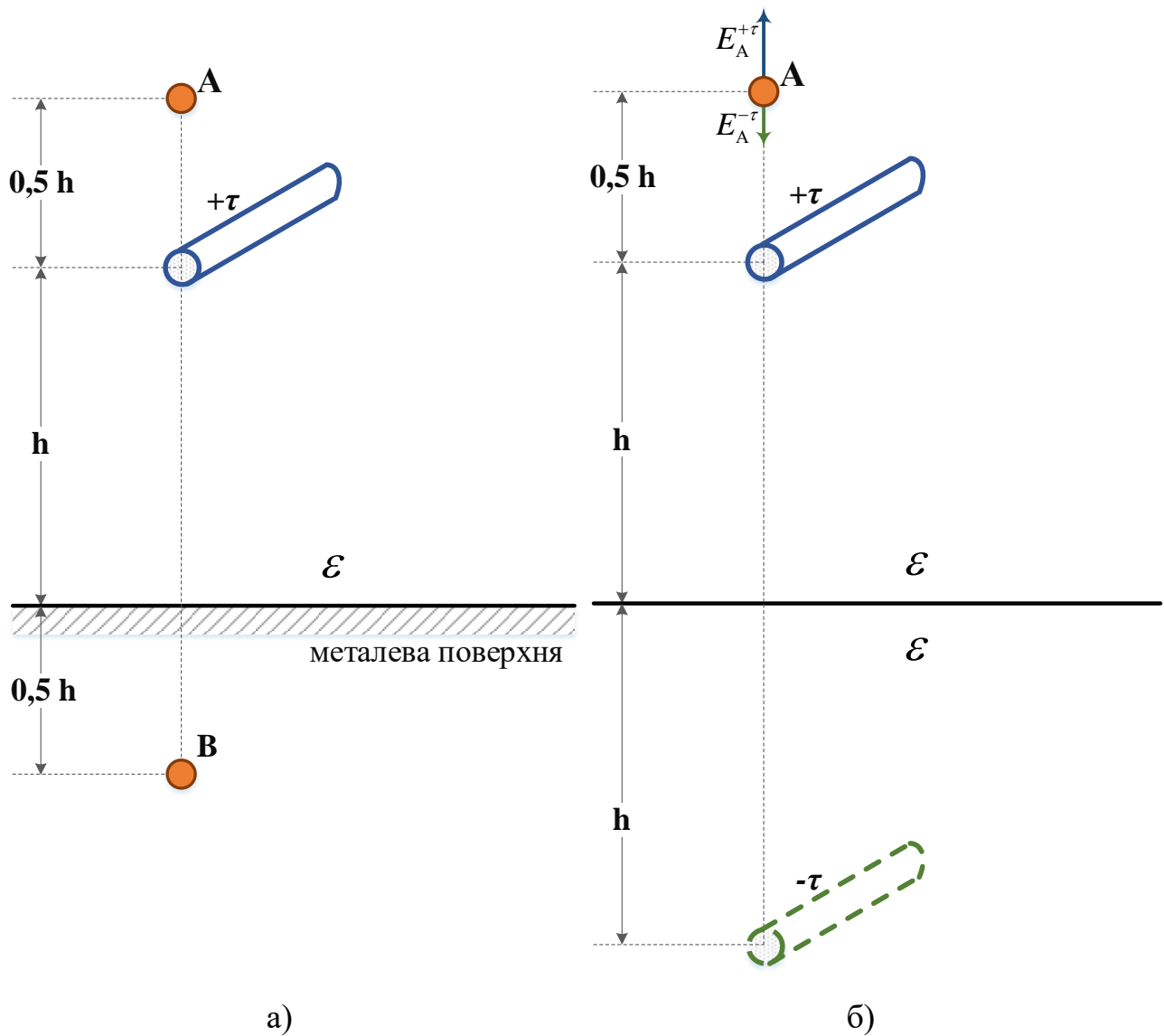


Рисунок 1.17 – Схема зарядженої кулі

Електростатичне поле у точці B , яка знаходиться у металі, відсутнє. Тому:
 $\bar{E}_B = 0$, $\varphi_B = 0$.

Згідно з методом дзеркальних зображень сила взаємодії між проводом і площиною дорівнює силі взаємодії між фактичним проводом та його дзеркальним відображенням (рис. 1.17, б), з коефіцієнтом відображення -1 . Таким чином, отримуємо два провідника із лінійними зарядами $+\tau$ і $-\tau$ в однорідному середовищі з проникністю ϵ .

Значення напруженості E електричного поля зарядженого проводу з лінійним зарядом τ у точці A визначається за принципом накладення у відповідності із формулою (1.17):

$$\begin{aligned} E_A &= E_A^{+\tau} - E_A^{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot 0,5 \cdot h} - \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot 2,5 \cdot h} = \\ &= \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 0,5 \cdot 4} - \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,5 \cdot 4} = 71,934 \frac{B}{м}. \end{aligned}$$

У відповідності із формулою (1.22) формула для потенціалу на поверхні провідника:

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_A^{+\tau} - \varphi_A^{-\tau} = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_0}{0,5 \cdot h} - \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{r_0}{2,5 \cdot h} = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot \ln 5 = \\ &= \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \cdot \ln 5 = 289,4 \text{ В}. \end{aligned}$$

Потенціал провідника:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot \left(\ln \frac{h}{r_0} - \ln \frac{h}{2 \cdot h} \right) = \\ &= \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot \ln \frac{2 \cdot h}{r_0} = \frac{10^{-8}}{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \cdot \ln \frac{2 \cdot 4}{0,02} = 1077 \text{ В}. \end{aligned}$$

Відповідь: $E_A = 71,934 \frac{B}{м}$, $\varphi_A = 289,4 \text{ В}$, $E_B = 0$, $\varphi_B = 0$, $\varphi = 1077 \text{ В}$.

Приклад 1.15. Циліндричний конденсатор. Теорема Гауса. Для двошарового циліндричного конденсатора (рис. 1.15) з параметрами $R_1 = 1 \text{ см}$; $R_2 = 3 \text{ см}$; $R_3 = 4 \text{ см}$; $R_4 = 5 \text{ см}$; $\varepsilon_1 = 2$; $\varepsilon_2 = 1$; $l = 5 \text{ м}$ задана максимальна

напруженість електростатичного поля в ізоляції, яка становить $E_{\max} = 30$ кВ/см.

Визначити напругу U , прикладену до конденсатора, та її ємність C .

Нехай заряд внутрішньої жили – τ .

Значення напруженості E електричного поля для циліндричного конденсатора з лінійним зарядом τ визначається відповідно за формулою (1.17):

$$E = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r}$$

Для області першого діелектрика ($R_1 < R < R_2$): $E_{1\max} = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot R_1}$, а для

області другого діелектрика ($R_3 < R < R_4$): $E_{2\max} = \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2 \cdot R_2}$. Так як

$\varepsilon_1 \cdot R_1 < \varepsilon_2 \cdot R_2$, то $E_{1\max} > E_{2\max}$ і $E_{\max} = E_{1\max}$. За максимальним значенням напруженості електричного поля визначаємо заряд внутрішньої жили:

$$\tau = 2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot R_1 \cdot E_{\max}.$$

Визначаємо потенціал $\varphi(r)$ в області першого діелектрика:

$$\varphi_1(R) = -\int \bar{E}_1 dR = -\int \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0 R} dR = \frac{-\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \ln(R) + A_1 = -R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R) + A_1.$$

Постійну інтегрування A_1 знаходимо, використовуючи умову $\varphi_1(R_2) = 0$:

$$A_1 = R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R_2).$$

Отримуємо потенціал для області першого діелектрика:

$$\varphi_1(R) = -R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R) + R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R_2);$$

$$\varphi_1(R) = R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R}\right).$$

Для області другого діелектрика:

$$\varphi_2(R) = -\int \bar{E}_2 dR = -\int \frac{\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0 R} dR = \frac{-\tau}{2\pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \ln(R) + A_2 = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R) + A_2$$

Постійну інтегрування A_2 знаходимо, використовуючи умову $\varphi_2(R_3) = 0$:

$$A_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R_3).$$

Отримуємо потенціал для області першого діелектрика:

$$\varphi_2(R) = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln(R_3);$$

$$\varphi_2(R) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R}\right).$$

Напруга U , прикладену до конденсатора:

$$U = \varphi_1(R_1) - \varphi_2(R_4) = R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln\left(\frac{R_3}{R_4}\right);$$

$$\begin{aligned}
 U &= R_1 \cdot E_{\max} \cdot \left[\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \ln \left(\frac{R_3}{R_4} \right) \right] = R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3} \right)^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right) = \\
 &= 1 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot \ln \left(\frac{3}{1} \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{2}{1}} \right) = 46,35 \cdot 10^3 = 46,35 \text{ кВ}
 \end{aligned}$$

Ємність C (на 1 м довжини):

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\tau}{U} = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot R_1 \cdot E_{\max}}{R_1 \cdot E_{\max} \cdot \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3} \right)^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right)} = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{R_4}{R_3} \right)^{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \right)} = \\
 &= \frac{2\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{\ln \left(\frac{3}{1} \cdot \left(\frac{5}{4} \right)^{\frac{2}{1}} \right)} = 71,99 \cdot 10^{-12} = 71,99 \text{ нФ}.
 \end{aligned}$$

Відповідь: $U = 46,35 \text{ кВ}$; $C = 71,99 \text{ нФ}$.

Приклад 1.16. Заряджена сфера. Метод дзеркальних зображень. Дві провідні поверхні утворюють прямий кут, в якому у повітрі розташований заряджена куля із зарядом $q = 10^{-10}$ і радіусом $R_0 = 1$ см (рис. 1.18, а). Визначити потенціал φ кулі по відношенню до провідної поверхні, її ємність C , напрямок та величину сили \vec{F} , що діє на кулю.

Згідно з методом дзеркальних зображень сила взаємодії між кулею і площиною дорівнює силі взаємодії між фактичною кулею та її дзеркальним відображенням (рис. 1.18, б), з коефіцієнтом відображення -1 . Таким чином, отримуємо дві кулі із зарядами $+q$ і $-q$ в однорідному середовищі. Після вторинного дзеркального відображення з коефіцієнтом відображення -1 отримаємо поле чотирьох куль в однорідному середовищі (рис. 1.18, в).

Значення напруженості E електричного поля точкового заряду q на відстані R визначаються за формулою (1.16):

$$E = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R^2}.$$

Потенціал φ точкового заряду q визначаються за формулою (1.20):

$$\varphi = -\int \bar{E} dR = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R} + A.$$

Для системи з чотирьох куль і з використанням принципу накладення:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{i=1}^4 \frac{q_i}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R_i} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{2 \cdot h_2} + \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot h_1)^2 + (2 \cdot h_2)^2}} - \frac{1}{2 \cdot h_1} \right) = \\ &= \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1} \left(\frac{1}{1 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{2 \cdot 0,4} + \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot 0,2)^2 + (2 \cdot 0,4)^2}} - \frac{1}{2 \cdot 0,2} \right) = 87,551 \text{ В}. \end{aligned}$$

Ємність сфери:

$$C = \frac{q}{\varphi_1} = \frac{10^{-10}}{87,551} = 1,142 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} = 1,142 \text{ пФ}.$$

Визначаємо напруженість в точці розташування першого заряду, яка створюється іншими трьома зарядами, з використанням методу накладення і урахуванням напрямку векторних величин (рис. 1.19):

Напруженість створена другим зарядом розкладається на складові в Декартовій системі координат:

$$E_{2x} = \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot (2h_2)^2} = \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 0,4)^2} = 1,405 \frac{B}{м};$$

$$E_{2y} = 0;$$

$$\bar{E}_2 = E_{2x} + j E_{2y} = 1,405 + j 0 \frac{B}{м}.$$

Напруженість створена третім зарядом:

$$\begin{aligned} E_{3x} &= -\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \left[(2h_1)^2 + (2h_2)^2 \right]} \cdot \cos \alpha = \\ &= -\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \left[(2h_1)^2 + (2h_2)^2 \right]} \cdot \frac{2h_2}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2}} = \\ &= -\frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \left[(2 \cdot 0,2)^2 + (2 \cdot 0,4)^2 \right]} \cdot \frac{2 \cdot 0,4}{\sqrt{(2 \cdot 0,2)^2 + (2 \cdot 0,4)^2}} = -1,005 \frac{B}{м}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{3y} &= \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \left[(2h_1)^2 + (2h_2)^2 \right]} \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \left[(2h_1)^2 + (2h_2)^2 \right]} \cdot \frac{2h_1}{\sqrt{(2h_1)^2 + (2h_2)^2}} = \\ &= \frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot \left[(2 \cdot 0,2)^2 + (2 \cdot 0,4)^2 \right]} \cdot \frac{2 \cdot 0,2}{\sqrt{(2 \cdot 0,2)^2 + (2 \cdot 0,4)^2}} = 0,503 \frac{B}{м}; \end{aligned}$$

$$\bar{E}_3 = E_{3x} + j E_{3y} = -1,005 + j 0,503 \frac{B}{м};$$

Напруженість створена четвертим зарядом:

$$E_{4x} = 0;$$

$$E_{4y} = -\frac{q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot (2h_1)^2} = -\frac{10^{-10}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot (2 \cdot 0,2)^2} = -5,62 \frac{B}{м}.$$

$$\bar{E}_4 = E_{4x} + j E_{4y} = 0 - j 5,62 \frac{B}{м}.$$

Результуюча напруженість у місці розташування першого заряду
(рис. 1.20):

$$E_x = E_{2x} + E_{3x} + E_{4x} = 1,405 - 1,005 + 0 = 0,4 \frac{B}{M};$$

$$E_y = E_{2y} + E_{3y} + E_{4y} = 0 + 0,503 - 5,62 = -5,117 \frac{B}{M};$$

$$\bar{E}_\Sigma = E_x + j E_y = 0,4 - j 5,117 = 5,133 \cdot e^{-j 85,5^\circ} \frac{B}{M}.$$

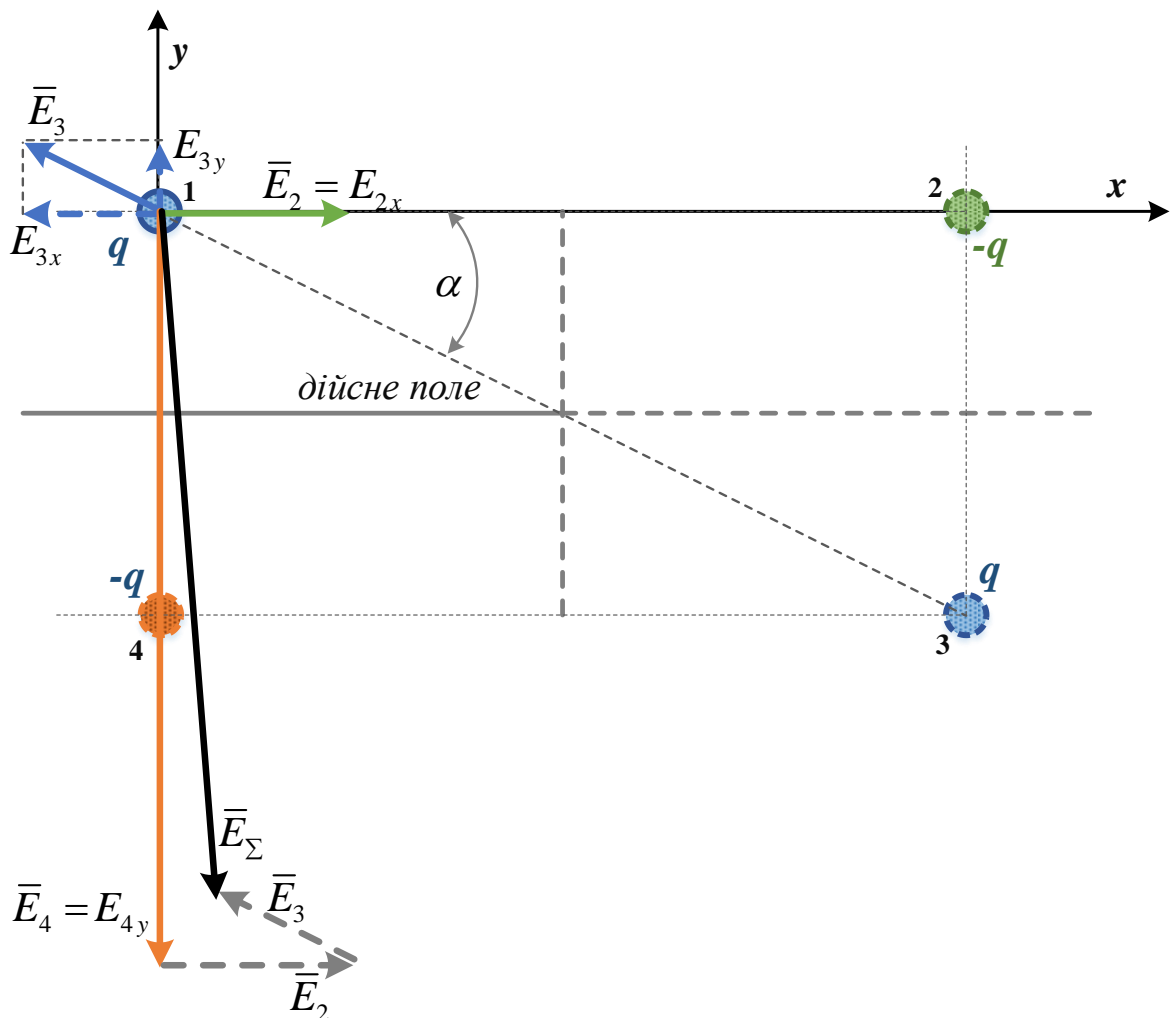


Рисунок 1.20 – Визначення результуючої напруженості

Сила, що діє на заряджену сферу:

$$\bar{F} = q \cdot \bar{E}_{\Sigma} = 10^{-10} \cdot 5,133 = 5,133 \cdot 10^{-10} \text{ Н}.$$

Примітка до прикладу 1.16. Якби замість сфери був заряджений провідник (циліндр), паралельний куту, то можна було б обмежитися лише першим дзеркальним відображенням, з використанням груп формул Максвелла для двопровідної лінії (див. приклад 1.13).

Відповідь. $\varphi_1 = 87,551 \text{ В}$, $C = 1,142 \text{ нФ}$, $\bar{E}_{\Sigma} = 5,133 \text{ В / м}$, $\bar{F} = 5,133 \cdot 10^{-10} \text{ Н}$.

Приклад 1.17. Двопровідна лінія. Проводи двопровідної лінії з радіусами $r_0 = 0,2 \text{ см}$ і напругою $U = 500 \text{ В}$ перебувають у різних діелектриках ($\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 2$), як показано на рис. 1.21: $h_1 = 20 \text{ см}$; $h_2 = 40 \text{ см}$. Розрахувати ємність C_0 лінії на один метр.



Рисунок 1.21 – Схема двопровідної лінії

Прийmemo лінійний заряд першого провідника τ , а другого провідника $-\tau$. Для розрахунку в першому середовищі використовуємо наступні коефіцієнти відображення:

$$k_1' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{1 - 2}{1 + 2} = -0,333;$$

$$k_2' = \frac{2 \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{2 \cdot 1}{1 + 2} = 0,667.$$

Потенціал точки на межі між проводами вважатимемо рівним нулю. Потенціал першого проводу обчислимо відповідно до принципу накладення за рис. 1.22:

$$\varphi_1 = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_0} \left[\ln \frac{h_1}{r_0} + k'_1 \cdot \ln \frac{h_1}{2 \cdot h_1} - k'_2 \cdot \ln \frac{h_2}{h_1 + h_2} \right]$$

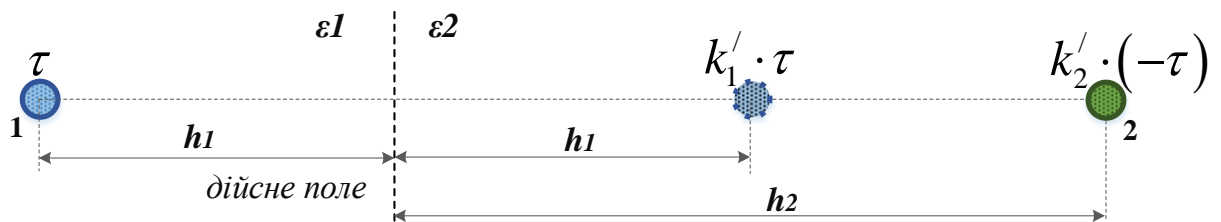


Рисунок 1.22 – До визначення потенціалу першого проводу

Для розрахунку в другому середовищі використовуємо наступні коефіцієнти відображення:

$$k''_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{2 - 1}{1 + 2} = 0,333;$$

$$k''_2 = \frac{2 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{2 \cdot 2}{1 + 2} = 1,333.$$

Потенціал другого проводу обчислимо відповідно до принципу накладення за рис. 1.23:

$$\varphi_2 = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_0} \left[-\ln \frac{h_2}{r_0} - k''_1 \cdot \ln \frac{h_2}{2 \cdot h_2} + k''_2 \cdot \ln \frac{h_1}{h_1 + h_2} \right].$$

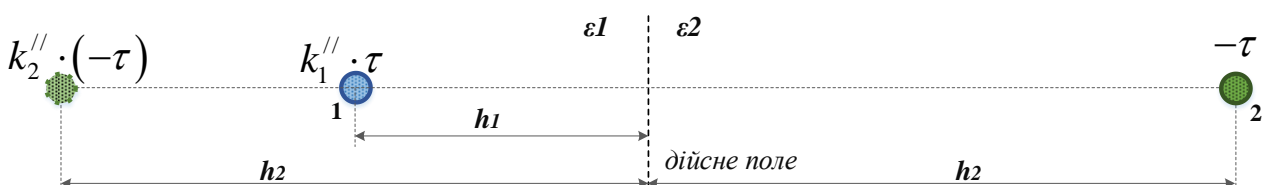


Рисунок 1.23 – До визначення потенціалу другого проводу

Напруга між проводами:

$$\begin{aligned}
 U &= \varphi_1 - \varphi_2 = \\
 &= \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \left[\ln \frac{h_1}{r_0} + k'_1 \cdot \ln \frac{h_1}{2 \cdot h_1} - k'_2 \cdot \ln \frac{h_2}{h_1 + h_2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\varepsilon_2} \cdot \left[-\ln \frac{h_2}{r_0} - k''_1 \cdot \ln \frac{h_2}{2 \cdot h_2} + k''_2 \cdot \ln \frac{h_1}{h_1 + h_2} \right] \right] = \\
 &= \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left[\frac{1}{1} \cdot \left[\ln \frac{0,2}{0,2 \cdot 10^{-2}} - 0,333 \cdot \ln \frac{0,2}{2 \cdot 0,2} - 0,667 \cdot \ln \frac{0,4}{0,2 + 0,4} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \left[-\ln \frac{0,4}{0,2 \cdot 10^{-2}} - 0,333 \cdot \ln \frac{0,4}{2 \cdot 0,4} + 1,333 \cdot \ln \frac{0,2}{0,2 + 0,4} \right] \right] = \tau \cdot 1,506 \cdot 10^{11}
 \end{aligned}$$

З останнього виразу визначимо заряд:

$$\tau = \frac{U}{1,506 \cdot 10^{11}} = \frac{500}{1,506 \cdot 10^{11}} = 3,32 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Кл}}{\text{м}}.$$

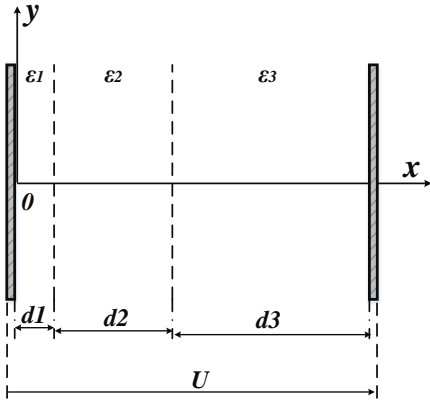
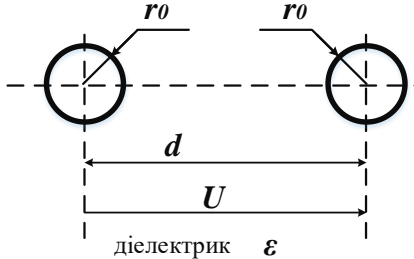
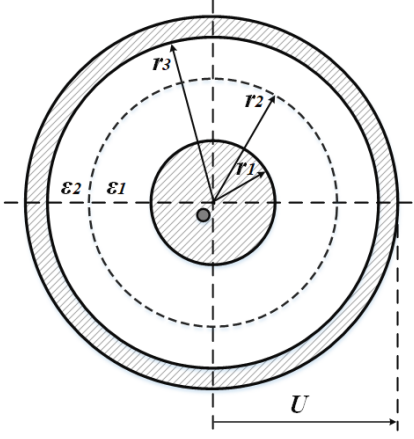
Ємність двопровідної лінії:

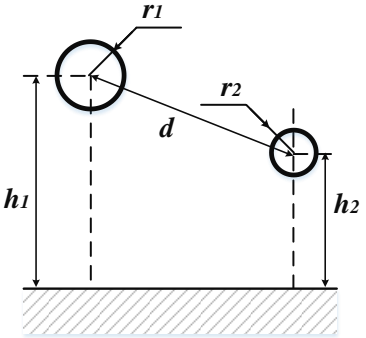
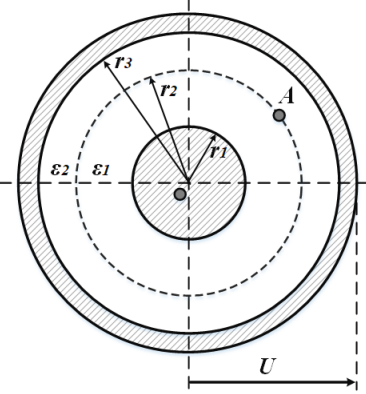
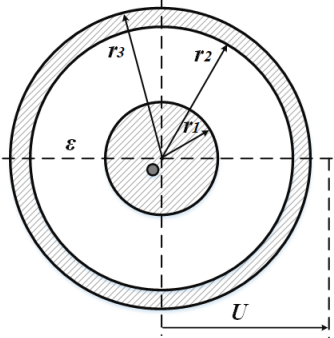
$$C = \frac{\tau}{U} = \frac{3,32 \cdot 10^{-9}}{500} = 6,64 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}} = 6,64 \frac{\text{пФ}}{\text{м}}.$$

Відповідь: $C_0 = 6,64 \text{ пФ/м}$.

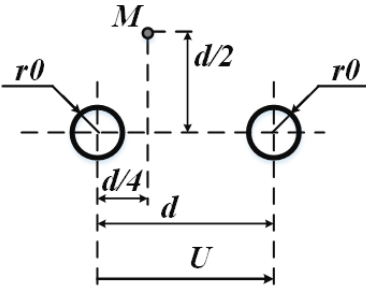
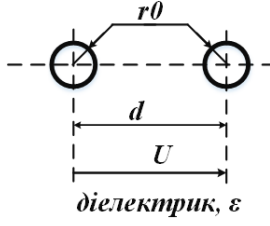
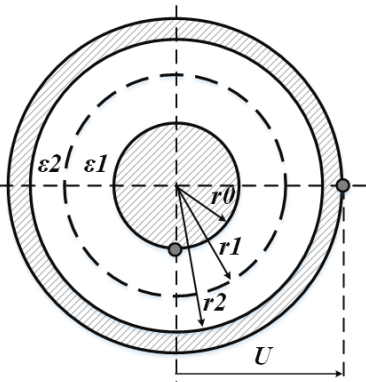
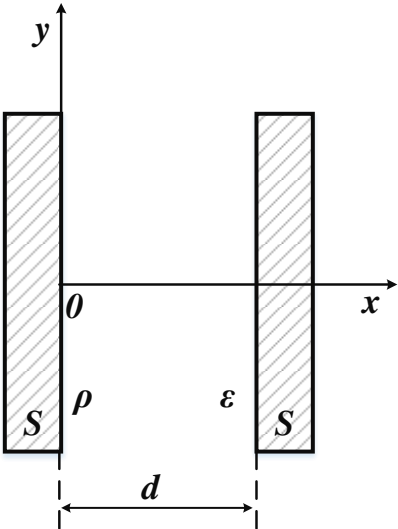
Індивідуальні завдання до теми 1

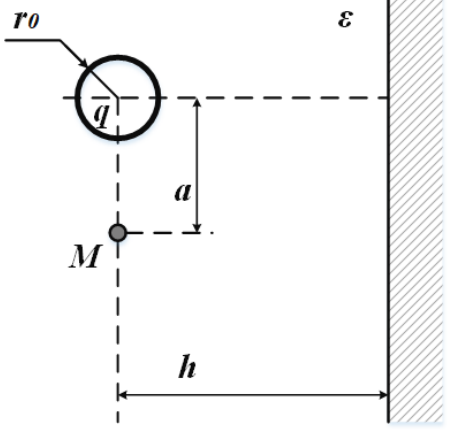
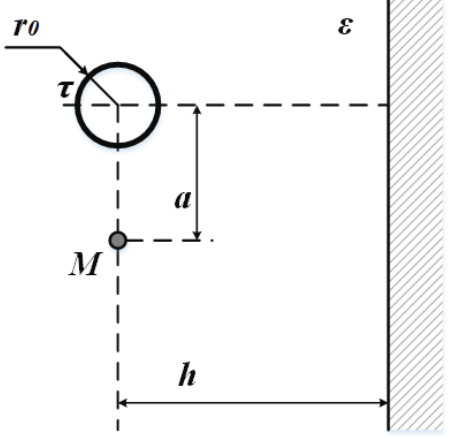
№	Завдання
1	<p>Об'ємний заряд розподілений з рівномірною щільністю $\rho = -2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м³ в діелектрику одношарового кульового конденсатора. Відносна діелектрична проникність $\varepsilon = 3$. Радіус внутрішнього шару $r_1 = 10$ см. Внутрішній радіус оболонки $r_2 = 20$ см. Конденсатор підключений до джерела постійної напруги $U = 3000$ В, оболонка заземлена. Накреслити схему установки, побудувати залежності $E(r)$ і $\varphi(r)$</p>
2	<p>Двопровідна лінія, виконана циліндричними проводами, знаходиться в діелектрику і розташована на відстані h від масивного провідного тіла: $r_0 = 2$ мм, $d = 20$ см, $h = 10$ см, $\varepsilon = 3$. Напруга $U = 800$ В. Знайти заряди проводів і ємність лінії, якщо довжина лінії $l = 200$ м.</p> 
3	<p>Постійна напруга між жилою та оболонкою двошарового коаксіального кабелю $U = 12$ кВ. Розміри: $r_1 = 2,5$ см, $r_2 = 5$ см, $r_3 = 8$ см, $r_4 = 8,6$ см. Властивості ізоляції: $\varepsilon_1 = 4,5$; $\varepsilon_2 = 1,5$. Побудувати залежності $E(r)$ і $\varphi(r)$, визначити енергію 500 м кабелю.</p> 
4	<p>Між шаром радіусом $r_0 = 5$ см і поверхнею, що проводить, напруга $U = 36$ кВ, $h = 1,2$ м. Визначити заряд шара, ємність між кулею і поверхнею, силу, що діє на кулю.</p> 

5	<p>Плоский конденсатор з тришаровим діелектриком $d_1=0,5$ см; $d_2=1,5$ см; $d_3=2,5$ см; $\varepsilon_1=6$; $\varepsilon_2=4$; $\varepsilon_3=2$ підключений до джерела постійної напруги $U = 6$ кВ.</p> <p>Побудувати графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$, визначити об'ємну щільність енергії першого шару діелектрика.</p>	
6	<p>Відокремлена куля з полістиролу ($\varepsilon=4$), рівномірно заряджена з об'ємною щільністю ρ, знаходиться у повітрі. Потенціал центру кулі $\varphi_{in}=1500$ В, потенціал точок, віддалених в нескінченність, $\varphi_{in} = 0$. Напруженість поля всередині кулі у самій його поверхні становить 10^4 В/м. Привести рисунок, визначити радіус кулі r_0 і об'ємну щільність заряду ρ.</p>	
7	<p>Напруга між проводами двопровідної лінії, що знаходиться в діелектрику ($\varepsilon = 3$), $U = 4000$ В. Визначити сили, що діють на 60 м проводів, якщо $r_0=2,5$ мм, $d=15$ мм</p>	
8	<p>Знайти напругу і заряд на одиницю довжини двошарового коаксіального кабелю, якщо $r_1 = 2$ см; $r_2=4,5$ см; $r_3=7$ см; об'ємна щільність енергії поля в точці А діелектрика $w_e = 8 \cdot 10^{-7}$ Дж/см³, властивості діелектриків $\varepsilon_1 = 4$; $\varepsilon_2 = 1,5$.</p> <p>Побудувати графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$</p>	

9	<p>Дві кулі радіусами $R_1=2$ см і $R_2=1$ см розташовані в діелектрику з $\varepsilon=3$ на відстані $d=80$ см. Відстань до землі $h_1=90$ см, $h_2=60$ см, напруга між кулями 16 кВ. Визначити заряди куль.</p>	
10	<p>Об'ємний заряд розподілений з рівномірною щільністю $\rho = -3 \cdot 10^{-6}$ Кл/м³ між жилою і оболонкою коаксіального кабелю, довжина якого $l=10$ м. Радіус жили $r_1=3$ см, внутрішній радіус оболонки $r_2=8$ см, діелектрик має $\varepsilon=2,5$. Кабель підключений до джерела постійної напруги $U=5000$ В, оболонка заземлена. Привести рисунок, побудувати графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$</p>	
11	<p>Знайти напругу і заряд шарового конденсатора, якщо $r_1=2$ см; $r_2=4$ см; $r_3=7$ см; $\varepsilon_1=5$; $\varepsilon_2=2$, об'ємна щільність енергії поля в точці А на поверхні внутрішнього шару діелектрика $w_e = 9 \cdot 10^{-7}$ Дж/см³. Побудувати графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$</p>	
12	<p>До кульового конденсатора докладено постійна напруга $U=6000$ В. $\varepsilon=4$, $r_1=3$ см, $r_2=7$ см, $r_3=8$ см. Побудувати графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$. Знайти ємність конденсатора.</p>	

13	Розрахувати потенціали поля в точках А і В, розташованих в різних діелектриках, якщо $\varepsilon_1=6$, $\varepsilon_2=2$, $h=40$ см, $a=30$ см, $\tau = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м. Потенціал точки М прийняти рівним φ_M .	
14	До коаксіального кабелю довжиною $l = 120$ м докладено постійна напруга $U = 3000$ В. $\varepsilon = 3,5$; $r_1 = 3$ см, $r_2 = 7$ см, $r_3 = 8$ см. Побудувати графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$. Знайти ємність кабелю.	
15	Два кулі радіусами $R_1 = 2$ см і $R_2 = 1$ см розташовані в повітрі над поверхнею землі на відстанях $h_1 = 60$ см, $h_2 = 1$ м. Напруга між кулями $U = 12$ кВ. Розрахувати ємність між кулями і енергію поля. $d = 80$ см.	
16	Сферичний конденсатор має два шари ізоляції: $\varepsilon_1 = 4,5$; $\varepsilon_2 = 1,5$; $r_1 = 0,5$ см; $r_2 = 3$ см; $r_3 = 7$ см; $U = 4$ кВ. Визначити ємність конденсатора, побудувати графіки $E(r)$ і $\varphi(r)$. Знайти об'ємну щільність енергії поля на відстані $r = 2$ см.	
17	Два циліндричних дроти радіусами $r_1 = 6$ мм і $r_2 = 3$ мм розташовані в повітрі на відстані $d = 10$ см. Відстані до землі $h_1 = 12$ см, $h_2 = 8$ см. Напруженість поля в точці М $E = 1,5$ кВ/см. Знайти напругу між проводами.	

18	<p>Напруга між двома кулями однакового радіуса $R_0=1$ см, що знаходяться в повітрі, $U=2$ кВ, $d=40$ см. Знайти ємність C між кулями, а також напруженість поля в точці М.</p>	
19	<p>Напруга між циліндричними проводами однакового радіуса $r_0=1$ см, що знаходяться в діелектрику ($\varepsilon=4$), $U=600$ В. Розрахувати ємність C_0 і силу тяжіння проводів F_0.</p>	
20	<p>Яку максимальну напругу можна підвести до двохшарового кульового конденсатора, якщо пробивна напруженість $E_{проб}=80$ кВ/см, запас електричної міцності $n=2,5$ і $R_0=1$ мм; $R_1=2$ мм; $R_2=4$ мм. Побудувати при цьому графік $E(R)$, знайти напруги на кожному шарі діелектрика. $\varepsilon_1=5$; $\varepsilon_2=2$.</p>	
21	<p>Закон зміни потенціалу між обкладками плоского конденсатора $\varphi = ax^3 + bx^2 + cx$, де $a=8 \cdot 10^8$ В/м³, $b=11 \cdot 10^8$ В/м², $c=15 \cdot 10^8$ В/м. Нехтуючи крайовим ефектом, знайти повний заряд частинок, розташованих в об'ємі конденсатора, якщо поверхня обкладок $S=0,02$ м², $d=0,4$ см, $\varepsilon=3$. Побудувати графік напруженості поля.</p>	

22	<p>Заряджений куля радіусом $r_0=4$ см знаходиться в діелектрику ($\varepsilon=3$) на відстані $h = 1,2$ м від масивного провідного тіла. Заряд кулі $q = 1,5 \cdot 10^{-6}$ Кл. Розрахувати ємність системи «куля - провідне тіло», якщо $a=0,8$ м.</p>	
23	<p>Циліндричний провід радіусом $r_0 = 3$ мм знаходиться в діелектрику ($\varepsilon = 4$) на відстані $h=25$ мм від масивної провідної стіни. Заряд проводу $\tau=1,2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м. Розрахувати ємність системи «провід - провідна стіна», якщо $a = 15$ мм.</p>	

ТЕМА 2. ЕЛЕКТРИЧНЕ ПОЛЕ В ПРОВІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

2.1 Теоретичні положення

Закон Ома – закон лінійного зв'язку між струмом I в одномірному провіднику та напругою U (різницею потенціалів):

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}. \quad (2.1)$$

Щільність струму j для площадки S при струмі I :

$$j = \frac{I}{S};$$

Закон Ома в диференційній формі:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}. \quad (2.2)$$

Для постійного струму $\vec{j} = const$, коли

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0; \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (2.4)$$

Для електродів у провідному середовищі:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = I. \quad (2.5)$$

Потужність, яка виділяється в одиниці об'єму:

$$p = \gamma \cdot E^2 = \gamma \cdot \left(\frac{j}{\gamma} \right)^2 = \frac{j^2}{\gamma}. \quad (2.6)$$

Спожита потужність:

$$P = R \cdot I^2. \quad (2.7)$$

2.2 Практична частина

Приклад 2.1. Шаровий електрод. Шаровий електрод радіусом R_0 розташований в однорідному середовищі (рис. 2.1) з провідністю γ . Виконати розрахунок поля для струму I .

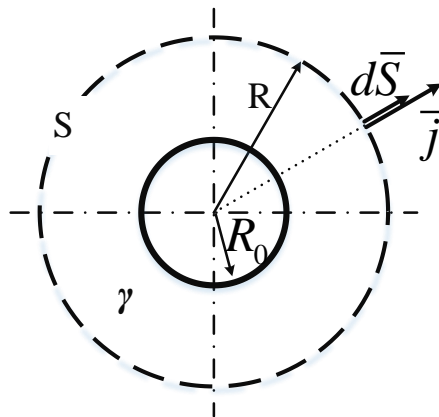


Рисунок 2.1 – Схема шарового електрода

З міркувань симетрії, навколо електрода проведемо сферичну поверхню S довільного радіусу R . Таким чином, струм, що протікає через замкнену поверхню, згідно (2.5):

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Очевидно, що щільність струму \vec{j} спрямована по радіусу R і збігається за напрямком з нормаллю $d\vec{S}$ (рис. 2.2). Тому величина щільності струму \vec{j} у всіх точках поверхні \vec{S} однакова:

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot S_{\text{кулі}} = j \cdot 4\pi R^2.$$

Звідки:

$$j = \frac{I}{4\pi R^2}. \quad (2.8)$$

За законом Ома в диференціальній формі, згідно (2.2), визначаємо напруженість електричного поля:

$$E = j \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{I}{4\pi R^2} \cdot \frac{1}{\gamma} \quad (2.9)$$

Потенціал поля шарового електрода:

$$\varphi = -\int E dR = -\int \frac{I}{4\pi \gamma} \cdot \frac{1}{R^2} dR = \frac{I}{4\pi \gamma R} + A. \quad (2.10)$$

Для визначення постійної інтегрування A приймемо, що потенціал дорівнює нулю у нескінченності $\varphi_{R=\infty} = 0$, тоді $A = 0$ і

$$\varphi = \frac{I}{4\pi \gamma R}.$$

Відповідь: $j = \frac{I}{4\pi R^2}$; $E = \frac{I}{4\pi\gamma R^2}$; $\varphi = -\int E dR = \frac{I}{4\pi\gamma R} + A$.

Приклад 2.2. Циліндричний електрод. В однорідному середовищі з провідністю γ заданий циліндричний електрод (рис. 2.2) радіусом r_0 і довжиною l . Виконати розрахунок поля для струму I .

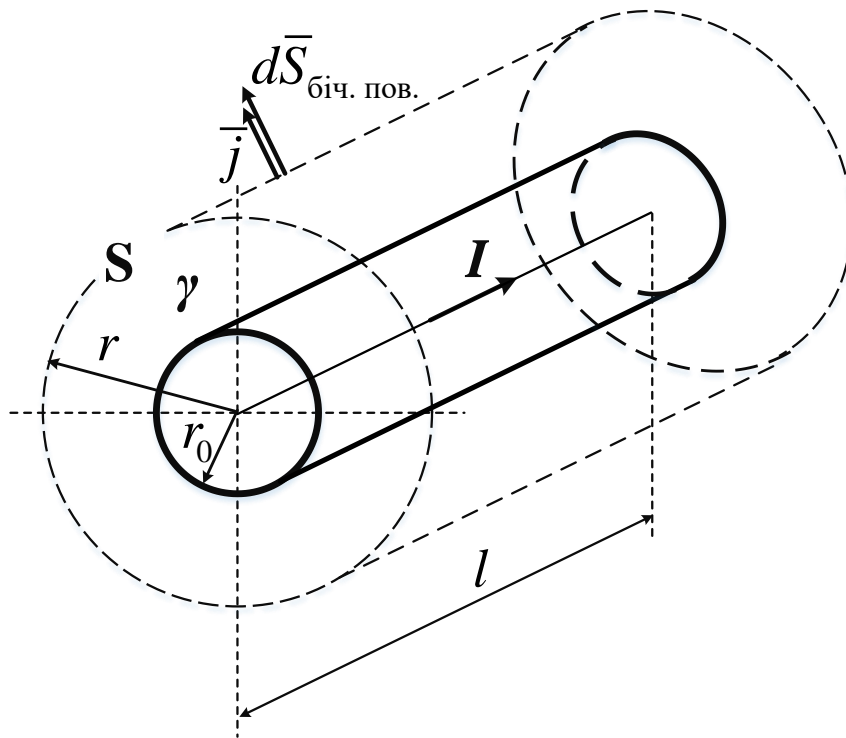


Рисунок 2.2 – Схема циліндричного електрода

З міркувань симетрії, навколо циліндричного електрода проведемо циліндричну поверхню S довільного радіусу r довжиною l . Таким чином, струм, що протікає через бічну поверхню, згідно (2.5):

$$I = \int_{S_{\text{біч. пов.}}} \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Очевидно, що щільність струму \vec{j} спрямована по радіусу r і збігається за напрямком з нормаллю $d\vec{S}_{\text{біч. пов.}}$ (рис. 2.2). Тому величина щільності струму \vec{j} у всіх точках бічної поверхні \vec{S} однакова:

$$I = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot S_{\text{біч. пов.}} = j \cdot 2\pi r l.$$

$$j = \frac{I}{2\pi r l}. \quad (2.11)$$

За законом Ома в диференціальній формі, згідно (2.2), визначаємо напруженість електричного поля:

$$E = j \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r l} \cdot \frac{1}{\gamma}. \quad (2.12)$$

Потенціал поля циліндричного електрода:

$$\varphi = -\int E dr = -\int_{r_0}^{\infty} \frac{I}{2\pi \gamma l} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{-I}{2\pi l \gamma} \ln(r_0) + A.$$

Для визначення постійної інтегрування A приймемо, що потенціал електрода на відстані H , дорівнює нулю $\varphi_{r=H} = 0$, тоді $A = \frac{I}{2\pi l \gamma} \ln(H)$:

$$\varphi = \frac{I}{2\pi l \gamma} \ln\left(\frac{H}{r}\right). \quad (2.13)$$

Відповідь: $\delta = \frac{I}{2\pi r l}$; $E = \frac{I}{2\pi r l \gamma}$; $\varphi = \frac{I}{2\pi l \gamma} \ln\left(\frac{H}{r}\right)$.

Приклад 2.3. Циліндричний заземлювач. Виконати розрахунок циліндричного заземлювача кінцевої довжини h , забитого вертикально у землю (рис. 2.3).

Спочатку застосуємо метод дзеркальних зображень. Нехай струм, що відводиться, дорівнює I . Питомий струм на одиницю довжини заземлювача

$$I_0 = I/h.$$

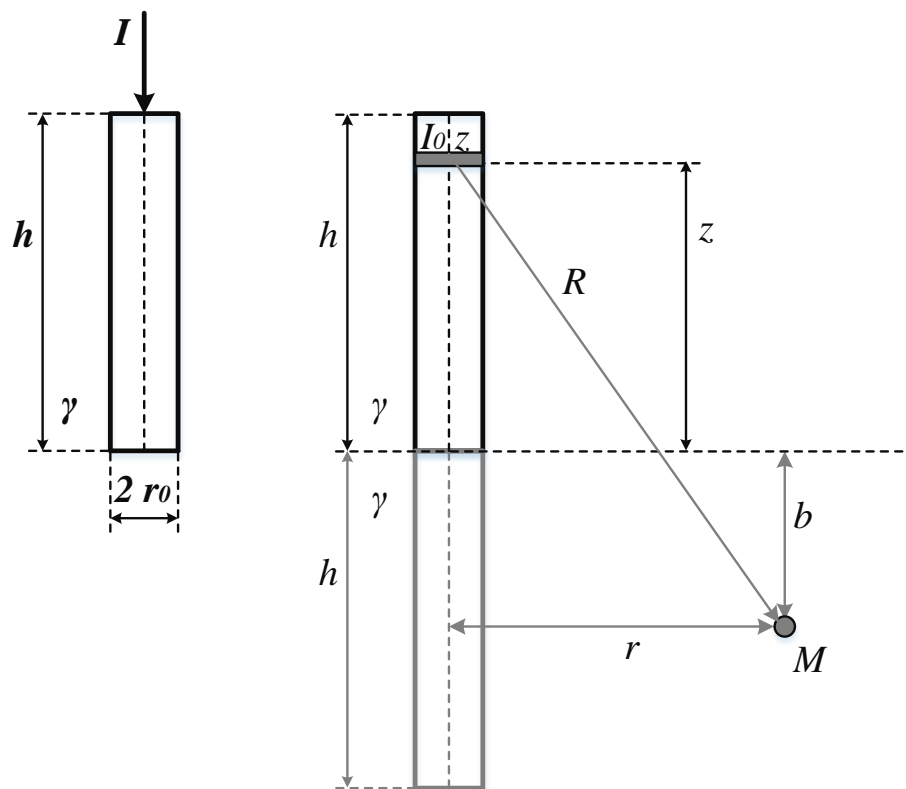


Рисунок 2.3 – Схема циліндричного електрода

Довільна точка M має координати r та b (α ролі не грає). Елемент струму $I_0 dz$, що знаходиться на відстані z від початку координат, можна розглядати як точковий. Складова потенціалу (2.13), яка обумовлена його дією:

$$d\varphi = \frac{I_0 dz}{2\pi\gamma R} = \frac{I_0 dz}{2\pi\gamma\sqrt{r^2 + (z-b)^2}} = \frac{I_0 d(z-b)}{2\pi\gamma\sqrt{r^2 + (z-b)^2}}.$$

Потенціал довільної точки простору M :

$$\varphi = \int_{-h}^h d\varphi = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{(h-b) + \sqrt{(h-b)^2 + r^2}}{(-h-b) + \sqrt{(-h-b)^2 + r^2}}.$$

Потенціал заземлювача (потенціал точки на поверхні землі з координатами $r = r_0$ і $b=0$):

$$\varphi_3 = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + r_0^2}}{-h + \sqrt{h^2 + r_0^2}} = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + r_0^2}}{r_0}.$$

При $h \gg r_0$ потенціал заземлювача:

$$\varphi_3 \approx \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{2h}{r_0}. \quad (2.14)$$

Опір заземлювача:

$$r_3 = \frac{\varphi_3}{I_0} = \frac{1}{2\pi\gamma} \ln \frac{2h}{r_0}. \quad (2.15)$$

Максимальна крокова напруга:

$$U_{u\max} = \varphi_3 - \varphi_{r=r_0+l_u} = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \left(\ln \frac{h + \sqrt{h^2 + r_0^2}}{r_0} - \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + (r_0+l_u)^2}}{r_0+l_u} \right). \quad (2.16)$$

Відповідь: $\varphi_3 \approx \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{2h}{r_0}$; $r_3 = \frac{\varphi_3}{I_0} = \frac{1}{2\pi\gamma} \ln \frac{2h}{r_0}$;

$$U_{u \max} = \varphi_3 - \varphi_{r=r_0+l_u} = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \left(\ln \frac{h + \sqrt{h^2 + r_0^2}}{r_0} - \ln \frac{h + \sqrt{h^2 + (r_0+l_u)^2}}{r_0+l_u} \right).$$

Приклад 2.4. Коаксіальний кабель. Виконати розрахунок струм витоку I_0 коаксіального кабелю (рис. 2.4). Жила кабелю радіусом $r_1 = 1$ мм має два шара ізоляції, які мають відповідно радіуси $r_2 = 2$ мм та $r_3 = 3$ мм з питомою провідністю $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-8}$ См/м та $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-8}$ См/м і з відносною діелектричною проникністю $\varepsilon_1 = 2$ та $\varepsilon_2 = 5$. Підведена напруга $U = 10$ кВ.

Знайти питомі теплові втрати у точці М, провідності та ємності між тілами, побудувати схему заміщення системи. Кабель вважати дуже протяжним, а розрахунки виконати на одиницю довжини. Додатково визначити максимальну довжину кабелю як лінії електропередачі.

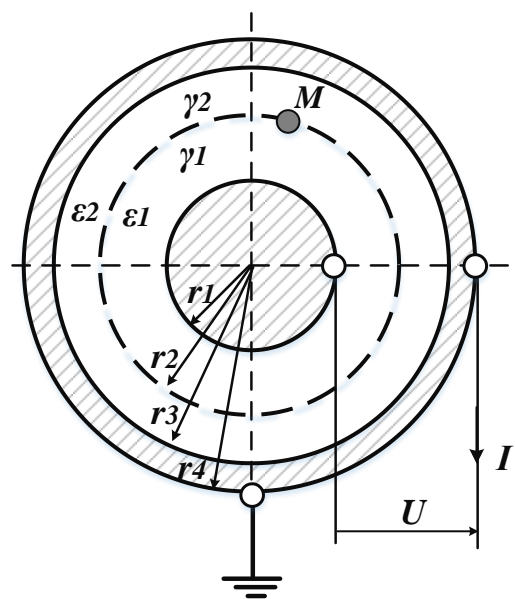


Рисунок 2.4 – Схема коаксіального кабелю

Щільність струму в кабелі визначається за попередньо визначеною формулою (2.11): $j = \frac{I}{2\pi r l}$, а напруженість електричного поля – за формулою

$$(2.12): E = j \cdot \frac{1}{\gamma} = \frac{I}{2\pi r l} \cdot \frac{1}{\gamma}.$$

Згідно (2.13) потенціали шарів діелектриків $\varphi_1 = \frac{-I}{2\pi l \gamma_1} \ln(r) + A_1$ і

$\varphi_2 = \frac{-I}{2\pi l \gamma_2} \ln(r) + A_2$, тому напруга прикладена до кабелю:

$$\begin{aligned}
 U &= [\varphi_1(r_1) - \varphi_1(r_2)] + [\varphi_2(r_2) - \varphi_2(r_3)] = \\
 &= \frac{I}{2\pi l \gamma_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{I}{2\pi l \gamma_2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) = \frac{I}{2\pi l \gamma_2} \cdot \left[\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \right] \\
 U &= \frac{I}{2\pi l \gamma_2} \cdot \left[\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\gamma_1/\gamma_2} \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

За допомогою формули (2.17) визначаємо струм витоку:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{I}{l} = \frac{U \cdot 2\pi \cdot \gamma_2}{\left[\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\gamma_1/\gamma_2} \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \right]} \\
 I_0 &= \frac{10000 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{\left[\ln\left(\frac{2}{1}\right)^{5 \cdot 10^{-8} / 2 \cdot 10^{-8}} \cdot \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right]} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ А/м} = 1,8 \text{ мА/м}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Провідність кабелю струмам витоку (закон Ома):

$$g_0 = \frac{I_0}{U} = \frac{1,8 \cdot 10^{-3}}{10000} = 0,18 \cdot 10^{-6} \text{ См/км} = 0,18 \text{ мкСм/км}.$$

Цю ж відповідь можна отримати, використовуючи аналогію між електричним полем у провідному середовищі та електростатичним.

Визначаємо ємність шарів коаксіального кабелю згідно формули (1.23):

$$C_{10} = \frac{2\pi \varepsilon_1 \varepsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{\ln(2 \cdot 10^{-2}/1 \cdot 10^{-2})} = 1,604 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м} = 160,4 \text{ пФ/м};$$

$$C_{20} = \frac{2\pi \varepsilon_2 \varepsilon_0 l}{\ln(r_3/r_2)} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{\ln(3 \cdot 10^{-2}/2 \cdot 10^{-2})} = 6,857 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м} = 685,7 \text{ пФ/м}.$$

Результуюча ємність шарів:

$$C_0 = \frac{C_{10} \cdot C_{20}}{C_{10} + C_{20}} = \frac{160,4 \cdot 685,7}{160,4 + 685,7} \approx 130 \text{ пФ/м}.$$

Провідності шарів та всього кабелю на одиницю довжини:

$$g_{10} = \frac{2\pi \gamma_1 l}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-8} \cdot 1}{\ln(2 \cdot 10^{-2}/1 \cdot 10^{-2})} = 0,453 \cdot 10^{-6} \text{ См/м};$$

$$g_{20} = \frac{2\pi \gamma_2 l}{\ln(r_3/r_2)} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1}{\ln(3 \cdot 10^{-2}/2 \cdot 10^{-2})} = 0,31 \cdot 10^{-6} \text{ См/м};$$

$$g_0 = \frac{g_{10} \cdot g_{20}}{g_{10} + g_{20}} = \frac{0,453 \cdot 10^{-6} \cdot 0,31 \cdot 10^{-6}}{0,453 \cdot 10^{-6} + 0,31 \cdot 10^{-6}} = 0,1841 \cdot 10^{-6} \text{ См/м} = 0,184 \text{ мкСм/м}.$$

Електрична схема заміщення коаксіального кабелю – рис. 2.5.

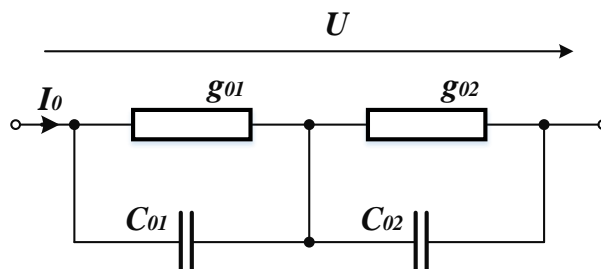


Рисунок 2.5 – Електрична схема заміщення коаксіального кабелю

Величина щільності струму \bar{j} в точці М згідно формули (2.9):

$$j = \frac{I_0}{2\pi r_2 l} = \frac{0,0018}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 1} = 0,142 \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Теплові втрати в точці М згідно формули (2.6), законом Джоуля-Ленца:

$$p_1 = \frac{j^2}{\gamma_1} = \frac{0,142^2}{5 \cdot 10^{-8}} = 0,403 \cdot 10^6 = 0,4 \frac{\text{МВт}}{\text{м}^3};$$

$$p_2 = \frac{j^2}{\gamma_2} = \frac{0,142^2}{2 \cdot 10^{-8}} = 1,013 \cdot 10^6 = 1,013 \frac{\text{МВт}}{\text{м}^3}.$$

Визначимо максимальну довжину кабелю як лінії електропередачі. Скористаємося допустимою щільністю струму для кабелів з алюмінієвими жилами: $j_{\text{доп}} = 1 \text{ А/мм}^2$. Перетин жили кабелю: $S = \pi \cdot r_1^2 = \pi \cdot 1^2 = 3,14 \text{ мм}^2$. Допустимий струм для кабелю: $I_{\text{доп}} = j_{\text{доп}} \cdot S = 1 \cdot 3,14 = 3,14 \text{ А}$. Допустима довжина кабелю: $l_{\text{доп}} = I_{\text{доп}} / I_0 = 3,14 / 0,0018 = 1757 \text{ м}$.

Відповідь: $C_{10} = 160,4 \text{ пФ/м}$; $C_{20} = 685,7 \text{ пФ/м}$; $C_0 = 130 \text{ пФ/м}$;

$g_{10} = 0,453 \text{ мкСм/м}$; $g_{20} = 0,31 \text{ мкСм/м}$; $g_0 = 0,184 \text{ мкСм/м}$;

$I_0 = 1,8 \text{ мА/м}$; $p_1 = 0,4 \text{ МВт/м}^3$; $p_2 = 1,013 \text{ МВт/м}^3$; $l_{\text{доп}} = 1757 \text{ м}$.

Приклад 2.5. Двошаровий конденсатор. Визначити струм витоку плоского двошарового конденсатора та теплові втрати в одиниці об'єму другого діелектрика (рис. 2.6). Вихідні дані: $d_1 = 1 \text{ см}$; $d_2 = 2 \text{ см}$; $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-8} \text{ См/м}$; $\gamma_2 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ См/м}$; $U = 1,8 \text{ кВ}$; $S = 0,01 \text{ м}^2$.

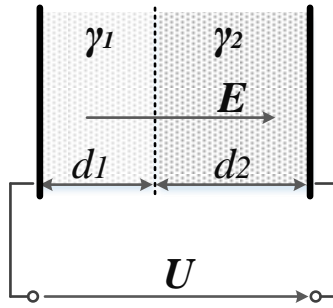


Рисунок 2.6 – Схема двошарового конденсатора

За другим законом Кірхгофа: $U = U_1 + U_2 = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2$.

Гранична умова для щільності струму: $j_1 = j_2$; $\gamma_1 \cdot E_1 = \gamma_2 \cdot E_2$.

Тоді: $E_1 = (\gamma_2 / \gamma_1) \cdot E_2$. Звідки: $U = E_2 \cdot [(\gamma_2 / \gamma_1) \cdot d_1 + d_2]$.

$$E_2 = \frac{U}{(\gamma_2 / \gamma_1) \cdot d_1 + d_2} = \frac{1800}{(2 \cdot 10^{-8} / 5 \cdot 10^{-8}) \cdot 1 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-2}} = 75 \cdot 10^3 \text{ В};$$

$$E_1 = (\gamma_2 / \gamma_1) \cdot E_2 = (2 \cdot 10^{-8} / 5 \cdot 10^{-8}) \cdot 75 \cdot 10^3 = 30 \cdot 10^3 \text{ В};$$

Перевірка:

$$U = E_1 \cdot d_1 + E_2 \cdot d_2;$$

$$18000 = 30 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-2} + 75 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2}.$$

Щільність струму: $j = j_1 = j_2 = \gamma_1 \cdot E_1 = 5 \cdot 10^{-8} \cdot 75 \cdot 10^3 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ А/м}^2$.

Струм витoku: $I_0 = j \cdot S = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,01 = 1,5 \cdot 10^{-5} = 0,15 \text{ мкА}$.

Теплові втрати другого діелектрика згідно формули (2.6):

$$p_2 = \frac{j^2}{\gamma_2} = \frac{0,0015^2}{2 \cdot 10^{-8}} = 112,5 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

Відповідь: $I_0 = 0,15 \text{ мкА}$; $p_2 = 112,5 \text{ Вт/м}^3$.

Приклад 2.6. Заряджена куля. Куля радіусом $R_0 = 10 \text{ см}$ розташована у морській воді з питомою провідністю $\gamma = 0,2 \text{ См/м}$ на глибині $h = 2 \text{ м}$ (рис. 2.7, а). Металева плита знаходиться на поверхні води. Між кулею і плитою діє напруга

$U=220$ В. Визначити струм I , що замикається між кулею і необмеженою металевою поверхнею. Знайти питомі теплові втрати p у точці М.

Розумно скористатися методом зображень – рис. 2.7, б.

Коефіцієнт відображення: $k_1 = \frac{\gamma - \infty}{\gamma + \infty} = \frac{\frac{\gamma}{\infty} - 1}{\frac{\gamma}{\infty} + 1} = -1$.

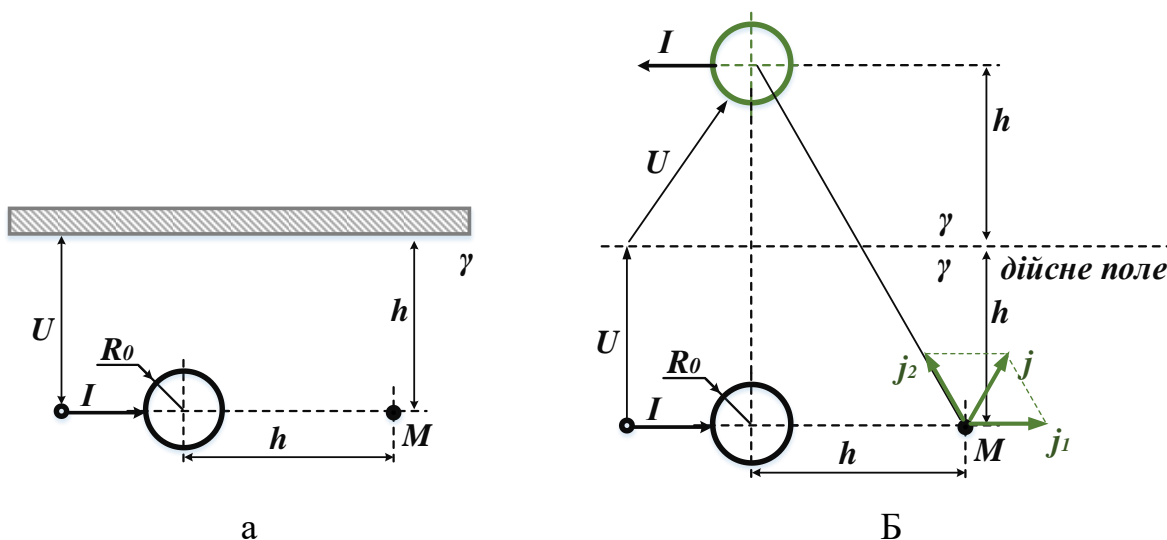


Рисунок 2.7 – Заряджена куля

Далі застосовуємо принцип накладання.

Потенціал одного кульового електрода згідно (2.10): $\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma R}$.

Таким чином, потенціал кулі: $U = \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I}{4\pi\gamma} \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{2h} \right)$.

Звідси струм I , що замикається між кулею і необмеженою металевою

поверхнею: $I = \frac{U \cdot 4\pi\gamma}{\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{2h} \right)} = \frac{220 \cdot 4\pi \cdot 0,2}{\left(\frac{1}{10 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{2 \cdot 2} \right)} = 56,71 \text{ А}.$

Скористаємося принципом накладання для визначення щільності струму в

точці М. Щільність струму для кульового електрода згідно (2.8): $j = \frac{I}{4\pi R^2}$.

$$\cos \alpha = \frac{2h}{\sqrt{(2h)^2 + h^2}} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{(2 \cdot 2)^2 + 2^2}} = 0,894;$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{(2h)^2 + h^2}} = \frac{2}{\sqrt{(2 \cdot 2)^2 + 2^2}} = 0,447.$$

Для полегшення наступного векторного складання щільності струму розкладемо їх на горизонтальну та вертикальну складові:

$$j' = \frac{I}{4\pi h^2}$$

$$j'_x = \frac{I}{4\pi h^2}$$

$$j'_y = 0$$

$$j'' = \frac{I}{4\pi(h^2 + (2h)^2)} = \frac{I}{20\pi \cdot h^2}$$

$$j''_x = \frac{-I \cdot \sin \alpha}{20\pi \cdot h^2}$$

$$j''_y = \frac{I \cdot \cos \alpha}{20\pi \cdot h^2}$$

$$\begin{aligned} j_M &= \sqrt{(j'_x + j''_x)^2 + (j'_y + j''_y)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{I}{4\pi h^2} - \frac{I \cdot \sin \alpha}{20\pi \cdot h^2}\right)^2 + \left(0 + \frac{I \cdot \cos \alpha}{20\pi \cdot h^2}\right)^2} = \\ &= \frac{I}{4\pi h^2} \sqrt{(1 - 0,2 \cdot \sin \alpha)^2 + (0,2 \cdot \cos \alpha)^2} = \\ &= \frac{56,71}{4\pi \cdot 2^2} \sqrt{(1 - 0,2 \cdot 0,447)^2 + (0,2 \cdot 0,894)^2} = 1,047 \end{aligned}$$

Питомі теплові втрати у точці M :

$$p_M = \frac{j_M^2}{\gamma} = \frac{1,047^2}{0,2} = 5,235 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}.$$

У разі розташування зарядженого дроту поблизу провідної поверхні після дзеркального зображення виникає двопровідна лінія.

Ємність двопровідної лінії:

$$C = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}.$$

Провідність двопровідної лінії:

$$G = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot l}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}.$$

Струм двопровідної лінії:

$$I = G \cdot U = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot l \cdot U}{\ln\left(\frac{d}{r_0}\right)}.$$

Відповідь: $I=56,71$ мкА; $p_M=5,235$ Вт/м³.

Приклад 2.7. Двопровідна лінія. Дроти двопровідної лінії напругою $U=500$ В знаходяться у різних діелектриках (рис. 2.8). Визначити струм витоку двопровідної лінії. Геометричні розміри та властивості середовищ: $r_0=0,2$ см; $r_1=20$ см; $r_2=40$ см; $\gamma_1=2 \cdot 10^{-8}$ См/м; $\gamma_2=1 \cdot 10^{-8}$ См/м.



Рисунок 2.8 – Двопровідна лінія

Вихідні дані відповідають умові задачі 1.17.

Для розрахунку використовуємо коефіцієнти відображення, аналогічно до задачі 1.17:

$$k_1' = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} - 1 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-8} + 1 \cdot 10^{-8}} = 0,333;$$

$$k_2' = \frac{2 \cdot \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-8} + 1 \cdot 10^{-8}} = 1,333;$$

$$k_1'' = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{1 \cdot 10^{-8} - 2 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-8} + 1 \cdot 10^{-8}} = -0,333;$$

$$k_2'' = \frac{2 \cdot \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10^{-8}}{1 \cdot 10^{-8} + 2 \cdot 10^{-8}} = 0,667.$$

Потенціал точок на межі між проводами вважатимемо рівним нулю.

Потенціали проводів обчислимо відповідно до принципу накладення за рис. 1.22, замінивши ε на γ , τ на I_0 :

$$\varphi_1 = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \gamma_1} \left[\ln \frac{r_1}{r_0} + k_1' \cdot \ln \frac{r_1}{2 \cdot r_1} - k_2' \cdot \ln \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right];$$

$$\varphi_2 = \frac{I_0}{2 \cdot \pi \cdot \gamma_2} \left[-\ln \frac{r_2}{r_0} - k_1'' \cdot \ln \frac{r_2}{2 \cdot r_2} + k_2'' \cdot \ln \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right].$$

Напруга між проводами:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I_0}{2 \cdot \pi} \left[\frac{1}{\gamma_1} \left(\ln \frac{r_1}{r_0} + k_1' \cdot \ln \frac{r_1}{2 \cdot r_1} - k_2' \cdot \ln \frac{r_2}{r_1 + r_2} \right) - \frac{1}{\gamma_2} \left(-\ln \frac{r_2}{r_0} - k_1'' \cdot \ln \frac{r_2}{2 \cdot r_2} + k_2'' \cdot \ln \frac{r_1}{r_1 + r_2} \right) \right] = I_0 \cdot 1,388 \cdot 10^{-8}$$

Звідси $I_0 = U / 1,388 \cdot 10^{-8} = 500 / 1,388 \cdot 10^{-8} = 3,603 \cdot 10^{-6}$ А/м=3,603 мкА/м.

Відповідь: $I_0 = 3,603$ мкА/м.

Приклад 2.8. Двопровідна лінія. Двопровідна лінія, виконана голим дротом, використовується у парнику для прогріву землі (рис. 2.9, а). Геометричні розміри: $h=50$ см, $d=80$ см, $r_0=3$ мм, $l=20$ м, $U=36$ В, $\gamma=0,2$ См/м. Визначити струм лінії I_0 та її потужність P_0 .

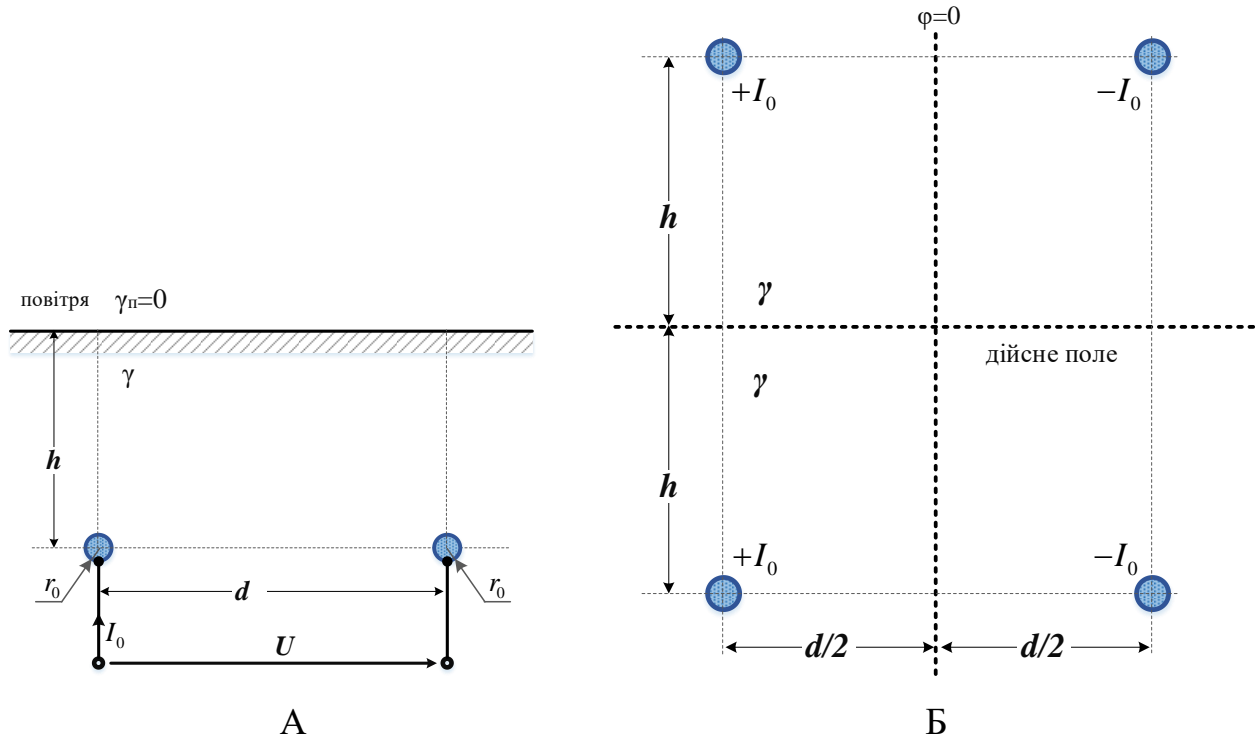


Рисунок 2.9 – Схема двопровідної лінії

Розумно використати метод дзеркальних зображень (рис. 2.9, б) відносно вертикальної площини між проводами. Коефіцієнт неповного відображення:

$$k_1 = \frac{\gamma - \gamma_n}{\gamma + \gamma_n} = 1.$$

Через симетричність відносно вертикальної площини її потенціал можна прийняти рівним нулю. Потенціал одного дроту згідно (2.14): $\varphi_3 \approx \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{2h}{r_0}$. Врахуємо також, що відстань від будь-якого дроту до цієї поверхні (до точки з нульовим потенціалом) дорівнює $d/2$.

Далі застосовуємо принцип накладення для визначення потенціалу лівого реального дроту:

$$\begin{aligned}
\frac{U}{2} &= \varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \varphi'''' = \\
&= \frac{I_0}{2\pi\gamma} \left[\ln \frac{d/2}{r_0} - \ln \frac{d/2}{d} + \ln \frac{d/2}{2 \cdot h} - \ln \frac{d/2}{\sqrt{d^2 + (2h)^2}} \right] = \\
&= \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{d \cdot \sqrt{d^2 + (2h)^2}}{r_0 \cdot 2 \cdot h}
\end{aligned}$$

$$\frac{U}{2} = \frac{I_0}{2\pi\gamma} \ln \frac{d \cdot \sqrt{d^2 + (2h)^2}}{r_0 \cdot 2 \cdot h}.$$

Звідси струм лінії на одиницю довжини:

$$I_0 = \frac{\pi \cdot \gamma \cdot U}{\ln \frac{d \cdot \sqrt{d^2 + (2h)^2}}{r_0 \cdot 2 \cdot h}} = \frac{\pi \cdot 0,2 \cdot 36}{\ln \frac{80 \cdot \sqrt{80^2 + (2 \cdot 50)^2}}{0,3 \cdot 2 \cdot 50}} = 3,878 \text{ А/м.}$$

Потужність лінії на одиницю довжини:

$$P_0 = I_0 \cdot U = 3,878 \cdot 36 = 139,6 \text{ Вт/м.}$$

Відповідь: $I_0 = 3,878 \text{ А/м}$; $P_0 = 139,6 \text{ Вт/м}$.

Приклад 2.9. Залізобетонна опора. Опора лінії електропередачі (ЛЕП) стоїть на півсферичному залізобетонному фундаменті неподалік краю глибокого обриву (рис. 2.10): $r_0 = 2 \text{ м}$; $h = 25 \text{ м}$. Провідність залізобетону набагато більше провідності землі і складає $\gamma = 1 \cdot 10^{-4} \text{ См/см}$. Через фундамент передбачається відводити струм короткого замикання $I_{\text{кз}} = 200 \text{ А}$. Розрахувати опір заземлювача, побудувати графік зміни потенціалу на поверхні землі для заземлювача, знайти максимальну крокову напругу. Довжину кроку прийняти рівним $l_{\text{ш}} = 0,8 \text{ м}$.

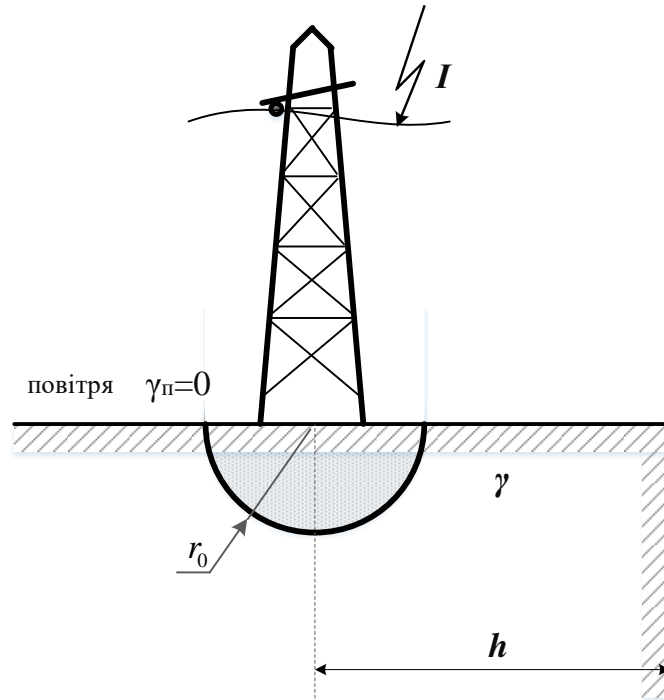


Рисунок 2.10 – Схема ЛЭП на залізобетонній опорі

Розумно використати метод дзеркальних зображень (рис. 2.11) відносно нижньої півплощини. Коефіцієнт неповного відображення: $k_I = \frac{\gamma - \gamma_{\text{п}}}{\gamma + \gamma_{\text{п}}} = 1$.

Потенціал одного шару в однорідному середовищі згідно (2.10):

$\varphi = \frac{I}{4\pi\gamma R}$. Врахуємо також, що через шар проходить струм $2I$, тому

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\gamma R}.$$

Далі застосовуємо принцип накладення для визначення потенціалу заземлювача:

$$\varphi = \varphi' + \varphi'' = \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right] = \frac{200}{2\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 25} \right] = 1655 \text{ В.}$$

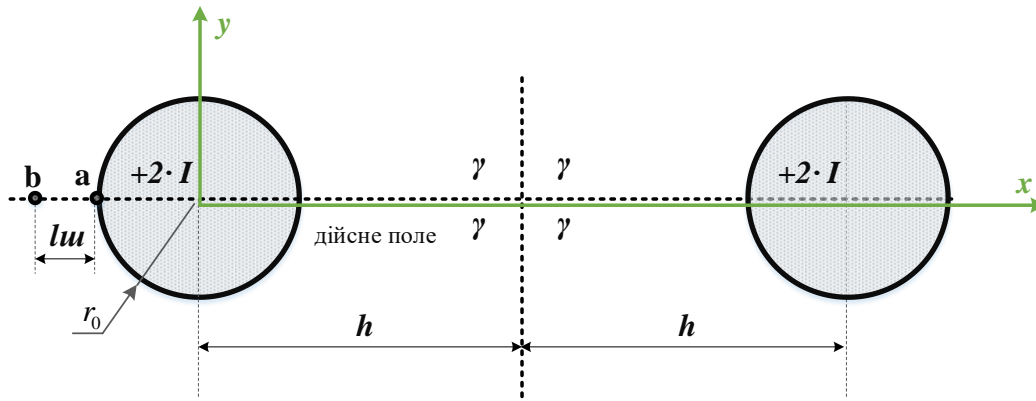


Рисунок 2.11 – Схема залізобетонної опори

Опір заземлювача згідно із законом Ома: $R_3 = \frac{\varphi_3}{I} = \frac{1655}{200} = 8,276 \text{ Ом.}$

Побудуємо графік залежності $\varphi(x)$ (рис. 2.12), де вісь координат 0-х розташуємо вздовж поверхні землі, починаючи від центру лівого шару в напрямку правого шару (рис. 2.11):

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right] & x \leq r_0 \\ \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \left[\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|2h-x|} \right] & x < r_0 \end{cases}$$

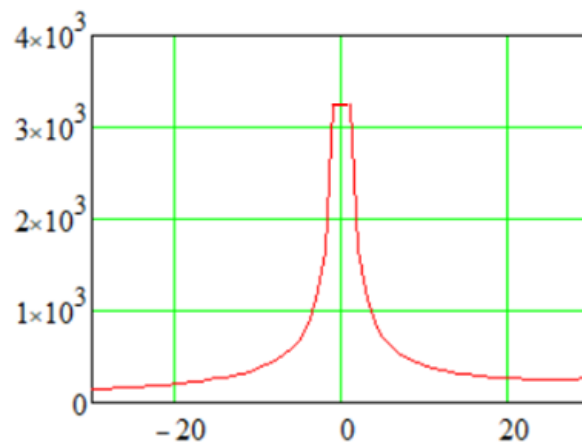


Рисунок 2.12 – Графік зміни потенціалу на поверхні землі для заземлювача

Як видно із графіка рис. 2.12 більш значна крутизна графіку потенціалу відповідає області негативних x . Тому максимальна крокова напруга буде між точками a та b (рис. 2.12):

$$U_{\text{ш max}} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{I}{2\pi\gamma} \cdot \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h+r_0} - \frac{1}{r_0+l_{\text{ш}}} - \frac{1}{2h+r_0+l_{\text{ш}}} \right] =$$

$$= \frac{200}{2\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^2} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 25 + 2} - \frac{1}{2 + 0,8} - \frac{1}{2 \cdot 25 + 2 + 0,8} \right] = 455,7 \text{ В.}$$

Відповідь: $R_3 = 8,276 \text{ Ом}$; рис. 2.12; $U_{\text{ш max}} = 455,7 \text{ В}$.

Приклад 2.10. Циліндричний заземлювач. Заземлювач складається з двох циліндрів (рис. 2.13): $h=1 \text{ м}$; $d=1,5 \text{ м}$; $r_0=0,1 \text{ м}$; $\gamma=0,1 \text{ См/м}$. Крокова напруга між точками a і b ($l_{\text{ш}}=0,8 \text{ м}$) не повинна перевищувати 50 В . Розрахувати максимально допустимий струм I_0 , що відводиться заземлювачем.

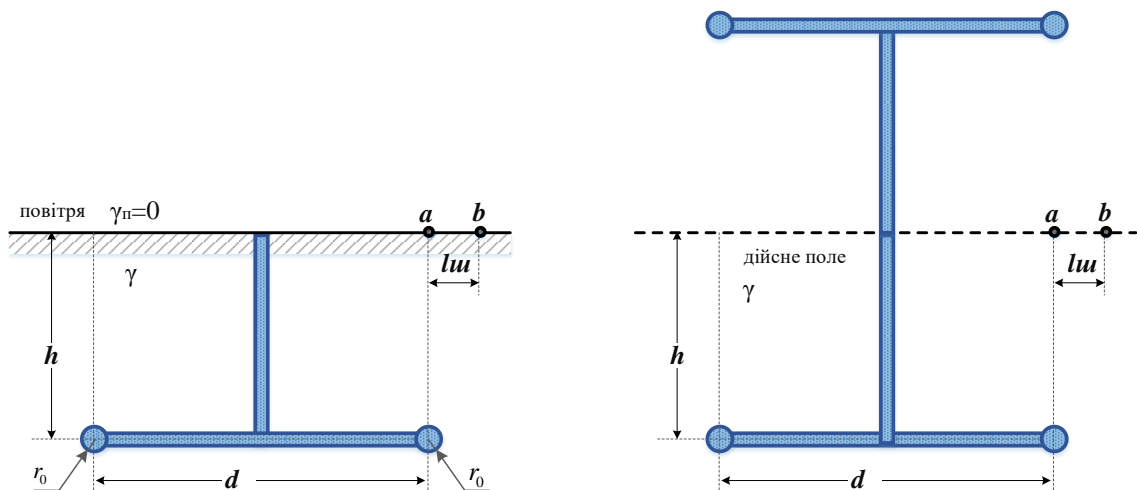


Рисунок 2.13 – Схема циліндричного заземлювача

Якщо на одиницю довжини заземлювача l відводиться струм I_0 , то кожному з двох циліндрів відповідає струм $I_0/2$. Потенціал поля від одного

циліндричного електрода згідно (2.13): $\varphi = \frac{I_0 / 2}{2\pi\gamma} \ln\left(\frac{H}{r}\right)$, де H – відстань до збираючого електроду.

Крокова напруга U_{ab} від двох циліндричних заземлювачів згідно методу дзеркальних відображень визначається як від чотирьох симетричних циліндрів в однорідному середовищі:

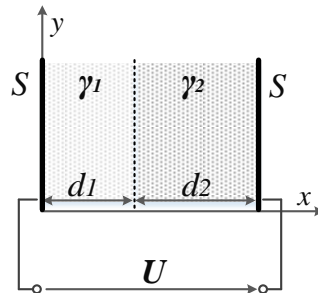
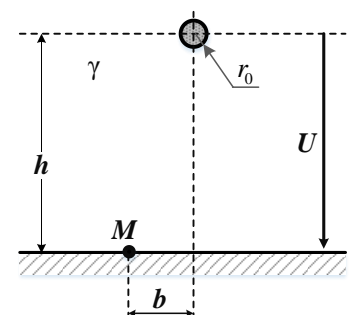
$$\begin{aligned} U_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b = \\ &= 2 \cdot \frac{I_0 / 2}{2\pi\gamma} \left[\ln \frac{H}{\sqrt{d^2 + h^2}} + \ln \frac{H}{l} - \ln \frac{H}{\sqrt{(d + l_{\text{ш}})^2 + h^2}} - \ln \frac{H}{\sqrt{l_{\text{ш}}^2 + h^2}} \right] = \\ &= \frac{I_0}{2\pi\gamma} \cdot \ln \frac{\sqrt{(d + l_{\text{ш}})^2 + h^2} \cdot \sqrt{l_{\text{ш}}^2 + h^2}}{\sqrt{d^2 + h^2} \cdot h} \end{aligned}$$

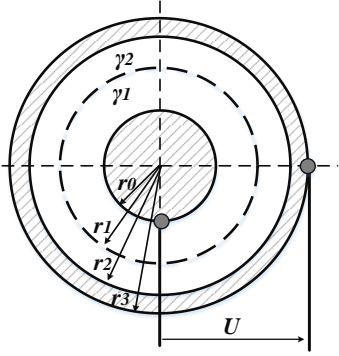
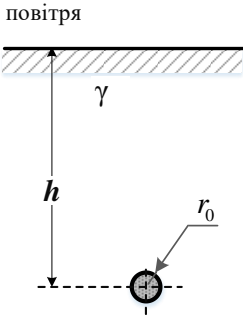
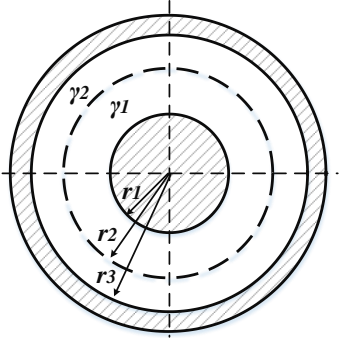
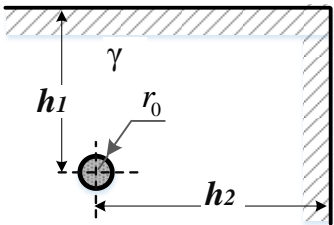
Величина струму:

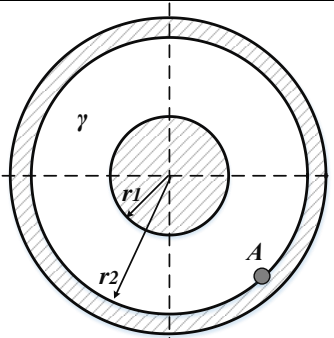
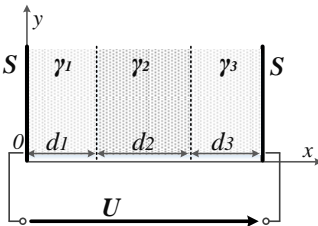
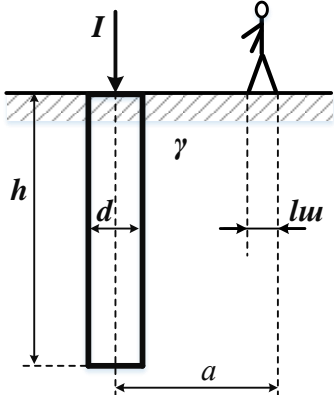
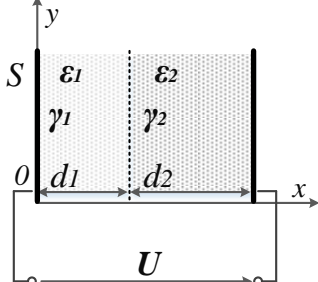
$$I_0 = \frac{2\pi \cdot \gamma \cdot U_{ab}}{\ln \frac{\sqrt{(d + l_{\text{ш}})^2 + h^2} \cdot \sqrt{l_{\text{ш}}^2 + h^2}}{\sqrt{d^2 + h^2} \cdot h}} = \frac{2\pi \cdot 0,1 \cdot 50}{\ln \frac{\sqrt{(1,5 + 0,8)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0,8^2 + 1^2}}{\sqrt{1,5^2 + 1^2} \cdot 1}} = 54,4 \text{ А/м.}$$

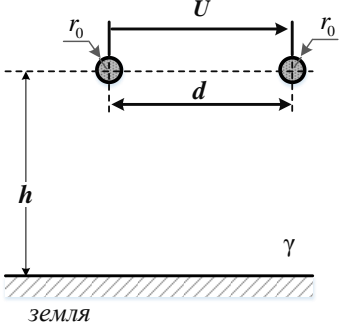
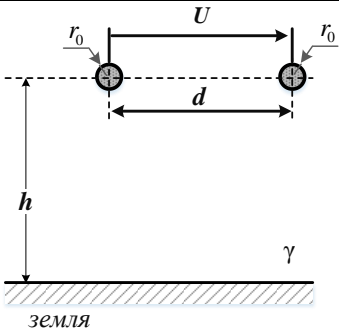
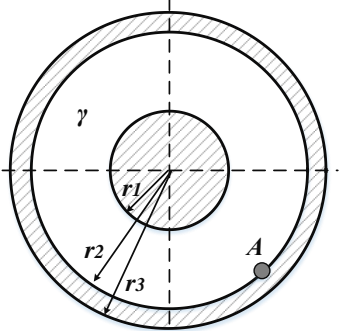
Відповідь: $I_0 = 54,4 \text{ А/м.}$

Індивідуальні завдання до теми 2

№	Завдання
1	<p>Плоский конденсатор з двошаровим недосконалим діелектриком підключений до джерела постійної напруги $U = 3$ кВ, площа обкладок $S = 625$ см², $d_1 = 1,5$ см, $\gamma_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ См/м, $d_2 = 1$ см, $\gamma_2 = 1 \cdot 10^{-6}$ См/м. Визначити струм конденсатора, побудувати графіки $E(x)$ і $\varphi(x)$, знайти теплові втрати в одиниці об'єму другого діелектрика.</p> 
2	<p>У морську воду ($\gamma = 0,2$ См/м) вертикально опущені дві металеві труби із зовнішнім діаметром $d = 100$ мм та довжиною $l = 4$ м. Знайти струм між трубами, якщо їх осі віддалені одна від одної на відстань $b = 0,6$ м, напруга між ними $U = 36$ кВ.</p>
3	<p>Ізоляція одношарового коаксіального кабелю має питому провідність $\gamma_1 = 10^{-8}$ См/м. Знайти струм витoku на одиницю довжини кабелю, визначити щільність струму витoku на поверхні жили та оболонки, якщо радіус жили $r_1 = 3$ мм, внутрішній радіус оболонки $r_2 = 7$ мм, напруга між жилою та оболонкою $U = 1$ кВ.</p>
4	<p>Визначити струм витoku між кулею та металевою плитою, якщо питома провідність середовища $\gamma = 3 \cdot 10^{-2}$ См/м, $R_0 = 2$ см, $h = 60$ см, $U = 600$ В, $b = 40$ см. Знайти також напруженість поля в ізоляції для точки М, що знаходиться на межі розділу середовищ</p> 

5	<p>Простір між жилою та оболонкою двошарового циліндричного конденсатора заповнено недосконалою ізоляцією: $\gamma_1=2 \cdot 10^{-7}$ См/м, $r_0=1,5$ см, $r_1=4$ см, $r_2=8$ см, $\gamma_2=0,5 \cdot 10^{-7}$ См/м. Напруга $U=1,2$ кВ. Побудувати графік $E(r)$.</p>	
6	<p>Який струм може підводитися до кульового заземлювача, щоб максимальна крокова напруга не перевищувала 100 В, якщо $R_0=40$ см, $h=2,4$ м, $l_{\text{ш}}=0,8$ м, $\gamma=5 \cdot 10^{-3}$ См/м?</p>	
7	<p>Визначити теплові втрати на 1 км коаксіального кабелю, якщо: $r_1=3$ см; $r_2=5$ см; $r_3=10$ см; $\gamma_1=5 \cdot 10^{-8}$ См/м; $\gamma_2=3 \cdot 10^{-8}$ См/м. Щільність струму на межі розділу двох недосконалих діелектриків 5 мА/м².</p>	
8	<p>Визначити опір заземлювача, виконаного у вигляді металевої кулі, розташованої біля краю вертикального обриву. Який струм повинен підводитися до даного заземлювача, щоб максимальна крокова напруга дорівнювала 80 В? У розрахунку прийняти $\gamma=0,1$ См/м, $R_0=40$ см, $h_1=4$ м, $h_2=6$ м, $l_{\text{ш}}=0,8$ м.</p>	

9	<p>Знайти напругу та струм витоку кульового конденсатора, якщо $R_1=3$ см, $R_2=6$ см, $\gamma = 4 \cdot 10^{-8}$ См/м, а питомі теплові втрати в діелектрику на поверхні оболонки в точці А $P_T = 6$ мкВт/м³.</p>	
10	<p>Плоский конденсатор з тришаровим недосконалим діелектриком підключений до джерела постійної напруги U. $\gamma_1=2 \cdot 10^{-8}$ См/м, $\gamma_2=4 \cdot 10^{-8}$ См/м, $\gamma_3=3 \cdot 10^{-8}$ См/м, $d_1=2$ см, $d_2=1$ см; $d_3=3$ см. Питомі теплові втрати у третьому шарі $P_T=12$ мкВт/см³. Знайти напругу U, побудувати графік $\phi(x)$.</p>	
11	<p>Визначити опір заземлювача і крокову напругу, якщо $I=80$ А, $d=100$ мм, $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$ См/м, $a=1,5$ м, $h=2$ м, $l_u=0,8$ м.</p>	
12	<p>Плоский конденсатор з двошаровим недосконалим діелектриком $d_1=2$ см, $d_2=3$ см, $\epsilon_1=2$, $\epsilon_2=4$, $\gamma_1=2 \cdot 10^{-10}$ См/см, $\gamma_2=1 \cdot 10^{-10}$ См/см, підключений до джерела постійної напруги $U=6$ кВ. Побудувати графік зміни напруженості $E(x)$.</p>	

13	<p>Дві кулі знаходяться у вологому повітрі ($\gamma = 2 \cdot 10^{-7}$ См/м). Радіуси куль $R_0 = 5$ см, $d = 1$ м, $h = 80$ см, $U = 800$ В. Визначити струм витоку.</p>	 <p>The diagram shows two parallel spheres of radius r_0 separated by a distance d. They are at a height h above a horizontal ground plane labeled "земля". A voltage U is applied between them. The medium has a specific conductivity γ.</p>
14	<p>Двопровідна лінія знаходиться у вологому повітрі ($\gamma = 3 \cdot 10^{-6}$ См/м): $r_0 = 5$ мм; $d = 30$ см, $h = 40$ см, $U = 1$ кВ. Визначити струм витоку на 1 км лінії.</p>	 <p>The diagram shows two parallel spheres of radius r_0 separated by a distance d. They are at a height h above a horizontal ground plane labeled "земля". A voltage U is applied between them. The medium has a specific conductivity γ.</p>
15	<p>Знайти напругу та струм витоку кульового конденсатора, якщо $R_1 = 3$ см, $R_2 = 7$ см, $R_3 = 8$ см. Теплові втрати в точці А на поверхні оболонки $P_T = 10$ мкВт/м³, питома провідність ізоляції $\gamma = 5 \cdot 10^{-8}$ См/м.</p>	 <p>The diagram shows a spherical capacitor with three concentric shells of radii r_1, r_2, and r_3. The region between the shells is filled with a material of specific conductivity γ. A point A is marked on the outermost shell.</p>

ТЕМА 3. МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

3.1 Теоретичні положення

Рівняння зв'язку:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot (\vec{H} + \vec{J}) = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} . \quad (3.1)$$

Векторний магнітний потенціал:

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B} . \quad (3.2)$$

Магнітний потік:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} . \quad (3.3)$$

Закон повного струму, перший закон Кірхгофа в інтегральній та диференціальній формах:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I ; \quad (3.4)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} ; \quad (3.5)$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 ; \quad (3.6)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 . \quad (3.7)$$

В областях, не зайнятих струмами, магнітне поле є потенційним, безвихровим, тому для його характеристики використовується скалярний магнітний потенціал φ_M , що задовольняє умові:

$$\bar{H} = -grad \varphi. \quad (3.8)$$

Різниця потенціалів називається магнітною напругою:

$$U_{M12} = \varphi_{M1} - \varphi_{M2} = \int_1^2 \bar{H} d\bar{l}. \quad (3.9)$$

Рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi_M = 0. \quad (3.10)$$

Рівняння Пуассона:

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j. \quad (3.11)$$

Граничні умови: $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, $B_{1n} = B_{2n}$, $\varphi_{M1} = \varphi_{M2}$.

У разі лінійного струму I_0 на межі $H_{1\tau} - H_{2\tau} = I_0$.

Коефіцієнти неповного відображення у методі дзеркальних зображень:

$$k_1 = (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1); \quad k_2 = 2 \cdot \mu_1 / (\mu_1 + \mu_2). \quad (3.12)$$

Індуктивність та взаємна індуктивність: $L = \frac{\Psi}{I}$; $M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = \frac{\Psi_{21}}{I_2}$.

Об'ємна щільність енергії магнітного поля:

$$w_M = \frac{1}{2} B \cdot H = \frac{1}{2} \mu \cdot \mu_0 \cdot H^2 = B^2 \frac{1}{2 \mu \cdot \mu_0}. \quad (3.13)$$

Енергія індуктивно пов'язаних елементів:

$$W_M = \frac{1}{2} \left(\sum L_q \cdot I_q^2 + \sum_{i \neq j} M_{ij} \cdot I_i \cdot I_j \right). \quad (3.14)$$

3.2. Практична частина

Приклад 3.1. Відокремлений провідник. Розрахувати магнітну напругу $U_{M,AB}$, $U_{M,CD}$ і $U_{M,EG}$ поля відокремленого провідника зі струмом I в однорідному середовищі з магнітною проникністю μ_a (рис. 3.1).

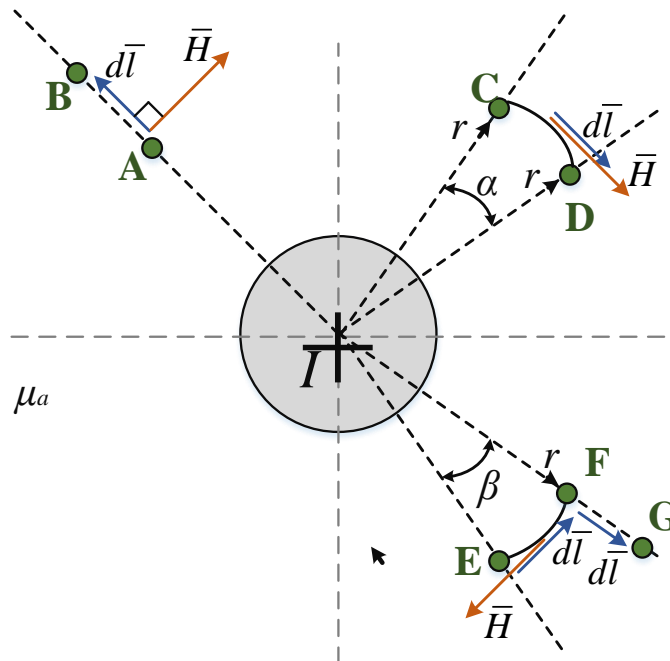


Рисунок 3.1 – До визначення магнітної напруги проводу

Магнітна напруга між точками A і B , які знаходяться на одній радіальній лінії, згідно (3.9):

$$U_{MAB} = \varphi_{MA} - \varphi_{MB} = \int_A^B \vec{H} \cdot d\vec{l}.$$

Вектор \vec{H} – вектор напруженості магнітного поля у речовині. Він є допоміжним вектором, який не має фізичного сенсу. Цей вектор направлений перпендикулярно до площини руху заряду \vec{v} і його напрямок визначається правою винтовою системою. Тому для ділянки $A-B$: $d\vec{l}_{A-B} \perp \vec{H}$ (рис. 3.1) і $\angle(d\vec{l}_{A-B}, \vec{H}) = 90^\circ$. Підінтегральний вираз приймає вигляд:

$$\vec{H} \cdot d\vec{l}_{A-B} = H \cdot dl_{A-B} \cdot \cos[\angle(d\vec{l}_{A-B}, \vec{H})] = 0.$$

Магнітна напруга приймає значення: $U_{M A-B} = \varphi_{MA} - \varphi_{MB} = 0$. Скалярні магнітні потенціали рівні $\varphi_{MA} = \varphi_{MB}$. Висновок: радіальні лінії є екіпотенціальними.

Магнітна напруга між точками C і D , які знаходяться на одній дугі, згідно (3.9):

$$U_{MCD} = \varphi_{MC} - \varphi_{MD} = \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{l}.$$

Для ділянки $C-D$: $d\vec{l}_{C-D} \parallel \vec{H}$ (рис. 3.1), тому $\angle(d\vec{l}_{C-D}, \vec{H}) = 0^\circ$. Підінтегральний вираз приймає вигляд:

$$\vec{H} \cdot d\vec{l}_{C-D} = H \cdot dl_{C-D} \cdot \cos[\angle(d\vec{l}_{C-D}, \vec{H})] = H \cdot dl_{C-D}.$$

Магнітна напруга між точками C і D приймає значення:

$$U_{MCD} = \varphi_{MC} - \varphi_{MD} = H \int_C^D dl_{CD} = \frac{I}{2\pi r} \cdot r \alpha = \frac{I \cdot \alpha}{2\pi}.$$

де $H = \frac{I}{l_{\text{кола}}} = \frac{I}{2\pi r} = \text{const}$, $dl = r \alpha$ – довжина дуги для кута α (в радіанах).

Висновок: магнітна напруга не залежить від відстані між проводом і точками, які лежать на одній дугі, а залежить від кута між цими точками.

Магнітна напруга між точками E і G згідно (3.9):

$$U_{\text{MEG}} = \varphi_{\text{ME}} - \varphi_{\text{MG}} = \int_E^G \vec{H} \cdot d\vec{l}.$$

Так як вище було доведено, що магнітне поле є еквіпотенціальним, то магнітна напруга не залежить від шляху інтегрування:

$$U_{\text{MEG}} = \int_E^G \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_E^F \vec{H} \cdot d\vec{l}_{\text{EF}} + \int_F^G \vec{H} \cdot d\vec{l}_{\text{FG}}$$

Для ділянки між точками E і F (рис. 3.1): $\angle(d\vec{l}_{\text{E-F}}, \vec{H}) = 180^\circ$. Магнітна напруга між точками E і F приймає значення:

$$U_{\text{MEF}} = \int_E^F \vec{H} \cdot d\vec{l}_{\text{EF}} = -\frac{I \cdot \beta}{2\pi}.$$

Для ділянки між точками F і G (рис. 3.1): $\angle(d\vec{l}_{\text{F-G}}, \vec{H}) = 90^\circ$. Магнітна напруга між точками F і G приймає значення:

$$U_{\text{MFG}} = \int_F^G \vec{H} \cdot d\vec{l}_{\text{FG}} = 0.$$

Магнітна напруга між точками E і G :

$$U_{\text{MEG}} = \int_E^F \vec{H} \cdot d\vec{l}_{\text{EF}} + \int_F^G \vec{H} \cdot d\vec{l}_{\text{FG}} = -\frac{I \cdot \beta}{2\pi}.$$

В загальному вигляді:

$$U_{\text{MLN}} = \pm \frac{I}{2\pi} \cdot \gamma, \quad (3.15)$$

$$[\gamma] = \text{рад}, \quad \gamma = \angle[L, N].$$

Знак $+$ відповідає інтегруванню вздовж силових ліній; знак $-$ відповідає інтегруванню проти силових ліній.

Відповідь: для довільної кривої LN $U_{\text{MLN}} = \pm \frac{I}{2\pi} \cdot \gamma$, де γ - кут в радіанах, під яким дуга LN видна із центру провідника.

Приклад 3.2. Відокремлений провідник. Розрахувати магнітний потік Φ , який створений відокремленим провідником в однорідному середовищі (μ_a) через прямокутну рамку AB (рис. 3.2).

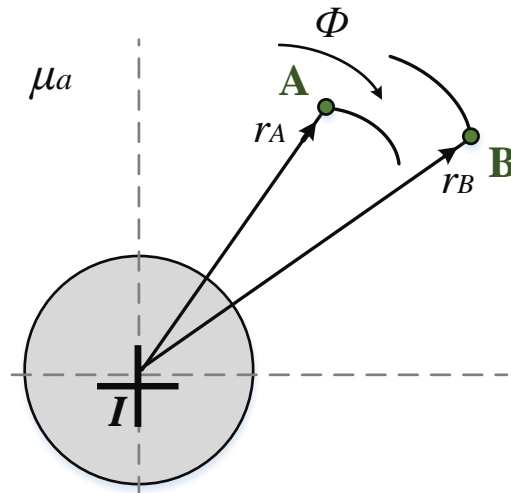


Рисунок 3.2

Магнітний потік Φ через рамку AB довжиною l визначається потоком по трубці, обмеженою колами з радіусами r_A та r_B :

$$\Phi = \int_{r_A}^{r_B} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_A}^{r_B} B(r) \cdot l \cdot dr.$$

Відповідно до закону повного струму (3.4): $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$, тому:

$$H = \frac{I}{l} = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.16)$$

Так як $B = \mu_a \cdot H$, то $B = \frac{\mu_a I}{2\pi r}$. Тому магнітний потік можна визначити:

$$\Phi = \int_{r_A}^{r_B} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{\mu_a I}{2\pi r} \cdot l \cdot dr = \frac{\mu_a I l}{2\pi} \cdot \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_a I l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{r_B}{r_A} \right].$$

$$\Phi = \frac{\mu_a I l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{r_B}{r_A} \right]. \quad (3.17)$$

Якщо рамку повертати навколо своєї осі, то максимальний потік Φ проходить крізь рамку, коли вона буде розташована своєю площиною перпендикулярно до силових ліній (паралельно радіальним лініям).

$$\text{Відповідь: } \Phi = \frac{\mu_a I l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{r_B}{r_A} \right].$$

Приклад 3.3. Двопровідна лінія. Розрахувати зовнішню індуктивність L двопровідної лінії (рис. 3.3). Радіус дротів – r_0 .

Згідно раніше отриманої формули потоку Φ для одного проводу (3.16):

$$\Phi = \frac{\mu_a I l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{d - r_0}{r_0} \right].$$

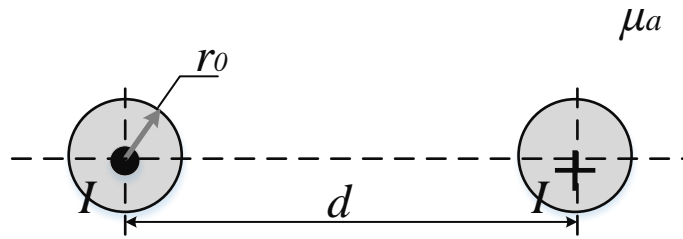


Рисунок 3.3 – Схема двопровідної лінії

Для двох проводів: $\Phi = 2 \cdot \Phi$. Якщо у просторі, де знаходиться контур зі струмом I , немає феромагнетиків, поле \vec{B} і повний магнітний потік Φ через контур будуть пропорційні струму I : $\Phi = L \cdot I$.

Індуктивність двох проводів:

$$L = \frac{2\Phi}{I} = \frac{\mu_a l}{\pi} \cdot \ln \left[\frac{d - r_0}{r_0} \right]. \quad (3.18)$$

Відповідь: $L = \frac{\mu_a l}{\pi} \cdot \ln \left[\frac{d - r_0}{r_0} \right].$

Приклад 3.4. Коаксіальний кабель. Розрахувати поле $B(r)$ і $H(r)$ та індуктивність L коаксіального кабелю (рис. 3.4). По кабелю замикається струм I .

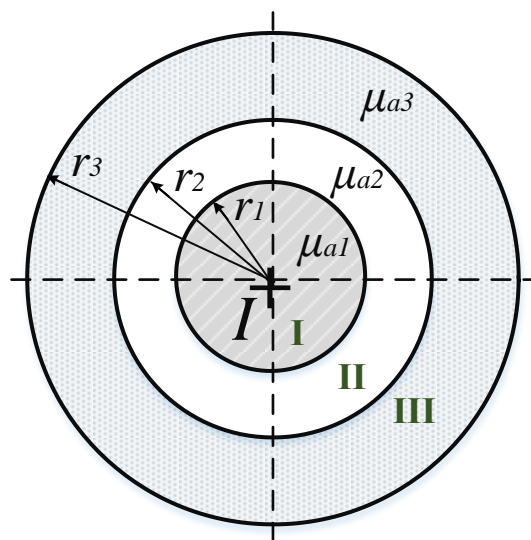


Рисунок 3.4 – Схема коаксіального кабелю

Перший спосіб розв'язання прикладу 3.4.

Поле поза кабелем відсутнє, оскільки повний струм, що пронизує поверхню будь-якого зовнішнього контуру, дорівнює нулю: $\sum I = 0$. Відповідно

до закону повного струму (3.4): $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$.

Поле, яке створюється струмом центрального проводу.

Зона I: $0 < r < r_1$. Ліва частина рівняння (3.4): $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot 2\pi r$.

Так як розподіл струмів пропорційний квадрату радіусів, то права частина рівняння (3.4): $\sum I = I \cdot \frac{\pi r^2}{\pi r_1^2}$. Отримуємо: $H \cdot 2\pi r = I \cdot \frac{\pi r^2}{\pi r_1^2}$. Визначаємо залежності:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r_1^2} \cdot r;$$

$$B(r) = \mu_{a1} \cdot H(r) = \frac{\mu_{a1} \cdot I}{2\pi \cdot r_1^2} \cdot r.$$

Магнітний потік: $d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_{a1} \cdot I}{2\pi \cdot r_1^2} \cdot r \cdot l dr$, потокозчеплення:

$d\psi(r) = d\Phi \frac{r^2}{r_1^2}$, індуктивність:

$$L_1 = \frac{\psi}{I} = \frac{\int_0^{r_1} d\psi(r)}{I} = \int_0^{r_1} \frac{\mu_{a1}}{2\pi r_1^2} r l \frac{r^2}{r_1^2} dr = \frac{\mu_{a1} l}{2\pi r_1^4} \int_0^{r_1} r^3 dr = \frac{\mu_{a1} l}{2\pi r_1^4} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^{r_1} = \frac{\mu_{a1} l}{8\pi}.$$

Отже внутрішня індуктивність першого шару не залежить від радіусу:

$$L_1 = \frac{\mu_{a1} l}{8\pi}.$$

Зона II: $r_1 < r < r_2$. Так як $H \cdot 2\pi r = I$, то визначаємо залежності:

$$H(r) = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r};$$

$$B(r) = \mu_{a2} \cdot H(r) = \frac{\mu_{a2} I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}.$$

Потокозчеплення: $d\psi(r) = d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_{a2} I}{2\pi r} \cdot l dr$, а зовнішня

індуктивність:

$$L_2 = \frac{\psi}{I} = \frac{\int_{r_1}^{r_2} d\psi(r)}{I} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_{a2} l}{2\pi r} dr = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right);$$

$$L_2 = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

Зона III: $r_2 < r < r_3$. Так як $\sum I = I - I \cdot \frac{\pi(r^2 - r_2^2)}{\pi(r_3^2 - r_2^2)}$, то

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2};$$

$$B(r) = \mu_{a3} \cdot H(r) = \frac{\mu_{a3} I}{2\pi r} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

Магнітний потік: $d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_{a3} I}{2\pi r} \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2} \cdot l dr$.

Потік зчеплений зі струмом I і частиною оберненого струму, який рівний

$$I \cdot \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}. \text{ Тому потокозчеплення: } d\psi = d\Phi \cdot \left(1 - \frac{r^2 - r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}\right) = d\Phi \cdot \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}.$$

Внутрішня індуктивність третьої зони:

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{\psi}{I} = \frac{\int_{r_2}^{r_3} d\psi(r)}{I} = \frac{\mu_{a3} l}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)^2} \int_{r_2}^{r_3} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{r} dr = \\ &= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)^2} \int_{r_2}^{r_3} \left(\frac{r_3^4}{r} - 2r_3^2 r + r^3 \right) dr = \\ &= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)^2} \left[r_3^4 \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - r_3^2(r_3^2 - r_2^2) + \frac{1}{4}(r_3^4 - r_2^4) \right] = \\ &= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi} \left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{(r_3^2 - r_2^2)\left(r_3^2 - \frac{1}{4}(r_3^2 + r_2^2)\right)}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \right] = \\ &= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi} \left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{(3r_3^2 - r_2^2)}{4 \cdot (r_3^2 - r_2^2)} \right] \end{aligned}$$

Отже індуктивність третього шару:

$$L_3 = \frac{\mu_{a3} l}{2\pi} \left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{(3r_3^2 - r_2^2)}{4 \cdot (r_3^2 - r_2^2)} \right].$$

Відповідь:

$$\text{зовнішня індуктивність: } L_{\text{зовн}} = L_2 = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

внутрішня індуктивність:

$$L_{\text{внутр}} = L_1 + L_3 = \frac{\mu_{a1} l}{8\pi} + \frac{\mu_{a3} l}{2\pi} \left[\frac{r_3^4}{(r_3^2 - r_2^2)^2} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - \frac{(3r_3^2 - r_2^2)}{4 \cdot (r_3^2 - r_2^2)} \right].$$

сумарна індуктивність: $L_{\Sigma} = L_1 + L_2 + L_3$.

Характеристика електричного поля показана на рис. 3.5.

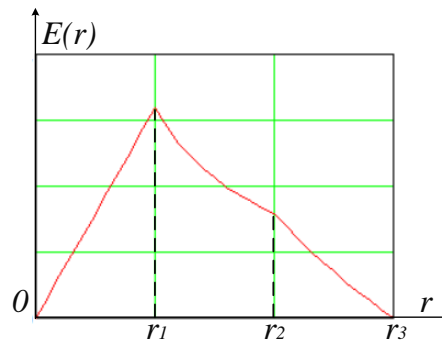


Рисунок 3.5 – Залежність $H(r)$ для поля коаксіального кабелю

Другий спосіб розв'язання прикладу 3.4.

З першого варіанту розв'язання задачі 3.4 для зони I ($0 < r < r_1$):

$$H(r) = I \cdot \frac{r}{2\pi r_1^2}. \text{ Енергія елементарного шару:}$$

$$\begin{aligned} dW &= \frac{B \cdot H}{2} dV = \mu_{a1} \frac{H^2}{2} 2\pi \cdot l \cdot r dr = \\ &= \mu_{a1} \frac{1}{2} \left(I \cdot \frac{r}{2\pi r_1^2} \right)^2 2\pi \cdot l \cdot r dr = \mu_{a1} \frac{I^2 l}{4\pi r_1^4} r^3 dr. \end{aligned}$$

Індуктивність першої зони:

$$L_1 = \frac{2W_1}{I^2} = \frac{2}{I^2} \int_0^{r_1} dW = \frac{2}{I^2} \mu_{a1} \frac{I^2 l}{4\pi r_1^4} \int_0^{r_1} r^3 dr = \frac{\mu_{a1} \cdot l}{2\pi \cdot r_1^4} \frac{r_1^4 - 0}{4} = \frac{\mu_{a1} l}{8\pi}.$$

Для зони II ($r_1 < r < r_2$): $H(r) = \frac{I}{2\pi r}$. Енергія елементарного шару:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{B \cdot H}{2} dV = \mu_{a2} \frac{H^2}{2} 2\pi \cdot r \cdot l dr = \\ &= \mu_{a2} \frac{1}{2} \left(\frac{I}{2\pi r} \right)^2 2\pi \cdot r \cdot l dr = \mu_{a2} \frac{I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Індуктивність другої зони:

$$L_2 = \frac{2W_2}{I^2} = \frac{2}{I^2} \mu_{a2} \frac{I^2 l}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right).$$

Для зони III ($r_2 < r < r_3$): $H(r) = \frac{I}{2\pi r} \frac{r_3^2 - r^2}{r_3^2 - r_2^2}$. Енергія елементарного шару:

$$\begin{aligned} dW &= \frac{B \cdot H}{2} dV = \mu_{a3} \frac{H^2}{2} dV = \mu_{a3} \frac{1}{2} \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{(r_3^2 - r_2^2)^2} 2\pi r l dr = \\ &= \mu_{a3} \frac{I^2 l}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)^2} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{r} dr. \end{aligned}$$

Індуктивність третього шару:

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{2W_3}{I^2} = \frac{2}{I^2} \mu_{a3} \frac{I^2 l}{4\pi (r_3^2 - r_2^2)^2} \frac{(r_3^2 - r^2)^2}{r} dr = \\ &= \mu_{a3} \frac{l}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)^2} \left[r_3^4 \int_{r_2}^{r_3} \frac{1}{r} \cdot dr - 2r_3^2 \int_{r_2}^{r_3} r \cdot dr + \int_{r_2}^{r_3} r^3 \cdot dr \right] = \\ &= \frac{\mu_{a3} l}{2\pi (r_3^2 - r_2^2)^2} \left[r_3^4 \cdot \ln \left(\frac{r_3}{r_2} \right) - r_3^2 (r_3^2 - r_2^2) + \frac{1}{4} (r_3^4 - r_2^4) \right]. \end{aligned}$$

Відповідь: $L_1 = \frac{\mu_{a1} l}{8\pi}$; $L_2 = \frac{\mu_{a2} l}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$;

$$L_3 = \frac{\mu_{a3} l}{2\pi(r_3^2 - r_2^2)^2} \left[r_3^4 \cdot \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) - r_3^2(r_3^2 - r_2^2) + \frac{1}{4}(r_3^4 - r_2^4) \right].$$

Приклад 3.5. Прямокутна шина. Розрахувати внутрішню індуктивність прямокутної шини (рис. 3.6).

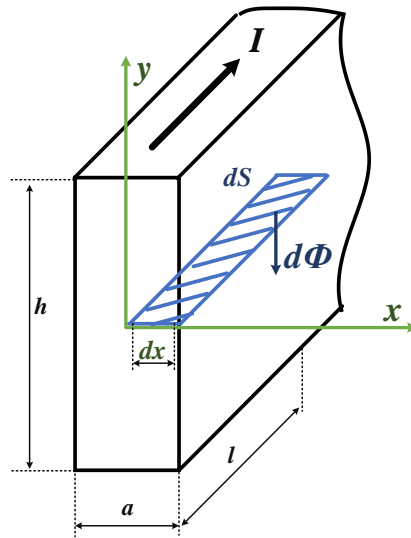


Рисунок 3.6 – Схема прямокутної шини

Щільність струму у шині: $j = \frac{I}{S} = \frac{I}{h \cdot a}$. Відповідно до закону повного

струму (3.4): $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$. Тому (рис. 3.6): $H \cdot 2h = j \cdot h \cdot 2x$. Звідси

напруженість всередині шини: $H = j \cdot x$. Напруженість на поверхні шини:

$$H = j \cdot \frac{a}{2} = \frac{I}{h \cdot a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{I}{2h}.$$

Індукція всередині шини: $B = \mu_a \cdot H = \mu_0 \cdot \mu \cdot j \cdot x$. Магнітний потік крізь перетин $dS = l \cdot dx$ складає: $d\Phi = B \cdot dS = \underbrace{\mu_0 \cdot \mu \cdot j \cdot x \cdot l}_{B} \cdot dx$. Цей магнітний потік зчеплений тільки з частиною струму I , яка є пропорційною $\frac{hx}{h \cdot a/2} = \frac{2x}{a}$, тому магнітне потокозчеплення $d\psi = d\Phi \cdot \frac{2x}{a}$.

Внутрішня індуктивність:

$$L_{\text{вн}} = \frac{\psi}{I} = \frac{\int_0^{a/2} d\psi}{I} = \frac{\int_0^{a/2} \mu_0 \mu j x l \frac{2x}{a} dx}{j h a} = \frac{\frac{2}{a} \mu_0 \mu j l \int_0^{a/2} x^2 dx}{j h a} = \frac{2 \mu_0 \mu l}{3 h a^2} \cdot x^3 \Big|_0^{a/2} = \frac{\mu_0 \mu l a}{12 h}.$$

Внутрішня індуктивність не залежить від розміру шини, якщо пропорція h/a зберігається.

У випадку двосмужних шин, якщо струми в шинах спрямовані в різні боки (рис. 3.7, а), то шини виявляються послідовно з'єднаними і їх внутрішня індуктивність: $L_{\text{вн}\Sigma} = 2 \cdot L_{\text{вн}} = \frac{\mu_0 \mu l a}{6 h}$.

Якщо струми спрямовані в один бік (рис. 3.7, б), то шини з'єднані паралельно і тоді $L_{\text{вн}\Sigma} = \frac{1}{2} L_{\text{вн}} = \frac{\mu_0 \mu l a}{24 h}$.

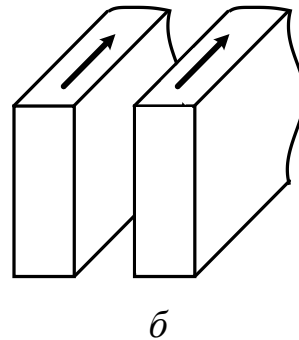
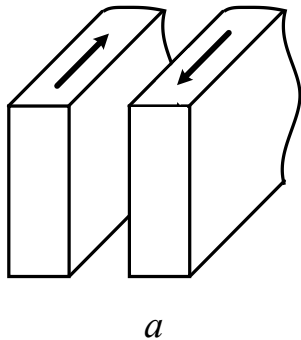


Рисунок 3.7 – Схеми двосмужних прямокутних шин

Відповідь: $L_{\text{вн}} = \frac{\mu_0 \mu l a}{12h}$.

Приклад 3.6. Відокремлений провідник. Відокремлений провідник (рис. 3.8) зі струмом $I=10$ А розташований у середовищі з магнітною проникністю $\mu_1=1$ над поверхнею з магнітною проникністю $\mu_2=999$. Розрахувати напруженість магнітного поля у точках m і n . Розрахувати силу, що діє на провідник завдовжки $l=2$ м.

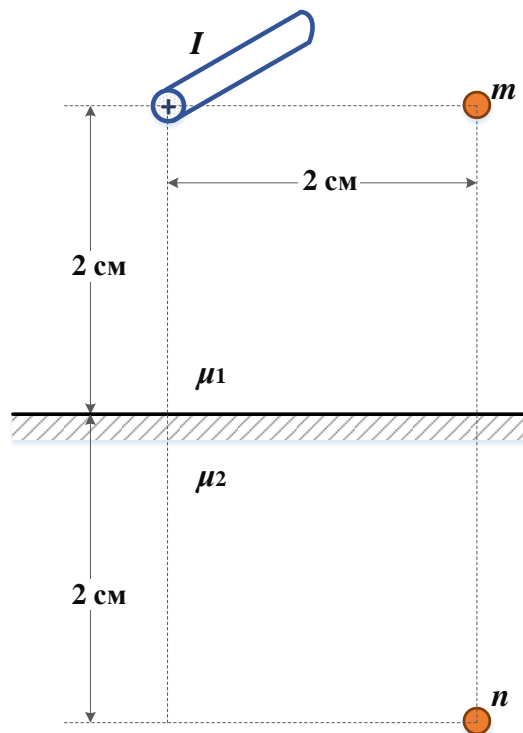


Рисунок 3.8 – Схема відокремленого провідника

Розумно використати метод дзеркальних відображень. Спочатку виконаємо розрахунок поля в точці m , яка знаходиться у верхній півплощині (рис. 3.9). Коефіцієнт неповного відображення буде складати:

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{999 - 1}{999 + 1} = 0,998.$$

Так як $k_1 > 0$, то напрямок фіктивного струму $k_1 \cdot I$ співпадає з напрямком реального струму.

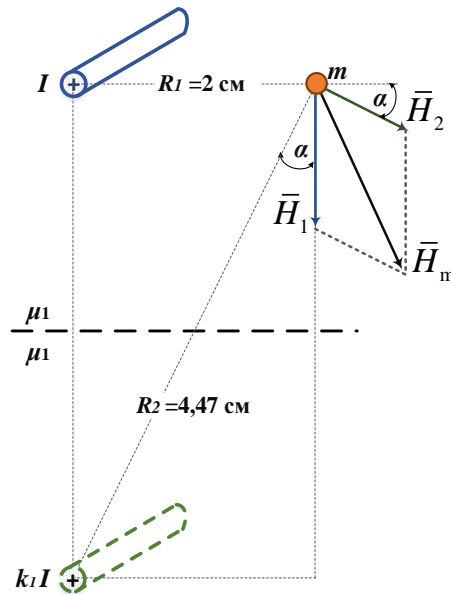


Рисунок 3.9 – Схема для розрахунку поля в точці m

Відповідно до результатів, отриманих в прикладі 3.2, напруженість відокремленого провідника (3.16): $H = \frac{I}{2\pi r}$.

Отже напруженість в точці m :

- від першого провідника: $H_1 = \frac{I}{2\pi \cdot r_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 79,58 \frac{A}{m}$.

- від другого провідника:

$$H_2 = \frac{k_1 \cdot I}{2\pi \cdot r_2} = \frac{0,998 \cdot 10}{2\pi \cdot \sqrt{(4 \cdot 10^{-2})^2 + (2 \cdot 10^{-2})^2}} = 35,52 \frac{A}{m}.$$

Отримані вектори \vec{H}_1 і \vec{H}_2 розкладемо на складові:

- за горизонтальною віссю:

$$H_{1x} = 0; H_{2x} = \vec{H}_2 \cdot \cos \alpha = 35,52 \cdot \frac{4 \cdot 10^{-2}}{4,47 \cdot 10^{-2}} = 31,77 \frac{A}{m};$$

- за вертикальною віссю:

$$H_{1y} = -\bar{H}_1 = -79,58 \frac{A}{m}; \quad H_{2y} = -\bar{H}_2 \cdot \sin \alpha = -35,52 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4,47 \cdot 10^{-2}} = -15,88 \frac{A}{m}.$$

Результуюча напруженість у точці m :

$$\begin{aligned} \bar{H}_m &= \sqrt{(H_{1x} + H_{2x})^2 + (H_{1y} + H_{2y})^2} = \\ &= \sqrt{(0 + 31,77)^2 + (-79,58 - 15,88)^2} = 100,61 \frac{A}{m}. \end{aligned}$$

Виконаємо розрахунок поля в точці n , яка знаходиться у нижній півплощині (рис. 3.10). Коефіцієнт відображення буде складати:

$$k_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{2 \cdot 1}{999 + 1} = 0,002.$$

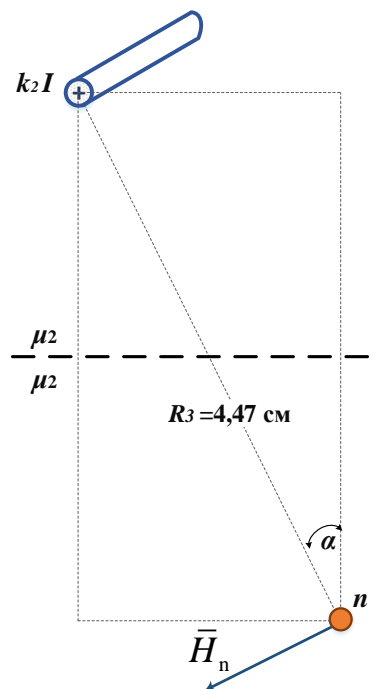


Рисунок 3.10 – Схема для розрахунку поля в точці n

$$\text{Отже напруженість в точці } n: \quad H_n = \frac{k_2 \cdot I}{2\pi \cdot r_3} = \frac{0,002 \cdot 10}{2\pi \cdot 4,47 \cdot 10^{-2}} = 0,0712 \frac{A}{m}.$$

Розрахуємо силу, що діє на провідник завдовжки $l=2$ м. У місці розташування реального провідника провідником $k_1 \cdot I$ створюється напруженість:

$$H = \frac{k_1 \cdot I}{2\pi \cdot r_3} = \frac{0,998 \cdot 10}{2\pi \cdot 4,0 \cdot 10^{-2}} = 35,52 \frac{A}{m}.$$

Струми I та $k_1 \cdot I$ спрямовані однаково, тому реальний провідник притягується до фіктивного з силою:

$$F = I \cdot B \cdot l = I \cdot \mu_0 \cdot H \cdot l = 10 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 35,52 \cdot 2 = 0,893 \cdot 10^{-3} = 0,893 \text{ мН}.$$

Силу можна розрахувати також через взаємну індуктивність між двома проводами, яку визначили в прикладі 3.3 формулою (3.18):

$$L = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot l}{2\pi} \cdot \left(\ln \frac{l}{x} - 1 \right),$$

де x – відстань між проводами (між реальним та фіктивним струмами), а напрямок Ox – від фіктивного струму.

Сила взаємодії між провідниками:

$$\begin{aligned} F &= I \cdot k_1 \cdot I \cdot \frac{dL}{dx} = k_1 \cdot I^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot l}{2\pi} \cdot \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{l}{x} - 1 \right) = \\ &= k_1 \cdot I^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot l}{2\pi} \cdot \frac{x}{l} \cdot l \cdot \frac{-1}{x^2} = -k_1 \cdot I^2 \cdot \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot l}{2\pi} \cdot \frac{1}{x} = \\ &= -0,998 \cdot 10^2 \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi} \cdot \frac{1}{4 \cdot 10^{-2}} = 0,998 \cdot 10^{-3} = 0,998 \text{ мН}. \end{aligned}$$

Знак мінус вказує на те, що сила спрямована проти спрямування осі Ox , тобто провід притягується до межі.

Провідник притягується до межі розділу середовищ, оскільки $\mu_1 < \mu_2$ і $k_1 > 0$. При $\mu_1 > \mu_2$ провідник буде відштовхуватися. Іншими словами, провідник втягується в зону з більшою магнітною проникністю.

Відповідь: $\bar{H}_m = 100,61 \text{ А/м}$; $\bar{H}_n = 0,0712 \text{ А/м}$; $F = -0,998 \text{ мН}$.

Приклад 3.7. Взаємна індуктивність. Плоска трикутна рамка (рис. 3.11) має $W=400$ витків і знаходиться в середовищі з проникністю $\mu = 10$ в одній площині з довгим круглим дротом радіуса r_0 . Розміри: $a=10 \text{ см}$, $b=20 \text{ см}$, $c=15 \text{ см}$. Визначити взаємну індуктивність M між дротом та рамкою.

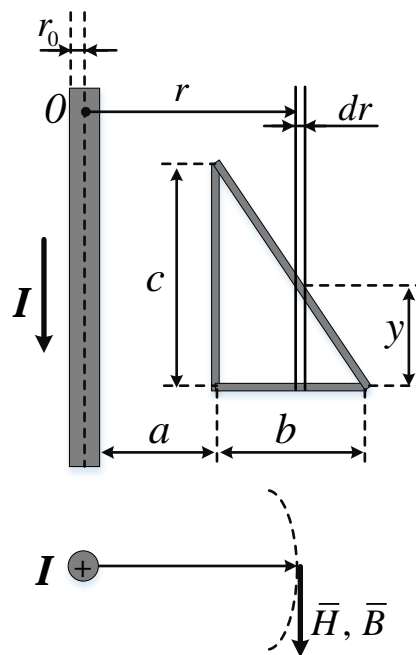


Рисунок 3.11 – Схема для визначення взаємної індуктивності

Відповідно до визначення взаємної індуктивності M для її знаходження повинні бути відомі деяке значення сили струму I в провіднику і повний магнітний потік Ψ (потокосцеплення) через контур, що виникає в цьому випадку. Нехай провідником тече струм сили I , тоді :

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_1} = M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_2} = M.$$

На відстані r від дроту у трикутнику виділимо елементарний майданчик площею $dS = y \cdot dr$.

Використовуючи формулу для напруженості одинарного провідника (3.16) (задача 3.2) розрахуємо магнітний потік крізь нього:

$$\begin{aligned} d\Phi &= B \cdot dS = \underbrace{\mu \mu_0 \cdot H}_B \cdot \underbrace{y \cdot dr}_{dS} = \mu \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \cdot \left(-\frac{c}{b}r + \frac{c}{b}(a+b) \right) dr; \\ \Phi &= \int_{r=a}^{r=a+b} d\Phi = \frac{\mu \mu_0 I c}{2\pi b} \cdot \int_{r=a}^{r=a+b} \left(-1 + \frac{a+b}{r} \right) dr = \frac{\mu \mu_0 I c}{2\pi b} \cdot \left(-r + (a+b) \cdot \ln r \right) \Big|_a^{a+b}; \\ \Phi &= \frac{\mu \mu_0 I c}{2\pi b} \cdot \left(-b + (a+b) \cdot \ln \frac{a+b}{a} \right). \end{aligned}$$

Повний магнітний потік Ψ (потокосцеплення) через контур: $\Psi = \Phi \cdot W$.

Взаємна індуктивність M :

$$\begin{aligned} M &= \frac{\Psi}{I} = \frac{\Phi \cdot W}{I} = \frac{\mu \mu_0 W c}{2\pi b} \cdot \left(-b + (a+b) \cdot \ln \frac{a+b}{a} \right) = \\ &= \frac{10 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 400 \cdot 15}{2\pi \cdot 20} \cdot \left(-0,2 + (0,1 + 0,2) \cdot \ln \frac{0,1 + 0,2}{0,1} \right) = 77,75 \text{ мкГн} \end{aligned}$$

Відповідь. $M=77,75$ мкГн.

Приклад 3.8. Одинарний провідник. Відокремлений провідник із струмом $I=10$ А знаходиться на межі розділу трьох середовищ (рис. 3.12) з магнітною проникністю відповідно $\mu_1=2$, $\mu_2=4$, $\mu_3=6$. Задані дві точки A і B з координатами $x_A=y_A=10$ см, $x_B=-5$ см, $y_B=-15$ см. Необхідно: 1. Розрахувати

величини напруженості магнітного поля H в точках A та B , а також магнітну напругу між ними U_{AB} . 2. Вважаючи, що A і B є точками перерізу довгих сторін прямокутної рамки довжиною $l=1$ м і з числом витків $W=100$, знайти магнітний потік рамки Φ і взаємну індуктивність M провіднику і рамки.

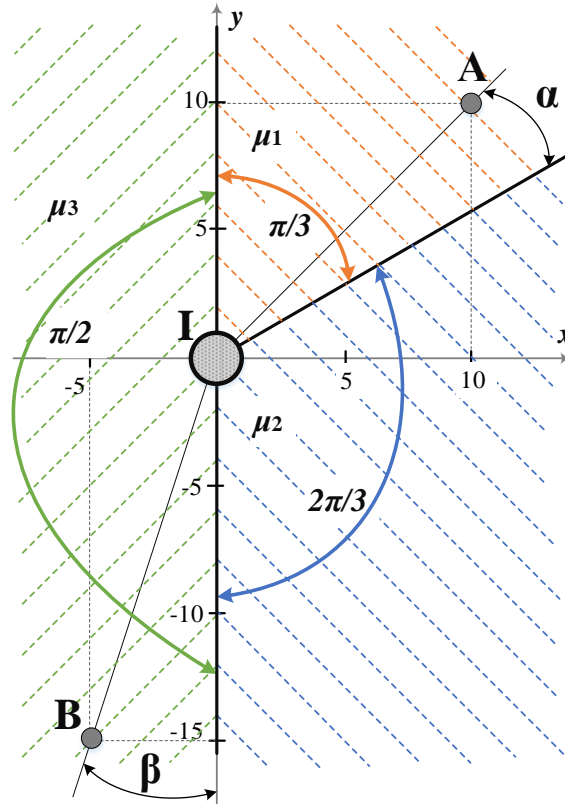


Рисунок 3.12 – Схема для одинарного провідника

Навколо провідника проведемо коло радіусом $r_A = 10\sqrt{2} = 14,14$ см. Відповідно до закону повного струму (3.4): $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$. Для точки A з урахуванням геометричних розмірів різних середовищ напруженістю H_1 , H_2 , H_3 з проникністю відповідно μ_1 , μ_2 , μ_3 :

$$H_1 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot r_A + H_2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot r_A + H_3 \cdot \pi \cdot r_A = I.$$

Границі проведені радіально, тому вектори \vec{B} і \vec{H} на границі мають тільки нормальну складову. Граничні умови: $B_{1n} = B_{2n} = B_{3n}$, звідси $\mu_1 \cdot H_1 = \mu_2 \cdot H_2 = \mu_3 \cdot H_3$.

$$\text{Таким чином: } H_1 \cdot r_A \cdot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot \pi \right) = I.$$

Звідки напруженість магнітного поля в точці A :

$$H_A = H_1 = \frac{I}{\left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_3} \right) \cdot \pi \cdot r_A} = \frac{10}{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \right) \cdot \pi \cdot 14,14 \cdot 10^{-2}} = 22,508 \frac{A}{m}.$$

Аналогічно, для точки B . Навколо провідника проведемо коло радіусом $r_B = \sqrt{5^2 + 15^2} = 15,81$ см. Напруженість магнітного поля в точці B :

$$\begin{aligned} H_B = H_3 &= \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot H_1 = \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot \frac{I}{\left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_3} \right) \cdot \pi \cdot r_B} = \\ &= \frac{2}{6} \cdot \frac{10}{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \right) \cdot \pi \cdot 15,81 \cdot 10^{-2}} = 6,71 \frac{A}{m} \end{aligned}$$

Магнітна напруга між точками A і B при русі за годинниковою стрілкою (проти силових ліній) згідно з формулою (3.9):

$$\begin{aligned} U_{MA-B} &= -H_1 \cdot r_A \cdot \alpha - H_2 \cdot r_A \cdot \frac{2\pi}{3} - H_3 \cdot r_A \cdot \beta; \\ H_1 \cdot r_A &= \frac{I}{\left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_3} \right) \cdot \pi} = \frac{10}{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \right) \cdot \pi} = \frac{10}{\pi}; \end{aligned}$$

$$H_2 \cdot r_A = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot H_1 \cdot r_A = \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{I}{\left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_3}\right) \cdot \pi} = \frac{2}{4} \cdot \frac{10}{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6}\right) \cdot \pi} = \frac{5}{\pi};$$

$$H_3 \cdot r_A = \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot H_1 \cdot r_A = \frac{\mu_1}{\mu_3} \cdot \frac{I}{\left(\frac{1}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\mu_1}{\mu_3}\right) \cdot \pi} = \frac{2}{6} \cdot \frac{10}{\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{6}\right) \cdot \pi} = \frac{10}{3 \cdot \pi};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \arctg\left(\frac{x_A}{y_A}\right) = \frac{\pi}{3} - \arctg(1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12};$$

$$\beta = \arctg\left(\frac{x_B}{y_B}\right) = \arctg\left(\frac{-5}{-15}\right) = 0,322 \text{ рад}.$$

Таким чином:

$$U_{MA-B} = -\frac{10}{\pi} \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{5}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} - \frac{10}{3 \cdot \pi} \cdot 0,322 = -4,508 \text{ В}.$$

Трубки магнітного потоку мають вигляд кілець навколо провідника, тому магнітний потік крізь переріз AB дорівнюватиме магнітному потоку крізь переріз $A'B$, де A' – точка, віддалена від центру провідника на відстань r_A , але яка знаходиться в середовищі з проникністю μ_3 . Величина магнітного потоку, як було доведено в задачі 3.2 згідно з (3.17):

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_3 \cdot \mu_0 \cdot I_3 \cdot l}{2\pi} \cdot \ln\left[\frac{r_B}{r_A}\right] = \frac{\mu_3 \cdot \mu_0 \cdot H_3 \cdot r_A \cdot 2\pi \cdot l}{2\pi} \cdot \ln\left[\frac{r_B}{r_A}\right] = \\ &= 6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{10}{3 \cdot \pi} \cdot 1 \cdot \ln\left[\frac{15,81}{14,14}\right] = 0,893 \cdot 10^{-6} \text{ Вб} \end{aligned}$$

Взаємна індуктивність:

$$M = \frac{W \cdot \Phi}{I} = \frac{100 \cdot 0,893 \cdot 10^{-6}}{10} = 8,93 \cdot 10^{-6} = 8,93 \text{ мкГн.}$$

Відповідь: $H_A = 22,508 \text{ А/м; } H_B = 6,71 \text{ А/м; } U_{MA-B} = 4,508 \text{ В;}$

$\Phi = 0,893 \cdot 10^{-6} \text{ Вб, } M = 8,93 \text{ мкГн.}$

Приклад 3.9. Одинарний провідник. Відокремлений провідник із струмом $I=10 \text{ А}$ знаходиться поблизу межі розділу середовищ (рис. 3.13) з магнітною проникністю відповідно $\mu_1=2$, $\mu_2=6$. Координати точок: $x_A = y_A = -10 \text{ см}$, $x_B=5 \text{ см}$, $y_B=15 \text{ см}$. Необхідно: 1. Розрахувати напруженості магнітного поля H в точках A та B , а також магнітну напругу U_{AB} між ними. 2. Вважаючи, що A і B є точками перерізу довгих сторін прямокутної рамки довжиною $l=1 \text{ м}$ і з числом витків $W=100$, знайти магнітний потік Φ рамки і взаємну індуктивність M провіднику і рамки.

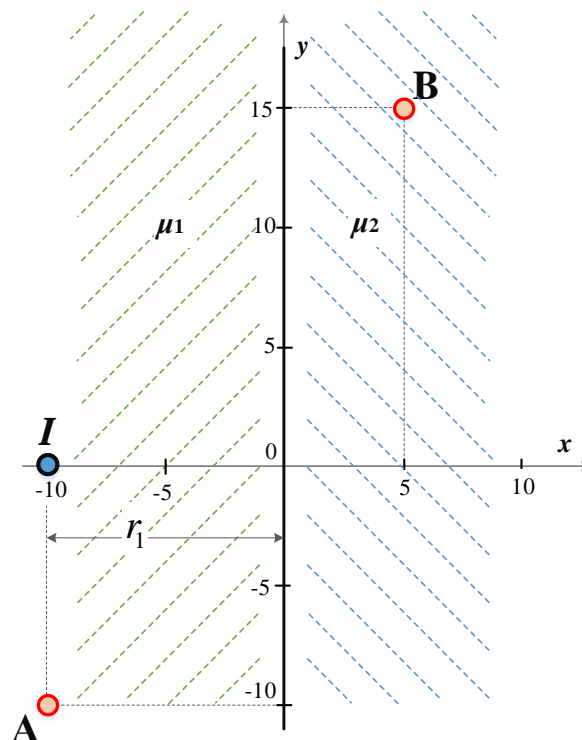


Рисунок 3.13 – Схема для одинарного провідника

Розумно використати метод дзеркальних відображень. Спочатку виконаємо розрахунок поля в точці A , яка знаходиться у лівій півплощині (рис. 3.14). Коефіцієнт неповного відображення буде складати:

$$k_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{6 - 2}{6 + 2} = 0,5.$$

Так як $k_1 > 0$, то напрямок фіктивного струму $k_1 \cdot I$ співпадає з напрямком реального струму.

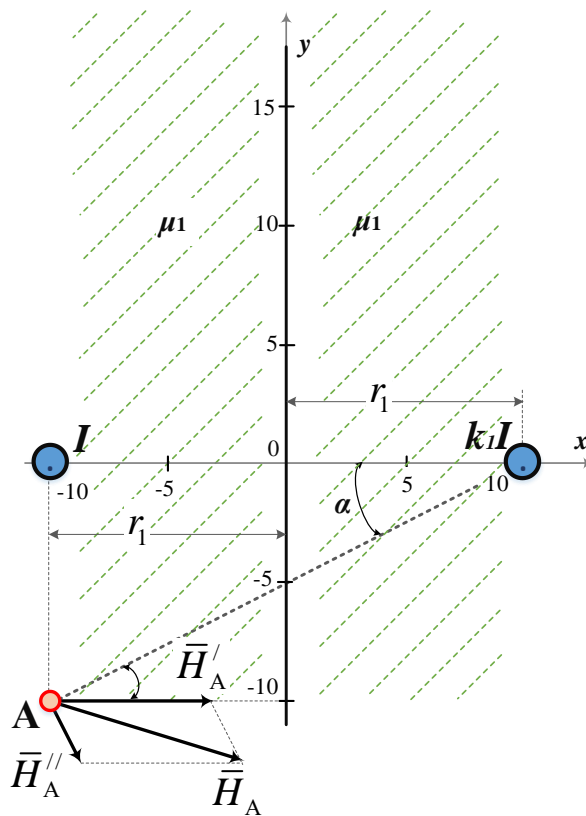


Рисунок 3.14 – Схема для розрахунку поля в точці A

Відповідно до результатів, отриманих в прикладі 3.2, напруженість відокремленого провідника (3.16): $H = \frac{I}{2\pi r}$.

Отже напруженість в точці A :

- від першого провідника: $H'_A = \frac{I}{2\pi \cdot y_1} = \frac{10}{2\pi \cdot 10} = 0,159 \frac{A}{cm}$.

- від другого провідника:

$$H''_A = \frac{k_1 \cdot I}{2\pi \cdot \sqrt{(2 \cdot r_1)^2 + (y_A)^2}} = \frac{0,5 \cdot 10}{2\pi \cdot \sqrt{(2 \cdot 10)^2 + (10)^2}} = 0,036 \frac{A}{cm}.$$

Визначимо кут α (рис. 3.14): $tg\alpha = \frac{|y_A|}{2r_1} = \frac{10}{2 \cdot 10} = 0,5; \quad \alpha = arctg(0,5)$

$= 0,4636$ рад.

Отримані вектори \bar{H}'_A і \bar{H}''_A розкладемо на складові:

- за горизонтальною віссю: $H'_{Ax} = \bar{H}'_A = 0,159 A/cm$;

$$H''_{Ax} = \bar{H}''_A \cdot \cos(\pi/2 - \alpha) = \bar{H}''_A \cdot \sin\alpha = 0,036 \cdot \sin(0,4636) = 0,016 A/cm$$

- за вертикальною віссю: $H'_{Ay} = 0$;

$$H''_{Ay} = \bar{H}''_A \cdot \sin(\pi/2 - \alpha) = \bar{H}''_A \cdot \cos\alpha = 0,036 \cdot \cos(0,4636) = 0,032 A/cm.$$

Результуюча напруженість у точці А:

$$\begin{aligned} \bar{H}_A &= \sqrt{(H'_{Ax} + H''_{Ax})^2 + (H'_{Ay} + H''_{Ay})^2} = \\ &= \sqrt{(0,159 + 0,016)^2 + (0 + 0,032)^2} = 0,178 A/cm \end{aligned}$$

Магнітна напруга згідно (3.15):

$$U_{MAO} = U'_{MAO} + U''_{MAO} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{k_1 \cdot I}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{10}{4} - \frac{0,5 \cdot 10}{2\pi} \cdot 0,4636 = 2,131 A.$$

Магнітний потік через переріз АО згідно (3.17) (направлений зверху вниз):

$$\Phi_{AO} = \Phi'_{AO} + \Phi''_{AO} = \frac{\mu_1 \mu_0 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{|y_A|}{r_1} \right] + \frac{\mu_1 \mu_0 \cdot k_1 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{\sqrt{(2 \cdot r_1)^2 + y_A^2}}{r_1} \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 1}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{10}{10} \right] + \frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 1}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{\sqrt{(2 \cdot 10)^2 + 10^2}}{10} \right] = 1,609 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$$

Розрахунок поля у правому півпросторі від кордону виконаємо за рис. 3.15.

Далі виконаємо розрахунок поля в точці B , яка знаходиться у правій півплощині (рис. 3.15). Коефіцієнт неповного відображення буде складати:

$$k_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{2 \cdot 2}{6 + 2} = 0,5.$$

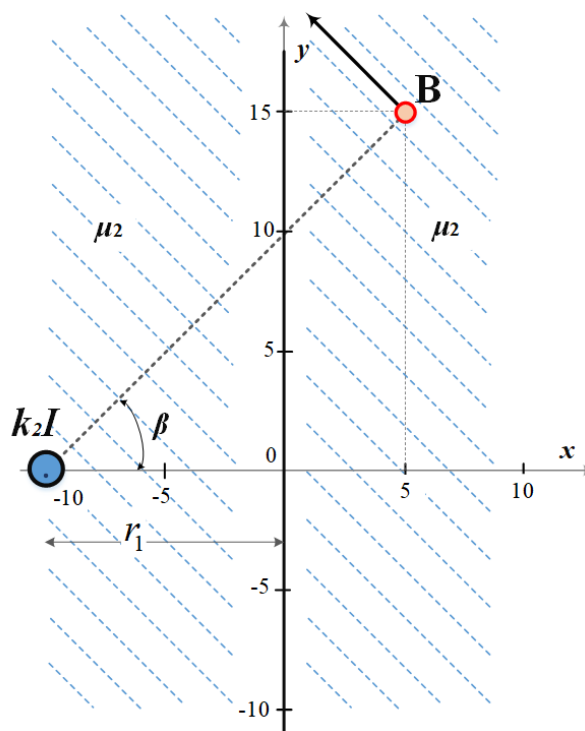


Рисунок 3.15 – Схема для розрахунку поля в точці B

Напруженість відокремленого провідника згідно (3.16):

$$H_B = \frac{k_2 I}{2\pi \cdot \sqrt{(r_1 + x_B)^2 + y_B^2}} = \frac{0,5 \cdot 10}{2\pi \cdot \sqrt{(10+5)^2 + 15^2}} = 0,038 \frac{A}{cm}.$$

Визначимо кут β (рис. 3.15): $tg \beta = \frac{y_B}{r_1 + x_B} = \frac{15}{10+5} = 1;$

$$\beta = arctg(1) = 0,7854 \text{ рад.}$$

Магнітна напруга між точками О і В згідно (3.15):

$$U_{MOB} = \frac{k_2 \cdot I}{2\pi} \cdot \beta = \frac{0,5 \cdot 10}{2\pi} \cdot 0,7854 = 0,625 \text{ А.}$$

Магнітна напруга між точками А і В:

$$U_{MAB} = U_{MAO} + U_{MOB} = 2,131 + 0,625 = 2,756 \text{ А.}$$

Магнітний потік через переріз ОВ згідно (3.17) (спрямований знизу вгору):

$$\begin{aligned} \Phi_{OB} &= \frac{\mu_2 \mu_0 \cdot k_2 \cdot I \cdot l}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{\sqrt{(r_1 + x_B)^2 + y_B^2}}{r_1} \right] = \\ &= \frac{6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 1}{2\pi} \cdot \ln \left[\frac{\sqrt{(10+5)^2 + 15^2}}{10} \right] = 4,512 \cdot 10^{-6} \text{ Вб} \end{aligned}$$

Магнітний потік через переріз АВ:

$$\Phi_{AB} = -\Phi_{AO} + \Phi_{OB} = (-1,609 + 4,512) \cdot 10^{-6} = 2,903 \cdot 10^{-6} \text{ Вб.}$$

Взаємна індуктивність проводу і рамки:

$$M = \frac{W \cdot \Phi_{AB}}{I} = \frac{100 \cdot 2,903 \cdot 10^{-6}}{10} = 29,03 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} = 29,03 \text{ мкГн}.$$

Відповідь: $H_A = 0,178 \text{ А/см}$; $H_B = 0,038 \text{ А/см}$; $U_{MAB} = 2,756 \text{ А}$;

$\Phi_{AB} = 2,903 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$; $M = 29,03 \text{ мкГн}$.

Приклад 3.10. Біметалева шина. Біметалічна шина (рис. 3.16) виготовлена з матеріалу із відносною магнітною проникністю $\mu=6$ і знаходиться у повітрі. Питома провідність шарів шини 3γ та γ . Розмір $a = 2 \text{ мм}$. Шиною замикається постійний струм $I = 100 \text{ А}$. Необхідно: 1) побудувати графіки залежності векторного потенціалу $A(x)$ та напруженості магнітного поля $H(x)$ у функції координат. 2) розрахувати магнітний потік Φ , що замикається лівою половиною шини на одиницю довжини, використовуючи векторний магнітний потенціал.

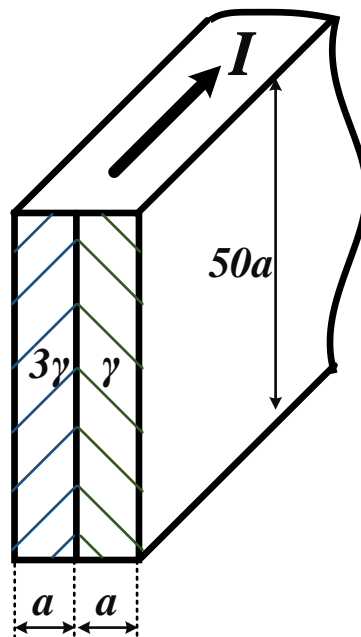


Рисунок 3.16 – Схема для біполярної шини

Позначимо щільність струму у лівій половині шині j_1 , а у правій половині – j_2 . Визначимо струм у шині через щільність струму і її геометричні розміри: $I = j_1 \cdot 50 a^2 + j_2 \cdot 50 a^2$.

Нами вже вирішувалися задачі на підставі граничних умов для межі розділу середовищ, коли тангенціальна складова напруженості: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$. Було показано, що з урахуванням закону Ома у диференціальній формі $j = \gamma \cdot E$.

Отримуємо додаткове рівняння: $\frac{j_1}{3\gamma} = \frac{j_2}{\gamma}$ або $j_1 = 3j_2$.

Таким чином, $I = 4 \cdot j_2 \cdot 50 a^2$. Визначаємо щільність струму:

$$j_2 = \frac{I}{200 \cdot a^2} = \frac{100}{200 \cdot (2 \cdot 10^{-3})^2} = 125000 \text{ A / м}^2;$$

$$j_1 = 3 \cdot j_2 = 375000 \text{ A / м}^2.$$

Розрахунок поля виконаємо, використовуючи згідно (3.11) рівняння Пуассона: $\nabla^2 \bar{A} = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j$.

Напрямки осей декартової системи координат виберемо так, як показано на рис. 3.17.

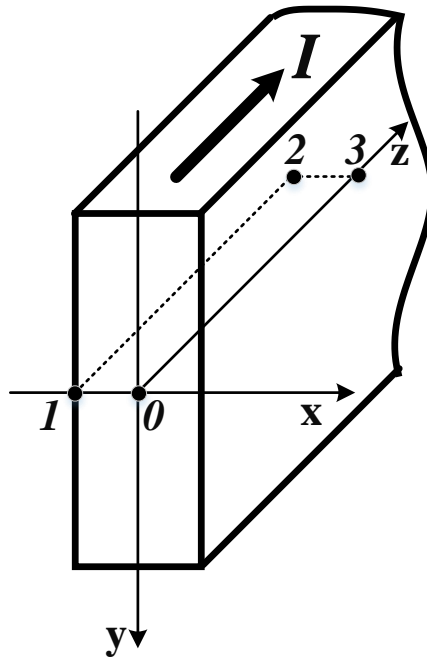


Рисунок 3.17 – Розрахункова схема для біполярної шини

Як видно з рисунку, вектор щільності спрямований по осі Oz , тому векторний магнітний потенціал має тільки одну складову – за віссю Oz . Крім того, так як висота шини значно більша за її товщину, всі електричні величини залежать тільки від однієї координати – x . Отже, $A_x = A_y = 0$, $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0$. З

огляду на це:
$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Розглянемо чотири різні зони з наступним дворазовим інтегруванням:

1) $x < -a$, $\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} = 0$, $A_1 = C_1 \cdot x + C_2$.

2) $-a < x < 0$, $\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_1$, $A_2 = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4$.

3) $0 < x < a$, $\frac{\partial^2 A_3}{\partial x^2} = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_2$, $A_3 = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_5 \cdot x + C_6$.

4) $x > a$, $\frac{\partial^2 A_4}{\partial x^2} = 0$, $A_4 = C_7 \cdot x + C_8$.

Отримаємо формули напруженості магнітного поля. Векторний потенціал з напруженістю пов'язаний наступним чином: $\text{rot } \bar{A} = \bar{B} = \mu \mu_0 H$. Але:

$$\text{rot } \bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix} = -j \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Спільний розв'язок двох останніх рівнянь: $\bar{H} = -\bar{j} \frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\partial A}{\partial x}$;

$H = -\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\partial A}{\partial x}$. Таким чином:

$$H_1 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} (C_1 \cdot x + C_2) = -\frac{C_1}{\mu_0};$$

$$H_2 = -\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \cdot \mu_0 \cdot j_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4 \right) = j_1 \cdot x - \frac{C_3}{\mu \mu_0};$$

$$H_3 = -\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\mu \cdot \mu_0 \cdot j_2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_5 \cdot x + C_6 \right) = j_2 \cdot x - \frac{C_5}{\mu \mu_0};$$

$$H_4 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} (C_7 \cdot x + C_8) = -\frac{C_7}{\mu_0}.$$

Складемо і розв'яжемо рівняння для знаходження постійних інтегрування C_j на підставі закону повного струму (3.4): $\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = I$. Так як з

лівого боку шини напруженість спрямована проти осі y : $H_{1(x=-a)} \cdot 2 \cdot 50a = -I$;

$$H_{1(x=-a)} = -\frac{I}{100a} = -\frac{C_1}{\mu_0}. \text{ Звідси: } C_1 = \frac{\mu_0 I}{100a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100}{100 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 6,283 \cdot 10^{-4}.$$

Гранична умова для $x=-a$ $H_{1\tau} = H_{2\tau}$:

$$H_{1(x=-a)} = H_{2(x=-a)} \text{ або } -\frac{C_1}{\mu_0} = j_1 \cdot (-a) - \frac{C_3}{\mu \mu_0}.$$

Звідки:

$$C_3 = C_1 \cdot \mu - \mu \mu_0 \cdot j_1 \cdot a = 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot 6 - 6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3,75 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -1,885 \cdot 10^{-3}$$

Гранична умова для $x=0$ $H_{2\tau} = H_{3\tau}$:

$$H_{2(x=0)} = H_{3(x=0)} \text{ або } j_1 \cdot 0 - \frac{C_3}{\mu \mu_0} = j_2 \cdot 0 - \frac{C_5}{\mu \mu_0}.$$

Звідки: $C_5 = C_3 = -1,885 \cdot 10^{-3}$.

Гранична умова для $x=a$ $H_{3\tau} = H_{4\tau}$:

$$H_{3(x=a)} = H_{4(x=a)} \text{ або } j_2 \cdot a - \frac{C_5}{\mu \mu_0} = -\frac{C_7}{\mu_0}.$$

Звідки:

$$C_7 = \frac{C_5}{\mu} - j_2 \cdot a \cdot \mu_0 = \frac{-1,885 \cdot 10^{-3}}{6} - 1,25 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} = -6,283 \cdot 10^{-4}.$$

Далі з умови $x=0$, $A_{2(x=0)} = A_{3(x=0)} = 0$, визначаємо:

$$-\mu \cdot \mu_0 \cdot j_1 \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_2 \cdot \frac{0^2}{2} + C_5 \cdot 0 + C_6.$$

Звідси: $C_4 = C_6 = 0$.

За умови $x=-a$, $A_{1(x=-a)} = A_{2(x=-a)}$, визначаємо:

$$C_1 \cdot (-a) + C_2 = -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_1 \cdot \frac{(-a)^2}{2} + C_3 \cdot (-a) + C_4.$$

Звідси:

$$\begin{aligned} C_2 &= -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_1 \cdot \frac{(-a)^2}{2} - C_1 \cdot (-a) + C_3 \cdot (-a) + C_4 = \\ &= -6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3,75 \cdot 10^5 \cdot \frac{(-2 \cdot 10^{-3})^2}{2} - 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) + \\ &+ (-1,885 \cdot 10^{-3}) \cdot (-2 \cdot 10^{-3}) + 0 = -6,283 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

За умови $x=a$, $A_{3(x=a)} = A_{4(x=a)}$, визначаємо:

$$-\mu \cdot \mu_0 \cdot j_2 \cdot \frac{a^2}{2} + C_5 \cdot a + C_6 = C_7 \cdot a + C_8.$$

Звідси:

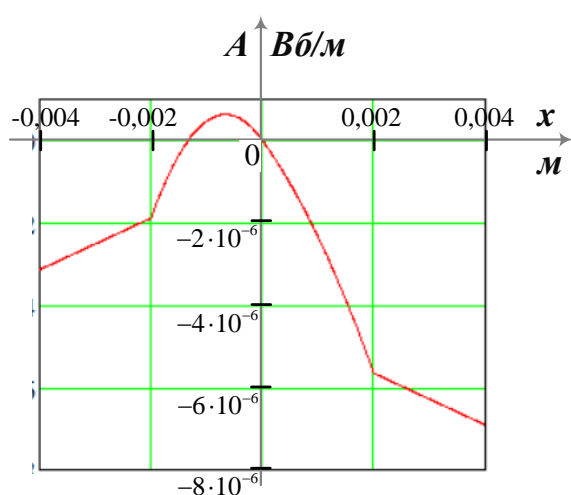
$$\begin{aligned} C_8 &= -\mu \cdot \mu_0 \cdot j_2 \cdot \frac{a^2}{2} + C_5 \cdot a + C_6 - C_7 \cdot a = \\ &= -6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,25 \cdot 10^5 \cdot \frac{(2 \cdot 10^{-3})^2}{2} + (-1,885 \cdot 10^{-3}) \cdot 2 \cdot 10^{-3} + \\ &+ 0 - (-6,283 \cdot 10^{-4}) \cdot 2 \cdot 10^{-3} = -4,398 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Остаточно отримуємо для $A(x)$, В/м (рис. 3.18, а):

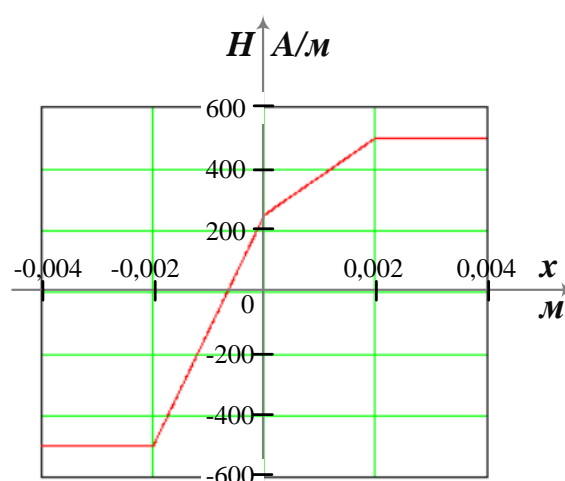
$$A(x) = \begin{cases} 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot x - 6,283 \cdot 10^{-7} & x < -a \\ -1,414 \cdot x^2 - 1,885 \cdot 10^{-3} \cdot x & -a < x < 0 \\ -0,471 \cdot x^2 - 1,885 \cdot 10^{-3} \cdot x & 0 < x < a \\ -6,283 \cdot 10^{-4} \cdot x - 4,398 \cdot 10^{-6} & x > a \end{cases}$$

Для $H(x)$, А/м (рис. 3.18, б):

$$H(x) = \begin{cases} -500 & x < -a \\ 3,75 \cdot 10^5 \cdot x + 250 & -a < x < 0 \\ 1,25 \cdot 10^5 \cdot x + 250 & 0 < x < a \\ 500 & x > a \end{cases}$$



а



б

Рисунок 3.18 – Залежності $A(x)$ і $H(x)$

Для визначення магнітного потоку, що замикається по лівій половині шини на одиницю довжини, застосуємо формулу $\Phi = \oint_L \bar{A} \cdot d\bar{l}$. Для контуру інтегрування візьмемо прямокутник 0-1-2-3-0 довжиною 1 м (рис. 3.17). Причому вздовж сторін 0-1 і 2-3 інтеграл дорівнює нулю, так як на цих ділянках кут між \bar{A} і $d\bar{l}$ становить 90° (Вектор \bar{A} направлений за віссю z , а вектор $d\bar{l}$ – паралельно осі x). Вздовж сторони 3-0 значення \bar{A} дорівнює нулю. Таким чином:

$$\Phi = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{A} \cdot d\vec{l} = A_{x=a} \cdot 1 =$$

$$= 6,283 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} - 6,283 \cdot 10^{-7} = -1,885 \cdot 10^{-6} \text{ Вб} = -1,885 \text{ мкВб}$$

Відповідь: графіки залежності $A(x)$ і $H(x)$ на рис. 3.18; $\Phi = -1,885$ мкВб.

Приклад 3.11. Металева циліндрична шина. Металева циліндрична шина (рис. 3.19) виготовлена з матеріалу із відносною магнітною проникністю $\mu=4$ і знаходиться у повітрі. Розмір $a = 20$ см. Шиною замикається постійний струм $I = 350$ А. Необхідно побудувати графіки залежності векторного потенціалу $A(x)$ та напруженості магнітного поля $H(x)$ у функції координат.

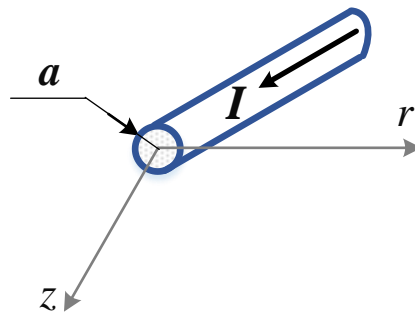


Рисунок 3.19 – Схема циліндричної шини

Порядок розрахунку той самий, що і в попередній задачі 3.10. Визначимо спочатку щільність струму у шині: $j = \frac{I}{S_{\text{кола}}} = \frac{I}{\pi \cdot r^2} = \frac{350}{\pi \cdot 0,2^2} = 2785 \text{ А/м}^2$.

Векторний магнітний потенціал має тільки одну складову, спрямовану паралельно осі z і залежить тільки від координати r . За цих умов рівняння Пуассона в циліндричній системі координат набуває вигляду:

$$\nabla^2 A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = \begin{cases} -\mu \mu_0 j & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

Виконуючи подвійне інтегрування отримуємо рішення:

$$r \frac{\partial A}{\partial r} = \int -\mu \mu_0 j r dr = -\mu \mu_0 j \frac{r^2}{2} + C_1;$$

$$A_1(r) = \int \left(-\mu \mu_0 j \frac{r}{2} + \frac{C_1}{r} \right) dr = -\mu \mu_0 j \frac{r^2}{4} + C_1 \ln(r) + C_2$$

$$r \frac{\partial A}{\partial r} = \int 0 dr = C_3;$$

$$A_2(r) = \int \frac{C_3}{r} dr = C_3 \ln(r) + C_4$$

$$\begin{cases} A_1(r) = -\frac{1}{4} \mu \mu_0 j r^2 + C_1 \cdot \ln(r) + C_2 & r < a \\ A_2(r) = C_3 \cdot \ln(r) + C_4 & r > a \end{cases}$$

Перше рішення при $r=0 < a$ може набувати нескінченних значень, тому складова $C_1 \cdot \ln(r)$ має бути відсутньою, тобто $C_1=0$. Крім того, нехай $A_1(0)=0$, тоді $C_2=0$. Остаточного отримуємо: $A_1(r) = -\frac{1}{4} \mu \mu_0 j r^2$.

Скористаємося отриманим значенням для визначення напруженості магнітного поля $H = -\frac{\text{rot} A}{\mu \mu_0} = -\frac{1}{\mu \mu_0} \frac{dA}{dr}$

Таким чином,

$$\begin{cases} H_1(r) = \frac{1}{2} j r - \frac{C_1}{\mu \mu_0 r} = \frac{1}{2} j r; & r < a \\ H_2(r) = -\frac{C_3}{\mu_0 r}; & r > a \end{cases}$$

Для знаходження постійних інтегрування визначимо граничні умови для $r=a$:

$$H_1(a) = H_2(a). \text{ Звідси: } \frac{1}{2} j a = -\frac{C_3}{\mu_0 a}.$$

$$C_3 = -\frac{1}{2} j \mu_0 a^2 = -\frac{1}{2} \cdot 2785 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,2^2 = -7 \cdot 10^{-5}.$$

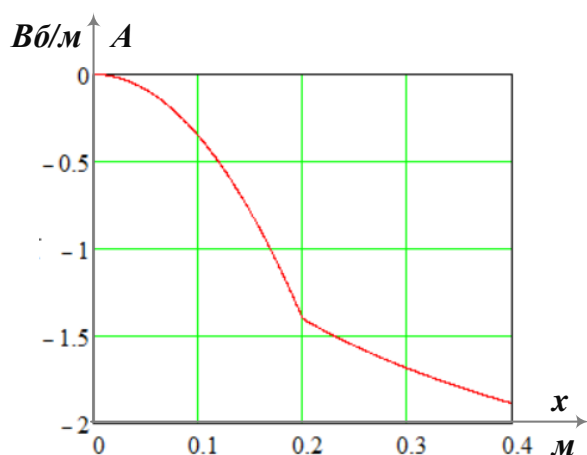
$$A_1(a) = A_2(a). \text{ Звідси: } -\frac{1}{4} \mu \mu_0 j a^2 = C_3 \cdot \ln(a) + C_4.$$

$$\begin{aligned} C_4 &= -\frac{1}{4} \mu \mu_0 j a^2 - C_3 \cdot \ln(a) = \\ &= -\frac{1}{4} 4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2785 \cdot 0,2^2 - (-7 \cdot 10^{-5}) \cdot \ln(0,2) = -25,27 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

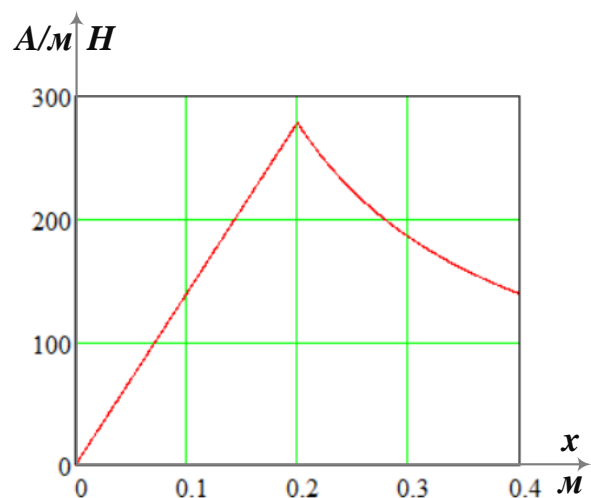
Підставивши розраховані значення остаточно отримуємо залежності $A(r)$, Вб/м, і $H(r)$, А/м, у відповідності з якими будуємо графіки – рис. 3.20:

$$\begin{cases} A_1(r) = -3,5 \cdot 10^{-3} \cdot r^2 & r < a \\ A_2(r) = -7 \cdot 10^{-5} \cdot \ln(r) - 25,27 \cdot 10^{-5} & r > a \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(r) = 1392 \cdot r; & r < a \\ H_2(r) = \frac{55,704}{r}; & r > a \end{cases}$$



а



б

Рисунок 3.20 – Залежності $A(x)$ і $H(x)$

Відповідь. графіки залежності $A(x)$ і $H(x)$ на рис. 3.20.

Приклад 3.12. Двопровідна лінія. Двопровідною лінією (рис. 3.21) замикається постійний струм $I=35$ А. Провід виготовлений з матеріалу з відносною магнітною проникністю $\mu=4$ і знаходиться в повітрі. Радіус проводів $a = 2$ мм, відстань між проводами $d = 50$ см. Необхідно побудувати графіки залежності векторного потенціалу $A(x)$ та напруженості магнітного поля $H(x)$ у функції координати x .

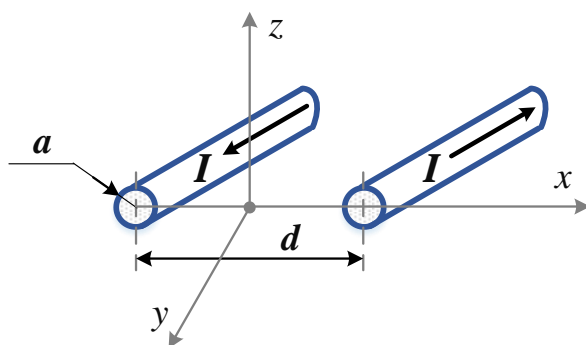


Рисунок 3.21 – Схема двопровідної схеми

Під час вирішення завдання необхідно застосувати принцип накладання. Спочатку слід розрахувати векторний магнітний потенціал $A(x)$ і напруженість магнітного поля $H(x)$, створені кожним провідником окремо, а потім підсумувати алгебраїчні отримані результати.

При розрахунку поля від одного, наприклад, лівого, проводу скористаємося результатами, отриманими у попередній задачі 3.11. Визначимо спочатку щільність струму у проводах:

$$j = \frac{I}{S_{\text{кола}}} = \frac{I}{\pi \cdot r^2} = \frac{35}{\pi \cdot 0,002^2} = 2785000 \text{ А/м}^2.$$

Нехай початок координат знаходиться на осі лівого проводу. Тоді

$$A_1(x) = -\frac{1}{4} \mu \mu_0 j x^2 = -\frac{1}{4} 4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2785000 \cdot x^2 = -3,5 \cdot x^2 \text{ Вб/м};$$

$$C_3 = -\frac{1}{2} j \mu_0 a^2 = -\frac{1}{2} \cdot 2785000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,002^2 = -7 \cdot 10^{-6};$$

$$C_4 = -\frac{1}{4} \mu \mu_0 j a^2 - C_3 \cdot \ln(a) = \\ = -\frac{1}{4} 4 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2785000 \cdot 0,002^2 - (-7 \cdot 10^{-6}) \cdot \ln(0,002) = -57,5 \cdot 10^{-6};$$

$$A_2(x) = C_3 \cdot \ln(x) + C_4 = -7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln(x) - 57,5 \cdot 10^{-6};$$

$$H_1(x) = \frac{1}{2} j x = \frac{1}{2} \cdot 2785000 \cdot x = 1,393 \cdot 10^6 \cdot x;$$

$$H_2(x) = -\frac{C_3}{\mu_0 x} = -\frac{-7 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \frac{1}{x} = \frac{5,57}{x}.$$

Підставивши розраховані значення остаточно отримуємо залежності $A(x)$, Вб/м, і $H(x)$, А/м:

$$\begin{cases} A_1(x) = -3,5 \cdot x^2 & x < a \\ A_2(x) = -7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln(x) - 57,5 \cdot 10^{-6} & x > a \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_1(x) = 1,393 \cdot 10^6 \cdot x; & x < a \\ H_2(x) = \frac{5,57}{x}; & x > a \end{cases}$$

Оскільки дріт із струмом є конструкцією, симетричною щодо площини yOz то функція $A(x)$ є парною, а $H(x)$ – непарною.

Візьмемо, що початок координат знаходиться посередині між проводами. У цьому випадку формули $A(x)$ та $H(x)$ трансформуються наступним чином (враховується зсув початку координат на $d/2$):

$$A'(x) = \begin{cases} -7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(-x - \frac{d}{2}\right) - 57,5 \cdot 10^{-6} & x < -a - \frac{d}{2} \\ -3,5 \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 & -a - \frac{d}{2} < x < a - \frac{d}{2} \\ -7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(x + \frac{d}{2}\right) - 57,5 \cdot 10^{-6} & x > a - \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$H'(x) = \begin{cases} \frac{5,57}{x + \frac{d}{2}} & x < -a - \frac{d}{2} \\ 1,393 \cdot 10^6 \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) & -a - \frac{d}{2} < x < a - \frac{d}{2} \\ \frac{5,57}{x + \frac{d}{2}} & x > a - \frac{d}{2} \end{cases}$$

Струм правого дроту спрямований у протилежний бік, тому знак у функції змінюється на протилежний; зрушення відносно початку координат тепер складає $-d/2$. Тому

$$A''(x) = \begin{cases} 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(-x + \frac{d}{2}\right) + 57,5 \cdot 10^{-6} & x < -a + \frac{d}{2} \\ 3,5 \cdot \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 & -a + \frac{d}{2} < x < a + \frac{d}{2} \\ 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(x - \frac{d}{2}\right) + 57,5 \cdot 10^{-6} & x > a + \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$H''(x) = \begin{cases} \frac{-5,57}{x - \frac{d}{2}} & x < -a + \frac{d}{2} \\ -1,393 \cdot 10^6 \cdot \left(x - \frac{d}{2}\right) & -a + \frac{d}{2} < x < a + \frac{d}{2} \\ \frac{-5,57}{x - \frac{d}{2}} & x > a + \frac{d}{2} \end{cases}$$

Результуюче поле визначається накладенням проводів. Як правило, складати потенційні функції слід за умови, що вони мають нульове значення в деякій одній точці. Нехай значення векторного магнітного потенціалу дорівнює нулю на початку координат. Тоді величину $A'(x)$ необхідно змінити на постійну величину:

$$N = -A'(0) = 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(\frac{d}{2}\right) + 57,5 \cdot 10^{-6} = \text{const},$$

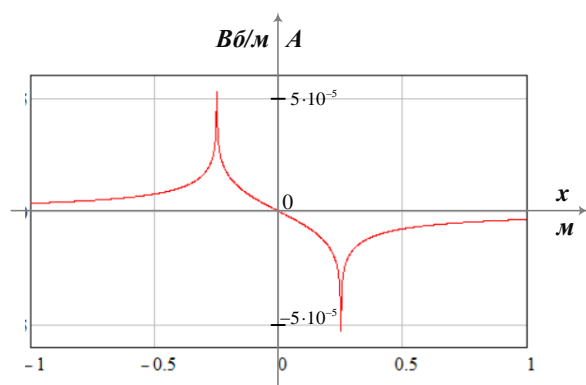
а функцію $A''(x)$ – на величину $A''(0) = -N$, тобто сума $A(x) = A'(x) + A''(x)$ залишиться незмінною, оскільки константи N та $-N$ під час підсумовування взаємно знищуються.

Остаточно отримуємо залежності векторного потенціалу $A(x)$ (рис. 3.22, а) і напруженості магнітного поля $H(x)$ (рис. 3.22, б) для двопровідної лінії:

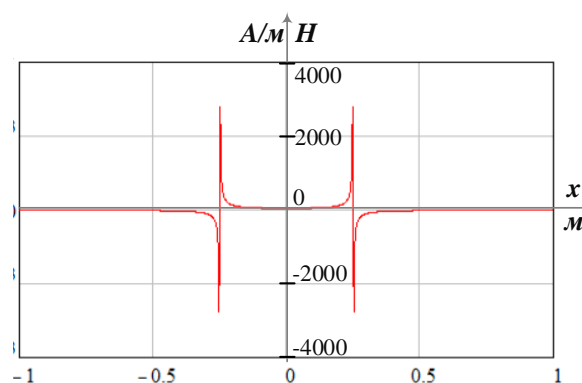
$$A(x) = A'(x) + A''(x) = \begin{cases} 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(\frac{-x + \frac{d}{2}}{-x - \frac{d}{2}}\right) & x < -a - \frac{d}{2} \\ 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(-x + \frac{d}{2}\right) + 57,5 \cdot 10^{-6} - 3,5 \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 & -a - \frac{d}{2} < x < a - \frac{d}{2} \\ 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(\frac{-x + \frac{d}{2}}{x + \frac{d}{2}}\right) & a + \frac{d}{2} < x < -a + \frac{d}{2} \\ -7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(x + \frac{d}{2}\right) - 57,5 \cdot 10^{-6} + 3,5 \cdot \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 & -a + \frac{d}{2} < x < a + \frac{d}{2} \\ 7 \cdot 10^{-6} \cdot \ln\left(\frac{x - \frac{d}{2}}{x + \frac{d}{2}}\right) & x > a + \frac{d}{2} \end{cases}$$

$$H(x) = H'(x) + H''(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{-5,57}{x + \frac{d}{2}} + \frac{-5,57}{x - \frac{d}{2}} & x < -a - \frac{d}{2} \\ 1,393 \cdot 10^{-6} \cdot \left(x + \frac{d}{2}\right) - \frac{5,57}{x + \frac{d}{2}} & -a - \frac{d}{2} < x < a - \frac{d}{2} \\ \frac{5,57}{x + \frac{d}{2}} + \frac{-5,57}{x - \frac{d}{2}} & a - \frac{d}{2} < x < -a + \frac{d}{2} \\ \frac{5,57}{x + \frac{d}{2}} - 1,393 \cdot 10^{-6} \cdot \left(x - \frac{d}{2}\right) & -a + \frac{d}{2} < x < a + \frac{d}{2} \\ \frac{5,57}{x + \frac{d}{2}} + \frac{-5,57}{x - \frac{d}{2}} & x > a + \frac{d}{2} \end{cases}$$



a

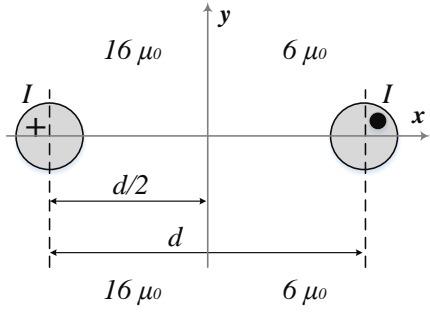
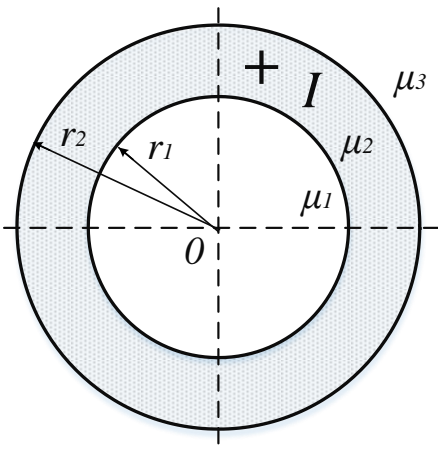


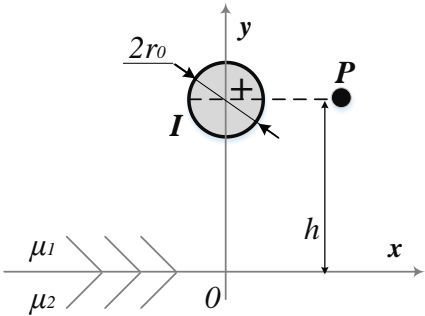
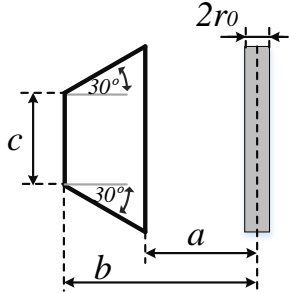
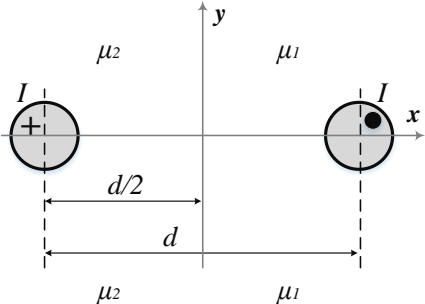
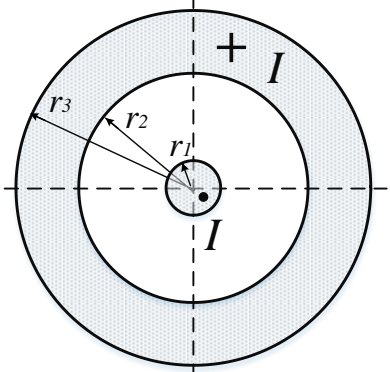
б

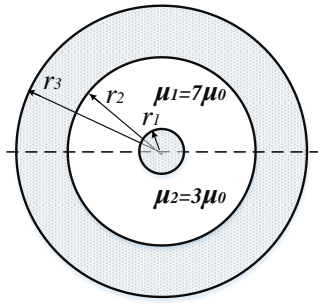
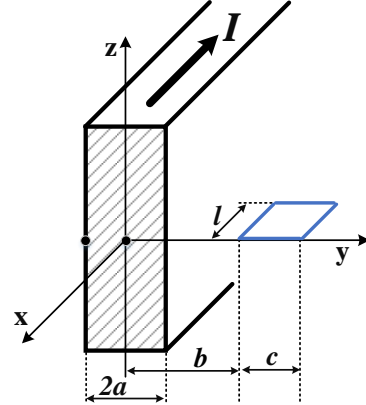
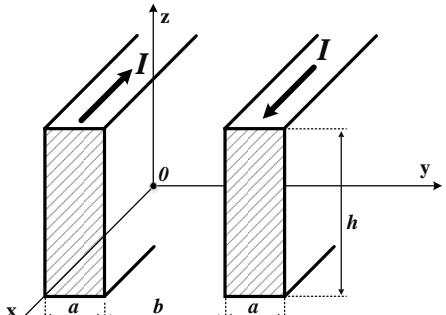
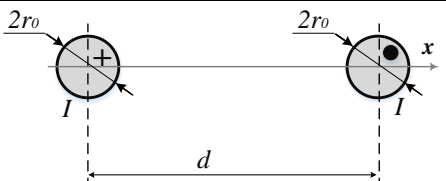
Рисунок 3.22 – Залежності $A(x)$ і $H(x)$

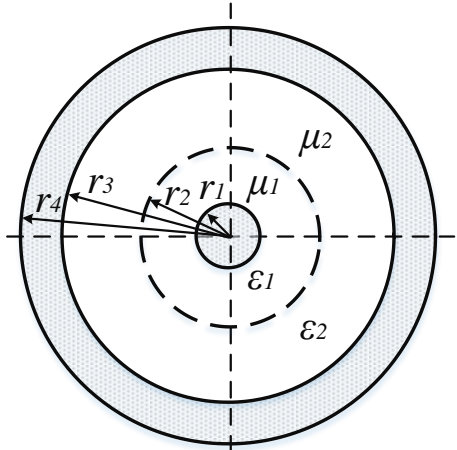
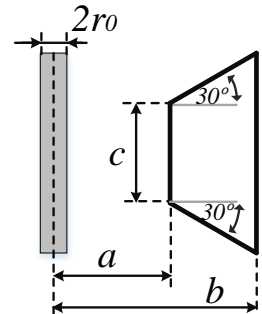
Відповідь: Графіки $A(x)$ і $H(x)$ представлені на рис. 3.22.

Індивідуальні завдання до теми 3

№	Завдання
1	<p>По проводах двопровідної лінії, що у різних магнітних середовищах, протікає постійний струм $I=130$ А. Радіуси проводів $r_0=1$ см, $d=50$ см. Розрахувати магнітну напругу між точками А[-15см;+30см] і В[20см;10см].</p> 
2	<p>Простір між жилою та оболонкою коаксіального кабелю заповнено магнітним матеріалом із відносною магнітною проникністю $\mu=5$. Радіус жили $r_1=3$ мм, внутрішній радіус оболонки $r_2=6$ мм, зовнішній – $r_3=8$ мм. Об'ємна щільність енергії магнітного поля на відстані $r=5$ мм $w_m=0,5$ Дж/м³. Знайти струм кабелю, що протікає жилою, зовнішню індуктивність 10 м кабелю.</p>
3	<p>У прямолінійному провіднику круглого перерізу радіусом $r_1=2$ см протікає постійний струм $I=942$ А. Побудувати залежність векторного магнітного потенціалу залежно від відстані від центру провідника, якщо магнітна проникність провідника $\mu_1=25$, а навколишнього простору – $\mu_2=10$.</p>
4	<p>Розрахувати векторний магнітний потенціал циліндричної труби з струмом I, якщо: $r_1=5$ см, $r_2=8$ см; $\mu_1=1$; $\mu_2=4$; $\mu_3=12$. Побудувати графік потенціалу у функції відстані від осі труби. Знайти магнітний потік, що замикається по тілу труби.</p> 

5	<p>По циліндричному провіднику радіусом $r_0 = 3$ см протікає постійний струм $I = 150$ А. Магнітні проникності серед $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 2$, відстань $h = 1,2$ м. Знайти магнітну індукцію в точці P $[0,5 \text{ м}; 1,2 \text{ м}]$ а також силу, що діє у магнітному полі на 1 м провідника.</p>	
6	<p>Прямолінійний провідник та рамка з числом витків $w = 400$ знаходяться у повітрі в одній площині: $r_0 = 2$ мм, $a = 5$ см, $b = 15$ см, $c = 30$ см. Розрахувати взаємну індуктивність провідника та рамки.</p>	
7	<p>Циліндричні дроти радіусом $r_0 = 1$ см розташовані у різних магнітних середовищах: $\mu_1 = 4$; $\mu_2 = 16$. Відстань між осями проводів $d = 50$ см. Розрахувати зовнішню індуктивність представленої двопровідної лінії.</p>	
8	<p>Розрахувати та побудувати графіки векторного потенціалу та магнітної індукції коаксіального кабелю, ізоляція, жила та оболонка якого виконані з немагнітного матеріалу: $r_1 = 6$ мм, $r_2 = 14$ мм, $r_3 = 15$ мм, $I = 200$ А.</p>	

9	<p>Розрахувати зовнішню індуктивність коаксіального кабелю на 1 км довжини, якщо: $r_1=3$ см, $r_2=6$ см, $r_3=7$ см, верхня частина ізоляції має відносну магнітну проникність $\mu_1=7\mu_0$, а нижня – $\mu_2=3\mu_0$.</p>	
10	<p>По відокремленій плоскій шині висотою $h=15$ см і завтовшки $2a=0,8$ см протікає постійний струм $I=3600$ А. Шина мідна, розташована у повітрі. У площині xOy розташована прямокутна рамка завдовжки $l=0,5$ м, причому сторона l паралельна осі Ox. Число витків рамки $W=150$, $b=1$ см, $c=0,5$ см. 1). Розрахувати залежність векторного магнітного потенціалу поля у функції координат та побудувати його графік. 2). Використовуючи векторний магнітний потенціал, розрахувати взаємну індуктивність шини та рамки.</p>	
11	<p>Двопровідна лінія виконана шинами прямокутного перерізу. Шини алюмінієві, знаходяться у повітрі. По лінії протікає постійний струм $I=130$ А, $h=30$ см, $a=1$ см, $b=2$ см. Розрахувати та побудувати графік векторного магнітного потенціалу для області позитивних значень координати. Знайти магнітний потік, що замикається по тілу правої шини.</p>	
12	<p>Постійний струм $I=80$ А замикається повітряною двопровідною лінією: $r_0=2$ мм, $d=30$ см. Розрахувати поле лінії,</p>	

	знайти енергію, запасену між проводами лінії довжиною $l=15$ м. Знайти магнітну напругу між точками А [40см; -10см] і В [10см; 10см].	
13	По жили двошарового коаксіального кабелю замикається постійний струм $I=80$ А: $r_1=3$ мм, $r_2=8$ мм, $r_3=15$ мм, $r_4=18$ мм, $\varepsilon_1=4$, $\varepsilon_2=2$, $\mu_1=3$, $\mu_2=8$. Жила та оболонка виконані з немагнітного матеріалу. Побудувати графік зміни магнітної індукції за перетином кабелю. Розрахувати зовнішню індуктивність кабелю довжиною $l=25$ м, визначити енергію магнітного поля, яка запасена в індуктивності.	
14	Прямолінійний провідник та рамка з числом витків $w=300$ знаходяться у повітрі в одній площині: $r_0=3$ мм, $a=5$ см, $b=15$ см, $c=30$ см. Розрахувати взаємну індуктивність провідника та рамки.	
15	По біметалічній шині прямокутного перерізу протікає постійний струм $I=1500$ А. Відносні магнітні проникності матеріалів шин $\mu_1=6\mu_0$, $\mu_2=\mu_0$, питома провідність $\gamma_1=2\cdot 10^7$ См/м, $\gamma_2=2\cdot 10^7$ См/м: $a=1$ см, $h=50$ см. Розрахувати та побудувати графік векторного	

	магнітного потенціалу в області значень $y \geq 0$.	
16	<p>У залізобетонному фундаменті на відстані $h = 15$ см проходить циліндричний провід радіуса $r_0 = 0,8$ см зі струмом $I = 250$ А. Магнітна проникність бетону $\mu = 7$, довкілля – повітря. Визначити магнітну індукцію в т. А $[0; 5\text{см}]$ і напруженість магнітного поля в т. В $[10\text{см}; -15\text{см}]$.</p>	
17	<p>За двома паралельними шинami протікають однакові струми $I = 200$ А. Відносна магнітна проникність шин $\mu = 5$, довкілля – повітря. Розрахувати та побудувати графік векторного магнітного потенціалу для позитивних значень координати x. Розрахувати магнітний потік через площу рамки довжиною $l = 2$ м, якщо А $[3\text{см}; 0]$; В $[5\text{см}; 0\text{см}]$ і $a = 1$ см, $b = 2$ см, $h = 40$ см.</p>	
18	<p>По біметалевому циліндричному провіднику протікає постійний струм $I = 150$ А. Навколишнє провідне середовище – повітря, $\gamma_1 = 4 \cdot 10^7$ См/м; $\gamma_2 = 2 \cdot 10^7$ См/м, $\mu_1 = 6$; $\mu_2 = 2$; $r_1 = 1$ см, $r_2 = 2$ см. Розрахувати та побудувати графік векторного магнітного потенціалу. Знайти магнітний потік, що замикається по тілу зовнішнього циліндра</p>	

4. ПОРЯДОК ОФОРМЛЕННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

Завдання до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Аналіз та розрахунок характеристик електромагнітних полів» обирається відповідно з номером варіанту (номер у журналі групи) і затверджується керівником проекту.

Зміст розрахункової роботи наступний:

- 1) Розрахунок електричного поля.
- 2) Розрахунок електричного поля в провідному середовищі.
- 3) Розрахунок магнітного поля постійного струму.

Текст розрахункової роботи набирають на комп'ютері:

- тип шрифту - Times New Roman;
- розмір шрифту - 14;
- міжрядковий інтервал - 1,5;
- поля: зліва, зверху і знизу - 20 мм, справа - 10 мм;
- абзацний відступ повинен бути однаковим упродовж усього тексту і дорівнювати —1,25 см.

Розрахункова робота друкується на аркушах формату А4 з одного боку.

Розрахункова робота з дисципліни «Аналіз та розрахунок характеристик електромагнітних полів» оцінюється наступним чином:

- 20 б, якщо завдання виконано у повному обсязі;
- 10 б, якщо завдання виконано у повному обсязі із зауваженнями;
- 0 б, якщо завдання виконано не у повному обсязі, є серйозні помилки.

Під час семестрового контролю враховуються результати виконання розрахункової роботи відповідно до розподілу балів. Отримані бали впливають на оцінку екзамену

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Теорія поля : навч.-метод. посіб. [Електронний ресурс] : навч. посіб. / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. Є. В. Вербицький. – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 262 с. – Режим доступу: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/21696/1/field_theory.pdf (дата звернення: 31.05.2022 р.)

2. Кузьменко, Е.Д. Теорія поля : підручник / Е.Д. Кузьменко, М.В. Рева. – Івано-Франківськ : ІФНТУНГ, 2012. – 460 с.

3. Теорія електромагнітного поля і основи техніки НВЧ: навч. посіб. / С.В. Соколов, Л.Д. Писаренко, В.О. Журба; за заг. ред. Г.С. Воробйова. – Суми : Сумський держ. ун-т, 2011. – 393 с.

Допоміжна

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи / Л.А. Бессонов. – 9-е изд., перераб. и доп. – М. : Высшая школа, 1996. – 638 с.

2. Бессонов, Л.А. Сборник задач по теоретическим основам электротехники / Л.А. Бессонов, И.Г. Демидова, М.Е. Заруди и др; под ред. Л.А. Бессонов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1988. – 544 с.

3. Савельев, И.В. Курс общей физики. В 3 т. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. / И.В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1982. – 496 с.

4. Савельев, И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике: учеб. пос. / И.В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1988. – 288 с.

5. Иродов, Е.И. Основные законы электромагнетизма : учеб. пос. для студ. вузов / Е.И. Иродов. – 2-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 1991. – 290 с.

6. Иродов, Е.И. Задачи по общей физике / Е.И. Иродов. – М. : Наука, 1979. – 369 с.

7. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. В 5 т. Т. 3. Электричество / Д.В. Сивухин. – 4-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004. – 656 с.

8. Сивухин, Д.В. Сборник задач по общему курсу физики. В 5 т. Т. 3. Электричество и магнетизм / Д.В. Сивухин. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ; ЛАНЬ, 2005. – 232 с.

9. Матвеев, А.Н. Электричество и магнетизм : учеб. пос. / А.Н. Матвеев. – М. : Высш. шк., 1983. – 463 с.