

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД  
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»  
Кафедра електричної інженерії**

**Конспект лекцій  
з дисципліни «Гідрогазодинаміка»  
для студентів денної та заочної форм навчання  
технічних спеціальностей**

**Покровськ-2019**

**УДК 532.5(042)**  
**К 65**

Конспект лекцій з дисципліни «Гідрогазодинаміка» для студентів денної та заочної форм навчання технічних спеціальностей [Електронний ресурс] / уклад. О.М. Любименко. – Покровськ : ДонНТУ, 2019. – 97 с.

В конспекті лекцій наведені визначення основних понять і величин, що розглядаються у дисципліні «Гідрогазодинаміка», коротко роз'яснена сутність описуваних понять та законів. Конспект лекцій може бути використані студентами денної та заочної форми навчання технічних спеціальностей.

Укладач: Любименко О.М., доц., к.ф.-м.н., доц. кафедри електричної інженерії

Рецензент: Штепа О.А. доц., к.т.н., доц. кафедри електронної техніки

Відповідальний за випуск: Колларов О.Ю. завідувач кафедри електричної інженерії

Затверджено навчально-методичним відділом ДонНТУ, протокол №3 від 29.10.2019 р.

Розглянуто на засіданні кафедри електричної інженерії, протокол №1 від 30 .08.2019 року

© Донецький національний  
технічний університет, 2019

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	4
ТЕМА 1. Вступна лекція .....	11
1.1 Предмет гідрогазодинаміка .....	11
1.2 Основні фізичні властивості рідин .....	13
1.3 Гідростатичний тиск і його властивості. Рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера) та їх інтегрування. ....	16
ТЕМА 2. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ. ....	21
2.1 Основне рівняння гідростатики. Закон Паскаля.....	21
2.2 Абсолютний і манометричний тиск. П'єзометрична висота. Вакуум.....	22
2.3 Прилади для вимірювання тиску. ....	24
2.4 Гідравлічні машини гідростатичної дії.....	26
ТЕМА 3. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ. ПЛАВАННЯ ТІЛ У РІДИНІ. ЗАКОН АРХІМЕДА. ....	28
3.1 Тиск рідини на плоскі поверхні. Центр тиску. Епюра тиску .....	28
3.2 Тиск рідини на криволінійні поверхні .....	33
3.3 Плавання тіл у рідині. Закон Архімеда.....	35
ТЕМА 4. ОСНОВНЕ ЗАВДАННЯ ГІДРОДИНАМІКИ.....	39
4.1 Види руху рідини. Лінія течії. Елементарна струминка і потік.....	39
4.2 Гідравлічні елементи потоку. Рівномірний і нерівномірний рух. Напірний і безнапірний потік .....	40
ТЕМА 5. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ РІДИНИ.....	44
5.1 Рівняння нерозривності потоку .....	44
5.2 Рівняння бернулі для потоку рідини. Геометричне та енергетичне тлумачення рівняння бернулі.....	45
5.3 Практичне прикладення рівняння Бернулі.....	52
5.4 Рівняння рівномірного руху рідини .....	54
ТЕМА 6. ВИДИ ОПОРІВ (ВТРАТ НАПОРУ). РЕЖИМИ РУХУ РІДИНИ. ....	56
6.1 Види опорів (втрат напору) .....	56
6.2 Два режими руху рідини .....	57
6.3 Розподіл швидкостей і втрати напору. При ламінарному режимі руху рідини у трубах.....	59
6.4 Розподіл швидкостей при турбулентному режимі руху рідини у трубах .....	60
6.5 Визначення втрат напору по довжині.....	62
6.6 Втрати напору в місцевих опорах .....	66
6.7 Загальні втрати напору .....	69
ТЕМА 7. ВИТІКАННЯ РІДИНИ КРІЗЬ ОТВОРИ ТА НАСАДКИ .....	71
7.1 Витікання рідини із малого отвору в тонкій стінці при постійному напорі.....	71

7.2 Витікання рідини із малого отвору в тонкій стінці при змінному напорі.....	74
7.3 Витікання рідини через насадки.....	76
7.4 Витікання рідини через водозливи .....	78
тема 8. Основні формули для гідравлічного розрахунку трубопроводів.	
Гідравлічний удар у трубах.....	81
8.1 Призначення та класифікація трубопроводів .....	81
8.2 Основні формули для гідравлічного розрахунку трубопроводів .....	81
8.3 Основи розрахунку простих коротких і довгих трубопроводів.....	85
8.4 Послідовне з'єднання трубопроводів.....	89
8.5 Паралельне з'єднання трубопроводів .....	90
8.6 Основи розрахунку трубопроводів при рівномірній роздачі витрати по шляху .....	91
8.7 Гідротранспорт.....	92
8.8 Гідравлічний удар у трубах .....	93
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	97

## ВСТУП

Гідрогазодинаміка є прикладною дисципліною, яка вивчає питання, що пов'язані з механічним рухом рідини в різних середовищах, та природних і техногенних умовах. Оскільки рідина (і газ) розглядається як безперервні і неподільні фізичні тіла, то гідравліку часто розглядають як один з розділів механіки так званих суцільних середовищ, до яких прийнято відносити і особливу фізичне тіло - рідина. З цієї причини гідравліку часто називають механікою рідини або гідромеханікою, так як тут розглядають закони не тільки руху, а й рівноваги, що відносяться до розділу статyki.

Наука про рух рідини і газу в широкому значенні слова є предметом гідрогазодинаміки. В залежності від галузі застосування гідрогазодинаміка має і інші назви: **гідравліка**, якщо розглядаються закони спокою і руху при сталій густині краплинної чи газової рідини; **аеродинаміка** — пов'язано з тією роллю, яку відіграє знання законів руху повітря в галузях вентиляції; **газодинаміка** — наука про рух газу (і повітря) при великих швидкостях, близьких до швидкості звуку і більших.

Спочатку виникла гідравліка - прикладна наука, в якій вивчаються закони руху і рівноваги рідини і даються способи застосування цих законів до вирішення конкретних технічних завдань. У Китаї та інших країнах стародавнього світу вже 7000 років тому існували зрошувальні канали і пристрої для подачі води. У Римі збереглися залишки стародавнього водопроводу, побудованого за 6 століть до нашої ери.

Першим твором з гідравліки вважається трактат грецького фізика Архімеда «Про плаваючі тіла», написаний за 250 років до нашої ери. Архімедом був відкритий закон рівноваги тіла, зануреного в рідину. Архімед сформулював основні положення гідростатики, в тому числі знаменитий закон, названий його ім'ям. Архімед винайшов водопідйомний механізм, так званий архимедів гвинт, що з'явився прообразом корабельних, а також повітряних гвинтів.

Внаслідок застою науки в середні віки гідравліка майже 17 сторіч не поповнювалася новими відкриттями. Формування гідрогазодинаміки як науки починається в середині XV століття, коли Леонардо да Вінчі (1452-1519 рр.) Своїми лабораторними дослідженнями поклав початок експериментальному методу в цій галузі. Він займався дослідженням витікання рідини з отвору і руху води в річках і каналах, а також вивчав принципи польоту птахів і запропонував два варіанти літальних апаратів, один з яких імітував політ птаха, а другий відповідав принципом польоту сучасних вертольотів. Однак його твори були опубліковані лише через понад 400 років після його смерті і практично не використовувалися.

У 1586 р голландський вчений Стевін опублікував книгу «Начала Паскаля», а в 1612 р. італійський вчений Галілей - трактат «Про тілах, що знаходяться у воді, і про тих, які в ній рухаються».

Учень Галілея Торрічеллі в 1643 р. вивів формулу витікання рідини з отвору.

У 1650 р. французький вчений Паскаль відкрив закон про передачу рідиною зовнішнього тиску. Цей закон є основою для розрахунку гідравлічних пресів і гідропідйомників.

Великий англійський учений, фізик і математик І. Ньютон 1686 р. сформулював гіпотезу про закони внутрішнього тертя і вперше ввів поняття в'язкості в рідинах. Ньютон був не тільки видатним теоретиком, але також проводив експерименти, спостерігаючи за вільним падінням сфер з купола собору Святого Павла. На підставі отриманих результатів він зазначив, що сили, що діють між твердим тілом і рідиною, однакові, чи рухається тіло з деякою рівномірною швидкістю крізь рідину, що покоїться або рідина обминає нерухоме тіло з такою ж швидкістю. При цьому сили, що діють на геометрично подібні тіла, які рухаються в рідинах з різною щільністю, пропорційні квадрату швидкості, квадрату лінійних розмірів тіла і щільності рідини. Він також звернув увагу на те, що ця закономірність може бути застосована як до води, так і до повітря.

Подальший розвиток науки пов'язане з розробкою математичного опису процесу руху деформуємого середовища.

У 1738 р. Данило Бернуллі обґрунтував теорему про запас енергії рухомої частинки, яка є основною теоремою сучасної гідродинаміки.

Засновником теоретичного напрямку розвитку гідрогазодинаміки є Леонард Ейлер, який в 1755 р. вивів диференціальні рівняння рівноваги і руху нев'язкої рідини. Роботи Ейлера дозволили вважати, що опис руху рідини і взаємодії її з твердими тілами може розглядатися як чисто математична задача, основна проблема якої полягає в інтегруванні рівнянь динаміки. У 1788 р. математик Лагранж стверджував, що завдяки відкриттю Ейлера вся механіка рідини звелася до питання аналізу, і будь ці рівняння інтегрованими, можна було б в будь-якому випадку повністю визначити рух рідини під впливом будь-яких сил.

Подальший розвиток гідрогазодинаміки було пов'язано переважно з розробкою і вдосконаленням математичного апарату і теоретичним дослідженням процесу руху ідеальної рідини, що не володіє внутрішнім тертям. Були досягнуті значні успіхи в цьому напрямку, однак в ряді випадків результати розрахунків різко розходилися зі спостереженнями. Зокрема на надзвичайно важливі питання, як велика втрата тиску в трубі або опір рухається в рідині тіла, теоретична гідрогазодинаміка відповідала, що втрата тиску і опір дорівнюють нулю. Отже, для інженерів теоретична гідродинаміка не могла мати великого значення, тому що, з одного боку, були потрібні великі математичні пізнання, а з іншого боку можливість практичного застосування теорії була мала.

В результаті цього на підставі величезного досвідченого матеріалу працями інженерів, в першу чергу роботами Д. Бернуллі, Вейсбаха, Дарсі, Буссінеска, була створена нова наука - гідравліка, яка своїми методами і цілями стала все більш відрізнятися від теоретичної гідрогазодинаміки.

Гідрогазодинаміка як розділ механіки на підставі математичних методів намагалася перейти від поведінки елемента рідини до опису поведінки всієї рідини. Основним правилом є коректне математичне описання в рамках даної схеми взаємодії окремих елементів рідини, які обумовлені властивостями реальної рідини, що не враховуються в прийнятій ідеальній схемі взаємодії.

По-іншому стала надходити гідравліка. Не намагаючись охопити єдиною теорією всі явища, гідравліка на основі елементарних досвідчених даних спробувала для кожного конкретного завдання дати розрахункову формулу, враховуючи особливості завдання застосуванням відповідних коефіцієнтів. В результаті цього гідравліка розпалася на ряд окремих проблем. Кожен з нових виникаючих питань вирішувалося за допомогою спеціальних експериментів і шляхом введення коефіцієнтів, знайдених на підставі цих експериментів. Гідравліка ставала все більш і більш наукою про коефіцієнти.

Ситуація, що склалася характеризувалася тим, що інженери-гідравліки спостерігали те, що не можна було пояснити, а математики-гідрогазодинаміки пояснювали те, що не можна було спостерігати.

Зближення цих наукових напрямків було пов'язано з урахуванням в гідрогазодинаміки реальних властивостей рідини і побудовою схем взаємодії елементів рідини на основі спостережуваних явищ.

Основні вчення про рух в'язкої рідини були закладені в 1821 р. французьким вченим Нав'є і отримали своє завершення в 1845 р. в роботах Стокса. Стокс узагальнив закон Ньютона про внутрішнє тертя в рідині і виведені рівняння руху в'язкої рідини, що отримали назву рівнянь Нав'є-Стокса.

Експериментальні дослідження руху рідини в трубах дуже малого діаметру стосовно руху крові по судинах проведені французьким лікарем і натуралістом Пуазейль в 1840 - 1842 рр.

Стоксом були проінтегровано рівняння руху в'язкої рідини в круглій трубі і для рівномірного руху кулі в необмеженому обсязі рідини. Виявилося, що розрахункові та експериментальні дані збігаються тільки при малих швидкостях рідини і малих діаметрах труб. Це виявив Рейнольдс на підставі проведених в 1883 р. дослідів. Він показав, що існують два принципово різних режими течії рідини: ламінарний і турбулентний. При ламінарному плинні рідина рухається як би шарами без перемішування. Тут потік рідини повністю управляється стінками каналу. При турбулентному режимі течії траєкторії руху частинок рідини хаотично змінюються, зберігаючи в середньому напрямок уздовж стінок каналу.



Рівняння усередненого турбулентного руху в'язкої рідини, аналогічні рівнянням Нав'є-Стокса і отримали назву рівнянь Рейнольдса, включають додаткові члени, що враховують додаткові напруги в рідині, що виникають внаслідок турбулентних пульсацій швидкості.

У 1904 р. Л. Прандтль в своїй доповіді «Про рух рідини при дуже малому терті» вказав шлях, який зробив доступним теоретичному дослідженню протягом рідини з тертям в практично важливих випадках. На підставі загальних уявлень про структуру потоку та результатів деяких простих експериментів він показав, дві області: область дуже тонкого шару поблизу тіла, так званий прикордонний шар, де тертя грає істотну роль, і на область поза цим шаром, де тертям можна нехтувати.

Ця гіпотеза, з одного боку, дозволила отримати дуже наочне пояснення важливої ролі в'язкості в проблемі опору, а з іншого боку дала можливість подолати математичні труднощі і тим самим відкрила шлях теоретичного дослідження руху рідини з тертям.

З розвитком промисловості виникла потреба в описі руху газу, що рухається з високою швидкістю. На цій основі виник новий науковий напрям - газова динаміка. Ще в першій половині XIX століття в роботах Пуассона, Стокса, Ірншоу були вперше теоретично проаналізовані ефекти, що виникають при розподілі хвиль тиску в стискаємому середовищі, і була відзначена можливість виникнення розривів в просторовому розподілі параметрів середовища. У 70-х роках XIX століття Мах експериментально підтвердив появу розривів при русі тіл в газі з надзвуковою швидкістю. Їм же розглянуті схеми поведінки розривів при польоті тіл і закінчення струменів з надзвуковими швидкостями.

З початку і до 30-х років XX століття було виконано велику кількість теоретичних робіт, що розглядають обтікання крила літака стисливим газом і рух газу в соплах і лопатках турбіни. У ці ж роки створювалися випробувальні стенди для моделювання течій стиснення газу. До 1935 р. в Англії, Італії, Німеччині, США, СРСР були побудовані перші аеродинамічні труби.

У повоєнні роки з появою електронних обчислювальних машин виникла і стала стрімко розвиватися обчислювальна гідро-аеро-динаміка, яка використовує методи математичного моделювання процесів руху рідини і газу і взаємодії їх з тілами різної форми.

Суттєвою особливістю сучасного стану гідроаеродинаміки є тісний зв'язок теорії і експерименту. За допомогою математичного моделювання шляхом проведення різноманітних розрахунків вибираються оптимальні профілі елементів технологічних установок або режими їх роботи, а потім отримані результати перевіряються на фізичних моделях на стендових установках і в аеродинамічних трубах. За такою схемою відпрацьовуються профілі автомобілів, літаків, кораблів, підводних човнів, канали парових, газових і гідравлічних турбін та іншого обладнання.

Метою викладення навчальної дисципліни є підготовка фахівців до роботи з енергетичним обладнанням, забезпечення рівня знань по основам гідро-газо-динаміки. Основними завданнями вивчення дисципліни є забезпечення знаннями щодо основних особливостей поведінки об'єктів, законів збереження, що визначають поведінку суцільного текучого середовища, розрахунку характеристик течії рідин та газів. Згідно з вимогами освітньо-професійної програми, студенти мають досягти таких результатів навчання:

Знати:

- основні поняття та визначення механіки суцільного текучого середовища;
- закони збереження маси, імпульсу, енергії;
- рівняння Бернуллі;
- режими течії;
- вплив режимів течії на протікання теплогідравлічних процесів;
- шляхові та місцеві втрати тиску;
- методи розрахунку потікорозподілу.

Вміти:

- визначати силовий вплив потоку, тяги двигуна з використанням закону збереження імпульсу;

- розраховувати втрати тиску в трубопроводах і каналах;
- визначати режими течії, коефіцієнти втрати тиску в трубах, місцевих опорах;
- формувати та розв'язувати систем рівнянь для розрахунку потікорозподілу в гідравлічних системах.

## ТЕМА 1. ВСТУПНА ЛЕКЦІЯ

### 1.1 Предмет гідрогазодинаміка

Наука про рух рідини і газу в широкому значенні слова є предметом гідрогазодинаміки. В залежності від галузі застосування, гідрогазодинаміка має і інші назви: **гідравліка**, якщо розглядаються закони спокою і руху при сталій густині краплинної чи газової рідини; **аеродинаміка** — пов'язано з тією роллю, яку відіграє знання законів руху повітря в галузях вентиляції; **газодинаміка** — наука про рух газу (і повітря) при великих швидкостях, близьких до швидкості звуку і більших.

Рідиною (Liquid) називається фізичне тіло, яке сильно опирається зміні свого об'єму (в протилежність газам) та слабо опирається зміні своєї форми (в протилежність твердим тілам).

Рух рідин і газів під дією зовнішніх і внутрішніх сил супроводжується зміною форми, а в загальному випадку — і об'єму виділеної її частини.

В гідрогазодинаміці звичайно абстрагуються від молекулярної структури потоків, що досліджуються, і розглядають умовну модель середовища, яке має безперервний розподіл всіх характеристик (параметрів). Гіпотеза неперервності (суцільності) об'єднує рідини і гази в єдину категорію текучих, легко деформованих середовищ. Разом з тим між рідинами і газами існує принципова різниця.

В рідинах сили міжмолекулярного зчеплення більш значимі у порівнянні з газами, тому що відстані між молекулами малі. Через цю причину рідини можна вважати слабо стисливими середовищами або, спрощено, нестисливими.

Ефекти стисливості інтенсивно проявляються при русі газів в каналах з великими швидкостями і при обтіканні тіл різної форми потоком великої швидкості. При невеликих швидкостях і відсутності теплообміну стисливість газів проявляється слабо. Разом з тим стисливість крапельних рідин також

проявляється при великих тисках. Отже, стисливість властива всім рідинам і газам, однак її кількісний прояв різний в залежності від фізичних властивостей середовища.

Це стало підґрунтям об'єднати суцільні середовища, які мають загальні властивості суцільності і легкої рухливості, під загальною назвою рідини, виділяючи в міру необхідності практично нестисливі (крапельні) і стисливі (газоподібні) рідини.

Під час руху всі рідини мають внутрішнє тертя (Internal friction), яке обумовлене в'язкими властивостями середовища. Вплив в'язкості на характер течії рідини неоднозначний. В деяких випадках відіграє вирішальну роль і визначає рух середовища. В інших випадках її вплив проявляється слабо і уявлення про характер течії можна одержати без врахування в'язких сил. Нехтування в'язкими силами суттєво спрощує аналітичне дослідження. Замість реальної рідини виявляється доцільним розглядати модель ідеальної рідини.

Ідеальна рідина (Ideal liquid) – це абстрактна рідина без внутрішніх сил тертя. Вказану модель слід розглядати як перше, але важливе, наближення до реальної моделі течії. При вивченні в'язких властивостей виявляється також різниця між капельною і стисливою рідиною, яка обумовлена молекулярною структурою : в'язкість нестисливої рідини з ростом температури зменшується, а в'язкість газів зростає.

Крапельна рідина приймає форму посудини і утворює поверхню вільного рівня, яка відокремлює її від других рідин або газів з іншими фізичними властивостями. На такій поверхні особливо інтенсивно проявляється дія молекулярних сил зчеплення, що призводить до появи сил капілярності, змочуваності твердих поверхонь і до виникнення крапель і менісків.

## 1.2 Основні фізичні властивості рідин

На відміну від твердого тіла рідина характеризується малим зчепленням між частками, внаслідок чого має плинність і приймає форму посудини, у яку цю рідину поміщають.

Рідини підрозділяють на два види: **краплинні** та **газоподібні**. Краплинні рідини мають більший опір стисканню (практично нестисливі) і малий опір дотичним і розтяжним зусиллям (через незначне зчеплення часток та малі сили тертя між частками). Газоподібні рідини характеризуються майже повною відсутністю опору стисканню. До краплинних рідин відносяться вода, бензин, нафта, ртуть і т.і., а до газоподібних - всі гази. Гідравліка вивчає краплинні рідини. При рішенні практичних завдань гідравліки часто користуються поняттям **ідеальної рідини** - нестисливого середовища, яке не має внутрішнього тертя між окремими частками.

Основними фізичними властивостями рідини є наступні: питома вага, густина, стисливість, температурне розширення, в'язкість.

**Питома вага рідини  $\gamma$**  являє собою вагу одиниці її об'єму:

$$\gamma = G/V,$$

де  $G$  - вага рідини;

$V$  - її об'єм.

Питому вагу вимірюють у ньютонах на метр кубічний ( $\text{Н/м}^3$ ).

**Густина рідини  $\rho$**  - маса одиниці її об'єму:

$$\rho = m/V,$$

де  $m$  - маса рідини в об'ємі  $V$ .

Густину рідини вимірюють у кілограмах на кубічний метр ( $\text{кг/м}^3$ ).

Тому що питома вага та густина - це відношення ваги та маси до однакового об'єму, то маємо такий зв'язок між ними

$$\gamma = \rho \cdot g.$$

**Стисливість** рідини є її властивістю змінювати об'єм при зміні тиску. Ця властивість рідини характеризується **коефіцієнтом об'ємного стискування**  $\beta_v$ , який виражає відносне зменшення об'єму рідини при збільшенні тиску  $p$  на одиницю:

$$\beta_v = \frac{V_1 - V_2}{(p_2 - p_1) \cdot V_1}.$$

Коефіцієнт об'ємного стискування води при зміні тиску з 0,1 до 50 МПа практично залишається тим же. У зв'язку із цим при рішенні багатьох практичних завдань стискальністю рідини звичайно зневажають. Величина, зворотна коефіцієнту  $\beta_v$ , називається **модулем пружності**  $E_0 = 1/\beta_v$ . Модуль пружності вимірюється в паскалях (Па).

**Температурне розширення рідини** при її нагріванні характеризується **коефіцієнтом температурного розширення**  $\beta_t$ , який показує відносне збільшення об'єму рідини при зміні температури  $t$  на  $1^\circ\text{C}$ :

$$\beta_t = \frac{V_2 - V_1}{(t_2 - t_1) \cdot V_1}.$$

На відміну від інших тіл об'єм води при її нагріванні від  $0$  до  $4^\circ\text{C}$  зменшується. При  $4^\circ\text{C}$  вода має найбільшу густину і найбільшу питому вагу; при подальшому нагріванні її об'єм збільшується. Коефіцієнт  $\beta_t$  води збільшується зі зростанням тиску при підвищенні її температури від  $0$  до  $50^\circ\text{C}$  і зменшується зі зростанням тиску при подальшому підвищенні її

температури. Однак у розрахунках багатьох споруд при незначному зміні температури води та тиску зміною коефіцієнта  $\beta_t$  можна зневажити.

**В'язкість рідини** - це її властивість чинити опір відносному руху (зсуву) часток рідини. Сили, що виникають у результаті ковзання шарів часток рідини, називають силами внутрішнього тертя або силами в'язкості.

Сили в'язкості проявляються при русі реальної рідини, якщо ж рідина перебуває в спокої, то в'язкість її може бути прийнята рівною нулю.

Ще на початку XVIII в. І. Ньютон висловив гіпотезу про те, що сили внутрішнього тертя між частками рідини прямо пропорційні швидкості відносного руху та площі поверхні шарів, що стикаються:

$$T = \pm \mu \cdot S \cdot \frac{du}{dn} = \tau \cdot S ,$$

де  $\mu$  - коефіцієнт внутрішнього тертя або **динамічна в'язкість**;

$S$  - площа поверхні шарів, що стикаються;

$\frac{du}{dn}$  - градієнт швидкості переміщення шарів; тобто зміна швидкості при переході від шару до шару на одиницю відстані між осями цих шарів (див. рис.1.1);

$\tau$  - дотичне напруження.

З формули видно, що

$$\mu = \tau / \frac{du}{dn} .$$

Одиницею динамічної в'язкості є паскаль-секунда (Па·с).



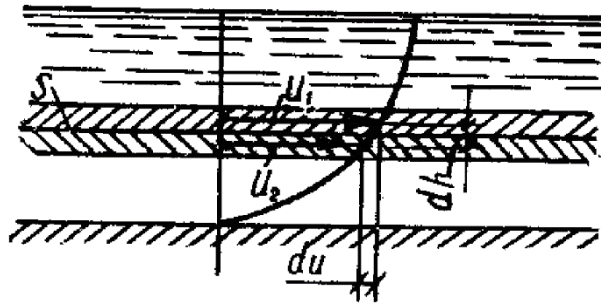


Рисунок 1.1 – Схема виникнення сил внутрішнього тертя при русі рідини

Для рішення практичних завдань використовують кінематичну в'язкість рідини  $\nu$ , яка представляє собою відношення динамічної в'язкості до густині рідини:  $\nu = \mu / \rho$ .

За одиницю кінематичної в'язкості прийнятий квадратний метр на секунду ( $\text{м}^2/\text{с}$ ).

Зі збільшенням температури в'язкість рідини швидко зменшується, залишаючись майже постійною і зі зміною тиску.

Вимірюють в'язкість рідини приладами, названими віскозиметрами.

### 1.3 Гідростатичний тиск і його властивості. Рівняння рівноваги рідини (рівняння Ейлера) та їх інтегрування.

**Гідростатика** - розділ гідравліки, який вивчає закони рівноваги рідини, що перебуває у спокої.

Рідина, що перебуває у спокої, піддається дії зовнішніх сил двох категорій: масових і поверхневих. До **масових** відносяться сили, пропорційні масі рідини (сила ваги, сила інерції). До **поверхневих** відносяться сили, розподілені по поверхні, яка обмежує будь-який подумки виділений об'єм рідини, і пропорційні площі цієї поверхні (сила тиску, відцентрова сила).

Під дією зовнішніх сил у кожній точці рідини виникають внутрішні сили, які характеризують її напружений стан (тиск у точці). Розглянемо деякий об'єм рідини, що перебуває у спокої (див рис.1.2).

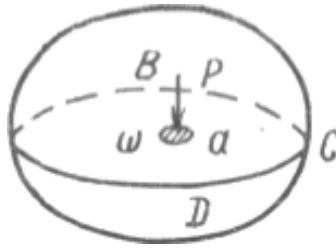


Рисунок 1.2 – Схема, яка пояснює поняття гідростатичного тиску

Розітнемо цей об'єм на дві частини довільною площиною ABCD і відкинемо верхню частину. Для збереження рівноваги нижньої частини до площини ABCD необхідно прикласти сили, які замінюють дію верхньої частини об'єму рідини на нижню.

Візьмемо на площині ABCD довільну точку  $a$  та виділимо біля неї малу площадку  $\omega$ . У центрі цієї площадки діє сила  $P$ , що представляє собою рівнодіючу сил, прикладених до різних точок площадки  $\omega$ . Якщо значення сили  $P$  розділити на площу  $\omega$ , одержимо середнє значення тиску на одиницю площі:

$$p_{cp} = P / \omega.$$

де  $P$  – сумарна сила гідростатичного тиску;

$\omega$  - площа;

$P / \omega$  - середній гідростатичний тиск.

У гідравліці силу  $P$  називають сумарною силою гідростатичного тиску, а відношення  $P / \omega$  - середнім гідростатичним тиском.

Якщо зменшувати площадку  $\omega$ , то середній гідростатичний тиск буде прагнути до деякої межі, яка виражає гідростатичний тиск у точці:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (P/\omega) = p.$$

Інакше кажучи, гідростатичний тиск у точці є межею відношення сили тиску, що діє на елементарну площадку, до площі цієї елементарної площадки, якщо вона прагне до нуля.

Гідростатичний тиск вимірюється одиницями сили, розділеними на одиницю площі. За одиницю тиску прийнятий паскаль (Па) - рівномірно розподілений тиск, при якому на площу  $1\text{ м}^2$  діє сила 1 Н.

Гідростатичний тиск має три основні властивості.

1. *Гідростатичний тиск завжди спрямований по внутрішній нормалі до площадки, на яку він діє.* Ця властивість доводиться від противного (див. рис.1.3).

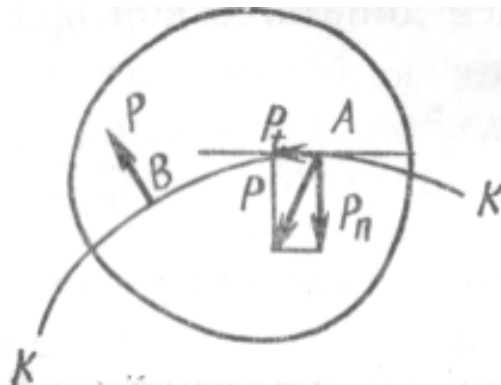


Рисунок 1.3 – Схема до доказу першої властивості гідростатичного тиску

Розглянемо деякий об'єм рідини, що перебуває у спокої, усередині якого проведена поверхня КК (рис. 1.3). Візьмемо на цій поверхні довільну точку А. Припустимо, що гідростатичний тиск у точці А спрямований не по нормалі, а під кутом до поверхні. У цьому випадку гідростатичний тиск  $p$  можна розкласти на дві складові: нормальну  $p_n$  і дотичну  $p_t$  до поверхні КК. Однак, якби існувала дотична складова гідростатичного тиску, то частки рідини вийшли б з рівноваги та рідина не перебувала б у спокої. Отже, дотична складова повинна дорівнювати нулю, а гідростатичний тиск буде спрямовано перпендикулярно поверхні.

Гідростатичний тиск завжди спрямований по внутрішній нормалі. Якби він був спрямований по зовнішній нормалі, як це показано на рис.1.3 у точці В, то, оскільки рідина не опирається розтяжним напруженням, частки її повинні були б почати рухатися, що суперечить прийнятій умові про знаходження рідини у спокої.

2. Гідростатичний тиск у будь-якій точці рідини діє однаково в усіх напрямках, тобто не залежить від кута нахилу площадки, на яку він діє.

Виділимо в об'ємі рідини, що перебуває у спокої, точку А як початок координат і вершину тетраедра, який має грані площею  $dydz/2$ ,  $dzdx/2$ ,  $dx dy/2$  і  $d$  (рис. 1.4).

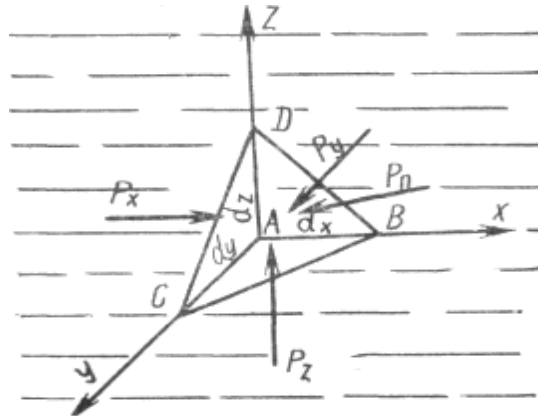


Рисунок 1.4 – Схема до доказу другої властивості гідростатичного тиску

На грані тетраедра діють сили гідростатичного тиску

$$P_x = p_x \cdot dydz/2,$$

$$P_y = p_y \cdot dx dz/2,$$

$$P_z = p_z \cdot dx dy/2$$

$$P_n = p_n \cdot dF,$$

де  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  и  $p_n$  – середні гідростатичні тиски, які діють на грані.

Крім сил тиску на тетраедр діє сила ваги  $G$ , проекція якої на вісь  $x$ , а також на вісь  $y$  дорівнює нулю, а на вісь  $z$  складає  $1/6(dx \cdot dy \cdot dz \cdot \gamma)$ , тобто дуже мала та нею можна зневажити.

Тетраедр буде перебувати в спокої, якщо суми проекцій всіх діючих сил на осі координат будуть дорівнювати нулю. Рівняння рівноваги по осі  $x$  буде мати такий вигляд:

$$p_x dydz / 2 - p_n dF(\cos P_n, x) = 0;$$

аналогічний вигляд будуть мати і рівняння рівноваги по осях  $y$  і  $z$ .

Проекції площі  $d$  на координатні площини  $yAz$ ,  $xAz$  і  $xAy$  становлять:

$$d(\cos P_n, x) = dydz/2;$$

$$d(\cos P_n, y) = dzdx/2;$$

$$d(\cos P_n, z) = dxdy/2.$$

Якщо зробити заміну, то рівняння рівноваги по осі  $x$  буде мати такий вигляд:

$$p_x dydz / 2 = p_n dydz / 2,$$

аналогічний вигляд будуть мати і рівняння рівноваги по осях  $y$  і  $z$ .

Після скорочення одержимо:

$$p_x = p_n; p_y = p_n; p_z = p_n;$$

або

$$p_x = p_y = p_z = p_n.$$

Ця рівність доводить другу властивість гідростатичного тиску.

3. *Значення тиску визначається тільки розташуванням даної точки в просторі, заповненому рідиною, тобто залежить від координат цієї точки.*

$$p = f(x; y; z).$$

Тиск є скалярною величиною, тоді як сила тиску - це вектор.

Література : [1-3]

## ТЕМА 2. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОСТАТИКИ.

### 2.1 Основне рівняння гідростатики. Закон Паскаля.

Розглянемо рідину, що перебуває в спокої, і визначимо гідростатичний тиск  $p$  у точці  $A$  на нескінченно малій площадці  $d\omega$ , яка розташована на глибині  $h$  від вільної поверхні рідини та паралельна цієї поверхні (рис. 1.5). Виділимо над цією площадкою деякий циліндричний об'єм рідини, замінивши дію навколишнього середовища силами тиску на вільну поверхню  $p_0 d\omega$ , на нижню основу циліндра  $p d\omega$  та на його бічну поверхню.

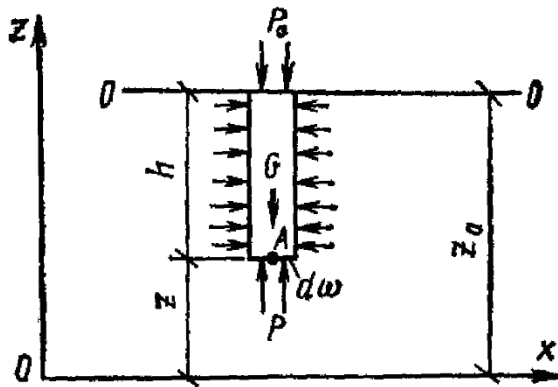


Рисунок 1.5 – Схема до виводу основного рівняння гідростатики

Сили тиску рідини на бічну поверхню циліндра взаємно врівноважуються. На виділений об'єм діє також масова сила - вага  $G = \gamma \cdot h \cdot d\omega$ . Тому що циліндр перебуває в рівновазі, то сума проекцій всіх сил на вісь  $z$  буде дорівнює нулю:

$$p d\omega - \gamma h d\omega - p_0 d\omega = 0.$$

Скоротивши члени цього рівняння на  $d\omega$  та перегрупувавши їх, одержимо **основне рівняння гідростатики**

$$p = p_0 + \gamma h$$

Якщо в отриманому рівнянні замінити  $h$  на  $z_0 - z$ , одержимо, що  $p = p_0 + \gamma(z_0 - z)$ , звідки при  $p_0 = \text{const}$  і  $z_0 = \text{const}$  маємо:

$$z + p / \gamma = z_0 + p_0 / \gamma = const ,$$

інша форма запису основного рівняння гідростатики.

Аналіз основного рівняння гідростатики показує, що тиск, прикладений до вільної поверхні рідини, передається в усі точки рідини без зміни. Це положення називається **законом Паскаля**. З цього положення витікає, що сила тиску на площадку усередині рідини пропорційна площі цієї площадки:

$$P_1 / P_2 = F_1 / F_2 ,$$

де  $P_1$  та  $P_2$  - сили тиску на площадки  $F_1$  та  $F_2$ .

## 2.2 Абсолютний і манометричний тиск. П'єзометрична висота.

### Вакуум.

Абсолютний, або повний, гідростатичний тиск складається із зовнішнього тиску на вільну поверхню рідини та манометричного (надлишкового) тиску, який створює шар води над розглянутою точкою А (рис.1.6).

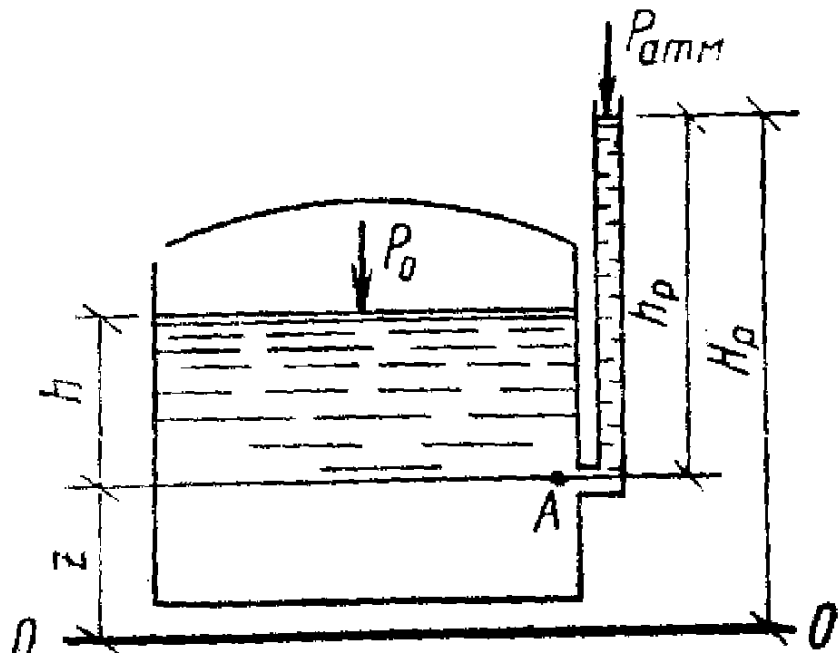


Рисунок 1.6 – Схема установки п'єзометра

У відкритій посудині на вільну поверхню рідини діє **атмосферний** або **барометричний** (залежний від висоти над рівнем моря) тиск.

Позначимо атмосферний тиск  $p_{атм}$ , а манометричний  $p_{ман}$ , тоді абсолютний тиск  $p_{абс} = p_{атм} + p_{ман}$ .

Отже, основне рівняння гідростатики можна записати так:

$$p_{абс} = p_{атм} + \gamma h.$$

З рис. 1.6 видно, що в закритій посудині

$$p_{абс} = p_{атм} + \gamma h_p,$$

а з іншого боку,

$$p_{абс} = p_0 + \gamma h,$$

отже,  $p_{атм} + \gamma h_p = p_0 + \gamma h$ , звідки можна записати:

$$h_p = \frac{p_0 - p_{атм}}{\gamma} + h.$$

Величина  $h_p$  - п'єзометрична висота, що показує надлишковий тиск у точці, де приєднана трубка (п'єзометр). У відкритій посудині  $h_p = h$ , тому що  $p_0 = p_{атм}$ , тобто п'єзометрична висота буде дорівнювати глибині занурення точки А в рідину. Висоту підняття води в п'єзометрі щодо площини відліку 00 називають **п'єзометричним напором  $H_p$** . Для закритої посудини:

$$H_p = h_p + z = \frac{p_0 - p_{атм}}{\gamma} + h + z.$$

Тиск на рідину нижче за атмосферний називається вакуумом, тобто вакуум - це недолік тиску до атмосферного:

$$p_{вак} = p_{атм} - p_{абс}.$$

Для вимірювання вакууму використовують вакуумметр (рис. 1.7). У зв'язку з тим, що  $p_0 < p_{атм}$ , рідина піднімається в трубці з посудини В на висоту  $h_{вак}$ . Відповідно до основного рівняння гідростатики будемо мати:.



$$p_{атм} = p_0 + \gamma h_{вак},$$

звідки

$$h_{вак} = \frac{p_{атм} - p_0}{\gamma}.$$

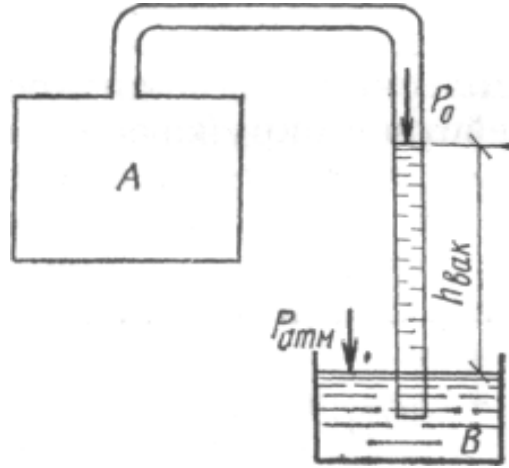


Рисунок 1.7 – Схема установки вакуумметра

### 2.3 Прилади для вимірювання тиску.

Для вимірювання тиску застосовують п'єзометри, рідинні та механічні манометри та вакуумметри.

**П'єзометр** (див. рис. 1.6) являє собою відкриту зверху скляну трубку діаметром 5-12мм, яка є поміщеною на вимірювальній шкалі та з'єднана нижнім кінцем з тією областю, де потрібно виміряти тиск. Рідина в п'єзометрі піднімається на висоту  $h_p$  під дією тиску  $p_0$  на вільній поверхні рідини та ваги стовпа рідини висотою  $h$ .

Надлишковий гідростатичний тиск у точці установки п'єзометра  $p_{надл} = \gamma h_p$ , звідки

$$h_p = p_{надл} / \gamma.$$

Абсолютний гідростатичний тиск  $p_{абс} = p_{атм} + \gamma h_p$ .

Зовнішній тиск, що діє на поверхню рідини в закритому резервуарі,  $p_0 = p_{атм} + \gamma(h_p - h)$ , звідки

$$h = \frac{p_{атм} - p_0}{\gamma} + h_p.$$

П'єзометричну висоту вимірюють у метрах стовпа рідини. Довжина трубки п'єзометра звичайно не перевищує 3 - 4м.

**Рідинні манометри** відрізняються від п'єзометрів тим, що в них використовується рідина з певною питомою вагою (вода, спирт, ртуть і ін.).

Найпростішим є U-образний ртутний манометр, схема якого представлена на рис. 1.8. Висота трубки зменшується в порівнянні із трубкою звичайного п'єзометра в 13,6 рази, тому що питома вага ртуті приблизно в 13,6 рази більше питомої ваги води.

Абсолютний гідростатичний тиск для перерізу FF буде дорівнювати:

$$p_{абс}^{FF} = p_{атм} + \gamma_{рт} h_p,$$

де  $\gamma_{рт} = \rho_{рт} g$  - питома вага ртуті,  $h_p$  - різниця рівнів ртуті в лівому та правому колінах U-образної трубки.

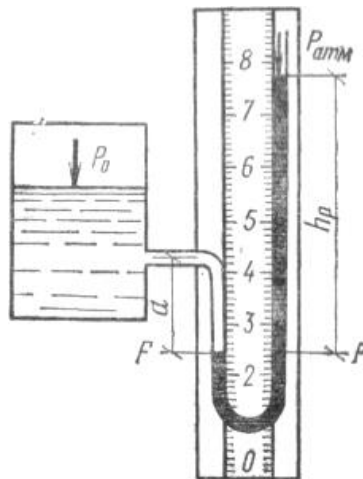


Рисунок 1.8 – Ртутний манометр

Абсолютний гідростатичний тиск у закритій посудині в точці приєднання манометра буде (див. рис. 1.8)

$$p_{абс} = p_{атм} + \gamma_{рт} h_p - \gamma \cdot a.$$

Застосовують манометри та мікроманометри. Більше досконалим типом манометрів є диференціальні манометри, які використовуються для визначення різниці тисків у двох точках.

Механічні манометри (пружинні та мембранні) застосовують для вимірювання значного тиску: пружинні - тиску до  $10^9$  Па, мембранні - тиску до  $29 \cdot 10^5$  Па. У пружинних манометрах тиск передається на пружину, до якої приєднана стрілка, що вказує на вимірювальній шкалі значення тиску.

**Вакуумметри** (як і манометри) бувають рідинними та механічними. Конструкція та принцип їх дії аналогічні конструкції та принципу дії манометрів.

## 2.4 Гідравлічні машини гідростатичної дії

В основу принципу дії багатьох гідравлічних машин покладені закони гідравліки. Одним з найбільше широко застосовуваних у техніці законів є закон Паскаля.

**Гідравлічний прес** (рис. 1.9) складається із двох сполучених камер, у яких установлені поршні  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  площею  $\omega_1$  і  $\omega_2$  відповідно. Після заповнення камер рідиною (звичайно технічним мастилом) до поршня  $\Pi_1$  прикладають силу  $P_1$ . Тоді під поршнем  $\Pi_1$  у меншій камері виникає гідростатичний тиск  $p_1 = P_1 / \omega_1$ , що за законом Паскаля передається на площу основи більшого поршня  $\Pi_2$ . Гідростатичний тиск, який спрямовано нормально до поверхні основи поршня, створює силу

$$P_2 = \omega_2 p_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} P_1,$$

яка буде стискати тіло, поміщене між поршнем  $\Pi_2$  і нерухомим горизонтальним упором. Таким чином, сила тиску  $P_1$ , прикладена до малого поршня  $\Pi_1$  створює стискаючу силу  $P_2$ , що перевищує силу  $P_1$  у стільки разів, у скільки площа  $\omega_2$  більше площі  $\omega_1$ .

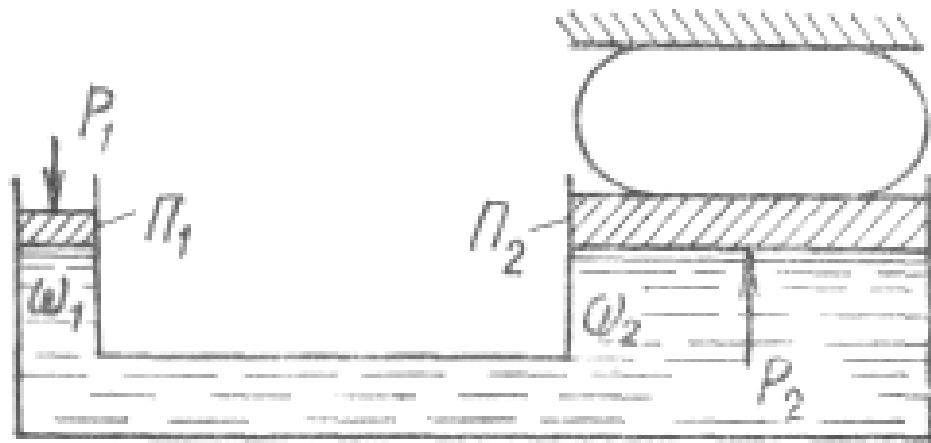


Рисунок 1.9 – Схема гідравлічного преса

**Гідравлічний домкрат.** Підйоми великих вантажів на малу висоту можна легко здійснювати із застосуванням гідравлічних домкратів. Гідравлічний домкрат складається із циліндра (посудини) з більшим поршнем і насоса з малим поршнем, що нагнітає в посудину рідину. Поршневий насос приводиться в дію важільним пристроєм. Тиск поршня насоса передається рідиною на великий поршень із вантажем, вага якого в багато разів перевищує силу тиску поршня насоса. У цьому складається принцип роботи гідравлічного домкрата, який з успіхом застосовують у бульдозерах, канавокопачах, автокранах і в інших будівельних машинах.

Література : [3-4]

### ТЕМА 3. ТИСК РІДИНИ НА ПЛОСКІ ПОВЕРХНІ. ПЛАВАННЯ ТІЛ У РІДИНІ. ЗАКОН АРХІМЕДА.

#### 3.1 Тиск рідини на плоскі поверхні. Центр тиску. Епюра тиску

Допустимо, що необхідно визначити силу повного гідростатичного тиску, який діє на плоску прямокутну фігуру  $AB$  площею  $\omega$ , узятую на стінці  $B$ , нахиленої до горизонту під кутом  $\alpha$  (рис. 1.10).

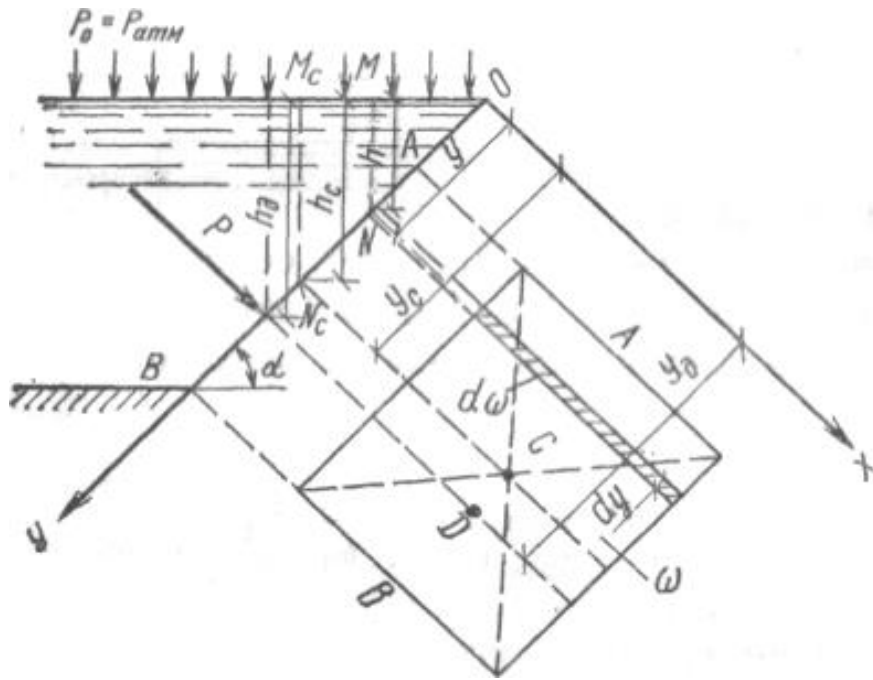


Рисунок 1.10 – Схема тиску рідини на плоску фігуру

Проекцію фігури  $AB$  на площину креслення приймемо за вісь координат  $y$ . Продовжимо лінію  $AB$  до перетинання з рівнем вільної поверхні рідини в точці  $O$ , яку будемо вважати за початок координат. Лінія  $Ox$ , перпендикулярна напрямку  $AB$ , буде в нашій системі віссю  $x$ . Подумки повернувши фігуру  $AB$  навколо осі  $y$  до суміщення з площиною креслення, виділимо на площі  $\omega$  нескінченно малу смужку шириною  $dy$ . Ця смужка, занурена в рідину на глибину  $h$ , перебуває на відстані  $y$  від осі  $x$  і має нескінченно малу площу  $d\omega$ .

Елементарна сила абсолютного гідростатичного тиску, який діє на розглянуту смужку, буде дорівнювати:

$$dP_{a\bar{b}c} = p_{a\bar{b}c} d\omega = (p_0 + \gamma h) d\omega.$$

Із трикутника  $OMN$ , у якого сторона  $MN$  дорівнює  $h$ , а сторона  $NO$  дорівнює  $y$ , знаходимо:  $h = y \cdot \sin \alpha$ . Тоді

$$dP_{a\bar{b}c} = p_0 d\omega + \gamma \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot d\omega.$$

Проінтегрувавши цей вираз по площі  $\omega$ , одержимо силу повного абсолютного гідростатичного тиску, який діє на плоску фігуру  $AB$ :

$$P_{a\bar{b}c} = p_0 \omega + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \int_{\omega} y d\omega.$$

Інтеграл  $\int_{\omega} y d\omega$  виражає статичний момент площі фігури  $AB$  щодо осі  $x$ , тобто  $\int_{\omega} y d\omega = \omega \cdot y_c$ . Відстань  $y_c$  від центра ваги до осі  $x$  знаходимо із трикутника  $OM_cN_c$  (див. рис. 10):  $y_c = h_c / \sin \alpha$ . Тут  $h_c$  - глибина занурення центра ваги площі  $\omega$  в рідину. Отже,

$$P_{a\bar{b}c} = p_0 \omega + \frac{\gamma \cdot \sin \alpha \cdot \omega \cdot h_c}{\sin \alpha} = p_0 \omega + \omega \gamma h_c = \omega (p_0 + \gamma h_c) = p_c \omega.$$

Таким чином, сила повного гідростатичного тиску на плоску фігуру дорівнює абсолютному гідростатичному тиску в центрі ваги цієї фігури  $p_c$ , помноженому на площу фігури  $\omega$ .

У відкритому резервуарі, де  $p_0 = p_{\text{атм}}$ , **сила повного гідростатичного тиску, який діє на плоску фігуру, дорівнює добутку площі фігури на надлишковий гідростатичний тиск у центрі її ваги.**

**Центром тиску** називається точка прикладання сили надлишкового гідростатичного тиску  $P = \omega \gamma h_c$ . Для знаходження ординати центра тиску  $y_d$

скористаємося властивістю моменту рівнодіючої, котрий щодо будь-якої осі повинен дорівнювати сумі елементарних моментів складових сил рівнодіючої щодо тієї ж осі, тобто  $P y_{\partial} = \int_{\omega} dM$ .

На підставі цього напишемо  $P y_{\partial} = \int_{\omega} y \cdot dP$ , звідки  $y_{\partial} = (\int_{\omega} y dP) / P$ .

Відомо, що елементарна сила надлишкового тиску визначається як  $dP = d\omega \cdot \gamma h_c = d\omega \cdot \gamma y_c \cdot \sin \alpha$ ,

а рівнодіюча цих сил  $dP = \omega \gamma h_c = d\omega \gamma y_c \cdot \sin \alpha$ .

Тоді значення ординати центра тиску  $y_{\partial}$  буде дорівнювати:

$$y_{\partial} = (\int_{\omega} y_c^2 d\omega) / (y_c \omega) = I_x / (y_c \omega),$$

де  $\int_{\omega} y_c^2 d\omega$ , як відомо, є момент інерції  $I_x$  фігури  $AB$  щодо осі  $x$ .

Застосовуючи для нього формулу переходу до осі, яка проходить через центр ваги  $G$ , одержимо:

$$\int_{\omega} y_c^2 d\omega = I_x = I_c + y_c^2 \omega.$$

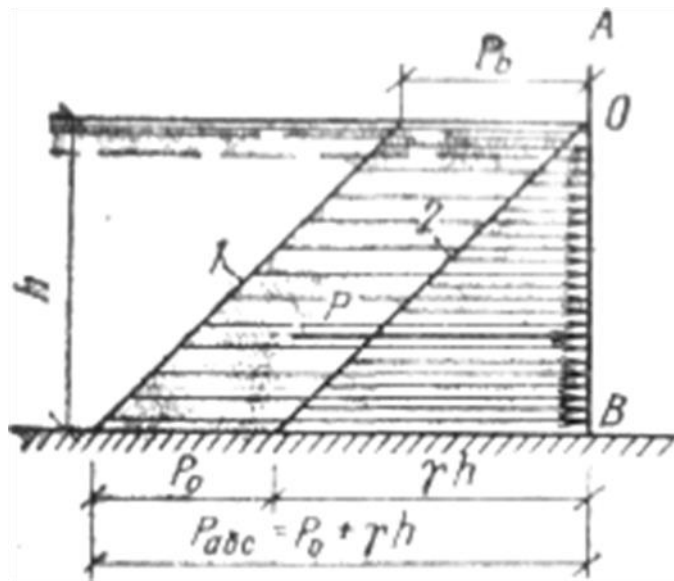
Тоді

$$y_{\partial} = y_c + I_c / (y_c \omega).$$

Для графічного зображення закону зміни гідростатичного тиску по глибині служать епюри тиску. Площа епюри виражає силу тиску, а центр ваги епюри - це точка, через яку проходить рівнодіюча сила тиску.

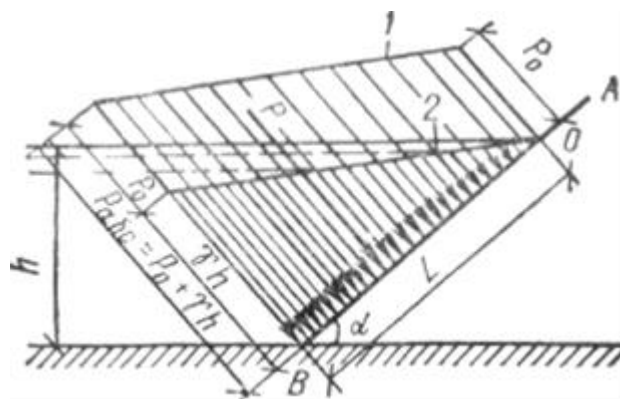
При побудові епюр ураховують, що тиск спрямований нормально до стінки, а рівняння  $p = p_0 + \gamma h$ , яке характеризує розподіл гідростатичного тиску по глибині, є рівнянням прямої.

На рис. 1. 11 показані епюри гідростатичного тиску (абсолютного та надлишкового), який діє на вертикальну плоску стінку  $AB$ . Для побудови епюр досить відкласти в обраному масштабі гідростатичний тиск по горизонтальному напрямку, що збігається з напрямком гідростатичного тиску, на поверхні рідини та у дна, з'єднавши кінці цих відрізків прямою лінією. З розгляду рис. 1. 11 можна побачити, що епюра абсолютного гідростатичного тиску являє собою трапецію, а епюра надлишкового гідростатичного тиску - трикутник.



1 - абсолютний тиск; 2 - надлишковий тиск

Рисунок 1.11 – Епюри гідростатичного тиску, який діє на вертикальну стінку



1 - абсолютний тиск; 2 - надлишковий тиск



Рисунок 1.12 – Епюри гідростатичного тиску, який діє на похилу стінку

Якщо плоска стінка  $AB$ , на яку діє рідина, нахилена до горизонту під кутом  $\alpha$  (рис. 1.12), то основне рівняння гідростатики приймає наступний вигляд:

$$p_{абс} = p_0 + \gamma h = p_0 + \gamma L \sin \alpha.$$

Таким чином, при похилій стінці епюри абсолютного та надлишкового гідростатичного тиску являють собою відповідно похилу трапецію та похилий трикутник.

Розглянемо тепер епюру надлишкового гідростатичного тиску для вертикальної плоскої стінки  $AB$ , на яку вода діє одночасно із двох сторін (рис.1.13).

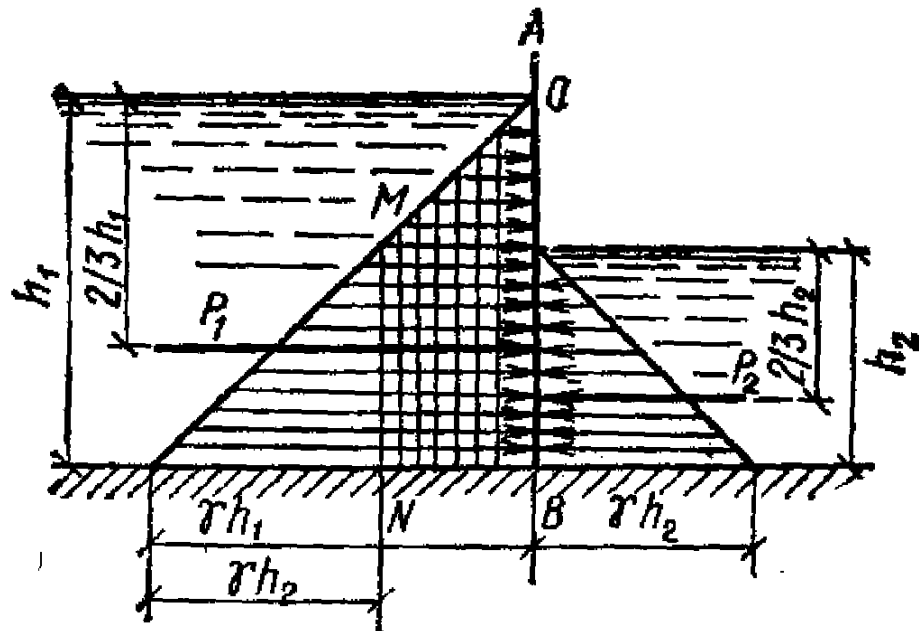


Рисунок 1.13 – Епюра гідростатичного тиску, що діє на вертикальну стінку із двох сторін

У цьому випадку на вертикальну стінку будуть діяти паралельні та протилежно спрямовані сили гідростатичного тиску, тому сили, які діють у

напрямку з праворуч на ліворуч, будуть відніматися із сил, що діють з ліворуч на праворуч. У результаті епюра  $OMNB$  буде являти собою вертикальну трапецію.

Епюра гідростатичного тиску на горизонтальне дно резервуара являє собою прямокутник, тому що при постійній глибині  $h$  надлишковий гідростатичний тиск на дно  $p_{\text{надл}} = \gamma \cdot h$  є постійним.

### 3.2 Тиск рідини на криволінійні поверхні

Розглянемо дію надлишкового гідростатичного тиску на криволінійну поверхню  $AB$  (рис. 1.14). Виділимо на цій поверхні нескінченно малу площадку  $d\omega$ , центр ваги якої занурений у рідину на глибину  $h$ . На цю елементарну площадку нормально до криволінійної поверхні буде діяти сила надлишкового гідростатичного тиску  $dP = \gamma h \cdot d\omega$ , яку можна розкласти на горизонтальну та вертикальну складові, тобто на сили  $dP_x$  і  $dP_z$ .

Допустимо, що елементарна сила  $dP$  нахилена до горизонту під кутом  $\alpha$ . Тоді вирази для складових сил  $dP_x$  і  $dP_z$  можуть бути записані таким чином:

$$dP_x = dP \cos \alpha = \gamma h \cdot d\omega \cdot \cos \alpha \text{ та } dP_z = dP \sin \alpha = \gamma h \cdot d\omega \cdot \sin \alpha$$

З розгляду рис.1.14 можна встановити, що величина  $d\omega \cdot \cos \alpha$  є проекцією  $d\omega$  на вертикальну площину, тобто  $d\omega \cdot \cos \alpha = d\omega_z$ . Отже,  $dP_x = \gamma h \cdot d\omega_z$ . Тоді

$$dP_x = \int_{\omega_z} \gamma h \cdot d\omega_z = \gamma \int_{\omega_z} h \cdot d\omega_z.$$

Тут інтеграл  $\int_{\omega_z} h \cdot d\omega_z$  є статичним моментом всієї площі вертикальної проекції криволінійної поверхні  $\omega_z$  щодо вільної поверхні рідини. Цей статичний момент дорівнює добутку  $\omega_z$  на глибину занурення центра її ваги  $h_c$ .

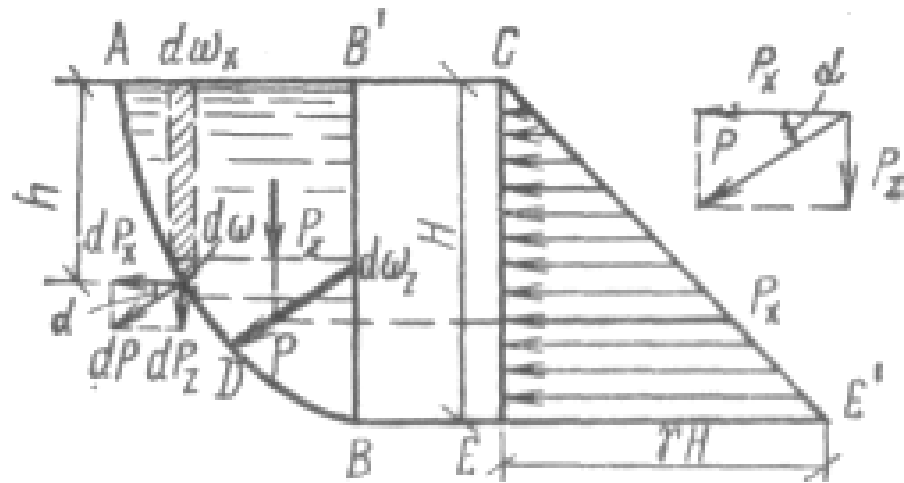


Рисунок 1.14 – Схема тиску рідини на криволінійну поверхню

Таким чином, горизонтальна складова повної сили надлишкового гідростатичного тиску, який діє на криволінійну поверхню, дорівнює силі гідростатичного тиску, під впливом якого перебуває вертикальна стінка, рівна по площі вертикальної проекції розглянутої криволінійної поверхні:

$$P_x = \omega_z \mathcal{H}_c.$$

Величина цієї складової може бути виражена площею епюри гідростатичного тиску CEE'.

Величина  $d\omega \sin \alpha$  є проекцією  $d\omega$  на горизонтальну площину, тобто  $d\omega \sin \alpha = d\omega_x$ . Очевидно, що вираз  $h \cdot d\omega_x$  являє собою об'єм  $d$  призми, відзначеної на рис. 1.14 штрихуванням. Добуток же  $\gamma h \cdot d\omega_x$  є вагою рідини в цьому нескінченно малому об'ємі,

$$dG = \gamma dV.$$

Тоді вертикальна складова повної сили надлишкового гідростатичного тиску буде дорівнювати:

$$P_z = \int_{\omega_x} dP_z = \int_{\omega_x} \gamma h \cdot d\omega \sin \alpha = \gamma \int_{\omega_x} h \cdot d\omega_x = \gamma \int_{\omega_x} dV.$$

Об'єм  $V$ , що є сумою елементарних об'ємів, називається тілом тиску. Таким чином, тіло тиску - це об'єм  $ABB'$ . Отже, вертикальна складова повної сили надлишкового гідростатичного тиску, який діє на криволінійну поверхню, дорівнює вазі рідини в об'ємі тіла тиску.

Повна сила надлишкового гідростатичного тиску, яка є рівнодіючою її складових  $P_x$  і  $P_z$ , визначиться залежністю

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2},$$

а її напрямок - кутом  $\alpha$ , який може бути знайдений як

$$\operatorname{tg} \alpha = P_z / P_x.$$

Як випливає з попереднього викладу, повна сила надлишкового гідростатичного тиску  $P$  прикладена в центрі тиску. У розглянутому випадку центр тиску буде розташований у точці перетинання вектора повної сили тиску з криволінійною поверхнею  $AB$  (точка  $D$ ). Вектор повної сили тиску  $P$  повинен проходити через точку перетинання її горизонтальної та вертикальної складових під кутом  $\alpha$ . Центр тиску для криволінійних поверхонь знаходиться графоаналітичним шляхом.

### 3.3 Плавання тіл у рідині. Закон Архімеда

Розглянемо тіло  $AB$ , занурене в рідину (рис. 1.15). Припустимо, що це тіло складається із елементарних вертикальних циліндрів, які мають нескінченно малу площу поперечного перерізу  $d\omega$ . На кожний із таких циліндрів будуть діяти елементарні сили гідростатичного тиску: зверху  $dP_1 = \gamma h_1 d\omega$ , а знизу  $dP_2 = \gamma h_2 d\omega$ . Оскільки  $h_2 > h_1$ , елементарні циліндри будуть перебувати під дією піднімальної елементарної сили

$$dP_n = \gamma (h_2 - h_1) d\omega.$$

Підсумовуючи елементарні піднімальні сили, одержуємо повну піднімальну силу  $P_n$ . З даної залежності випливає, що **піднімальна сила  $P_n$  дорівнює вазі рідини, витиснутої зануреним у неї тілом, і спрямована по вертикалі знизу нагору.** Це положення зветься **законом Архімеда**. На цьому законі заснована теорія плавання тел. Піднімальна сила прикладена в центрі зануреної частини тіла, називаному **центром водотоннажності**.

В теорії плавання тіл використовують два поняття: плавучість і остійність. **Плавучість** - це здатність тіла плавати. **Остійність** - здатність плаваючого тіла відновлювати порушену при крені рівновагу після усунення сил, які викликали крен.

**Плавучість тіла.** Залежно від співвідношення між вагою плаваючого тіла  $G$  і піднімальною силою  $P_n$  можливі три стани тіла, зануреного в рідину:

- 1)  $G > P_n$  - тіло потоне;
- 2)  $G < P_n$  - тіло плаває в напівзануреному стані;
- 3)  $G = P_n$  - тіло плаває в зануреному стані.

У першому випадку тіло потоне, тому що рівнодіюча сил  $G$  і  $P_n$  спрямована униз. У другому випадку рівнодіюча сил  $G$  і  $P_n$  спрямована нагору, тому тіло спливає. Однак воно піднімається над поверхнею води лише доти, поки нова, зменшена піднімальна сила  $P'_n$  не буде дорівнювати вазі тіла  $G$  ( $G = P'_n$ ). У третьому випадку, коли  $G = P_n$ , тіло може перебувати в стійкій, нестійкій або байдужій рівновазі. Для забезпечення рівноваги плаваючого тіла його центр ваги та центр водотоннажності повинні лежати на одній вертикалі.

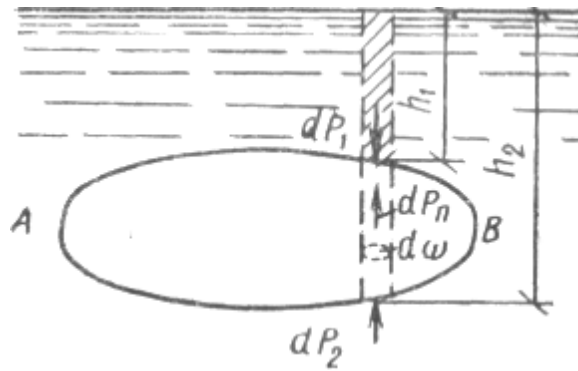


Рисунок 1.15 – Схема дії сил на тіло, занурене в рідину

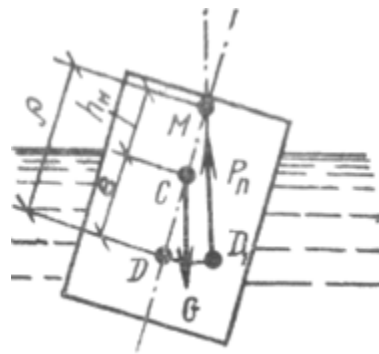


Рисунок 1.16 – Схема крену тіла

**Остійність плаваючого тіла.** При впливі на плаваюче тіло зовнішніх сил, наприклад, вітру, крутого повороту, воно буде відхилятися від положення рівноваги (давати крен).

Якщо центр ваги  $C$  розташований нижче центра водотоннажності  $D$ , пара сил, яка з'являється при крені, протидіє йому, і після припинення впливу зовнішніх сил тіло приймає колишнє положення. Таке розташування центрів відповідає остійному плаванню. Якщо центр ваги  $C$  розташований вище центра водотоннажності  $D$ , плавання буде неостійним, тому що, будучи виведено зі стану рівноваги, таке тіло вже не здатне вернутися в первісне положення, а навпаки, буде усе більше від нього відхилятися. Нарешті, при збігу центрів  $C$  і  $D$  тіло буде перебувати в стані байдужої рівноваги.

Здатність тіла плавати в напівзануреному стані називають **плавучістю**. Для забезпечення плавучості повинна дотримуватися рівність:

$$G = \gamma_v V,$$

де  $G$  — вага води;

$\gamma_v$  - питома вага води;

$V$  - об'єм витиснутої тілом води.

Вертикальну вісь, нормальну до площини плавання (площини, обмеженою ватерлінією) і яка проходить через центр ваги тіла, називають **віссю плавання**. Точку перетинання осі плавання з напрямком піднімальної сили при малому крені називають **метацентром** (точка  $M$  на рис. 1.16).

Відстань від метацентра  $M$  до центра ваги тіла  $C$  називають метацентричною висотою  $h_M$ .

При  $h_M > 0$  положення тіла буде остійним, при  $h_M < 0$  положення тіла буде неостійним і при  $h_M = 0$  тіло буде перебувати в стані байдужої рівноваги.

Література [2-4].

## ТЕМА 4. ОСНОВНЕ ЗАВДАННЯ ГІДРОДИНАМІКИ.

### 4.1 Види руху рідини. Лінія течії. Елементарна струминка і потік

**Основна задача гідродинаміки.** Гідродинаміка розглядає закони руху рідин. Параметри, що характеризують рух, - швидкість і тиск - змінюються в потоці рідини в просторі та за часом. Основна задача гідродинаміки полягає в дослідженні зміни цих параметрів у потоці рідини, тобто в знаходженні вигляду функцій

$$u = f_1(x, y, z, t);$$

$$p = f_2(x, y, z, t),$$

де  $u$  та  $p$  - швидкість і тиск у розглянутій точці;

$x, y, z$  - координати цієї точки;

$t$  - час.

**Усталений та неусталений рух.** Усталеним називають такий рух рідини, при якому швидкість потоку та тиск у будь-якій його точці не змінюються за часом і залежать тільки від положення точки в потоці, тобто швидкість потоку та тиск є функціями координат. Прикладами усталеного руху можуть служити витікання рідини з отвору резервуара при постійному напорі, а також потік води в каналі при незмінному його перерізі та постійній глибині.

**Неусталеним** називають такий рух рідини, при якому швидкість руху та тиск у кожній даній точці змінюються з часом, тобто є функціями не тільки координат, але й часу. Прикладом неусталеного руху служить витікання рідини з отвору резервуара при змінному напорі. У цьому випадку в кожній точці перерізу струменя, який витікає з отвору, швидкість руху та тиск змінюються за часом.

**Лінія течії.** У точках 1, 2, 3 і т.д. потоку, узятих на відстані  $\Delta S$  друг від друга, відкладемо вектори швидкостей  $u_1, u_2, u_3$ , які показують значення та



напрямок швидкостей руху часток рідини у даний момент часу (рис. 17). Сукупність цих векторів швидкостей дає ламану лінію 1-2-3 і т.д. Якщо зменшити довжину відрізків  $\Delta S$ , то ламана лінія стане кривою.

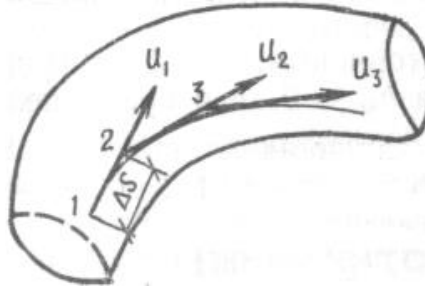


Рисунок 1.17 – Схематичне зображення лінії течії в потоці

Ця крива, називана **лінією течії**, характеризується тим, що у даний момент часу у всіх її точках вектори швидкостей будуть дотичними до неї.

**Елементарна струминка.** Якщо в рідині, яка рухається, виділити нескінченно малий замкнутий контур і через всі його точки провести лінії течії, які відповідають даному моменту часу, вийде як би трубчаста непроникна поверхня, називана трубкою течії.

Маса рідини, що рухається усередині трубки течії, утворює **елементарну струминку**.

**Потік.** Сукупність елементарних струминок, що представляє собою безперервну масу часток, які рухаються по якому-небудь напрямку, утворює потік рідини. Потік може бути повністю або частково обмежений твердими стінками, наприклад у трубопроводі або каналі, і може бути вільним, наприклад струмінь, що виходить із сопла гідромонітора.

#### **4.2 Гідравлічні елементи потоку. Рівномірний і нерівномірний рух. Напірний і безнапірний потік**

**Живим перерізом** потоку  $\omega$  називають поперечний переріз потоку, перпендикулярний його напрямку.

**Витратою потоку  $Q$**  називають об'єм рідини, що проходить в одиницю часу через живий переріз потоку. Витрату рідини вимірюють у  $\text{м}^3/\text{с}$  або в  $\text{л}/\text{с}$ . Іноді користуються поняттям вагової витрати  $G$ , під якою мають на увазі вагу рідини, що проходить в одиницю часу через переріз потоку. Між ваговою та об'ємною витратами існує така залежність:

$$G = \gamma Q,$$

де  $\gamma$  - питома вага рідини.

**Змоченим периметром  $\chi$**  називають частину периметра живого перерізу, на якій рідина стикається із твердими стінками.

**Гідравлічним радіусом  $R$**  називають відношення площі живого перерізу потоку до змоченого периметра:

$$R = \omega / \chi.$$

Гідравлічний радіус вимірюють в одиницях довжини.

**Середньою швидкістю потоку  $v$**  називають частку від розподілу витрати потоку на площу його живого перерізу, тобто

$$v = Q / \omega.$$

Отже, середня швидкість - це та швидкість, яку повинні були б мати всі частки потоку, для того щоб через даний живий переріз  $\omega$  пройшла витрата  $Q$ , яка відповідає дійсним швидкостям цих часток.

**Рівномірним** називають такий усталений рух рідини, при якому живі перерізи та середня швидкість потоку не міняються по його довжині. Прикладом рівномірного руху служить рух рідини в циліндричній трубі або в каналі незмінного перерізу та постійної глибини.

**Нерівномірним** називають такий усталений рух рідини, при якому живі перерізи та середні швидкості потоку змінюються по його довжині. Прикладом нерівномірного руху служить рух рідини в конічній трубі, у природному руслі, на перепаді.

При рівномірному русі лінії течії являють собою систему прямих паралельних ліній. Такий рух називається також паралельноструминним. При русі рідини в природних руслах живий переріз звичайно безупинно змінюється уздовж потоку як за формою, так і по площі, і рух рідини є усталеним нерівномірним. Для полегшення вивчення такого руху в гідравліці уведене поняття плавнозмінного руху, який характеризується наступними властивостями (рис. 1.18):

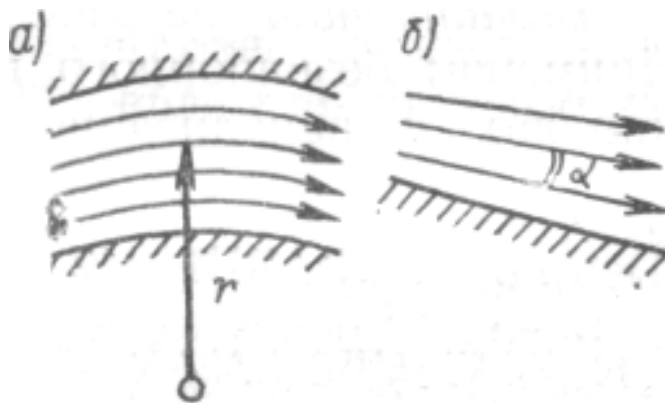


Рисунок 1.18 – Умови плавно змінного руху

- 1) кривизна ліній течії в потоці вважається досить незначною (рис.1.18, а),
- 2) кут розбіжності між окремими лініями течії  $\alpha$  дуже малий (рис. 1.18, б),
- 3) живі перерізи потоку є плоскими,
- 4) тиск розподіляється по живому перерізу за гідростатичним законом, тобто за законом прямої лінії.

Остання властивість просто обґрунтовується. Якщо усередині плавномінного потоку виділити частку рідини та спроектувати всі діючі на неї сили на площину живого перерізу, то внаслідок того, що швидкості та прискорення майже перпендикулярні живому перерізу, сили інерції в рівняння рівноваги не ввійдуть; у зв'язку із цим рівняння рівноваги та закон розподілу тиску в площині живого перерізу не будуть відрізнятися від закону розподілу тиску в рідині, яка перебуває в спокої.

**Напірним** називається потік, у якого по всьому периметрі живого перерізу рідина стикається із твердими стінками. Прикладом напірного потоку може служити рух води у водопровідних трубах.

**Безнапірним** називається потік з вільною поверхнею. Прикладом безнапірного потоку служить рух води в ріках, каналах і каналізаційних трубах.

Література [2-4].

## ТЕМА 5. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ ПОТОКУ. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ ДЛЯ ПОТОКУ РІДИНИ.

### 5.1 Рівняння нерозривності потоку

Розглянемо усталений рух рідини у твердому руслі змінного перерізу (рис. 1. 19). Виберемо два довільних перерізи  $I-I$  та  $II-II$ , нормальних до осі потоку, і розглянемо розташовану між ними ділянку потоку. Через переріз  $I-I$  за час  $\Delta t$  на цю ділянку надійде маса рідини  $m_1$ , а через переріз  $II-II$  за цей же час вийде маса рідини  $m_2$ . Маса  $m_1$  не може бути більше маси  $m_2$ , тому що рідина нестислива, а стінки русла тверді. Але маса  $m_1$  не може бути й менша за масу  $m_2$ , тому що розрив у суцільному потоці при усталеному русі неможливий. Отже,

$$m_1 = m_2 = \text{const}.$$

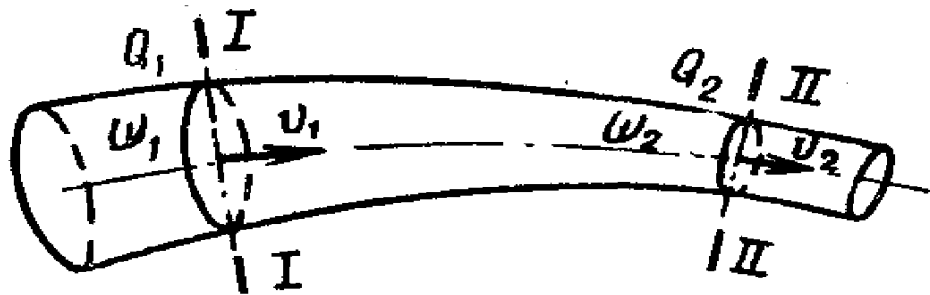


Рисунок 1.19 – Схема до виводу рівняння нерозривності потоку

Маси рідини можна виразити у вигляді об'ємів, що пройшли через перерізи  $I-I$  та  $II-II$  за час  $\Delta t$ :

$$m_1 = \rho_1 Q_1 \Delta t;$$

$$m_2 = \rho_2 Q_2 \Delta t,$$

де  $\rho_1$  та  $\rho_2$  - густина рідини в перерізах  $I-I$  та  $II-II$ .

На підставі виразу  $m_1 = m_2 = \text{const}$  можемо записати

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = \text{const} .$$

Для нестисливої рідини

$$\rho_1 = \rho_2 = \text{const} .$$

Отже,

$$Q_1 = Q_2 = \text{const} .$$

Це рівняння називають **рівнянням постійності витрати**. З нього випливає, що при усталеному русі нестисливої рідини витрата її в будь-якому перерізі потоку постійна.

Тому що  $Q = \omega \cdot v$ , то рівняння постійності витрати може бути записано як:

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2 = \omega v = \text{const} .$$

Це рівняння називають **рівнянням нерозривності потоку**. Воно показує, що при усталеному русі нестисливої рідини добуток площі живого перерізу на середню швидкість потоку є постійною величиною.

З рівняння нерозривності можна одержати:

$$v_1 / v_2 = \omega_2 / \omega_1 .$$

Отже, при усталеному русі рідини середні швидкості потоку обернено пропорційні площам відповідних живих перерізів.

## 5.2 Рівняння бернуллі для потоку рідини. Геометричне та енергетичне тлумачення рівняння бернуллі.

**Рівняння Бернуллі для потоку рідини.** Розглянемо потік рідини з рухом, який плавно змінюється (рис. 1.20). Виберемо два довільних перерізи

$I-I$  та  $II-II$ , нормальних до осі потоку, і розглянемо розташовану між ними ділянку потоку. Позначимо середні швидкості потоку в цих перерізах  $v_1$  і  $v_2$ , площі живих перерізів  $\omega_1$  і  $\omega_2$ ; гідродинамічні тиски в центрі ваги цих перерізів  $p_1$  і  $p_2$ ; відстані від довільно обраної горизонтальної площини  $00$ , називаною площиною порівняння, до центрів ваги перерізів  $z_1$  і  $z_2$ . Застосуємо до ділянки потоку, розташованій між перерізами  $I-I$  та  $II-II$ , закон збереження енергії. За час  $\Delta t$  частки із перерізу  $I-I$  перейдуть у положення  $I'-I'$ , а з перерізу  $II-II$  у положення  $II'-II'$ . При цьому будуть пройдені шляхи  $v_1\Delta t$  та  $v_2\Delta t$ . Через переріз  $I-I$  в розглянуту ділянку за час  $\Delta t$  увійде об'єм рідини  $Q_1\Delta t$ , за цей же час із цієї ділянки через переріз  $II-II$  вийде об'єм рідини  $Q_2\Delta t$ . Знайдемо кількість енергії, внесеної потоком у розглянуту ділянку за час  $\Delta t$  через переріз  $I-I$ .

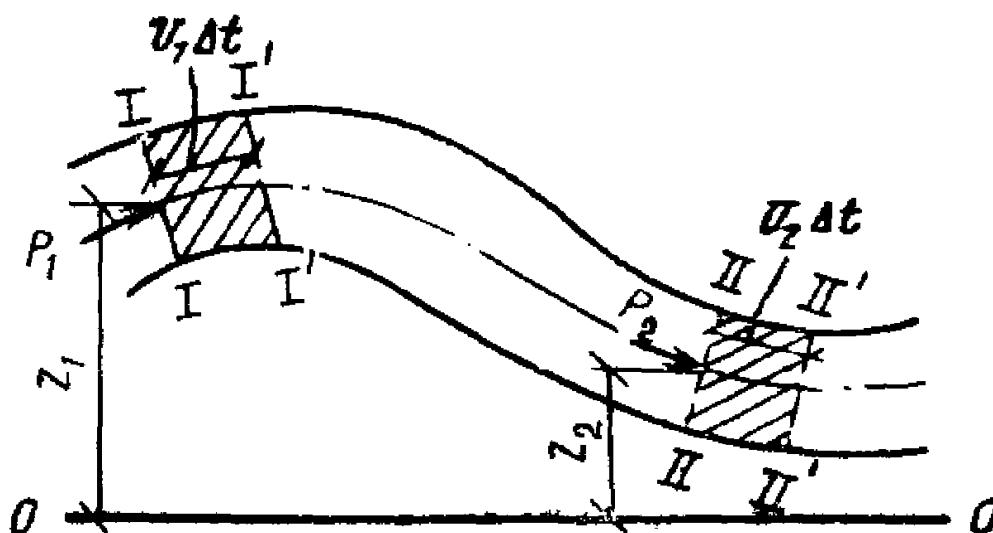


Рисунок 1.20 – Схема до виводу рівняння Бернуллі

Об'єм рідини  $Q_1\Delta t$  має масу

$$m_1 = Q_1\Delta t\rho_1.$$

Потенційна енергія положення цього об'єму дорівнює:

$$m_1 g z_1 = Q_1 \Delta t \rho_1 g z_1,$$

а кінетична енергія цього ж об'єму

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} Q_1 \Delta t \rho_1 v_1^2.$$

Розглянутий об'єм має також потенційну енергію тиску.

Представимо, що в перерізі  $I-I$  є поршень, який рухається зі швидкістю  $v_1$  у напрямку перерізу  $II-II$ . Цей поршень за час  $\Delta t$  пройде шлях  $v_1 \Delta t$ . Сила тиску на цей поршень дорівнює  $p_1 \omega_1$ . Отже, виконана поршнем робота буде дорівнювати:

$$p_1 \omega_1 v_1 \Delta t = p_1 Q_1 \Delta t.$$

Очевидно, що даний вираз буде являти собою потенційну енергію тиску розглянутого об'єму.

Тоді загальна кількість енергії, внесеної потоком у розглянуту ділянку за час  $\Delta t$  через переріз  $I-I$ , буде дорівнювати:

$$\rho_1 Q_1 \Delta t \cdot g z_1 + \frac{\rho_1 Q_1 \Delta t v_1^2}{2} + p_1 Q_1 \Delta t.$$

Аналогічно можна одержати сумарну енергію, винесену потоком через переріз  $II-II$  за час  $\Delta t$ :

$$\rho_2 Q_2 \Delta t \cdot g z_2 + \frac{\rho_2 Q_2 \Delta t v_2^2}{2} + p_2 Q_2 \Delta t.$$

За законом збереження енергії сумарна енергія, внесена через переріз  $I-I$ , при усталеному русі повинна бути рівною сумарній енергії, винесеної через



переріз  $II-II$ , з урахуванням витрат енергії на подолання гідравлічних опорів при русі рідини від перерізу  $I-I$  до перерізу  $II-II$ . Витрачену енергію можна виразити у вигляді добутку ваги розглянутого об'єму на деяку висоту (втрати висоти):

$$\rho_2 Q_2 g \Delta t h_w^{I-II}.$$

Тоді

$$\rho_1 Q_1 \Delta t \cdot g z_1 + \frac{\rho_1 Q_1 \Delta t v_1^2}{2} + p_1 Q_1 \Delta t = \rho_2 Q_2 \Delta t \cdot g z_2 + \frac{\rho_2 Q_2 \Delta t v_2^2}{2} + p_2 Q_2 \Delta t + \rho_2 Q_2 \Delta t g h_w^{I-II}$$

Тоді як відповідно до рівняння постійності витрати,  $Q_1 = Q_2 = Q$  і, крім того, можемо написати:

Отже,

$$\rho Q g z_1 + \frac{\rho Q v_1^2}{2} + p_1 Q = \rho Q g z_2 + \frac{\rho Q v_2^2}{2} + p_2 Q + \rho Q g h_w^{I-II},$$

або, замінюючи  $\rho g$  на  $\gamma$ ,

$$\gamma_1 Q + \frac{\rho Q v_1^2}{2} + p_1 Q = \gamma_2 Q + \frac{\rho Q v_2^2}{2} + p_2 Q + \gamma Q h_w^{I-II}.$$

Віднесемо всі члени останнього рівняння до одиниці ваги, для чого розділимо їх на  $\gamma Q$ , одержимо

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w^{I-II},$$

або в загальному вигляді

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w^{I-II} = \dots = z_n + \frac{p_n}{\gamma} + \frac{v_n^2}{2g} + h_w^{I-n}.$$

Отже, для всіх перерізів потоку можна записати

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_w = \text{const} ,$$

де  $z$  - відстань від площини порівняння до центра ваги перерізу;

$p$  - тиск у центрі ваги у цьому перерізі;

$v$  - середня швидкість у цьому перерізі;

$h_w$  - питома енергія, витрачена на подолання опорів від початкового до розглянутого перерізу.

Дане рівняння носить найменування **рівняння Бернуллі**.

Питома механічна енергія потоку в будь-якому його перерізі дорівнює:

$$E = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} .$$

У наведеному виводі рівняння Бернуллі швидкості руху окремих часток рідини у межах живого перерізу прийняті однакові та рівними середній швидкості. Якщо враховувати нерівномірність розподілу швидкостей по живому перерізу, то рівняння Бернуллі приймає наступний вигляд:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w = \text{const} .$$

Коефіцієнт  $\alpha$  враховує вплив нерівномірності розподілу швидкостей по перерізу на питому кінетичну енергію потоку, обчислену по середній швидкості (див. тему «Розподіл швидкостей при різних режимах течії»). Коефіцієнт  $\alpha$  називають корективом кінетичної енергії або коефіцієнтом Коріоліса.

Сума перших двох членів рівняння Бернуллі  $z + p / \gamma$  - п'єзометричний напір, за аналогією  $\alpha v^2 / 2g$  - швидкісний напір,  $h_w$  - втрачений напір. Суму

перших трьох членів рівняння Бернуллі  $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} + h_w$  називають повним напором.

**Геометричний і енергетичний зміст рівняння Бернуллі.** Всі члени рівняння Бернуллі виражаються в одиницях довжини, тому кожний з них може називатися висотою:

$z$  - геометрична висота, або висота положення;

$p / \gamma$  - п'єзометрична висота, або висота гідродинамічного тиску;

$v^2 / 2g$  - висота, яка відповідає швидкісному напору;

$h_w$  - висота, що відповідає втратам напору.

Отже, геометричний зміст рівняння Бернуллі може бути сформульований так: **при усталеному русі рідини сума чотирьох висот (висоти положення, п'єзометричної висоти, висоти, яка відповідає швидкісному напору, і висоти, яка відповідає втратам напору) залишається незмінною уздовж потоку.** Крім того, кожний з членів рівняння Бернуллі виражає питому енергію потоку, тобто енергію, яка доводиться на одиницю ваги рухомої рідини:

$z$  - питома енергія положення;

$p / \gamma$  - питома енергія гідродинамічного тиску;

$v^2 / 2g$  - питома кінетична енергія;

$h_w$  - втрати питомої енергії.

Тоді енергетичний зміст рівняння Бернуллі можна сформулювати наступним способом: **при усталеному русі рідини сума чотирьох питомих енергій (енергії положення, енергії гідродинамічного тиску, кінетичної енергії та втрат енергії) залишається незмінною уздовж потоку.**

Якщо в якому-небудь перерізі потоку рідини (рис. 1.21) установити дві трубки - п'єзометричну 1 і швидкісну 2, нижній вигнутий кінець якої спрямований проти течії, то у швидкісній трубці створюється додатковий тиск від впливу швидкості рідини, яка рухається. Висота підйому рідини у

швидкісній трубці більше висоти підйому рідини у п'єзометричній трубці на швидкісний напір  $v^2/(2g)$ .

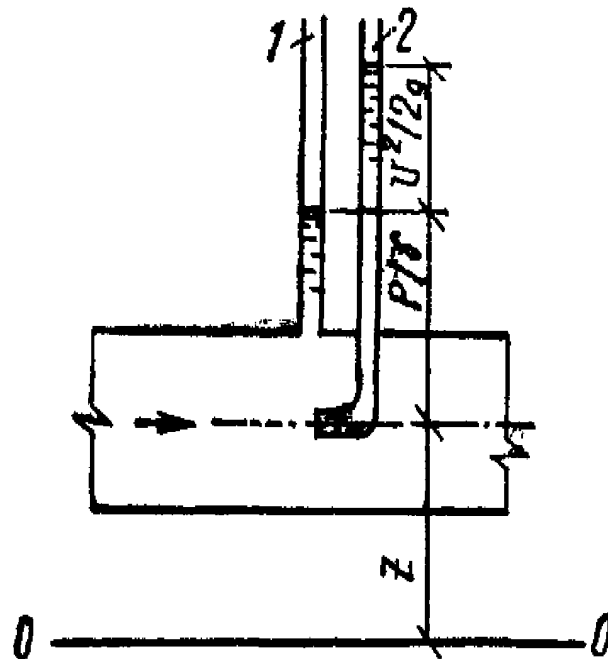
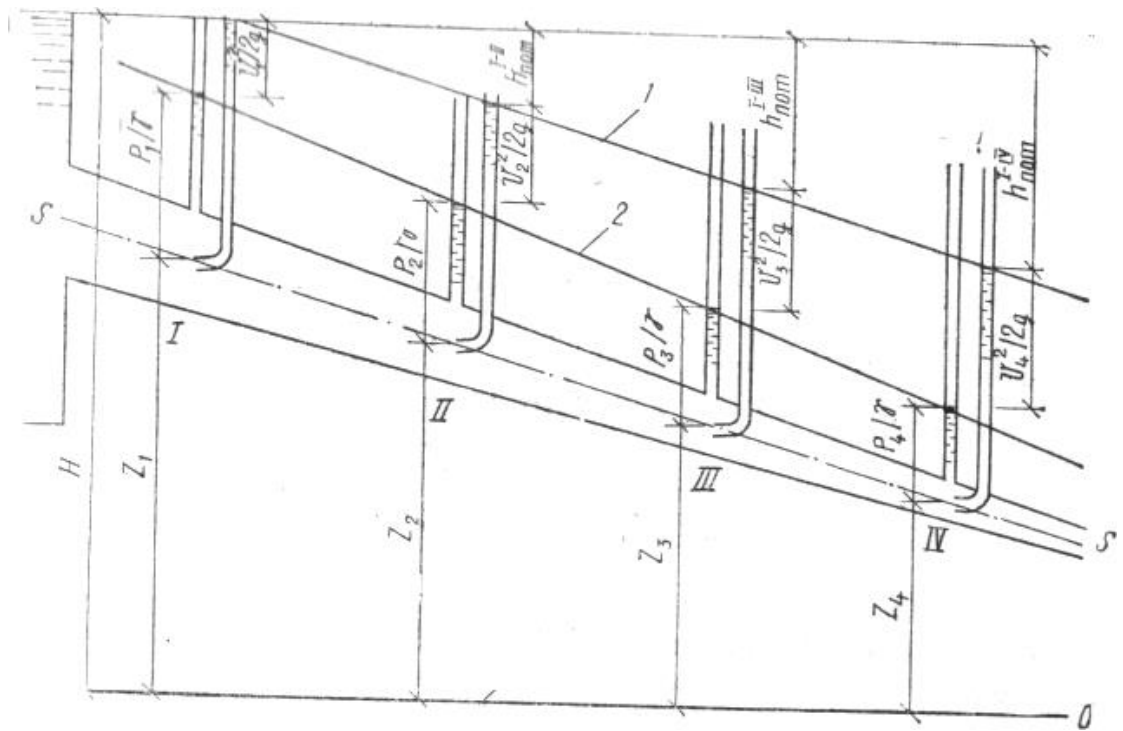


Рисунок 1.21 – Схема, яка пояснює поняття швидкісного напору

Всі члени рівняння Бернуллі представлені графічно на рис. 1.22. Тут у чотирьох обраних перерізах потоку  $SS$  установлені п'єзометричні та швидкісні трубки.

Якщо з'єднати рівні рідини у п'єзометрах, то одержимо **п'єзометричну лінію**, або лінію **потенційної питомої енергії**. Вона перебуває на відстані  $z + p/\gamma$  від площини порівняння. Падіння цієї лінії на одиницю довжини називається **п'єзометричним ухилом  $J$** .



1-напірна лінія, або лінія сумарної питомої енергії; 2 - п'єзометрична лінія, або лінія потенційної питомої енергії; 3 - лінія площини порівняння

Рисунок 1.22 – Графічне зображення членів рівняння Бернуллі:

З'єднуючи рівні рідини у швидкісних трубках, одержимо **напірну лінію або лінію сумарної (потенційної та кінетичної) питомої енергії**. Падіння напірної лінії на одиницю довжини називається гідравлічним ухилом  $i$  і характеризує втрати напору на одиницю довжини. З рис. 22 видно, що з видаленням від початкового перерізу втрати напору зростають.

### 5.3 Практичне прикладення рівняння Бернуллі

На підставі рівняння Бернуллі сконструйований ряд приладів, таких як водомір Вентурі, водоструминний насос, ежектор та ін.

На рис. 1.23 показаний горизонтальний трубопровід діаметром  $D$ , на якому влаштоване звуження діаметром  $d$ . У нормальній і звуженій частинах встановлені два п'єзометри (у перерізах I-I і II-II).

Зневажаючи втратами напору між перерізами I-I і II-II, а також нерівномірністю розподілу швидкостей по перерізу ( $\alpha = 1$ ) і приймаючи, що

площина порівняння  $00$  проходить через вісь трубопроводу, можемо записати рівняння Бернуллі в такому вигляді:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

Звідси випливає, що зі збільшенням швидкості руху тиск повинен зменшуватися й, навпаки, зі зменшенням швидкості тиск повинен збільшуватися. Це положення використовується у водомірі Вентурі, де за різницею показань п'єзометрів  $h$  (див. рис.1.23), знаючи діаметри  $D$  і  $d$ , можна визначити витрату.

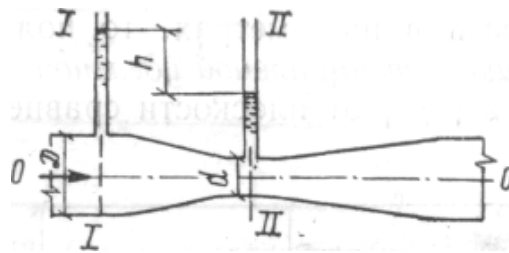


Рисунок 1.23 – Схема водоміра Вентурі

У водоструминному насосі (рис. 1.24) вода з бака  $I$  надходить у трубопровід, який має звуження.

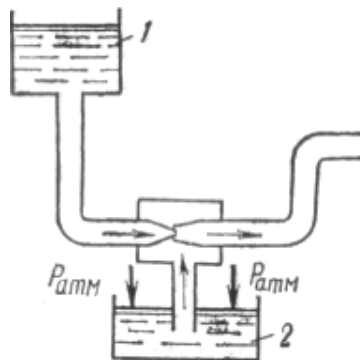


Рисунок 1.24 – Схема водоструминного насоса

У вузькому перерізі швидкість струменя зростає, і струмінь захоплює за собою повітря, яке перебуває в змішувальній камері, завдяки чому відбувається підсмоктування рідини по трубці, опущеної в бак 2. При більших швидкостях руху рідина буде підсмоктуватись з бака 2 безупинно. По цьому ж принципу працюють ежектори та гідроелеватори.

## 5.4 Рівняння рівномірного руху рідини

Рівняння рівномірного руху рідини встановлює залежність між силами опору та втратами напору по довжині потоку.

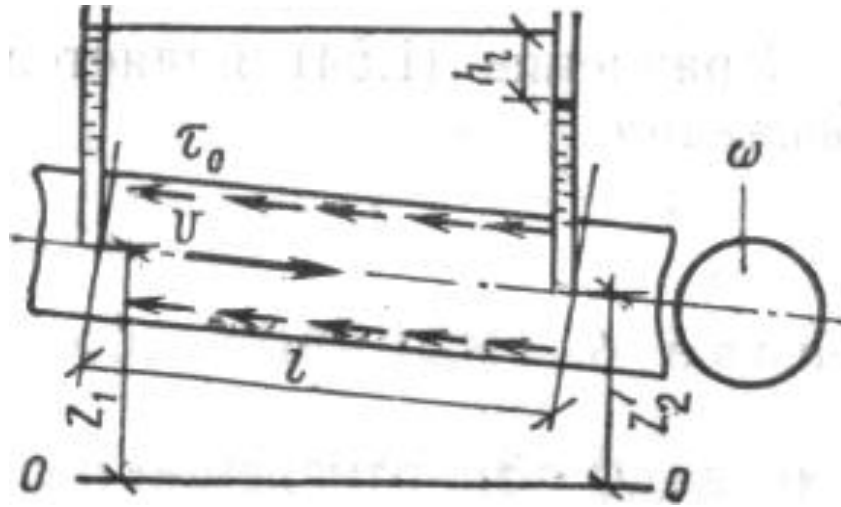


Рисунок 1.25 – Схема до виводу рівняння рівномірного руху рідини

Розглянемо рівномірний рух рідини в трубі на ділянці (рис. 1.25).  
Приймемо наступні позначення:

$\omega$  - площа живого перерізу потоку;

$v$  - середня швидкість руху рідини;

$\gamma$  - питома вага рідини;

$\chi$  - змочений периметр;

$R$  - гідравлічний радіус;

$\tau_0$  - сила тертя на одиниці площі поверхні стикання потоку зі стінками,  $h_l$  - втрати напору по довжині.

Сила тертя по всій поверхні виділеної ділянки дорівнює:

$$T = \tau_0 \chi l.$$

В одиницю часу ця сила виконує роботу

$$T = \tau_0 \chi l v.$$

За законом збереження енергії робота сил тертя на поверхні стикання дорівнює енергії, затрачуваний потіком на подолання тертя на розглянутій ділянці. Кількість енергії, витраченої в одиницю часу, віднесене до всієї ваги рідини, дорівнює

$$E = h_l \gamma \omega v.$$

Дорівнюючи праві частини двох останніх виразів, одержимо:

$$\tau_0 \chi l v = h_l \gamma \omega v,$$

або

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = \frac{h_l}{l} \cdot \frac{\omega}{\chi}.$$

Як вже вказувалося,

відношення  $h_l / l$  є гідравлічним ухилом  $i$ ,

а відношення  $\omega / \chi$  - гідравлічним радіусом  $R$ .

Тому в остаточному вигляді можна записати:

$$\tau_0 / \gamma = i \cdot R.$$

Дане рівняння є **основним рівнянням рівномірного руху**.

Література [2-4].



## ТЕМА 6. ВИДИ ОПОРІВ (ВТРАТ НАПОРУ). РЕЖИМИ РУХУ РІДИНИ.

### 6.1 Види опорів (втрат напору)

Рішення багатьох практичних завдань гідравліки зводиться до встановлення залежності, яка визначає зміну швидкості та тиску по довжині потоку. Для цього можуть бути використані:

рівняння постійності витрати

$$Q = v\omega = \text{const} ,$$

і рівняння Бернуллі

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_w = \text{const} .$$

Ці рівняння звичайно мають три невідомих величини:  $v$ ,  $p$  та  $h_w$ , тому для їх рішення необхідне третє рівняння. Як третє рівняння використовують залежність втрат напору від швидкості  $v$  і ряду інших факторів.

Втрати напору (енергії) потоку викликаються опорами двох видів:

- 1) опорами по довжині, які обумовлені силами тертя;
- 2) місцевими опорами, які обумовлені змінами швидкості потоку по величині та напрямку.

**Втрати напору по довжині** трубопроводу звичайно визначають за формулою Дарсі-Вейсбаха

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} ,$$

**а місцеві втрати** за формулою Вейсбаха

$$h_m = \xi \cdot \frac{v^2}{2g} ,$$

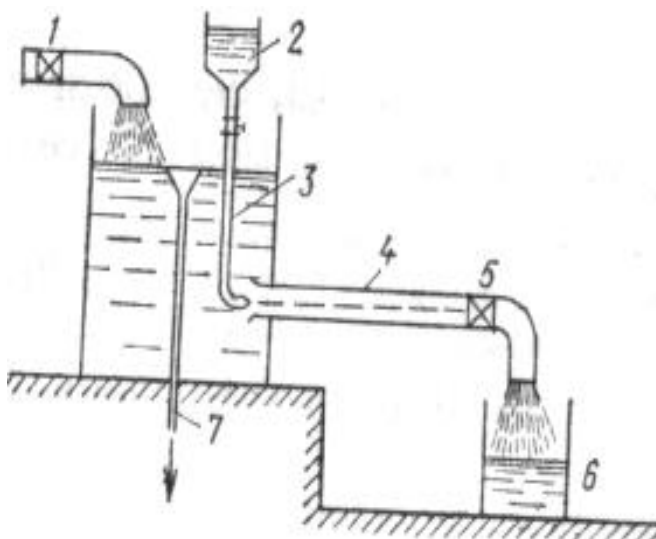
де  $\lambda$  - коефіцієнт гідравлічного тертя (коефіцієнт Дарсі);  $l$  - довжина трубопроводу;  $d$  - діаметр трубопроводу;  $v$  - середня швидкість потоку за місцевим опором;  $\xi$  - коефіцієнт місцевого опору Коефіцієнти  $\lambda$  та  $\xi$

безрозмірні. Експериментальні дослідження показали, що ці коефіцієнти залежать від багатьох факторів, зокрема, від режиму руху та шорсткості стінок.

## 6.2 Два режими руху рідини

Припущення про існування двох режимів руху рідини було висловлено великим росіянином ученим Д. І. Менделєєвим ще в 1880 р. В 1883 р. це припущення було підтверджено експериментально англійським ученим О. Рейнольдсом. Рейнольдс пропускав воду через скляні трубки різного діаметра, регулюючи швидкість руху води в них кранами 1 і 5 (рис. 1.26). По тонкій трубці 3 із загостреним кінцем до входу в скляну трубку 4 підводилась пофарбована рідина з посудини 2. Середня швидкість у трубці 4 площею перерізу  $\omega$  визначалася по об'єму води  $V$ , який надійшов до посудини 6 за час  $t$ ;

$$v = \frac{V}{\omega l}.$$



1,5 – крани; 2,6 - посудина; 3 - тонка трубка; 4- скляна трубка

Рисунок 1.26 – Схема експериментальної установки Рейнольдса

Дослідження, які проводилися при постійному напорі (для його підтримки була використана зливальна труба 7), показали, що при малих

швидкостях руху води в трубці 4 фарба рухається в ній у вигляді тонкої струминки, не перемішуючись із водою. Після досягнення певної для даних умов дослідження середньої швидкості руху води, коли струминка стає хвилястою, а її контури нестійкими, тобто струминка починає розмиватися, отчого вся вода в трубці офарблюється.

Таким чином, потік рідини в трубці може характеризуватися двома режимами:

1) **ламіна́рним** (паралельно струминним) ;

2) **турбулентним**.

Дослідження О. Рейнольдса, а також дослідження інших учених показали, що основним критерієм для визначення режиму руху рідини служить безрозмірний параметр  $Re$  (число Рейнольдса):

$$Re = vd / \nu ,$$

де  $\nu$  - кінематична в'язкість.

Число Рейнольдса, при якому ламіна́рний режим переходить у турбулентний, називають **критичним**. По дослідженнях Рейнольдса,  $Re_{кр} = 2320$ . При  $Re < 2320$  рух рідини відбувається при ламіна́рному режимі, при  $Re > 2320$  рух рідини відбувається при турбулентному режимі. Швидкість, що відповідає критичному числу Рейнольдса, називають критичною швидкістю

$$\nu_{кр} = 2320\nu / d .$$

При безнапірному русі рідини число Рейнольдса визначають за формулою

$$Re = 4\nu R / \nu ,$$

де  $R$  - гідравлічний радіус.

### 6.3 Розподіл швидкостей і втрати напору. При ламінарному режимі руху рідини у трубах

При ламінарному режимі шари рідини рухаються паралельно один одному. Теоретичний закон розподілу швидкостей по живому перерізу потоку з ламінарним режимом у трубопроводі виражається формулою Стокса

$$u = \frac{\gamma i}{4\mu} (r^2 - y^2),$$

де  $u$  - швидкість руху шару рідини  $dy$  на відстані  $y$  від осі труби;  
 $i$  - гідравлічний ухил;  
 $r$  - радіус труби;  
 $\mu$  - динамічна в'язкість.

Таким чином, швидкості розподіляються у трубі за законом параболи з максимумом на її осі (рис.1. 27):

$$u_{max} = \frac{\gamma i d^2}{16\mu}.$$

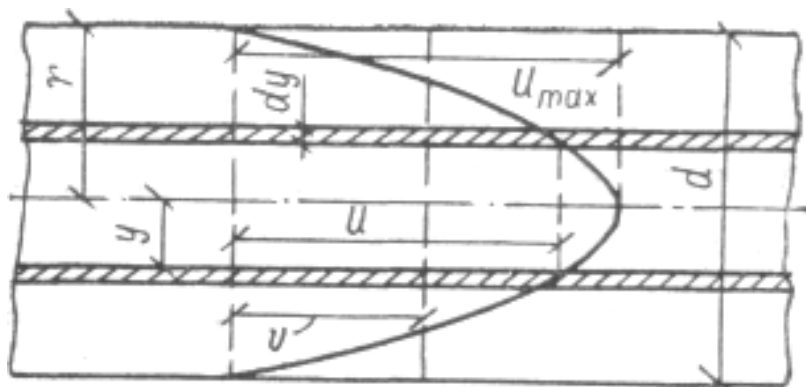


Рисунок 1.27 – Розподіл швидкостей по живому перерізу потоку в трубопроводі при ламінарному режимі руху рідини

Середня швидкість дорівнює половині максимальної:

$$v = u_{max} / 2.$$

При ламінарному режимі коректив кінетичної енергії  $\alpha = 2$ .

Втрати напору при ламінарному режимі руху визначаються за формулою Пуазейля

$$\frac{h_l}{l} = i = \frac{32\nu}{gd^2v}.$$

Із даної формули випливає, що при ламінарному режимі руху втрати напору пропорційні швидкості в першому ступені.

Зіставлення виразів

$$\frac{h_l}{l} = i = \frac{32\nu}{gd^2v}$$

$$\text{і } h_l = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}$$

дозволяє встановити, що коефіцієнт гідравлічного тертя при ламінарному режимі залежить від числа Рейнольдса та дорівнює:

$$\lambda = 64 / Re.$$

#### **6.4 Розподіл швидкостей при турбулентному режимі руху рідини у трубах**

При турбулентному режимі швидкість руху в кожній точці потоку постійно змінюється по величині та напрямку, коливаючись біля деякого середнього значення (пульсації швидкості), називаного **осередненою місцевою швидкістю**.

Осереднені швидкості в даних точках практично постійні та спрямовані уздовж осі потоку. Тому при турбулентному режимі рух рідини умовно можна розглядати як паралельноструминний та застосовувати до нього

рівняння Бернуллі. Надалі осереднену швидкість будемо називати місцевою швидкістю в даній точці.

Розподіл швидкостей по живому перерізу потоку в трубопроводі при турбулентному режимі руху (за результатами досвіду) показано схематично на рис. 1.28. Теоретичних рішень розподілу швидкостей по перерізу потоку та визначення втрат напору для турбулентного режиму немає.

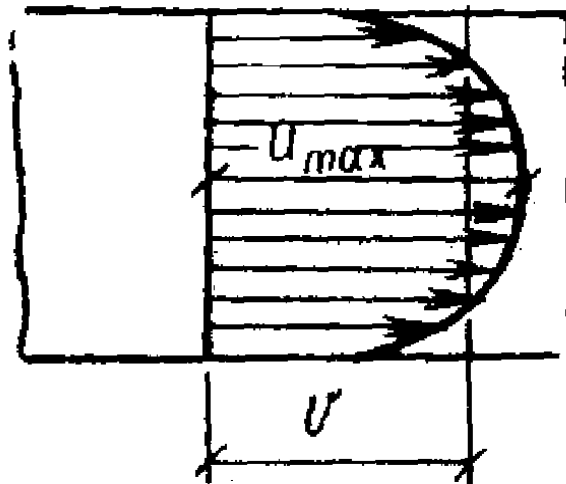


Рисунок 1.28 – Розподіл швидкостей по живому перерізу

Приблизно розподіл швидкостей при турбулентному режимі може бути виражено наступною формулою:

$$\frac{u}{u_{max}} = \left( \frac{r-y}{r} \right)^{0,84\sqrt{\lambda}}.$$

При турбулентному режимі коректив кінетичної енергії  $\alpha = 1,03...1,2$ . На практиці звичайно приймають  $\alpha = 1,1$ . Коректив кінетичної енергії при турбулентному режимі значно менше, ніж при ламінарному режимі. Це пояснюється порівняно більшою рівномірністю розподілу швидкостей по перерізу потоку при турбулентному режимі (рис. 1.29).

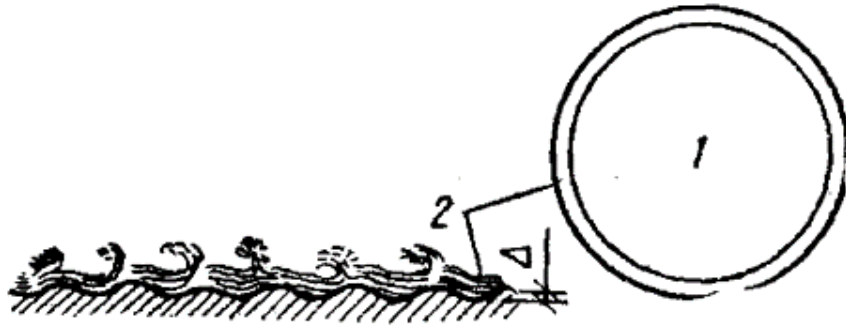


Рисунок 1.29 – Умовна схема поділу потоку потоку в трубопроводі при турбулентному режимі рідини в трубі на турбулентне ядро 1 руху рідини та ламінарний шар 2

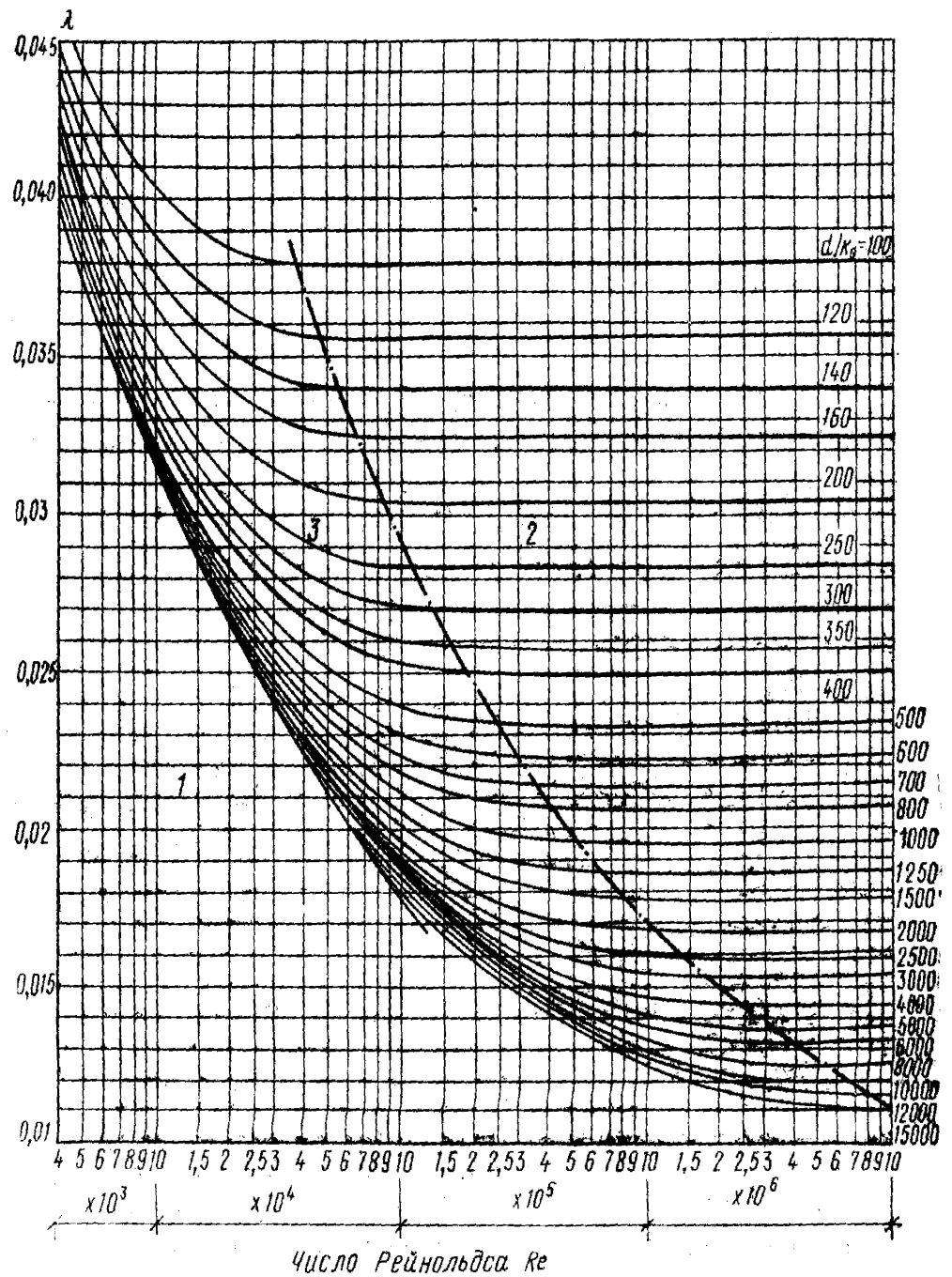
### 6.5 Визначення втрат напору по довжині

На рис. 1.30 представлений експериментальний графік залежності коефіцієнта  $\lambda$  від числа Рейнольдса.

На цьому графіку зміна коефіцієнта  $\lambda$  представлена рядом кривих, кожна з яких відповідає певній відносній шорсткості, тобто відношенню  $k_e/d$ , де  $k_e$  - еквівалентна шорсткість, рівна діаметру фракції піску, при улаштуванні із якого штучної рівномірної шорсткості опір трубопроводу рівняється опору трубопроводу з природною шорсткістю.

Таким чином, на графіку дана залежність коефіцієнта  $\lambda$  від числа Рейнольдса та відносної шорсткості.

На графіку можна виділити три області: 1 - область гідравлічно гладких труб, яка відповідає порівняно малим числам Рейнольдса; 2 - область цілком шорсткуватою тертя (область квадратичного закону), яка відповідає порівняно більшим числам Рейнольдса; 3 - перехідну область між ними. В області гідравлічно гладких труб коефіцієнт  $\lambda$  залежить тільки від числа Рейнольдса. У перехідній області коефіцієнт  $\lambda$  залежить від числа Рейнольдса та відносної шорсткості. В області квадратичного опору коефіцієнт  $\lambda$  залежить тільки від відносної шорсткості.



1 – область гідравлічно гладких труб; 2 – область квадратичного закону; 3 – перехідна область

Рисунок 1.30 – Експериментальний графік залежності коефіцієнта  $\lambda$  від числа Рейнольдса.

Напівемпірична теорія турбулентності дає наступне пояснення наведеним закономірностям зміни коефіцієнта  $\lambda$ . Товщина ламінарного шару, розташованого біля стінки русла, змінюється залежно від числа



Рейнольдса. Зі зменшенням числа Рейнольдса товщина ламінарного шару збільшується, а зі збільшенням числа Рейнольдса вона зменшується. В області гідравлічно гладких труб, яка відповідає порівняно малим числам Рейнольдса, виступи шорсткості стінок русел повністю перебувають у ламінарному шарі та по суті не виконують опору руху рідини. У цій області опір руху обумовлюється тільки внутрішніми опорами, викликаними турбулентним перемішуванням. В області квадратичного опору, яка відповідає більшим числам Рейнольдса, внаслідок відносно малої товщини ламінарного шару виступи шорсткості стінок русел попадають у ядро течії та чинять додатковий опір руху рідини. У перехідній області виступи шорсткості стінок русел частково перебувають у ламінарному шарі, а частково попадають у ядро течії. У цій області опори руху рідини, обумовлені внутрішніми опорами та шорсткістю стінок русел, порівняні.

Коефіцієнт гідравлічного тертя при ламінарному режимі залежить від числа Рейнольдса та дорівнює:

$$\lambda = 64 / Re.$$

Для визначення коефіцієнта гідравлічного тертя  $\lambda$  при турбулентному режимі запропонований ряд узагальнених формул, дійсних для всіх областей потоку. Наприклад, широке поширення має формула Кольбрука:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \left( \frac{k_e}{3,7} d + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right).$$

Для області гідравлічно гладких труб вона перетвориться у формулу Прандтля:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda} - 0,8),$$

а для області квадратичного опору - у формулу Нікурадзе:

$$1/\sqrt{\lambda} 2 \lg r/k_e + 1,74.$$

Для розрахунку трубопроводів різного призначення (теплових мереж, газопроводів і т.д.) можна застосовувати формулу Альтшуля:

$$\lambda = 0,11(k_e / d + 68 / Re)^{0,25}.$$

Для області гідравлічно гладких труб вона приймає більш простий вигляд, що практично збігається із широко відомою формулою Блазіуса:

$$\lambda = 0,3164 / Re^{0,25},$$

а для області квадратичного опору вона приводиться до формули Шифрінсона:

$$\lambda = 0,11(k_e / d)^{0,25}.$$

При практичних розрахунках значення еквівалентної шорсткості приймають із урахуванням матеріалу стінок русла і їх стану, який залежить, зокрема, від тривалості та умов експлуатації.

Розрахунок водопровідних мереж зі сталевих і чавунних труб, які були в експлуатації, звичайно проводять по формулах Ф. О. Шевелєва:

при  $v < 1,2$  м/с (у перехідній області)

$$\lambda = \frac{1}{d^{0,3}} \left( 1,5 \cdot 10^{-6} + \frac{v}{v} \right)^{0,3};$$

при  $v \geq 1,2$  м/с (в області квадратичного опору)

$$\lambda = 0,021 / d^{0,3}.$$

Для знаходження коефіцієнта  $\lambda$  при розрахунку трубопроводів із інших матеріалів або трубопроводів, призначених для транспортування рідин, які відрізняються від води, застосовують інші емпіричні формули.

Втрати напору в трубах некруглого перерізу, а також при безнапірному русі можна визначати за формулою Дарсі - Вейсбаха

$$h_l = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g},$$

## 6.6 Втрати напору в місцевих опорах

Місцеві втрати напору виникають внаслідок зміни швидкості по величині та напрямку та залежать в основному від геометричних розмірів і форм місцевих опорів.

При рішенні практичних завдань місцеві втрати напору визначають за формулою

$$h_m = \xi \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

При цьому необхідно вибрати коефіцієнт місцевого опору  $\xi$ .

Звичайно коефіцієнт місцевого опору  $\xi$  визначають експериментальним шляхом і виражають у вигляді емпіричних формул, графіків або в табличній формі. Лише для деяких місцевих опорів отримані теоретичні залежності.

**Раптове розширення потоку (втрати на удар).** На підставі теореми імпульсу сил була виведена формула Борда (рис.1. 31):

$$h_M = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}.$$

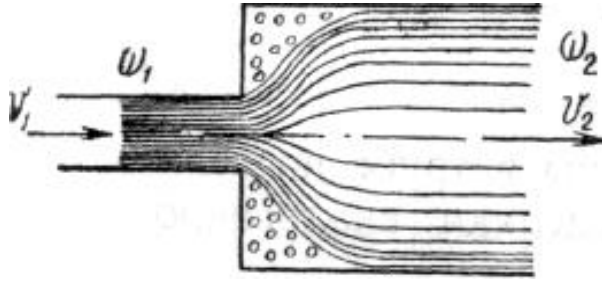


Рисунок 1.31 – Схема раптового розширення потоку

З огляду на те, що

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2,$$

можемо записати

$$h_M = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \cdot \frac{v_2^2}{2g}, \text{ або } h_M = \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2 \cdot \frac{v_1^2}{2g},$$

одержимо в підсумку:

$$\xi_2 = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2 \text{ і } \xi_1 = \left( 1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} \right)^2,$$

де індекси 1 і 2 у  $\xi$  відповідають використовуваній при розрахунку швидкості:  $v_1$  або  $v_2$ .

**Раптове звуження потоку.** При раптовому звуженні (рис. 1.32) відбувається стиснення струменя (площа перерізу струменя зменшується до  $\omega_c$ ).

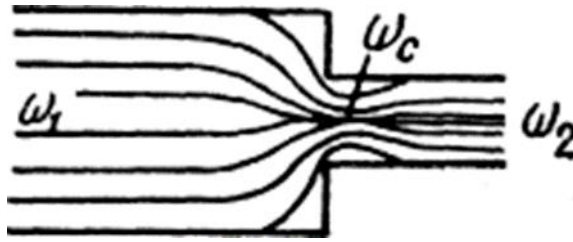


Рисунок 1.32 – Схема раптового звуження потоку

З огляду на те, що втрати напору обумовлені в основному розширенням струменя (збільшенням площі перерізу від  $\omega_c$  до  $\omega_2$ ), коефіцієнт  $\xi$  можемо визначити за формулою;

$$\xi_2 = \left( \frac{\omega_2}{\omega_c} - 1 \right)^2.$$

Заміняючи ступінь стиснення струменя коефіцієнтом стиснення

$$\varepsilon = \omega_c / \omega_2,$$

одержимо:

$$\xi_2 = \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2.$$

**Діафрагма.** При установці діафрагми в трубі постійного перерізу (рис. 1.33) коефіцієнт  $\xi$  визначають аналогічно попередньому за формулою

$$\xi = \left( \frac{\omega}{\omega_\delta \varepsilon} - 1 \right)^2,$$

де  $\omega_\delta$  площа отвору діафрагми;  $\varepsilon$  - коефіцієнт стиснення, рівний  $\omega_c / \omega_\delta$ .

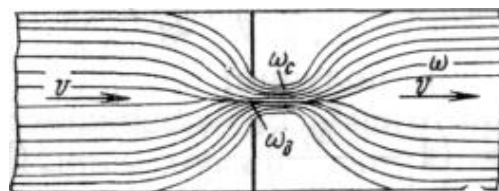


Рисунок 1.33 – Схема впливу діафрагми на потік

**Дифузор.** Коефіцієнт  $\xi$  дифузора (рис. 1.34) визначають у частках від втрат напору на раптове розширення:

$$\xi_2 = k_1 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right)^2,$$

де  $k_1$  - коефіцієнт, який враховує зменшення втрат напору в дифузорі у порівнянні із втратами напору при раптовому розширенні з тим же співвідношенням перерізів з'єднаних труб; коефіцієнт  $k_1$  залежить від кута конусності  $\alpha_1$ .

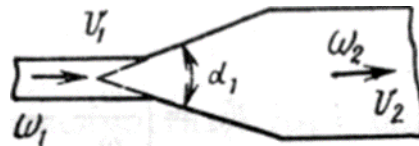


Рисунок 1.34 – Схема потоку в дифузорі

**Конфузор.** Коефіцієнт  $\xi$  конфузора визначають у частках від втрат напору при раптовому звуженні, виходячи з того ж принципу, який був використаний для визначення коефіцієнта  $\xi$  дифузора

$$\xi_2 = k_2 \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2,$$

де  $k_2$  - коефіцієнт, який враховує зменшення втрат напору в конфузорі в порівнянні із втратами напору при раптовому звуженні, коефіцієнт  $k_2$  залежить від кута збіжності  $\alpha_2$ .

## 6.7 Загальні втрати напору

Загальні втрати напору визначають шляхом арифметичного підсумовування втрат напору по довжині та втрат, викликаних окремими місцевими опорами:

$$h_w = h_l + \sum h_M .$$

Цей метод визначення втрат напору одержав назву принципу накладення втрат.

Таким чином, у трубопроводі постійного діаметра загальні втрати напору рівні:

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi_1 \frac{v^2}{2g} + \xi_2 \frac{v^2}{2g} + \dots + \xi_n \frac{v^2}{2g} ,$$

або

$$h_w = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \xi_M \frac{v^2}{2g} .$$

Метод накладення втрат напору застосуємо тільки в тому випадку, якщо перед місцевими опорами потік устигає стабілізуватися, тобто крива розподілу швидкостей здобуває нормальний вигляд, який відповідає рівномірному руху води. Довжина стабілізуючої прямолінійної ділянки становить від  $10$  до  $30d$ , де  $d$  - діаметр трубопроводу.

При близькому розташуванні місцевих опорів друг від друга принцип накладення втрат напору дає помилкові результати. У цьому випадку втрати напору слід визначати експериментально.

Література [1-4].

## ТЕМА 7. ВИТІКАННЯ РІДИНИ КРІЗЬ ОТВОРИ ТА НАСАДКИ

### 7.1 Витікання рідини із малого отвору в тонкій стінці при постійному напорі

Отвір вважають **малим**, якщо його розмір по висоті значно менше напору - не більше  $0,1H$ . **Тонкою стінкою** вважають таку, у якої отвір має загострену крайку; при цьому струмінь, який витікає із отвору, переборює лише місцеві опори.

Розглянемо посудину, що має у вертикальній стінці отвір площею  $\omega$ , через який витікає рідина під постійним напором  $H$  (рис. 1.:35). При витіканні струменя рідини із отвору на деякій відстані від нього спостерігається стиснення його поперечного перерізу. Відношення площі стисненого перерізу  $\omega_c$  до площі отвору  $\omega$  називають коефіцієнтом стиснення:

$$\varepsilon = \omega_c / \omega.$$

За характером стиснення буває **повним**, якщо струмінь одержує стиснення по всьому периметру отвору, і **неповним**, якщо струмінь не має бічного стиснення з однієї або декількох сторін, наприклад, коли отвір примикає до стінки або до дна посудини, які при цьому є як би напрямними для витікаючого струменя.

Повне стиснення буде **досконалим**, якщо отвір розташований на значній відстані від бічних стінок і дна посудини, так що вони не впливають на стиснення струменя (коли  $m > 3a$ , де  $m$  - відстань від стінок або дна,  $a$  - розмір отвору), і **недосконалим**, якщо на нього впливають стінки або дно посудини.

При витіканні рідини із отвору задача зводиться до визначення швидкості витікання та витрати рідини. Складемо рівняння Бернуллі для перерізів  $I-I$  і  $ss$  (стиснений переріз струменя на рис. 1.35). За площину



порівняння прийmemo площину  $nn$ , яка проходить через центри отвору та стисненого перерізу. Позначаючи швидкість руху на вільній поверхні через  $v_0$  і вважаючи, що тиск на вільній поверхні та у центрі ваги стисненого перерізу дорівнює атмосферному, одержимо

$$H + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + h_w.$$

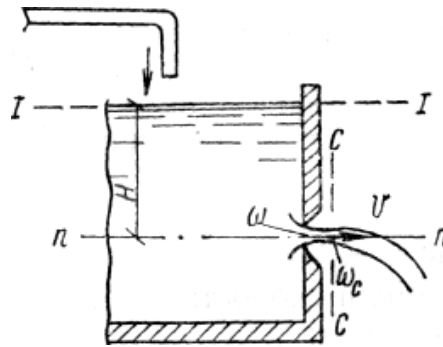


Рисунок 1.35 – Схема вільного витікання рідини із малого отвору в тонкій стінці

Втрати напору в розглянутому випадку викликаються місцевим опором входу в отвір

$$h_{w.ех} = \xi_{ех} \frac{v^2}{2g}.$$

Тоді

$$H + \frac{v_0^2}{2g} = (1 + \xi_{ех}) \frac{v^2}{2g}$$

і далі

$$v = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{ех}}} \sqrt{2g \left( H + \frac{v_0^2}{2g} \right)}.$$

Приймаючи позначення

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi_{ех}}}$$

и

$$H_0 = H + \frac{v_0^2}{2g},$$

остаточно одержимо:

$$v = \varphi \sqrt{2gH_0},$$

де  $\varphi$  - коефіцієнт швидкості.

Якщо швидкість підходу  $v_0$  мала, то формула одержує більш простий вигляд:

$$v = \varphi \sqrt{2gH}.$$

Коефіцієнт швидкості  $\varphi$  для розглянутого випадку приймають рівним 0,97.

Витрату через малий отвір у тонкій стінці при постійному напорі легко визначити за формулою

$$Q = \omega_c v,$$

або, з огляду на те, що  $\varepsilon = \omega_c / \omega$  та  $v = \varphi \sqrt{2gH_0}$ , одержимо:

$$Q = \varepsilon \varphi \omega \sqrt{2gH_0}.$$

Добуток коефіцієнтів стиснення  $\varepsilon$  та швидкості  $\varphi$  називають коефіцієнтом витрати отвору  $\mu$ , тобто

$$\mu = \varepsilon \varphi.$$

Остаточна формула для витрати через малий отвір у тонкій стінці має такий вигляд:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}.$$

При  $v_0 = 0$ :

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH}.$$

На підставі численних досліджень встановлено, що значення коефіцієнта  $\mu$  при повному досконалому стисненні коливається в межах 0,59 - 0,63, становлячи в середньому близько 0,62.

## 7.2 Витікання рідини із малого отвору в тонкій стінці при змінному напорі

Витікання рідини при змінному напорі являє собою один із прикладів несталого руху рідини. Нижче наведений опис його двох найпростіших випадків.

**Спорожнювання резервуара.** Розглянемо заповнений рідиною резервуар площею горизонтального перерізу  $\Omega$ , у дні якого влаштований отвір площею  $\omega$ . Нехай при спорожнюванні резервуара початковий напір над центром ваги отвору був  $H_1$ , а кінцевий -  $H_2$  (рис. 1.36). Якщо за час спорожнювання резервуара припливу рідини не відбувається, то спорожнювання резервуара можна розраховувати за формулою

$$t = \frac{2\Omega(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})}{\mu\omega\sqrt{2g}}.$$

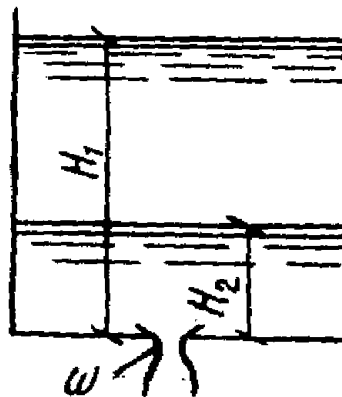


Рисунок 1.36 – Схема спорожнювання резервуара через отвір у його дні

Приймаючи у формулі  $H_2 = 0$ , одержимо формулу для часу повного спорожнювання резервуара:

$$t = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}.$$

Остання залежність може бути представлена також у наступному вигляді:

$$t = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}} = \frac{2W}{Q},$$

де  $W$  - об'єм резервуара;  $Q$  - витрата рідини при початковому напорі.

Отже, час повного спорожнювання резервуара при змінному напорі в 2 рази більше часу, потрібного для витікання із резервуара тієї ж кількості рідини при постійному напорі, рівному початковому напору  $H_1$ .

**Вирівнювання рівнів у сполучених посудинах.** Приймемо, що у початковий момент часу рівень у резервуарі 1 перевищує рівень у резервуарі 2 на висоту  $H$  (рис. 1.37). Позначимо площі горизонтальних перерізів резервуарів 1 і 2 відповідно  $\Omega_1$  та  $\Omega_2$ , напори над центром ваги отвору відповідно  $z_1$  та  $z_2$ , їх різниця дорівнює  $H$ .

Час, потрібний для повного вирівнювання рівнів рідини в сполучених резервуарах 1 та 2, можна визначити за формулою:

$$t = \frac{2\Omega_1\Omega_2\sqrt{H}}{\mu\omega\sqrt{2g}(\Omega_1 + \Omega_2)}.$$

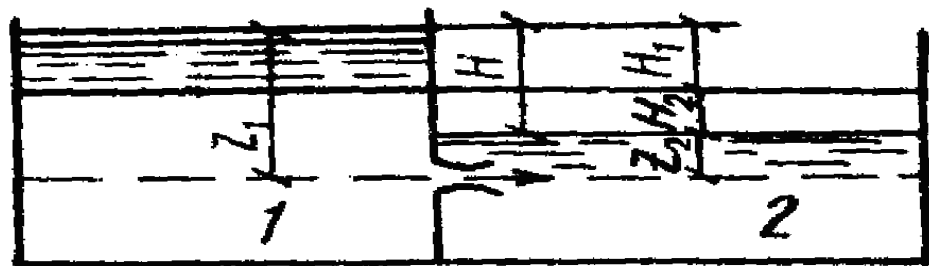


Рисунок 1.37 – Схема вирівнювання рівнів у сполучених посудинах

У результаті вирівнювання рівнів у сполучених посудинах рівень у резервуарі 1 опуститься на висоту  $H_1$  а рівень у резервуарі 2 підніметься на висоту  $H_2$ .

### 7.3 Витікання рідини через насадки

**Насадком** називають коротку трубу, приєднану до отвору в тонкій стінці. Довжина насадка дорівнює трьом - п'яти діаметрам отвору (рис. 1.38). За формою насадок може бути **зовнішнім циліндричним 1**, **внутрішнім циліндричним 2**, **конічним збіжним 3**, **конічним розбіжним 4** і **коноїдальним 5** (рис. 1.38).

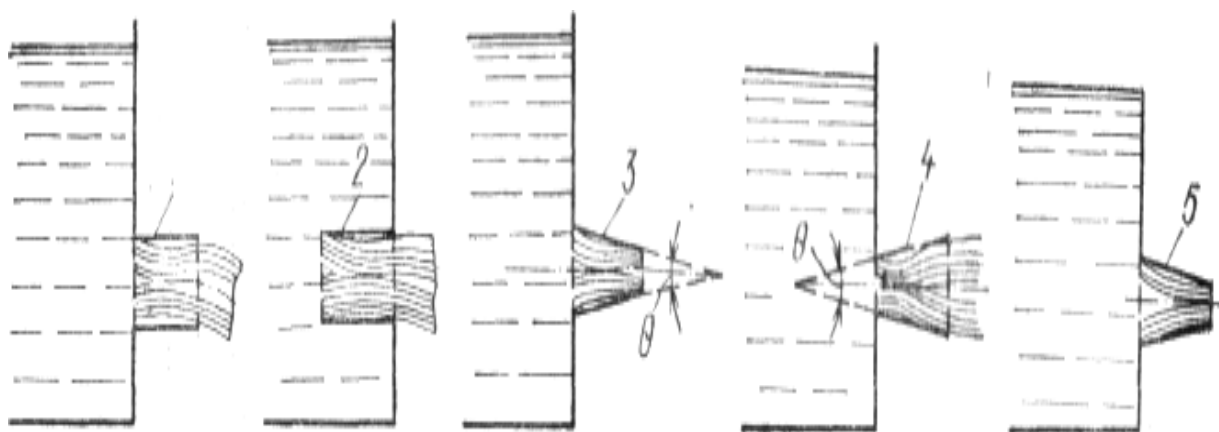


Рисунок 1.38 – Насадки різної форми

Витрату через насадок визначають за формулою:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0},$$

де  $\mu$  - коефіцієнт витрати приймають залежно від форми насадка.

**Зовнішній циліндричний насадок** (рис.1.39). Внаслідок криволінійності ліній течії на підході до насадку струмінь рідини безпосередньо після входу в насадок утворить стиснений його переріз, а із

насадка впливає повним перерізом, тобто коефіцієнт стиснення такого насадка  $\varepsilon = 1$ .

Коефіцієнт витрати зовнішнього циліндричного насадка дорівнює  $0,82$ , тобто насадок збільшує витрату в порівнянні з отвором у тонкій стінці в  $1,32$  рази ( $\mu$  отвору становить  $0,62$ ). Збільшення витрати в насадці пояснюється наявністю вакууму в стисненому перерізі, який створює підсмоктування рідини. Якщо до отвору в стисненому перерізі приєднати рідинний вакуумметр (див. рис. 1.39), то рідина в трубці підніметься на висоту  $h_{\text{вак}} \approx 0,75H$ .

Зовнішні циліндричні насадки широко застосовують на практиці. Як насадки такого типу працюють водовипуски в греблях, труби під насипами та т.д.

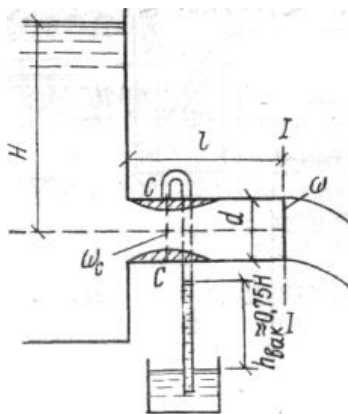


Рисунок 1.39 – Схема протікання рідини через зовнішній циліндричний насадок

**Внутрішній циліндричний насадок.** Цей насадок має більший опір на вході, чим зовнішній. Його коефіцієнт витрати  $\mu = 0,707$ , а коефіцієнт стиснення  $\varepsilon = 1$ .

**Конічний збіжний насадок.** Коефіцієнт витрати цього насадка залежить від кута конусності  $\theta$  (см. рис. 38). При цьому найбільший коефіцієнт витрати  $\mu_{\text{max}} = 0,94$  виходить при куті конусності  $\theta = 13^\circ 24'$ .

Такі насадки дають струмінь із більшими швидкостями, тому їх застосовують у якості сопел турбін, гідромоніторів і брандспойтів.

**Конічний розбіжний насадок.** Цей насадок дає малу вихідну швидкість, але викликає більші втрати напору. При куті конусності  $5 - 7^\circ$  коефіцієнт витрати  $\mu = 0,5$ , а коефіцієнт стиснення  $\varepsilon = 1$ .

Таку форму насадків використовують при улаштуванні дорожніх труб, водовипусків зрошувальних систем і відсмоктувальних труб, турбін ГЕС.

**Коноїдальний насадок.** Форма внутрішньої поверхні цього насадка близька до форми струменя, який витікає із отвору; гідравлічні опори в ньому дуже малі. У зв'язку із цим коефіцієнт витрати цього насадка дорівнює  $0,97 - 0,98$ .

#### 7.4 Витікання рідини через водозливи

**Водозливом** називають споруду (стінку), через яку відбувається перелив рідини.

**Класифікація водозливів.** По профілю розрізняють водозливи з тонкою стінкою (рис. 1.40, а), із широким порогом (рис. 1.40, б) і практичного профілю (рис. 1.40, в).

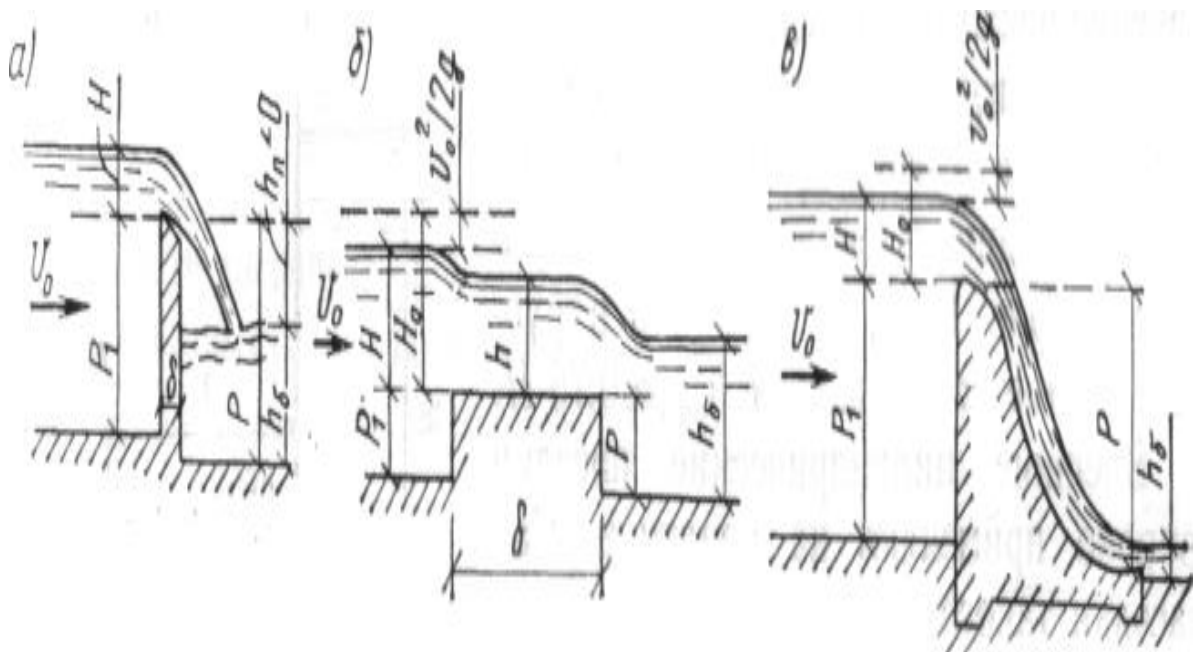


Рисунок 1.40 – Водозливи різного профілю

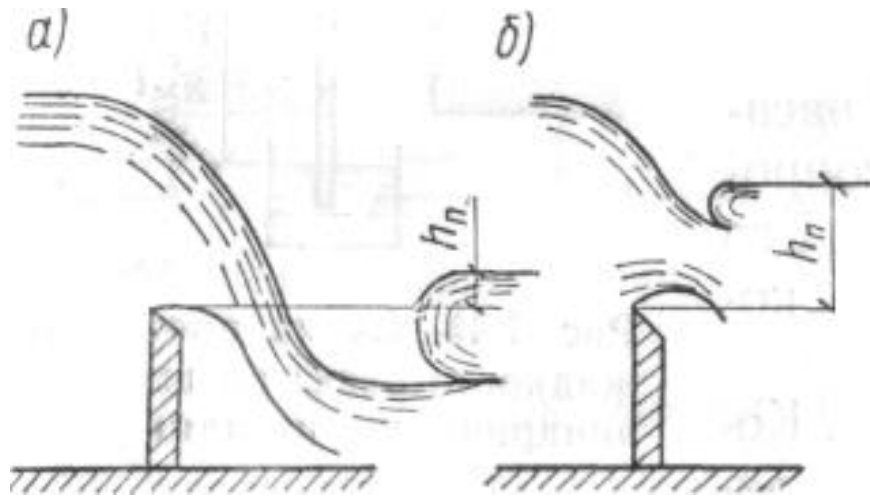


Рисунок 1.41 – Схема незатопленого (а) і затопленого (б) водозливів

За типом сполучення струменя з нижнім б'єфом розрізняють незатоплені (рис. 41, а) і затоплені (рис. 41, б) водозливи. У незатоплених водозливах рівень води в нижньому б'єфі не впливає на витрату та на умови переливу, а в затоплених впливає. Водозлив вважають незатопленим, навіть якщо рівень води в нижньому б'єфі лежить вище порога водозливу, тобто  $h_{\delta} > P$ , але відносний перепад  $z/P > 0,7$ . У затопленому водозливі  $z/P < 0,7$ . Тут  $P$  - висота стінки водозливу;  $h_{\delta}$  - глибина води в нижньому б'єфі;  $z$  - різниця рівнів у б'єфах.

За формою вирізу в стінці водозливи бувають прямокутними, трапецеїдальними, трикутними, круглими, параболічними та т.д.

За умовами бічного стиснення потоку розрізняють водозливи без бічного стиснення (коли ширина русла дорівнює ширині водозливу) і водозливи з бічним стисненням (ширина русла більше ширини водозливу).

Основна формула витрати через незатоплений водозлив без бічного стиснення має вигляд:

$$Q = mb\sqrt{2g}H^{3/2},$$

де  $m$  - коефіцієнт витрати водозливу, який залежить від його типу та напору;

$b$  - ширина водозливу;

$H$  - напір на порозі водозливу.



Бічне стиснення потоку та підтоплення водозливу враховується введенням у дану формулу відповідних коефіцієнтів. Особливо в цій формулі враховується швидкість підходу води до водозливу.

Література [2-4].

## ТЕМА 8. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ГІДРАВЛІЧНОГО РОЗРАХУНКУ ТРУБОПРОВОДІВ. ГІДРАВЛІЧНИЙ УДАР У ТРУБАХ.

### 8.1 Призначення та класифікація трубопроводів

Для переміщення рідин і газів застосовують трубопроводи, виготовлені з різних матеріалів (стали, чавуну, бетону, пластмаси, азбестоцементу та ін.). Трубопроводи бувають напірні та безнапірні, короткі та довгі, прості та складні.

Пропускна здатність напірних трубопроводів істотно залежить від втрат напору по довжині та у місцевих опорах (стиках, арматурах і т.п.).

Трубопроводи малої довжини та з більшим числом місцевих опорів, втрати напору в яких перевищують 10% втрат напору по довжині (комунікації насосних станцій, лабораторій, мастилопроводи та ін.), називають **короткими**.

До **довгих** відносять трубопроводи великої довжини, у яких втрати напору на подолання місцевих опорів незначні (не більше 10% втрат напору по довжині).

Трубопроводи із труб одного або декількох діаметрів без відгалужень і без роздачі витрати по шляху руху рідини називають **простими**.

Трубопроводи із мережі труб різного діаметра з магістральними лініями та з відгалуженнями (тупикові, кільцеві) називають **складними**.

### 8.2 Основні формули для гідравлічного розрахунку трубопроводів

Гідравлічний розрахунок трубопроводів дозволяє вирішувати три основні завдання:

- 1) визначати необхідний напір для пропуску відомої витрати води при заданому діаметрі труб;
- 2) визначати пропускну здатність труб заданого діаметра при відомих втратах напору;

3) визначати переріз трубопроводів при заданих витратах води та втратах напору.

**Втрати напору** в трубопроводі складаються із втрат на тертя по довжині та втрат на подолання місцевих опорів, тобто

$$h_w = h_l + \sum h_M.$$

Втрати напору по довжині трубопроводів визначають за формулою Дарсі-Вейсбаха:

$$h_l = \lambda \frac{l}{d_p} \frac{v^2}{2g} = \frac{\lambda}{4R} \frac{v^2}{2g} l,$$

де  $\lambda$  - коефіцієнт опору тертя по довжині  $l$ ;  $d_p$  - розрахунковий внутрішній діаметр труб, м;  $v$  - середня швидкість руху рідини, м/с;  $R$  - гідравлічний радіус.

Якщо для круглої труби визначити швидкість руху рідини

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2},$$

то втрати напору по довжині можна обчислити за формулою

$$h_l = A_l l Q^2,$$

де  $A_l = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d_p^5}$  - питомий опір, тобто опір 1м трубопроводу.

Опір по всій довжині  $l$  трубопроводу складе  $S_l = A_l l$  та тоді

$$h_l = S_l Q^2.$$

Втрати напору на одиницю довжини трубопроводу називають гідравлічним ухилом  $i$ , тобто

$$i = h_l / l = A_l Q^2 = \frac{\lambda v^2}{2g d_p}.$$

Коефіцієнт опору  $\lambda$  при русі води в нові та вже експлуатованих трубах із різних матеріалів визначають по залежностях, отриманим Шевелєвим:

для нових сталевих труб

$$\lambda = \frac{0,0159}{d_p^{0,226}} \left( 1 + \frac{0,684}{v} \right)^{0,226};$$

для сталевих чавунних труб, що були в експлуатації

$$\lambda = \frac{0,021}{d_p^{0,3}}.$$

При гідравлічних розрахунках водопровідних труб питомий опір можна підрахувати за формулою, складеною з урахуванням збільшення коефіцієнта  $\lambda$  внаслідок зростання шорсткості стінок труб під час їх експлуатації в результаті корозії або утворення відкладень:

$$A_l = i / Q^2 = \frac{0,001735}{d_p^{5,3}}.$$

Ця формула справедлива при швидкості руху води  $v \geq 1,2$  м/с. При менших швидкостях у значення питомих опорів уводиться поправочний коефіцієнт  $K_n$  на неквадратичність залежності втрат напору від середньої швидкості руху рідини. Тоді формули для визначення втрат напору по довжині здобувають такий вигляд:

$$h_l = K_n A_l l Q^2,$$

$$h_l = K_n S_l Q^2.$$

Значення поправочного коефіцієнта  $K_n$  змінюються від 1 до 1,4 при зміні швидкості від 1,2 до 0,2 м/с. Поправочний коефіцієнт визначають за формулою

$$K_n = 0,852 \left( 1 + \frac{0,867}{v} \right)^{0,3}.$$

Втрати напору на подолання **місцевих опорів** визначають за формулою

$$h_M = \sum \xi \frac{v^2}{2g},$$

або за аналогією

$$h_M = \sum \xi A_M Q^2.$$

При розрахунках трубопроводів місцеві втрати можна виразити у вигляді втрат напору на тертя по **еквівалентній довжині**. При цьому  $h_M = h_{l_e}$ , тобто  $\sum \xi A_M Q^2 = A_l l_e Q^2$  або  $\sum \xi A_M = A_l l_e$ , звідки

$$l_e = \sum \xi A_M / A_l.$$

Величину  $l_e$  називають еквівалентною довжиною трубопроводу, яка відповідає даному місцевому опору з коефіцієнтом  $\xi$ .

**Витрату** можна визначити із рівняння  $Q = \sqrt{h_l / S_l}$ . Для визначення витрати та швидкості рідини, яка протікає по трубопроводу, користуються також (переважно для каналів і труб некруглого перерізу) рівнянням Шезі:  $v = C \sqrt{Ri}$ .

При розрахунку трубопроводів використовують не тільки питомий і загальний опір, але й інші гідравлічні характеристики, наприклад, **провідність трубопроводів**:

$$P_l = \sqrt{\frac{1}{S_l}} = \sqrt{\frac{1}{A_l l}} = K_l \sqrt{\frac{1}{l}},$$

де  $K_l = \sqrt{1 / A_l}$  - витратна характеристика.

Витратна характеристика та провідність, які відповідають місцевим опорам, за аналогією будуть представлені наступними співвідношеннями:

$$K_M = \sqrt{1 / A_M}, \quad P_M = K_M \sqrt{1 / \xi}.$$

Витрата рідини, яка рухається по трубопроводу, може бути визначена через провідність  $P_l$ , тобто

$$Q = \frac{K_l}{\sqrt{l}} \sqrt{h_l} = P_l \sqrt{h_l}.$$

**Діаметр** трубопроводу визначають залежно від витрати перекачуваної рідини і швидкості її руху за формулою

$$d = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v}} = 1,13 \sqrt{\frac{Q}{v}},$$

де  $d$  - діаметр труби, м;  $Q$  - розрахункова витрата води, м<sup>3</sup>/с;  $v$  - середня швидкість руху, м/с; для малих діаметрів (до 400мм)  $v$  приймається в межах 0,7-1 м/с, а для середніх і більших діаметрів – 1-1,5 м/с.

Варто мати на увазі, що зі зменшенням діаметрів трубопроводу при тій же самій витраті збільшуються швидкість і втрати напору, а зі збільшенням швидкості та втрат напору зростають експлуатаційні витрати. Зі збільшенням ж діаметра трубопроводу швидкість і втрати напору зменшуються. У зв'язку із цим при визначенні діаметра трубопроводу необхідно враховувати вимоги економічності та технічної доцільності, інакше кажучи, прагнути до визначення економічно найвигіднішого діаметра, що відповідає мінімуму його наведеної вартості, яка включає витрати на будівництво та на експлуатацію трубопроводу. Вибір економічного діаметра трубопроводу здобуває особливе значення при гідравлічному розрахунку зовнішніх водопровідних мереж. Економічно найвигідніші діаметри водопровідних труб визначають по розрахунковій витраті води з урахуванням економічного фактора  $E$ .

### 8.3 Основи розрахунку простих коротких і довгих трубопроводів

#### Короткий трубопровід.

Складемо рівняння Бернуллі для перерізів  $I-I$  та  $II-II$  щодо площини порівняння  $00$  при витіканні рідини із трубопроводу в атмосферу (рис.1. 42):

$$H_1 + \frac{P_{атм}}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = H_2 + \frac{P_{атм}}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w.$$

Позначивши діючий напір  $H = H_1 - H_2$  і зневажаючи швидкісним напором  $\frac{v_1^2}{2g}$ , одержимо

$$H = \frac{v_2^2}{2g} + h_w.$$

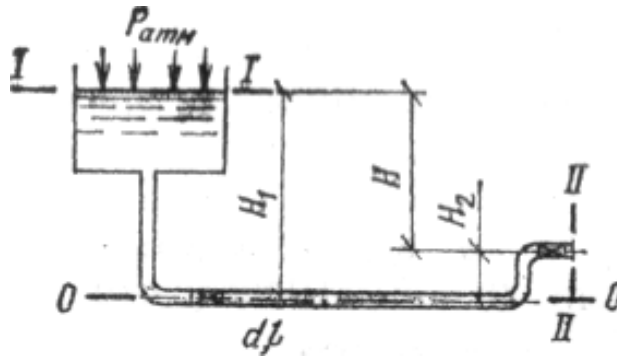


Рисунок 1.42 – Схема до гідралічного розрахунку короткого трубопроводу

Втрати напору можна визначити за формулою:

$$h_w = \left( \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_M \right) \cdot \left( \frac{v_2^2}{2g} \right).$$

Тоді, позначаючи  $v_2$  через  $v$ , одержимо

$$H = \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_M \right) \cdot \left( \frac{v^2}{2g} \right),$$

звідки,

$$v = \varphi \sqrt{2gH},$$

де  $\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_M}} = \frac{1}{\sqrt{\xi_c}}$  - коефіцієнт швидкості<sup>4</sup>

$\xi_c$  - коефіцієнт опору системи.

Витрату рідини визначають за формулою

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH},$$

де  $\mu$  - коефіцієнт витрати;

$\omega$  - площа перерізу труби;

$H$  - діючий напір.

На рис. 1.43 зображена схема сифона, який використовується для перепуску води з одного резервуара в іншій. Сифон є коротким трубопроводом. Розрахунок сифонних трубопроводів зводиться до визначення їх пропускної здатності за формулою  $Q = \mu \omega \sqrt{2gH}$  та граничного значення висоти  $z$ . Складемо рівняння Бернуллі для перерізів  $I-I$  та  $II-II$  щодо площини порівняння  $00$ :

$$\frac{p_{атм}}{\gamma} = z + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \sum \xi_M \frac{v^2}{2g}.$$

Маючи на увазі, що

$$\frac{p_{атм}}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma} = h_{вак},$$

одержимо

$$h_{вак} = z + \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_M \right) \frac{v^2}{2g},$$

тоді

$$z = h_{вак} - \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \sum \xi_M \right) \frac{v^2}{2g}.$$



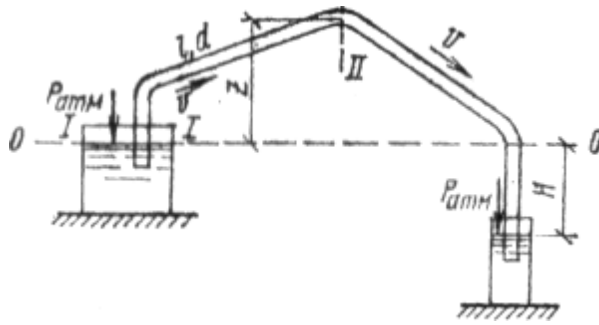


Рисунок 1.43 – Схема до гідравлічного розрахунку сифона

Висоту  $z$  варто приймати такою, щоб вакуумметрична висота щоб не була більше 7м з ціллю уникнення кавітації.

**Довгий трубопровід.** Розглянемо довгий простий трубопровід, маючи на увазі, що при його розрахунку місцевими втратами напору звичайно зневажають.

Аналогічно попередньому з рівняння Бернуллі випливає, що

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

тобто весь наявний напір  $H$  витрачається на подолання опорів тертя  $h_l$ .

Використовуючи розрахункові гідравлічні характеристики, одержимо відомі вже залежності для втрат напору:

$$h_l = A_l l Q^2 \text{ або } h_l = Q^2 / K_l^2 = i l.$$

При розрахунку простого трубопроводу його довжина звичайно відома, так само як матеріал і конфігурація. Невідомою може бути одна із трьох величин  $h_l$ ,  $Q$  або  $d$ .

## 8.4 Послідовне з'єднання трубопроводів

**Послідовним** називають з'єднання в одну нитку трубопроводів різних діаметрів. При цьому загальні втрати напору у всьому трубопроводі одержують шляхом додавання втрат напору, визначених на кожній окремій ділянці

$$\sum h_l = h_1 + h_2 + \dots + h_n.$$

Використовуючи отримані раніше рівняння, запишемо:

$$\sum h_l = Q^2 (A_1 l_1 + A_2 l_2 + \dots + A_n l_n),$$

або

$$\sum h_l = Q^2 (l_1 / K_1^2 + l_2 / K_2^2 + \dots + l_n / K_n^2).$$

Беручи до уваги, що для області квадратичного опору  $h_l = S_l Q^2$ , можемо написати:

$$h_l = Q^2 (S_1 + S_2 + \dots + S_n),$$

тобто

$$h_l = Q^2 \sum S \text{ або } h_l = Q^2 S_c,$$

де  $S_c$  - опір системи трубопроводів.

Таким чином, систему з послідовним з'єднанням трубопроводів різного діаметра можна розглядати як один простий трубопровід, опір якого дорівнює сумі опорів окремих послідовно з'єднаних трубопроводів.

З огляду на те, що весь напір  $H$  затрачається на подолання гідравлічних опорів, тобто  $H = h_l$ , можна вирішити зворотне завдання, тобто при заданих  $H$ ,  $l_1, l_2, \dots, l_n$  і  $d_1, d_2, \dots, d_n$  визначити пропускну здатність всієї системи за формулою:

$$Q = \sqrt{H / S_c} = \sqrt{H / \sum_1^n (l / K^2)}.$$

### 8.5 Паралельне з'єднання трубопроводів

Паралельно з'єднані трубопроводи (рис. 1.44) відносяться до складних систем (мереж). Нижче дані основні розрахункові залежності.

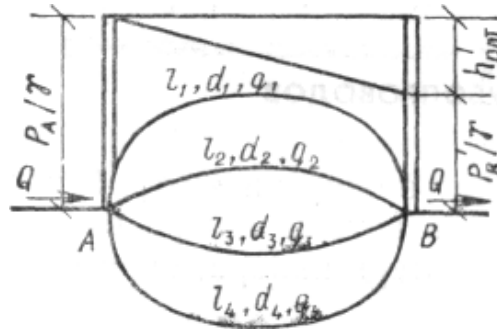


Рисунок 1.44 – Схема до гідравлічного розрахунку паралельно з'єднаних трубопроводів

З рис. 1.44 видно, що у вузловій точці  $A$  потік рідини в магістралі розгалужується, а в точці  $B$  знову зливається. Втрати напору в кожній галузі однакові та рівні  $h_w$ . До вузла  $A$  притікає витрата  $Q$ , а впливає з нього

$\sum_1^n q_i$ , отже:

$$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \sum_1^n q_i.$$

Розподіл витрат по окремих галузях мережі роблять пропорційно провідностям кожної лінії. Тому що  $q_i = P_i \sqrt{H}$ , де  $P_i$  - провідність кожної лінії, те маємо:

$$Q = P_1 \sqrt{H} + P_2 \sqrt{H} + \dots + P_n \sqrt{H} = P_c \sqrt{H},$$

де  $P_c = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ , або  $P_c = \sum_1^n P_i$  - провідність системи.

Тому що  $q_i / P_i = \sqrt{H}$  та  $Q / P_c = \sqrt{H}$ , отже:

$$q_i = \frac{P_i}{P_c} Q.$$

При гідравлічному розрахунку мережі складають також рівняння втрат напору для кожної галузі. П'єзометричні напори в точках  $A$  и  $B$  для всіх ділянок будуть однаковими, тобто

$$h_w = H_A - H_B = H.$$

## 8.6 Основи розрахунку трубопроводів при рівномірній роздачі витрати по шляху

Якщо на ділянці трубопроводу довжиною  $l$  є шляхова витрата води  $Q_n$ , то на одиницю довжини витрачається води  $Q_n / l$ . Витрату води, що рухається далі по трубопроводу, називають транзитною  $Q_T$ .

Через переріз  $I-I$  (рис. 1.45) буде проходити витрата

$$Q = Q_T + \frac{Q_n}{l} (l - x) \text{ або } Q = (Q_T + Q_n) - \frac{Q_n x}{l}.$$

На нескінченно малій ділянці труби втрати напору

$$dh_l = \frac{Q^2}{K_l^2} dx \text{ або } dh_l = \frac{1}{K_l^2} \left[ (Q_T + Q_n) - \frac{Q_n x}{l} \right]^2 dx.$$

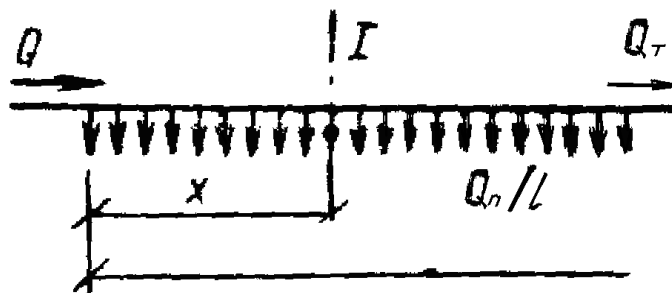


Рисунок 1.45 – Схема до гідравлічного розрахунку трубопроводу з безперервною роздачею витрати по шляху

На всій довжині

$$h_l = \frac{1}{K_l^2} (Q_T^2 + Q_T Q_n + \frac{1}{3} Q_n^2),$$

а при  $Q_T = 0$

$$h_l = \frac{1}{3} \frac{Q_n^2}{K_l^2} l = \frac{1}{3} S Q_n^2.$$

При безперервній роздачі води втрати напору в 3 рази менше, ніж при зосередженій витраті наприкінці труби.

Для визначення витрати зручніше користуватися формулою

$$Q = Q_T + \alpha Q_n,$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт еквівалентності; прийнятий рівним 0,5.

## 8.7 Гідротранспорт

Транспортування суміші води та твердих речовин (пульпи), наприклад цементного розчину, барвників і т.п., по трубах, лотках, ринвах, каналах називається **гідротранспортом**. Основними характеристиками гідросуміші (пульпи) є консистенція (кількість твердих часток в одиниці об'єму рідини) і крупність часток. Консистенція може бути виражена масовою концентрацією, тобто вмістом часток по масі у відсотках до маси рідини. Швидкість випадання твердих часток у рідині називають гідравлічною крупністю.

При турбулентному режимі потоку гідросуміші в трубах тверді частки не осідають на дно, а переміщуються у зваженому стані завдяки наявності піднімальної сили, пропорційної квадрату швидкості потоку. Найменша швидкість потоку гідросуміші, при якій не утворюється осідання, називається **критичною**. Критична швидкість залежить від крупності часток, їх питомої ваги, консистенції гідросуміші та діаметра трубопроводу.

Для напірних пульпопроводів критичну швидкість можна визначити за формулою Кнороза:

$$v_{кр} = w_q \sqrt[6]{p(d/d_0)^{3,5}},$$

де  $w_q$  - гідравлічна крупність часток середнім діаметром  $d_0$ ;

$p$  - масова концентрація гідросуміші;

$d$  - діаметр трубопроводу

Аналогічно гідротранспорту працює пневматичний транспорт - переміщення суміші сипучих матеріалів з повітрям по трубах. Швидкість переміщення суміші повинна бути більше критичної швидкості витання часток.

### 8.8 Гідравлічний удар у трубах

У напірному трубопроводі при раптовій зміні швидкості руху рідини (миттєва зупинка або поява руху) виникає гідравлічний удар, який супроводжується різким підвищенням і зниженням тиску. Наприклад, при миттєвому припиненні руху рідини, коли кінетична енергія переходить у роботу сил тиску, тобто рідина виявляється стисненою, виникає удар безпосередньо біля крана на трубопроводі. Ударна хвиля поширюється по рідині з поступовим загасанням коливань.

Виникаючий додатковий тиск усередині трубопроводу може привести до розриву стикових з'єднань, арматури, стінки трубопроводу. Якщо трубопровід перекритий по обидва боки, спостерігається поступове загасання ударної хвилі, при наявності вільної поверхні (бака) хвиля загасає відразу.

Теоретичне обґрунтування явища гідравлічного удару в трубах і методика його розрахунку були розроблені Н. Є. Жуковським ще в 1898 р.

Передача стиснених часток рідини від одного перерізу до іншого відбувається зі **швидкістю ударної хвилі  $a$** , що, по Жуковському, визначається за формулою:

$$a = \frac{\sqrt{E_p / \rho}}{\sqrt{1 + \frac{E_p d}{E_T \delta}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho \left( \frac{1}{E_p} + \frac{d}{E_T \delta} \right)}}$$

де  $E_p$  - модуль пружності рідини;

$d$  - діаметр труби;

$E_T$  - модуль пружності матеріалу, з якого зроблений трубопровід;

$\delta$  - товщина стінок труб.

Вираження  $\sqrt{E_p / \rho}$  являє собою швидкість поширення пружних деформацій у рідині; для води вона дорівнює 1425 м/с. Отже, швидкість поширення ударної хвилі у воді буде визначатися за формулою:

$$a = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{E_p d}{E_T \delta}}}$$

Із цієї формули видно, що гідравлічний удар більше й, отже, більш небезпечний у трубах малого діаметра, а також у трубах з матеріалу з більш високим модулем пружності. Ймовірність виникнення удару тим більше, чим більше швидкість руху рідини.

Н.Є. Жуковський довів також, що зростання тиску при гідравлічному ударі  $p - p_0$  пропорційно густині рідини  $\rho$ , швидкості поширення ударної хвилі  $a$  та середньої швидкості рідини до удару  $v_0$ :

$$p - p_0 = \Delta p = \rho a v_0.$$

Розділивши це вираження на  $\rho g$ , одержимо:

$$\Delta p / \rho g = a v_0 / g = H.$$

Із цієї формули видно, що при гідравлічному ударі напір у трубопроводі зростає на  $av_0 / g$ .

Для запобігання труб від наслідків гідравлічного удару необхідно вживати наступних заходів:

- 1) не допускати більших швидкостей руху рідин по трубах;
- 2) установлювати запобіжні клапани, що спрацьовують при збільшенні тиску більш за допустиме значення;
- 3) установлювати на трубопроводах повітряні ковпаки;
- 4) використати запірні арматури з повільним закриванням.

Час закриття запірних арматур можна визначати за формулою Н. Е. Жуковського:

$$T_z \geq \frac{2v_0 l}{gH_d},$$

де  $v_0$  - швидкість руху рідини, м/с;

$l$  - довжина трубопроводу, м;

$H_d$  - допустиме підвищення напору в трубопроводі, м.

Явище гідравлічного удару може бути використане в техніці. Так, ще в 1796 р. була винайдена водопідйомна машина за назвою «гідравлічний таран». Принцип дії гідравлічного тарана видний зі схеми на рис.1. 46.

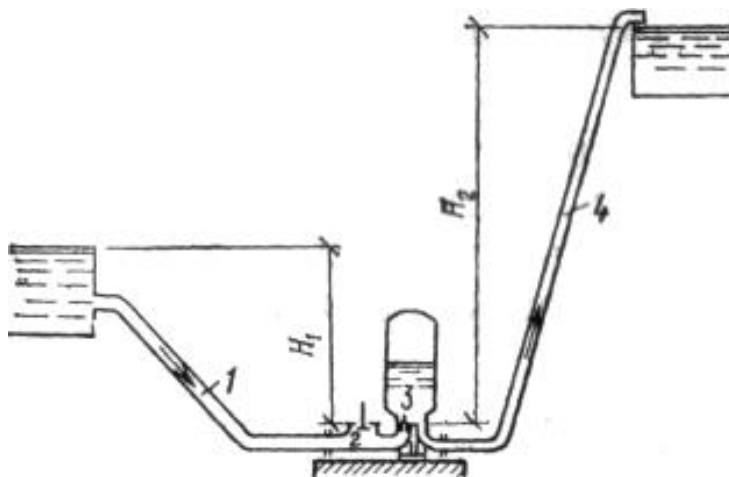


Рисунок 1.46 – Схема гідротаранної установки



При русі води по живильній трубі 1 під напором  $H_1$  відбувається її вилив через зазори клапана 2, який під тиском води захлопується, викликаючи виникнення гідравлічного удару. Хвиля підвищеного тиску відкриває клапан 3, і вода надходить у повітряний ковпак і далі в трубопровід 4. При цьому клапан 2 відкривається, знову починається вилив води, і явище гідравлічного удару повторюється. У такий спосіб вода поступово піднімається по трубопроводу на висоту  $H_2$ . Гідротаранні установки з успіхом застосовують у гірських місцевостях, де для систем водопостачання використовуються ключові води.

Література [1-4].

## **СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Абрамович, Г.Н. Прикладная газовая динамика / Г.Н. Абрамович. – М. : Наука, 1969. – 824 с.
2. Идельчик, И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И.Е. Идельчик. – М. : Машиностроение, 1975. – 559 с.
3. Борисенко, А.И. Гидрогазодинамика (конспект лекций) / А.И. Борисенко. – Харьков : ХАИ, 1975. – 70 с.
4. Гликман, Б.Ф. Математические модели пневмогидравлических систем / Б.Ф. Гликман. – М. : Наука, 1986. – 368 с.