

Лекция № 2

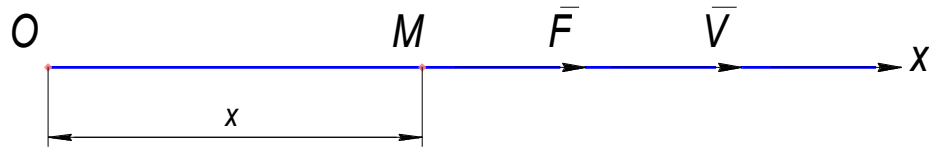
Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки.

1. Сила – величина постоянная.

Тело массой m движется вдоль оси OX под действием постоянной силы $F = \text{const}$.

В начальный момент $V = V_0$; $x = x_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.



Составляем дифференциальное уравнение движения т.М вдоль оси OX . Из уравнений (1.5) используем только одно уравнение:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx}. \quad \text{Итак: } m\ddot{x} = F; \quad \text{т.к. } \ddot{x} = \frac{dV}{dt};$$

$$m \frac{dV}{dt} = F \quad | : m \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{F}{m} \quad | \times (dt) \Rightarrow dV = \frac{F}{m} dt \Rightarrow \text{интегрируем}$$

$$\int dV = \frac{F}{m} \int dt \Rightarrow V = \frac{F}{m} t + C_1;$$

Постоянную интегрирования C_1 определяем из начальных условий.

$$\text{При } t = 0; \quad V = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{F}{m} \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = V_0;$$

тогда $V = \frac{F}{m} \cdot t + V_0$ - закон изменения скорости движения.

$$\text{Т.к. } V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{F}{m} t + V_0 \quad | \times (dt) \Rightarrow dx = \frac{Ft}{m} dt + V_0 dt \Rightarrow \text{интегрируем}$$

$$\int dx = \frac{F}{m} \int t dt + V_0 \int dt \Rightarrow x = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + V_0 t + C_2.$$

Постоянную интегрирования C_2 определяем из начальных условий.

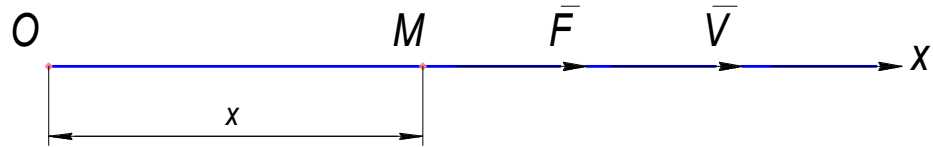
$$\text{При } t = 0; \quad x = x_0, \text{ тогда } x_0 = \frac{F}{m} \cdot \frac{0}{2} + V_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0;$$

$$x = \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + V_0 \cdot t + x_0 \quad \text{или} \quad x = x_0 + V_0 t + \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} \quad - \text{закон движения тела.}$$

2. Сила – функция времени.

Тело массой m движется вдоль оси ОХ под действием силы $F = 2t$.
Начальные условия: $x = x_0$; $V = V_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.



Составляем дифференциальное уравнение вида:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_{kx} \Rightarrow m\ddot{x} = 2t \mid : m \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{m}t - \text{закон изменения скорости вдоль оси}$$

ОХ.

$$\text{Т.к. } \ddot{x} = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{2}{m}t \mid \times (dt) \Rightarrow dV = \frac{2}{m}t dt \Rightarrow \text{интегрируем}$$

$$\Rightarrow \int dV = \frac{2}{m} \int t dt \Rightarrow V = \frac{2}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \text{ или } V = \frac{t^2}{m} + C_1$$

C_1 определяем из начальных условий.

$$\text{При } t = 0; V = V_0; V_0 = \frac{0}{m} + C_1 \Rightarrow C_1 = V_0$$

$$V = \frac{t^2}{m} + V_0 - \text{закон изменения скорости движения.}$$

$$\text{Т.к. } V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{m} + V_0 \mid \times (dt) \Rightarrow dx = \frac{t^2}{m} dt + V_0 dt \Rightarrow \text{интегрируем}$$

$$\Rightarrow \int dx = \frac{1}{m} \int t^2 dt + V_0 \int dt \Rightarrow x = \frac{t^3}{3m} + V_0 t + C_2$$

C_2 определяем из начальных условий.

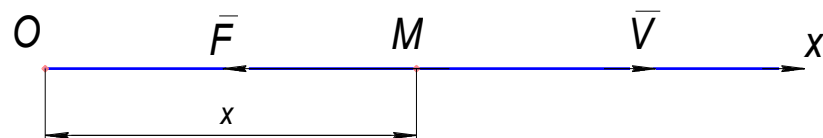
$$\text{При } t = 0; x = x_0; x_0 = \frac{0}{3m} + V_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0$$

$$x = \frac{t^3}{3m} + V_0 \cdot t + x_0 \text{ или } x = x_0 + V_0 \cdot t + \frac{t^3}{3m} - \text{закон движения.}$$

3. Сила – функция скорости.

Тело массой m движется вдоль оси ОХ под действием силы сопротивления $F = 3V$, начальные условия: $x = x_0$; $V = V_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.



Составляем дифференциальное уравнение движения вдоль оси ОХ.

$$m\ddot{x} = -F \Rightarrow m\ddot{x} = -3V \mid : (m) \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{3V}{m};$$

Т.к. $\ddot{x} = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{3V}{m} \mid \times (dt) \Rightarrow dV = -\frac{3V}{m} dt \mid : (V) \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{3}{m} dt \Rightarrow$ интегрируем

$$\Rightarrow \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = \int_0^t -\frac{3}{m} dt \Rightarrow \ln V \Big|_{V_0}^V = -\frac{3}{m} t \Big|_0^t \Rightarrow \ln V - \ln V_0 = -\frac{3}{m} t \Rightarrow \ln \frac{V}{V_0} = -\frac{3}{m} t \Rightarrow$$

$$\frac{V}{V_0} = e^{-\frac{3}{m}t} \Rightarrow V = V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} \text{ - закон изменения скорости движения.}$$

Т.к. $V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} \mid \times (dt) \Rightarrow dx = V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} \cdot dt \Rightarrow$ интегрируем

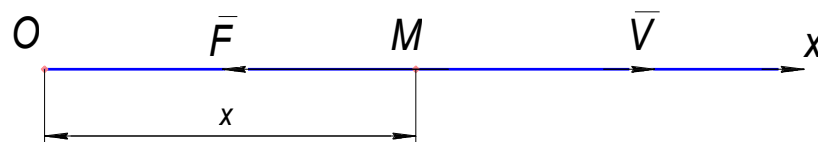
$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} dt \Rightarrow x = -\frac{m}{3} V_0 \cdot e^{-\frac{3}{m}t} \Big|_0^t \Rightarrow x = -\frac{m}{3} V_0 \left(e^{-\frac{3}{m}t} - e^{-\frac{3}{m}0} \right) \Rightarrow$$

$$x = -\frac{m}{3} V_0 \left(e^{-\frac{3}{m}t} - 1 \right) \text{ - закон движения.}$$

4. Сила – функция перемещения.

Тело массой m движется под действием силы сопротивления $F = 2x$ вдоль оси ОХ с начальными условиями $x = x_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Определить: закон изменения скорости движения; закон движения тела.



Составляем уравнение вида:

$$m\ddot{x} = \Sigma F_k x \Rightarrow m\ddot{x} = -F \Rightarrow m\ddot{x} = -2x \mid : (m) \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2}{m}x;$$

Обозначим $\frac{2}{m} = k^2 \Rightarrow \ddot{x} = -k^2x \Rightarrow \ddot{x} + k^2x = 0$ (2.1)

Составим характеристическое уравнение $z^2 + k^2 = 0$; его корни $z_{1,2} = \pm i \cdot k$.

Т.к. корни мнимые, то общее решение уравнения (*) имеет вид:

$$x = C_1 \cdot \sin(kt) + C_2 \cdot \cos(kt) \quad (2.2)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 продифференцируем по времени (2.2):

$$\dot{x} = C_1 \cdot k \cdot \cos(kt) - C_2 \cdot k \cdot \sin(kt); \quad (2.3)$$

и из начальных условий при $t = 0$; $x = x_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$ будем иметь:

$$\begin{cases} x_0 = C_1 \sin(k \cdot 0) + C_2 \cdot \cos(k \cdot 0) \Rightarrow C_2 = x_0 \\ \dot{x}_0 = C_1 \cdot k \cos(k \cdot 0) - C_2 \cdot k \sin(k \cdot 0) \Rightarrow C_1 = \frac{\dot{x}_0}{k}, \text{ тогда} \end{cases}$$

$\dot{x} = \frac{\dot{x}_0}{k} \cdot k \cos(k \cdot t) - x_0 \cdot k \sin(k \cdot t)$ - закон изменения скорости движения.

$x = \frac{\dot{x}_0}{k} \cdot \sin(k \cdot t) + x_0 \cdot \cos(k \cdot t)$ - закон движения,

где $k = \sqrt{\frac{2}{m}}$

По этой теме выполняется ДКР №1 из учебника: А.А. Яблонский «Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике», раздел третий. Динамика. Задание Д-1. «Интегрирование дифференцированных уравнений движения материальной точки, находящихся под действием постоянных сил».

Механическая система. Силы внутренние и внешние.

Механической системой называется совокупность материальных точек, между которыми существуют силы взаимодействия.

Например: любой механизм, кривошипно-шатунный механизм.

Если движение материальных точек механической системы ничем не ограничено, такая механическая система называется **свободной**.

Например: солнечная система, в которой все тела сведены между собой силами взаимного притяжения.

Если движение точек механической системы, чем-либо ограничено, такая система называется **несвободной**.

Например: движение деталей в любом механизме, машине.

При изучении движения системы материальных точек, используют **принцип освобожденности от связей**, т.е. будем заменять действие связей их реакциями и рассматривать систему свободной, которая находится под действием сил, как активных, так и реакций связей.

Силы, которые действуют на систему материальных точек, делят на **внешние и внутренние**.

Внешними называются силы, которые действуют на материальные точки

системы со стороны точек, или тел, которые не входят в данную систему. Обозначаются - \bar{F}_k^e .

Геометрическая сумма **внешних сил** называется **главным вектором внешних сил**.

$$\bar{R}^e = \bar{F}_1^e + \bar{F}_2^e + \dots + \bar{F}_n^e = \sum \bar{F}_k^e;$$

$$\bar{R}^e = \sum \bar{F}_k^e \text{ - главный вектор внешних сил.} \quad (2.4)$$

Главный момент внешних сил относительно центра:

$$\bar{M}_0^e = \bar{m}_0(\bar{F}_1^e) + \bar{m}_0(\bar{F}_2^e) + \dots + \bar{m}_0(\bar{F}_n^e) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e);$$

$$\bar{M}_0^e = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) \text{ - главный момент внешних сил.} \quad (2.5)$$

Внутренними называются силы, с которыми точки или тела данной системы действуют друг на друга. Обозначаются - \bar{F}_k^i .

Геометрическая сумма **внутренних сил** – **главный вектор внутренних сил**.

$$\bar{R}^i = \bar{F}_1^i + \bar{F}_2^i + \dots + \bar{F}_n^i = \sum \bar{F}_k^i;$$

$$\bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i \text{ - главный вектор внутренних сил.} \quad (2.6)$$

Геометрическая сумма моментов **внутренних сил** – **главный момент внутренних сил**.

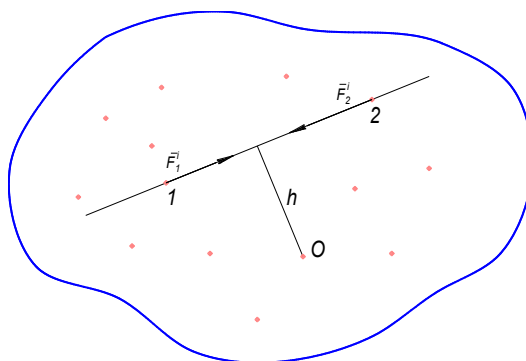
$$\bar{M}_0^i = \bar{m}_0(\bar{F}_1^i) + \bar{m}_0(\bar{F}_2^i) + \dots + \bar{m}_0(\bar{F}_n^i) = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i);$$

$$\bar{M}_0^i = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) \text{ - главный момент внутренних сил.} \quad (2.7)$$

Свойства внутренних сил.

1. Геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равен нулю.

Из системы материальных точек возьмем две точки (1 и 2).



По III закону динамики какие-нибудь две точки действуют друг на друга с силами равными по модулю и противоположными по направлению, сумма которых равна нулю.

$$\text{Т.к. } \bar{F}_1^i = -\bar{F}_2^i \Rightarrow \bar{R}^i = \sum \bar{F}_k^i = 0 \quad (2.8)$$

(2.8) справедливо для какой-нибудь пары точек системы.

2. Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы, относительно некоторого центра или оси равняется нулю.

$$\begin{cases} m_0(\bar{F}_1^i) = -F_1^i \cdot h \\ m_0(\bar{F}_2^i) = F_2^i \cdot h \end{cases} \Rightarrow m_0(\bar{F}_1^i) + m_0(\bar{F}_2^i) = -F_1^i \cdot h + F_2^i \cdot h;$$

$$\text{Т.к. } F_1^i = F_2^i \Rightarrow m_0(\bar{F}_1^i) + m_0(\bar{F}_2^i) = -F_2^i \cdot h + F_2^i \cdot h = 0.$$

$$\text{Итак: } \bar{M}_0^i = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) = 0 \quad (2.9)$$

Формулы (2.8) и (2.9) – закон парности внутренних сил.

II закон динамики для системы материальных точек.

Рассмотрим систему материальных точек, которые находятся под действием внешних и внутренних сил. Для каждой точки запишем II закон динамики.

$$\begin{cases} m_1 \bar{a}_1 = \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i; \\ m_2 \bar{a}_2 = \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i; \\ + \\ \dots\dots\dots \\ m_n \bar{a}_n = \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i. \end{cases}$$

$$m_1 \bar{a}_1 + m_2 \bar{a}_2 + \dots + m_n \bar{a}_n = (\bar{F}_1^e + \bar{F}_2^e + \dots + \bar{F}_n^e) + (\bar{F}_1^i + \bar{F}_2^i + \dots + \bar{F}_n^i);$$

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i - \text{II закон динамики для системы} \quad (2.10)$$

материальных точек.

$$\text{Т. к. } \sum \bar{F}_k^i = 0, \text{ согласно закона парности внутренних сил, следовательно}$$

(2.10) примет вид:

$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum \bar{F}_k^e - \text{II закон динамики} \quad (2.11)$$