

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБІЛЬНО-ДОРОЖНИЙ ІНСТИТУТ

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор АДІ ДВНЗ «ДонНТУ»
М. М. Чальцев
2012р.

Кафедра «Опір матеріалів та будівельна механіка»

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНИХ РОБІТ
І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»
З РОЗДІЛУ «ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ
І ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ
6.070106 «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»
ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ)**

10/44-2012-15

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Навчально-методична комісія
факультету
«Автомобільний транспорт»
Протокол № 3 від 20.11.2012 р.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра «Опір матеріалів та
будівельна механіка»
Протокол № 4 від 14.11.2012 р.

УДК 539.3(071)

Методичні вказівки до виконання розрахунково-проектувальних робіт і практичних занять з дисципліни «Теоретична механіка» з розділу «Принцип можливих переміщень і загальне рівняння динаміки» (для студентів напряму підготовки 6.070106 «Автомобільний транспорт» денної форми навчання) [Електронний ресурс] / укладачі: М. М. Чальцев, Т. І. Алтухова, І. І. Семененко. – Електрон. дані. – Горлівка: ДВНЗ «ДонНТУ» АДІ, 2012. – 1 електрон. опт. диск (CD-R); 12 см. – Систем. вимоги: Pentium; 32 MB RAM; WINDOWS98/2000/NT/XP; MSWord 97–2000. – Назва з титул. екрану.

У методичних вказівках наведено варіанти завдань і методичні рекомендації щодо виконання контрольної роботи, числові приклади; розглянуто прийоми та техніку виконання розрахунків. Методичні вказівки призначено для студентів автотранспортних напрямів підготовки.

Укладачі:

Чальцев М. М., к.т.н., проф.
Алтухова Т. І.
Семененко І. І.

Відповідальний за випуск:

Чальцев М. М., к.т.н., проф.

Рецензент:

Кізілов В. В., к.т.н., доц.

© Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут, 2012

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1 Принцип можливих переміщень.....	5
1.1 Короткі теоретичні відомості.....	5
1.2 Послідовність розв'язання задач.....	7
1.3 Приклад № 1	7
1.4 Приклад № 2	9
2 Загальне рівняння динаміки	11
2.1 Короткі теоретичні відомості.....	11
2.2 Порядок розрахунку задач.....	12
2.3 Приклад розв'язання задачі № 1	13
2.4 Приклад розв'язання задачі № 2	16
Додаток А Вихідні дані для розрахунку.....	21

ВСТУП

Дані методичні вказівки створено з метою ознайомлення студентів механічних спеціальностей із послідовністю та порядком виконання розрахунково-графічних робіт із динаміки матеріальної точки.

Методичні вказівки включають в себе відомості з розділу «Динаміка матеріальної точки» курсу теоретичної механіки. Особлива увага приділяється розгляду питання складання розрахункових схем механічних об'єктів і послідовності розв'язання задач із динаміки матеріальної точки.

У методичних вказівках наведено приклади виконання розрахунково-графічних робіт.

1 ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

1.1 Короткі теоретичні відомості

Дійсними переміщеннями називаються елементарні переміщення точок системи, які не суперечать зв'язкам і відбуваються під дією заданих сил. Ці переміщення відповідають дійсному закону руху механічної системи. Позначаються дійсні переміщення $d\vec{r}$ (при векторному способі задання руху), dx , dy , dz (при координатному способі задання руху).

Можливими переміщеннями називають елементарні уявні переміщення точок системи, які не суперечать зв'язкам і відбуваються у фіксований момент часу. Можливі переміщення не залежать від діючих сил, закону руху системи та є сукупністю одночасних уявних переміщень точок системи, що сумісні із зв'язками. Позначаються можливі переміщення $\delta\vec{r}$ (при векторному способі задання руху) і δx , δy , δz (при координатному способі задання руху)¹⁾. Варіацією функції δy називається приріст функції, що спричинений зміною функціональної залежності, при фіксованому значенні аргументу.

Для стаціонарних зв'язків дійсне переміщення точки є одним із множини її можливих переміщень. Для нестаціонарних зв'язків дійсне переміщення точки не буде окремим випадком можливих переміщень.

Можливими переміщеннями матеріальної точки, рух якої обмежується утримувальним зв'язком, наприклад деякою поверхнею, будуть переміщення в дотичній площині до даної поверхні (рис. 1.1). Якщо дана поверхня не є утримувальним зв'язком, то можливі переміщення напрямлені в частину простору, яка не заповнена зв'язком.

Числом степенів вільності матеріальної системи називають кількість незалежних можливих переміщень, які можна надати її точкам у фіксований момент часу. Число степенів вільності матеріальної точки, яка вільно рухається в просторі, дорівнює трьом, по поверхні – двом, по кривій – одному. У загальному випадку руху вільного твердого тіла кількість степенів вільності – шість.

Ідеальними називають зв'язки, алгебраїчна сума елементарних робіт реакцій котрих на будь-яких можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю (для утримувальних зв'язків):

$$\sum_{i=1}^n \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0, \quad (1.1)$$

¹⁾ Значок δy тут позначає варіацію функції y .

де \bar{R}_i – відповідні реакції зв'язків, що накладені на точки системи ($i = 1, 2, \dots, n$);

$\delta \bar{r}_i$ – можливі переміщення точок системи.

Прикладами ідеальних зв'язків є ідеально гладенька площина та поверхня, абсолютно жорсткий стержень, абсолютно тверде тіло тощо. Негладка поверхня не належить до ідеальних зв'язків внаслідок того, що робота дотичної складової її реакції (сили тертя ковзання) на можливому переміщенні $\delta \bar{r}$ (рис. 1.1) не дорівнює нулю.

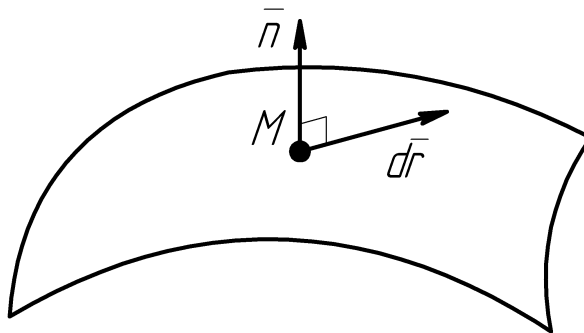


Рисунок 1.1 – Негладка поверхня

Найзагальніший принцип аналітичної статyki – принцип можливих переміщень – полягає в наступному: для рівноваги системи матеріальних точок, що підпорядковуються утримувальним ідеальним стаціонарним зв'язкам, необхідно й достатньо, щоб сума елементарних робіт активних сил дорівнювала нулю на будь-якому можливому переміщенні системи з положення рівноваги, що розглядається, за умови, що в початковий момент система нерухома:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \quad (1.2)$$

де \bar{F}_i – активні сили, що прикладені до точок системи.

Вираз (1.2) називають загальним рівнянням статyki. Враховуючи, що в проєкціях на осі декартової системи координат Oxy можна записати $\bar{F}_i = F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$ та $\delta \bar{r}_i = \delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$, загальне рівняння статyki можна подати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} \cdot \delta x_i + F_{yi} \cdot \delta y_i + F_{zi} \cdot \delta z_i = 0. \quad (1.3)$$

Принцип можливих переміщень дає змогу розв'язувати задачі на дослідження рівноваги твердого тіла та системи твердих тіл, визначати залежності між величинами активних сил у стані рівноваги. Він дозволяє одержати найменш можливу кількість рівнянь рівноваги довільної системи, яка дорівнює числу її степенів вільності.

У випадку неідеальних зв'язків, наприклад шорсткої поверхні, до активних сил треба умовно віднести сили, які вносять неідеальність (сили тертя) і, відповідно, прирівняти нулю суму робіт активних сил і сил тертя на будь-яких можливих переміщеннях точок системи.

Принцип можливих переміщень дає змогу визначати невідомі реакції ідеальних зв'язків. Для цього треба застосувати аксіому про звільнення від зв'язків і замінити дію зв'язка шуканою реакцією. При складанні рівняння рівноваги до активних сил слід віднести шукану реакцію зв'язку.

1.2 Послідовність розв'язання задач

Раціональним є наступний порядок розв'язання задач із використанням принципу можливих переміщень:

- 1) виділити систему матеріальних точок або тіл, рівновага яких досліджується;
- 2) проаналізувати та графічно зобразити активні сили, які діють на систему;
- 3) дослідити характер зв'язків і у випадку неідеальних зв'язків, визначити їх реакції та умовно віднести до активних сил;
- 4) надати системі можливі переміщення;
- 5) скласти загальне рівняння статички тобто записати алгебраїчну суму елементарних робіт сил, що розглядаються на можливих переміщеннях їх точок прикладання, та прирівняти її нулю;
- 6) визначити число степенів вільності системи та встановити при необхідності залежність між можливими переміщеннями¹⁾;
- 7) у загальному рівнянні статички виключити залежні можливі переміщення і, враховуючи, що незалежні можливі переміщення одночасно не дорівнюють нулю, отримати систему рівнянь з яких визначаються шукані величини.

1.3 Приклад № 1

Для механічної системи (рис. 1.2), що знаходиться в рівновазі, визначити деформацію пружини h .

¹⁾ Кількість незалежних можливих переміщень дорівнюватиме числу степенів вільності системи

Дано: $P = 100$ Н, $c = 20$ Н/см, $r_1 = r_3 = 10$ см, $r_2 = 20$ см, $OA = 50$ см.

До розв'язання задачі застосовуємо принцип можливих переміщень: при рівновазі механічної системи сума робіт активних сил на можливих переміщеннях точок їх прикладання дорівнює нулю: $\sum \delta A_k = 0$. Або у розгорнутому вигляді:

$$\sum P_k \cdot \delta s_k \cdot \cos(\bar{P}_k \wedge \delta \bar{s}_k) = 0.$$

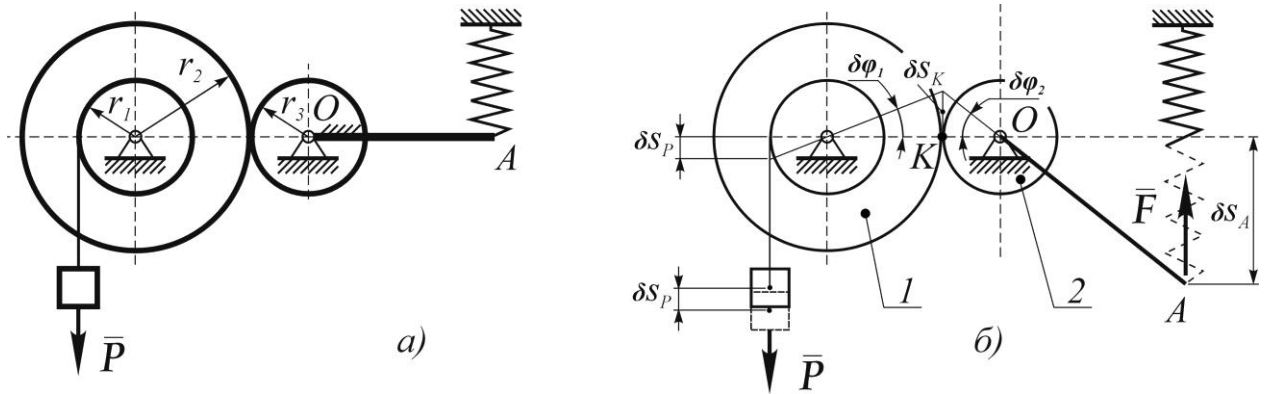


Рисунок 1.2 – задана схема

Можливим переміщенням точки прикладання сили \bar{P} є поступальне переміщення $\delta \bar{s}_P$ у напрямку сили \bar{P} . Можливим переміщенням точки A кінця пружини є поступальне переміщення $\delta \bar{s}_A$ вниз, що викликає розтягання пружини. При цьому в пружині виникає сила пружності $F = c \cdot h$, що спрямована в протилежному напрямку. Силу \bar{F} переводимо умовно в розряд активних. Отже, рівняння можливих робіт має вигляд:

$$\begin{aligned} P \cdot \delta s_P - F \cdot \delta s_A &= 0, \\ P \cdot \delta s_P &= F \cdot \delta s_A. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Встановимо зв'язок між можливими переміщеннями δs_P та δs_A .

При переміщенні вантажу \bar{P} на $\delta \bar{s}_P$ колесо 1 повертається на кут $\delta \varphi_1$, а колесо 2 – на кут $\delta \varphi_2$, причому $\delta \varphi_1 = \frac{\delta s_P}{r_1}$. Оскільки проковзування коліс неможливе, переміщення т. K їх зчеплення спільне, тобто $\delta \varphi_1 \cdot r_2 = \delta \varphi_2 \cdot r_3$, звідки знаходимо $\delta \varphi_2 = \delta \varphi_1 \cdot \frac{r_2}{r_3} = \frac{\delta s_P}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_3}$. Так як ричаг OA жорстко з'єднаний із колесом 2, він повертається на той самий кут $\delta \varphi_2$, а точка A

пересувається вертикально вниз на величину $\delta s_A = \delta \varphi_2 \cdot OA = \frac{\delta s_P}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_3} \cdot OA$.

Отже, $\delta s_A = \frac{\delta s_P}{10} \cdot \frac{20}{10} \cdot 50 = 10 \cdot \delta s_P$.

Повертаючись до рівняння (1.4), куди підставляємо $\delta s_A = 10 \delta s_P$ знаходимо:

$$P \cdot \delta s_P = F \cdot 10 \delta s_P.$$

Після скорочення на δs_P отримуємо:

$$P = 10 \cdot F = 10ch$$

та визначаємо деформацію пружини

$$h = \frac{P}{10 \cdot c} = \frac{P}{10 \cdot 200} = 0,5 \text{ (см)}.$$

1.4 Приклад № 2

Для механічної системи (рис. 1.3), що знаходиться в рівновазі, визначити величину вантажу Q .

Дано: $P = 120 \text{ Н}$, $M = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $r_1 = 10 \text{ см}$, $r_2 = 20 \text{ см}$, $OA = 30 \text{ см}$, $OB = 20 \text{ см}$.

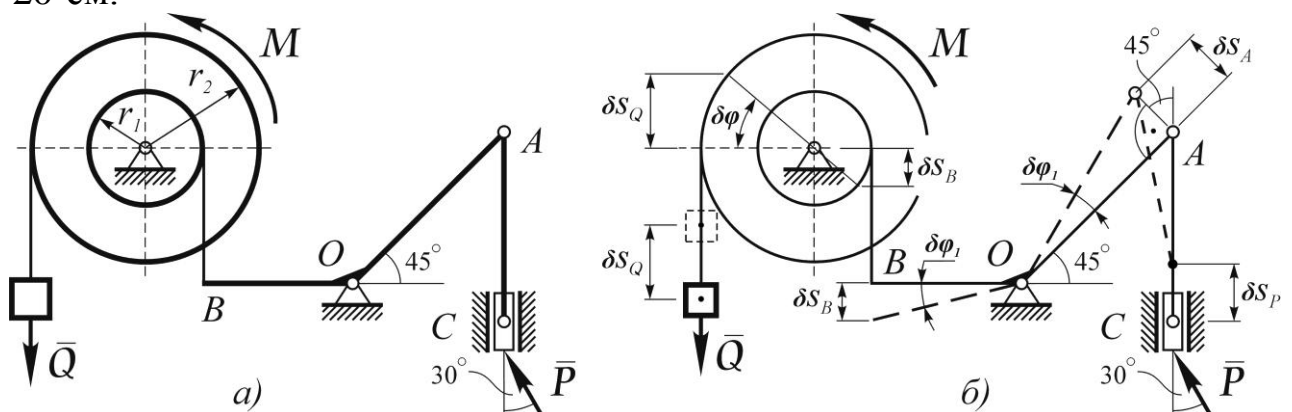


Рисунок 1.3 – Задана та розрахункова схеми

Можливим переміщенням точки C прикладання сили \bar{P} є поступальне переміщення $\delta \bar{s}_P$ у напрямних вздовж стержня AC. Можливим переміщенням вантажу \bar{Q} є поступальне переміщення $\delta \bar{s}_Q$. Можливим переміщенням колеса є поворот на кут $\delta \varphi$. Отже, рівняння можливих робіт має вигляд:

$$P \cdot \delta s_P \cdot \cos 30^\circ - Q \cdot \delta s_Q - M \cdot \delta \varphi = 0. \quad (1.5)$$

Перед добутком $M \cdot \delta \varphi$ стоїть знак мінус, оскільки напрямок повороту колеса та напрямок дії моменту протилежні.

Встановимо зв'язок між можливими переміщеннями δs_P , δs_Q та $\delta \varphi$, та виразимо їх через будь-яке одне, наприклад δs_Q .

При переміщенні вантажу \bar{Q} на $\delta \bar{s}_Q$ колесо повертається на кут $\delta \varphi$, причому $\delta \varphi = \frac{\delta s_Q}{r_2}$. Тоді переміщення δs_B може бути обчислено як

$\delta s_B = \delta \varphi \cdot r_1 = \frac{\delta s_Q}{r_2} \cdot r_1$. При цьому важіль BOA повертається на кут

$\delta \varphi_1 = \frac{\delta s_B}{OB}$, а точка A отримує переміщення:

$$\delta s_A = \delta \varphi_1 \cdot OA = \frac{\delta s_B}{OB} \cdot OA = \delta s_Q \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{OA}{OB}.$$

Оскільки проекції можливих переміщень кінців відрізка на напрямок цього відрізка рівні, то

$$\delta s_A \cdot \cos 45^\circ = \delta s_P,$$

звідки

$$\delta s_P = \delta s_Q \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{OA}{OB} \cdot \cos 45^\circ.$$

Рівняння (1.5) набуває вигляду:

$$P \cdot \delta s_Q \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{OA}{OB} \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - Q \cdot \delta s_Q - M \cdot \frac{\delta s_Q}{r_2} = 0,$$

звідки після скорочення на δs_Q знаходимо:

$$Q = P \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{OA}{OB} \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \frac{M}{r_2} = 120 \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{30}{20} \cdot 0,707 \cdot 0,866 - \frac{10}{0,2} = 5,1(\text{H}).$$

Відповідь: $Q = 5,1(\text{H})$.

Equation Section (Next)

2 ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

2.1 Короткі теоретичні відомості

Об'єднуючи принцип Д'Аламбера та принцип можливих переміщень, дістанемо загальне рівняння динаміки: під час руху системи матеріальних точок, що підпорядковуються утримувальним ідеальним зв'язкам, сума елементарних робіт активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнює нулю, тобто:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \bar{\Phi}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0, \quad (2.1)$$

де \bar{F}_i – рівнодіюча активних сил, що прикладені до i -ї точки системи ($i = 1, 2, \dots, n$);

$\bar{\Phi}_i = m_i \bar{a}_i$ – сила інерції i -ї точки;

m_i – маса i -ї точки;

\bar{a}_i – прискорення i -ї точки;

$\delta \bar{r}$ – можливе переміщення i -ї точки.

Рівняння (2.1) називають загальним рівнянням динаміки. Векторному рівнянню (2.1) відповідає рівняння в скалярній формі:

$$\sum_{i=1}^n \left[F_{ix} - m_i \ddot{x}_i \delta x_i + F_{iy} - m_i \ddot{y}_i \delta y_i + F_{iz} - m_i \ddot{z}_i \delta z_i \right] = 0, \quad (2.2)$$

де F_{ix} , F_{iy} , F_{iz} – проекції активних сил на осі декартової системи координат $Oxyz$;

\ddot{x}_i , \ddot{y}_i , \ddot{z}_i – проекції прискорення i -ї точки системи;

δx_i , δy_i , δz_i – проекції можливих переміщень точки на обрані осі координат.

Загальне рівняння динаміки для більшості задач дає змогу визначити закон руху системи, не визначаючи реакцій зв'язків. При необхідності останні можна визначити після встановлення закону руху системи, застосовуючи, наприклад, принцип Д'Аламбера.

2.2 Порядок розрахунку задач

Методика розв'язання задач із використанням загального рівняння динаміки може бути такою:

1) визначаємо об'єкт дослідження, тобто тіло або систему тіл, до аналізу руху яких застосовується загальне рівняння динаміки;

2) визначаємо число степенів вільності системи. Це можна зробити шляхом накладання додаткових зв'язків (число степенів вільності дорівнює числу додатково накладених зв'язків, які зупиняють механічну систему) або математично, складаючи рівняння зв'язків;

3) визначаємо активні сили, які діють на систему, і зображуємо їх графічно;

4) проводимо аналіз зв'язків. Реакції ідеальних зв'язків не входять у загальне рівняння динаміки. Якщо серед зв'язків, які обмежують рух системи, є неідеальні, то їх реакції (наприклад, сила тертя) відносять до активних сил. Графічно сили тертя зображуються після того, як зроблено припущення про напрямок руху системи;

5) робимо припущення про напрямок руху й прискорень точок системи та, виходячи з кінематичних міркувань, знаходимо зв'язок між прискореннями;

6) відповідно до вибраного напрямку прискорень зображуємо сили інерції, умовно прикладаючи їх до точок системи. Для твердих тіл систему сил інерції зводимо до головного вектора системи елементарних сил інерції та пари сил, момент яких дорівнює головному моменту сил інерції елементів тіла відносно вибраного центра зведень;

7) у поточний момент часу умовно зупиняємо систему та надаємо її точкам можливих переміщень;

8) складаємо загальне рівняння динаміки як суму елементарних робіт активних сил, головних векторів сил інерції та їх моментів на відповідних можливих переміщеннях;

9) встановлюємо зв'язок між можливими переміщеннями точок системи. Це можна зробити виходячи з кінематичних міркувань або аналітично, використовуючи рівняння зв'язків. Після вибору незалежних можливих переміщень із загального рівняння динаміки виключаємо залежні можливі переміщення, одночасно вибираємо незалежні прискорення точок системи та виключаємо залежні;

10) у загальному рівнянні динаміки збираємо коефіцієнти при незалежних можливих переміщеннях і прирівнюємо ці коефіцієнти до нуля. Отже, приходимо до диференціальних рівнянь руху механічної системи, яка розглядається;

11) з одержаних рівнянь знаходимо невідомі величини. Задача визначення закону руху системи зводиться до інтегрування

диференціальних рівнянь руху. Якщо визначенню підлягають прискорення точок системи, то задача розв'язується алгебраїчно.

2.3 Приклад розв'язання задачі № 1

Умова задачі

Для заданої механічної системи треба визначити прискорення тіла 1 при наступних вихідних даних: $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, $f_{тер} = 0,1$.

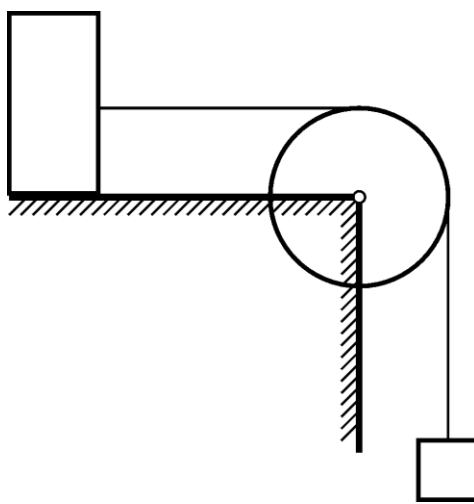


Рисунок 2.1 – Задана схема механізму

Розв'язання

Об'єкт дослідження даної задачі – система трьох тіл. Накладення одного додаткового зв'язку зупиняє дану систему, тобто вона має один ступінь вільності.

Умовно зупинимо в поточний момент часу та надамо їй із цього положення можливе переміщення.

Розглянемо кожне тіло окремо (рис. 2.2)

Тіло 1 здійснює поступовий рух. Якщо можливе переміщення $\delta \bar{S}_1$ вантажу 1 спрямоване вертикально донизу, тоді такий же напрямок мають \bar{v}_1 , \bar{a}_1 .

На тіло діють такі сили:

- власна вага: $P = m_1 g = 3mg$;
- сила інерції: $\Phi_1 = m_1 a_1 = 3ma_1$.

Вектор сил інерції $\bar{\Phi}_1$ показуємо в центрі мас тіла 1 з напрямком, що протилежний до прискорення \bar{a}_1 .

Тіло 2 здійснює обертальний рух.

З умови не розтяжності мотузки випливає, що $\bar{v}_A = \bar{v}_1$ і відповідно

можливе переміщення та прискорення також однакові:

$$\delta \bar{s}_A = \delta \bar{s}_1, \quad \bar{a}_A = \bar{a}_1.$$

Тіло 2 обертається навколо осі O_2 , тоді:

- кутова швидкість тіла 2: $\omega_2 = \frac{v_A}{R_2} = \frac{v_1}{R_2}$;
- кутове прискорення тіла 2: $\varepsilon_2 = \frac{a_A}{R_2} = \frac{a_1}{R_2}$;
- можливе кутове переміщення тіла 2: $\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_A}{R_2} = \frac{\delta s_1}{R_2}$.

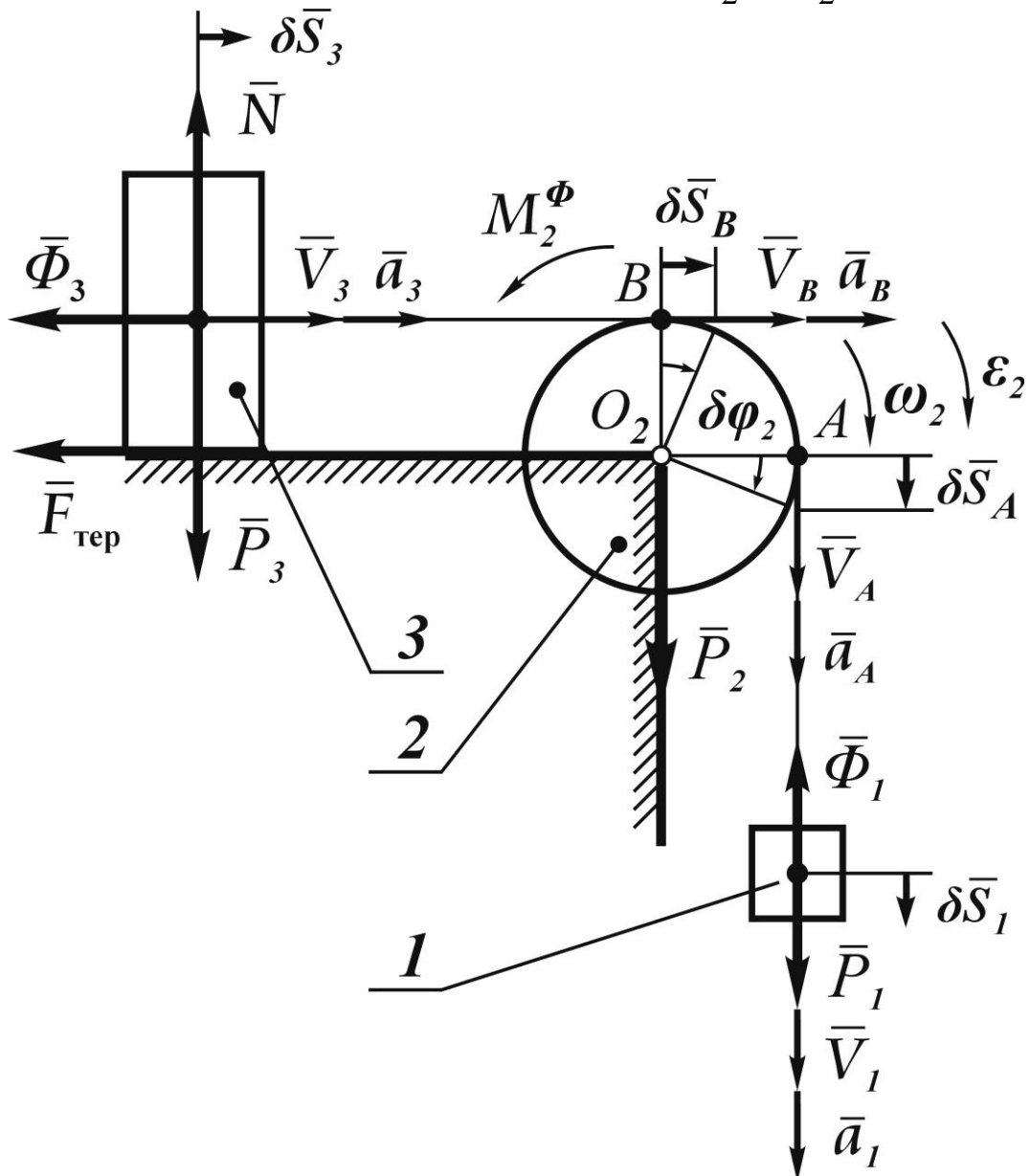


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема механізму

Точка B тіла 2 лежить на колі радіусом R_2 і має такі ж кутову швидкість та кутове прискорення, що і точка A :

$$v_B = \omega_2 \cdot R_2 = \frac{v_1 \cdot R_2}{R_2} = v_1;$$

$$a_B = \varepsilon_2 \cdot R_2 = \frac{a_1 \cdot R_2}{R_2} = a_1;$$

$$\delta s_B = \delta \varphi_2 \cdot R_2 = \frac{\delta s_1 \cdot R_2}{R_2} = \delta s_1.$$

На тіло 2 діють такі сили:

- власна вага: $P_2 = m_2 g = 2mg$;
- сила інерції: $\Phi_2 = m_2 a_2 = 0$ (тому що центр тіла 2 залишається нерухомим, тобто $a_2 = 0$);
- момент сил інерції: $M_2^\Phi = J_{z_2} \cdot \varepsilon_2$,

де J_{z_2} – момент інерції тіла 2 відносно осі обертання.

Оскільки вісь обертання співпадає з центральною віссю тіла 2, то:

$$J_{z_2} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2 = \frac{2mR_2^2}{2} = mR_2^2;$$

$$M_2^\Phi = mR_2^2 \cdot \frac{a_1}{R_2}.$$

Направимо момент сил інерції у бік, що протилежний кутовому прискоренню тіла 2 ε_2 .

Тіло 3 здійснює поступальний рух.

З умови нерозривності мотузки випливає, що $\bar{v}_3 = \bar{v}_B = \bar{v}_1$, $\bar{a}_3 = \bar{a}_B = \bar{a}_1$, $\delta \bar{S}_3 = \delta \bar{S}_B = \delta \bar{S}_1$.

На тіло 3 діють наступні сили:

- власна вага: $P_3 = m_3 g = mg$;
- сила тертя: $F_{тер} = f \cdot N$,

де $N = P_3 = mg$;

$F_{тер} = fmg$;

- сила інерції: $\Phi_3 = m_3 a_3 = ma_1$.

Вектор сили інерції $\bar{\Phi}_3$ має напрямок, що протилежний вектору прискорення \bar{a}_3 .

Складаємо загальне рівняння динаміки.

$$\sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^\Phi = 0.$$

Запишемо алгебраїчну суму елементарних робіт активних сил та сил інерції для всієї системи:

$$\begin{aligned}\sum \delta A_k^e &= \delta A^e \bar{P}_1 + \delta A^e \bar{P}_2 + \delta A^e \bar{P}_3 + \delta A^e \bar{F}_{мер} = \\ &= P_1 \cdot \delta s_1 + P_2 \cdot 0 + P_3 \cdot 0 - F_{мер} \cdot \delta s_3 = 3mg \cdot \delta s_1 - fmg \cdot \delta s_1 = \\ &= mg \cdot \delta s_1 = 3 - f \cdot mg \cdot \delta s_1 = 3 - 0,1 \cdot mg \cdot \delta s_1 = 2,9mg \cdot \delta s_1; \\ \sum \delta A_k^\Phi &= \delta A^\Phi \bar{\Phi}_1 + \delta A^\Phi M_2^\Phi + \delta A^\Phi \bar{\Phi}_3 = \\ &= -\Phi_1 \cdot \delta s_1 - M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 - \Phi_3 \cdot \delta s_3 = -3ma_1 \cdot \delta s_1 - mR_2 a_1 \cdot \frac{\delta s_1}{R_2} - ma_1 \cdot \delta s_1 = \\ &= -3 - 1 - 1 \cdot ma_1 \cdot \delta s_1 = -5ma_1 \cdot \delta s_1.\end{aligned}$$

Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}2,9mg \cdot \delta s_1 - 5ma_1 \cdot \delta s_1 &= 0; \\ 2,9g - 5a_1 \cdot m \cdot \delta s_1 &= 0.\end{aligned}$$

Можливе переміщення $\delta \bar{s}_1$ є довільним, тобто $\delta \bar{s}_1 \neq 0$, тоді нулю дорівнює вираз у дужках:

$$\begin{aligned}2,9g - 5a_1 &= 0; \\ a_1 &= \frac{2,9g}{5} = \frac{2,9 \cdot 9,81}{5} = \frac{28,449}{5} = 5,69 \text{ м/с}^2.\end{aligned}$$

Відповідь: $a_1 = 5,69 \text{ м/с}^2$.

2.4 Приклад розв'язання задачі № 2

Умова задачі

Для заданої механічної системи треба визначити прискорення тіла 1 при наступних вихідних даних: $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $m_3 = 2m$, $\frac{R_2}{r_2} = 2,2$, $i_{2x} = 1,6r_2$.

Розв'язання

Механізм складається з трьох тіл. Система має один ступень вільності. Тіло 1 здійснює поступальний рух (рис. 2.4).

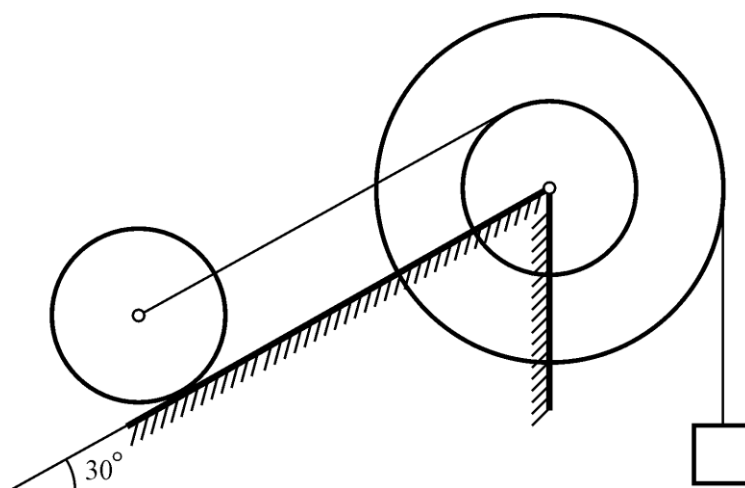


Рисунок 2.3 – Задана схема механізму

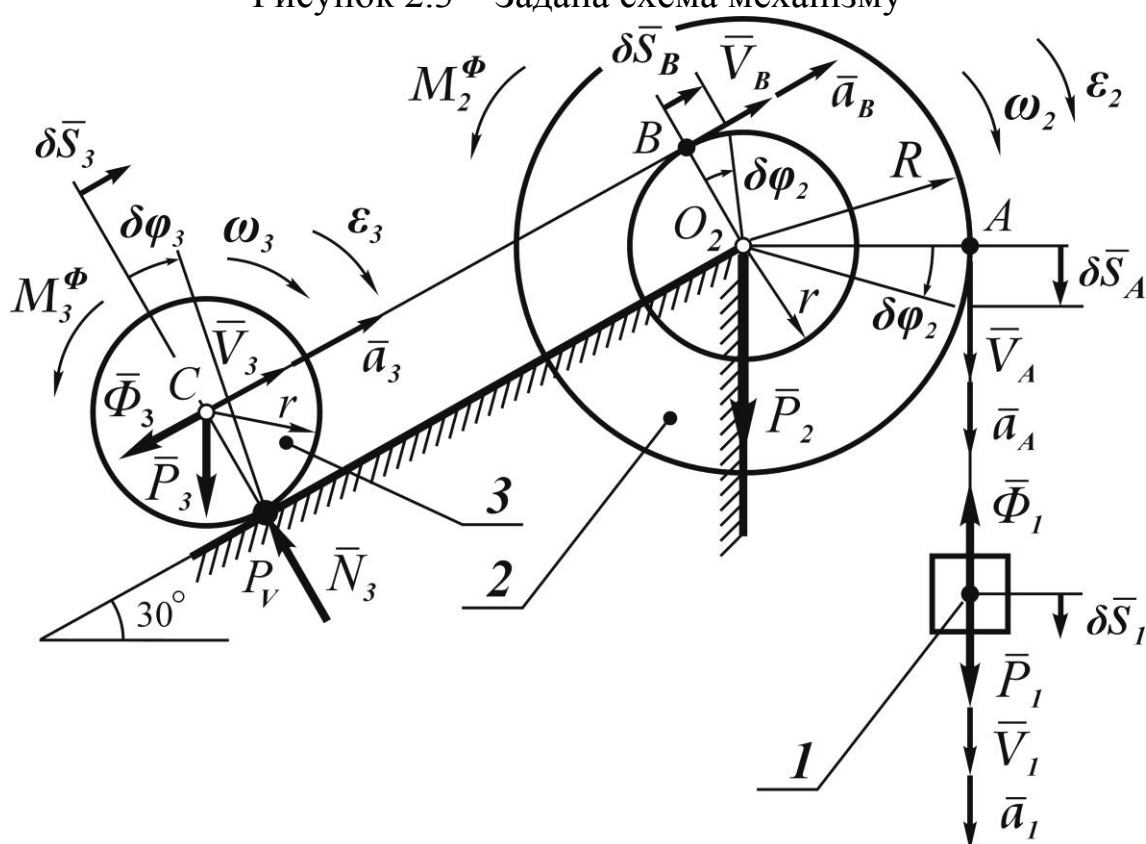


Рисунок 2.4 – Розрахункова схема

Дано тілу можливе переміщення $\delta \bar{s}_1$. Швидкість тіла \bar{v}_1 , прискорення – \bar{a}_1 .

На тіло діють сили:

- власна вага: $P_1 = m_1 g = 3mg$;
- сила інерції $\Phi_1 = m_1 a_1 = 3ma_1$.

Тіло 2 здійснює обертальний рух навколо осі O_2 .

Точка A , яка належить мотузці й тілу 2, здійснює поступальний рух, тоді:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_1, \bar{a}_A = \bar{a}_1, \delta \bar{s}_A = \delta \bar{s}_1.$$

Якщо точка A обертається навколо осі O_2 , будемо мати:

- кутову швидкість: $\omega_2 = \frac{v_A}{R_2} = \frac{v_1}{R_2} = \frac{v_1}{2,2r_2}$;
- кутове прискорення: $\varepsilon_2 = \frac{a_A}{R_2} = \frac{a_1}{R_2} = \frac{a_1}{2,2r_2}$;
- можливе кутове переміщення: $\delta\varphi_2 = \frac{\delta s_A}{R_2} = \frac{\delta s_1}{R_2} = \frac{\delta s_1}{2,2r_2}$.

Для точки B , що належить тілу 2, визначаємо:

$$v_B = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{v_1}{2,2r_2} \cdot r_2 = \frac{v_1}{2,2};$$

$$a_B = \varepsilon_2 \cdot r_2 = \frac{a_1}{2,2r_2} \cdot r_2 = \frac{a_1}{2,2};$$

$$\delta\varphi_B = \delta\varphi_2 \cdot r_2 = \frac{\delta s_1}{2,2r_2} \cdot r_2 = \frac{\delta s_1}{2,2}.$$

На тіло 2 діють наступні сили:

- власна вага: $P_2 = m_2 g = mg$;
- сила інерції: $\Phi_2 = m_2 a_2 = 0$ (тому що центр тіла 2 залишиться нерухомим, тобто $a_2 = 0$);
- момент сил інерції: $M_2^\Phi = J_{z_2} \cdot \varepsilon_2$,

де J_{z_2} – момент інерції тіла 2 відносно осі обертання.

Оскільки вісь обертання співпадає з центральною віссю тіла 2, то:

$$J_{z_2} = m_2 i_{x_2}^2 = m \cdot 1,6r_2^2 = 2,56mr_2^2;$$

$$M_2^\Phi = 2,56mr_2^2 \cdot \frac{a_1}{2,2r_2} = 1,16mr_2.$$

Тіло 3 здійснює плоскопаралельний рух.

Якщо точки B і C здійснюють поступовий рух, то:

$$v_3 = v_B = \frac{v_1}{2,2};$$

$$a_3 = a_B = \frac{a_1}{2,2};$$

$$\delta s_3 = \delta s_B = \frac{\delta s_1}{2,2};$$

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta s_3}{r_3} = \frac{\delta s_1}{2,2r_3}.$$

На тіло 3 діють наступні сили:

- власна вага: $P_3 = m_3 g = 2mg$;
- сила інерції: $\Phi_3 = m_3 a_3 = 2m \cdot \frac{a_1}{2,2} = 0,91ma$.

Вектор сили інерції $\bar{\Phi}_3$ має напрямок у бік протилежний вектору \bar{a}_3 .

Якщо тіло 3 обертається навколо миттєвого центру швидкостей P_V , тоді:

$$\omega_3 = \frac{v_3}{r_3} = \frac{v_1}{2,2r_3};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{r_3} = \frac{a_1}{2,2r_3};$$

$$\delta \varphi_3 = \frac{\delta s_3}{r_3} = \frac{\delta s_1}{2,2r_3}.$$

Визначимо момент інерції для диска навколо осі обертання:

$$M_3^\Phi = J_{z_3} \cdot \varepsilon_3;$$

$$J_{z_3} = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{2mr_3^2}{2} = mr_3^2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_3}{r_3} = \frac{a_1}{2,2r_3};$$

$$M_3^\Phi = mr_3^2 \cdot \frac{a_1}{2,2r_3} = \frac{ma_1 r_3}{2,2} = 0,45ma_1 r_3.$$

Напрямок M_3^Φ – у бік протилежний ε_3 .

Складаємо загальне рівняння динаміки в такій формі:

$$\begin{aligned}
& \sum \delta A_k^e + \sum \delta A_k^\Phi = 0; \\
& \sum \delta A_k^e = \delta A^e \bar{P}_1 + \delta A^e \bar{P}_2 + \delta A^e \bar{P}_3 = \\
& = P_1 \cdot \delta s_1 + P_2 \cdot 0 - P_3 \cdot \sin 30^\circ \cdot \delta s_3 = 3mg \cdot \delta s_1 - 2mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta s_1}{2,2} = \\
& = \left(3 - \frac{1}{2,2} \right) \cdot mg \cdot \delta s_1 = 3 - 0,45 \cdot mg \cdot \delta s_1 = 2,55mg \cdot \delta s_1; \\
& \sum \delta A_k^\Phi = \delta A^\Phi \bar{\Phi}_1 + \delta A^\Phi M_2^\Phi + \delta A^\Phi \bar{\Phi}_3 + \delta A^\Phi M_3^\Phi = \\
& = -\Phi_1 \cdot \delta s_1 - M_2^\Phi \cdot \delta \varphi_2 - \Phi_3 \cdot \delta s_3 - M_3^\Phi \cdot \delta \varphi_3 = \\
& = -3ma_1 \cdot \delta s_1 - 1,6mr_2a_1 \cdot \frac{\delta s_1}{2,2r_2} - 0,91ma_1 \cdot \frac{\delta s_1}{2,2} - 0,45mr_3a_1 \cdot \frac{\delta s_1}{2,2r_3} = \\
& = \left(-3 - \frac{1,6}{2,2} - \frac{0,91}{2,2} - \frac{0,45}{2,2} \right) \cdot ma_1 \cdot \delta s_1 = -3 - 0,53 - 0,41 - 0,20 \cdot ma_1 \cdot \delta s_1 = \\
& = -4,14ma_1 \cdot \delta s_1.
\end{aligned}$$

Підставимо $\sum \delta A_k^e$ і $\sum \delta A_k^\Phi$ у загальне рівняння динаміки:

$$\begin{aligned}
2,55mg \cdot \delta s_1 - 4,14ma_1 \cdot \delta s_1 &= 0; \\
2,55g - 4,14a_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Оскільки $\delta s_1 \neq 0$, тоді:

$$\begin{aligned}
2,55g - 4,14a_1 &= 0; \\
a_1 &= \frac{2,55g}{4,14} = \frac{2,55 \cdot 9,81}{4,14} = \frac{25,016}{4,14} = 6,04 \text{ м/с}^2.
\end{aligned}$$

Відповідь: $a_1 = 6,04 \text{ м/с}^2$.

ДОДАТОК А

ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ РОЗРАХУНКУ

Таблиця А.1 – Вихідні дані для розрахунку задачі № 1

Варіант завдання	Лінійні розміри, см		Відношення радіусів	Сили, Н		Момент пари, Н·м	Коефіцієнт жорсткості пружини, Н/см	Деформація пружини, см	Величини, що необхідно визначити
	OA	r_1	$\frac{r_1}{r_2}$	Q	P	M	c	Δ	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Схема 1									
01	20	—	—	—	—	10	—	—	P
11	25	—	—	—	—	20	—	—	P
21	30	—	—	—	—	30	—	—	P
31	35	—	—	—	—	40	—	—	P
41	40	—	—	—	—	50	—	—	P
51	45	—	—	—	50	—	—	—	M
61	50	—	—	—	60	—	—	—	M
71	55	—	—	—	80	—	—	—	M
81	60	—	—	—	100	—	—	—	M
91	20	—	—	—	120	—	—	—	M
Схема 2									
02	—	10	1	10	—	—	—	—	M
12	—	12	1,2	20	—	—	—	—	M
22	—	14	1,1	25	—	—	—	—	M
32	—	16	1,4	30	—	—	—	—	M
42	—	18	1,5	40	—	—	—	—	M
52	—	20	2	—	—	10	—	—	Q
62	—	22	1,8	—	—	20	—	—	Q
72	—	24	1,6	—	—	30	—	—	Q
82	—	25	1,4	—	—	40	—	—	Q
92	—	30	1	—	—	50	—	—	Q
Схема 3									
03	10	—	—	—	10	—	—	—	M
13	20	—	—	—	20	—	—	—	M
23	30	—	—	—	25	—	—	—	M
33	40	—	—	—	30	—	—	—	M

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
43	50	—	—	—	40	—	—	—	<i>M</i>
53	60	—	—	—	—	10	—	—	<i>P</i>
63	70	—	—	—	—	20	—	—	<i>P</i>
73	80	—	—	—	—	30	—	—	<i>P</i>
83	90	—	—	—	—	40	—	—	<i>P</i>
93	100	—	—	—	—	50	—	—	<i>P</i>
Схема 4									
04	—	10	2		—	—	30	1	<i>Q</i>
14	—	12	1,5		—	—	40	2	<i>Q</i>
24	—	14	2		—	—	50	3	<i>Q</i>
34	—	16	3		—	—	60	4	<i>Q</i>
44	—	18	2,5	100	—	—	—	3	<i>c</i>
54	—	20	2	200	—	—	—	4	<i>c</i>
64	—	22	1,5	130	—	—	—	5	<i>c</i>
74	—	24	2	140	—	—	20	—	Δ
84	—	25	3	150	—	—	40	—	Δ
94	—	30	2,5	160	—	—	50	—	Δ
Схема 5									
05	20	—	—		20	—	20	4	<i>Q</i>
15	40	—	—		40	—	40	2	<i>Q</i>
25	30	—	—	10		—	60	1	<i>P</i>
35	50	—	—	20		—	20	2	<i>P</i>
45	60	—	—	30		—	40	3	<i>P</i>
55	40	—	—	40	30	—	—	0,5	<i>c</i>
65	20	—	—	50	40	—	—	1	<i>c</i>
75	30	—	—	10	50	—	—	2	<i>c</i>
85	50	—	—	20	30	—	40	—	Δ
95	60	—	—	30	20	—	60	—	Δ
Схема 6									
06	30	10	1		—	—	20	2	<i>Q</i>
16	40	12	1,2		—	—	25	4	<i>Q</i>
26	50	14	1,4		—	—	30	5	<i>Q</i>
36	60	16	1,5		—	—	40	6	<i>Q</i>
46	70	18	2	130	—	—	—	2	<i>c</i>
56	80	20	1	150	—	—	—	3	<i>c</i>
66	90	24	1,2	140	—	—		4	<i>c</i>
76	100	30	1,4	100	—	—	40	—	Δ
86	120	30	1,5	150	—	—	50	—	Δ

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
96	100	20	2	90	–	–	40	–	Δ
Схема 7									
07	10	–	–	–		–	20	2	P
17	20	–	–	–		–	30	3	P
27	30	–	–	–		–	40	4	P
37	40	–	–	–		–	50	2	P
47	50	–	–	–	100	–	–	3	c
57	10	–	–	–	120	–	–	4	c
67	20	–	–	–	150	–	–	2	c
77	30	–	–	–	180	–	60	–	Δ
87	40	–	–	–	200	–	70	–	Δ
97	50	–	–	–	100	–	80	–	Δ
Схема 8									
08	–	10	1	50		–	–	–	P
18	–	12	1,5	70		–	–	–	P
28	–	14	2	100		–	–	–	P
38	–	16	2,5	120		–	–	–	P
48	–	18	3	110		–	–	–	P
58	–	20	1		40	–	–	–	Q
68	–	10	1,5		50	–	–	–	Q
78	–	12	2		60	–	–	–	Q
88	–	14	2,5		70	–	–	–	Q
98	–	16	3		80	–	–	–	Q
Схема 9									
09	–	8	1	–	–	20	–	–	P
19	–	10	2	–	–	40	–	–	P
29	–	12	1	–	–	60	–	–	P
39	–	14	1,5	–	–	50	–	–	P
49	–	16	2,5	–	–	30	–	–	P
59	–	18	3	–	50	–	–	–	M
69	–	20	1,2	–	60	–	–	–	M
79	–	10	1,4	–	80	–	–	–	M
89	–	12	1,5	–	100	–	–	–	M
99	–	20	1,6	–	120	–	–	–	M
Схема 10									
00	30	8	1	80		–	–	–	P
10	40	10	2	100		–	–	–	P
20	50	12	1	120		–	–	–	P

Закінчення таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
30	60	14	1,5	150		—	—	—	P
40	70	16	2,5	200		—	—	—	P
50	80	18	3	—	60	—	—	—	Q
60	90	20	1,2	—	80	—	—	—	Q
70	100	10	1,4	—	100	—	—	—	Q
80	50	12	1,5	—	120	—	—	—	Q
90	60	20	1,6	—	150	—	—	—	Q

Таблиця А.2 – Вихідні дані для розрахунку задачі № 2

Варіант	Номер схеми	Маса			$\frac{R}{r}$	i_{2x}	f
		m_1	m_2	m_3			
1	2	3	4	5	6	7	8
10	0	3m	1m	2m	2,2	1,6r	0,1
20	0	3m	3m	2m	1,8	1,4r	0,15
30	0	3m	1m	2m	2,6	1,6r	0,15
40	0	2m	2m	2m	2,3	1,6r	0,1
50	0	2m	1m	2m	2,3	1,7r	0,1
60	0	2m	2m	2m	2,2	1,4r	0,1
70	0	2m	1m	1m	1,7	1,5r	0,2
80	0	3m	3m	1m	2,3	1,6r	0,2
90	0	3m	1m	2m	2,3	1,4r	0,15
11	1	3m	2m	2m	—	—	0,15
21	1	2m	3m	1m	—	—	0,2
31	1	2m	1m	2m	—	—	0,2
41	1	3m	2m	1m	—	—	0,15
51	1	3m	3m	1m	—	—	0,2
61	1	2m	2m	2m	—	—	0,2
71	1	3m	2m	2m	—	—	0,1
81	1	2m	2m	2m	—	—	0,15
91	1	2m	3m	2m	—	—	0,1
12	2	3m	2m	1m	2,7	1,6r	0,1
22	2	2m	1m	3m	2,2	1,5r	0,2
32	2	3m	1m	2m	2	2r	0,2
42	2	2m	1m	3m	1,9	1,8r	0,25
52	2	2m	2m	3m	2,1	1,3r	0,15

Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8
62	2	2m	1m	3m	2,3	1,4 r	0,15
72	2	3m	2m	2m	1,7	1,5 r	0,15
82	2	2m	2m	2m	2,4	1,5 r	0,1
92	2	3m	3m	1m	2,2	1,6 r	0,15
13	3	3m	1m	3m	—	—	0,25
23	3	2m	2m	1m	—	—	0,25
33	3	2m	3m	2m	—	—	0,2
43	3	3m	2m	2m	—	—	0,2
53	3	2m	3m	2m	—	—	0,15
63	3	3m	3m	2m	—	—	0,2
73	3	3m	2m	1m	—	—	0,15
83	3	3m	3m	2m	—	—	0,25
93	3	3m	1m	2m	—	—	0,25
14	4	2m	1m	2m	2,5	1,7 r	0,15
24	4	3m	2m	2m	2,3	1,9 r	0,2
34	4	2m	3m	1m	2	1,3 r	0,15
44	4	3m	3m	1m	2,1	1,4 r	0,25
54	4	2m	2m	3m	2,7	1,3 r	0,25
64	4	2m	2m	1m	2,1	1,9 r	0,1
74	4	3m	1m	2m	2,3	1,5 r	0,1
84	4	3m	2m	3m	1,9	1,3 r	0,2
94	4	2m	3m	2m	1,9	1,6 r	0,2
15	5	2m	3m	3m	2,1	1,5 r	0,15
25	5	2m	3m	2m	2,6	1,6 r	0,15
35	5	2m	2m	2m	2,4	1,4 r	0,1
45	5	3m	2m	1m	2,1	2 r	0,2
55	5	3m	3m	3m	1,7	1,9 r	0,1
65	5	3m	3m	3m	2,4	1,1 r	0,25
75	5	2m	1m	1m	2	1,6 r	0,1
85	5	3m	2m	3m	2,3	1,3 r	0,2
95	5	2m	3m	2m	2	1,4 r	0,05
16	6	3m	2m	2m	2,3	1,3 r	0,15
26	6	3m	3m	2m	2,1	1,7 r	0,15
36	6	3m	2m	3m	2,4	1,2 r	0,1

Закінчення таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8
46	6	2m	2m	3m	2,1	1,5r	0,2
56	6	2m	2m	2m	1,9	1,2r	0,15
66	6	3m	2m	1m	1,7	1,5r	0,15
76	6	3m	2m	3m	2,2	1,3r	0,15
86	6	3m	3m	1m	1,9	1,6r	0,15
96	6	2m	1m	2m	2	1,5r	0,15
17	7	3m	3m	1m	2,1	1,7r	0,2
27	7	3m	1m	2m	2,5	1,1r	0,2
37	7	3m	1m	1m	2,4	1,8r	0,15
47	7	3m	2m	2m	1,8	1,2r	0,15
57	7	2m	2m	2m	2,3	1,9r	0,1
67	7	2m	2m	3m	2,5	1,9r	0,15
77	7	2m	2m	2m	2,2	1,6r	0,1
87	7	2m	3m	1m	2,2	1,5r	0,1
97	7	3m	2m	2m	2,2	1,6r	0,15
18	8	3m	3m	1m	2,6	2,1r	0,1
28	8	3m	2m	1m	2	1,5r	0,15
38	8	3m	1m	2m	1,9	1,7r	0,2
48	8	3m	2m	1m	2	2,1r	0,15
58	8	2m	2m	2m	1,8	1,3r	0,2
68	8	2m	3m	2m	2,3	1,2r	0,1
78	8	2m	2m	2m	2,1	2,2r	0,15
88	8	2m	3m	1m	1,9	1,6r	0,1
98	8	3m	2m	2m	1,8	1,8r	0,15
19	9	3m	1m	2m	1,8	1,4r	0,1
29	9	2m	2m	2m	2,3	1,9r	0,15
39	9	2m	2m	2m	2,1	1,5r	0,1
49	9	3m	2m	1m	2,3	1,5r	0,2
59	9	3m	2m	1m	2,1	1,8r	0,15
69	9	2m	3m	2m	2,1	1,6r	0,1
79	9	2m	2m	2m	2	1,3r	0,15
89	9	3m	2m	3m	2,5	1,8r	0,05
99	9	3m	1m	2m	1,8	1,5r	0,15

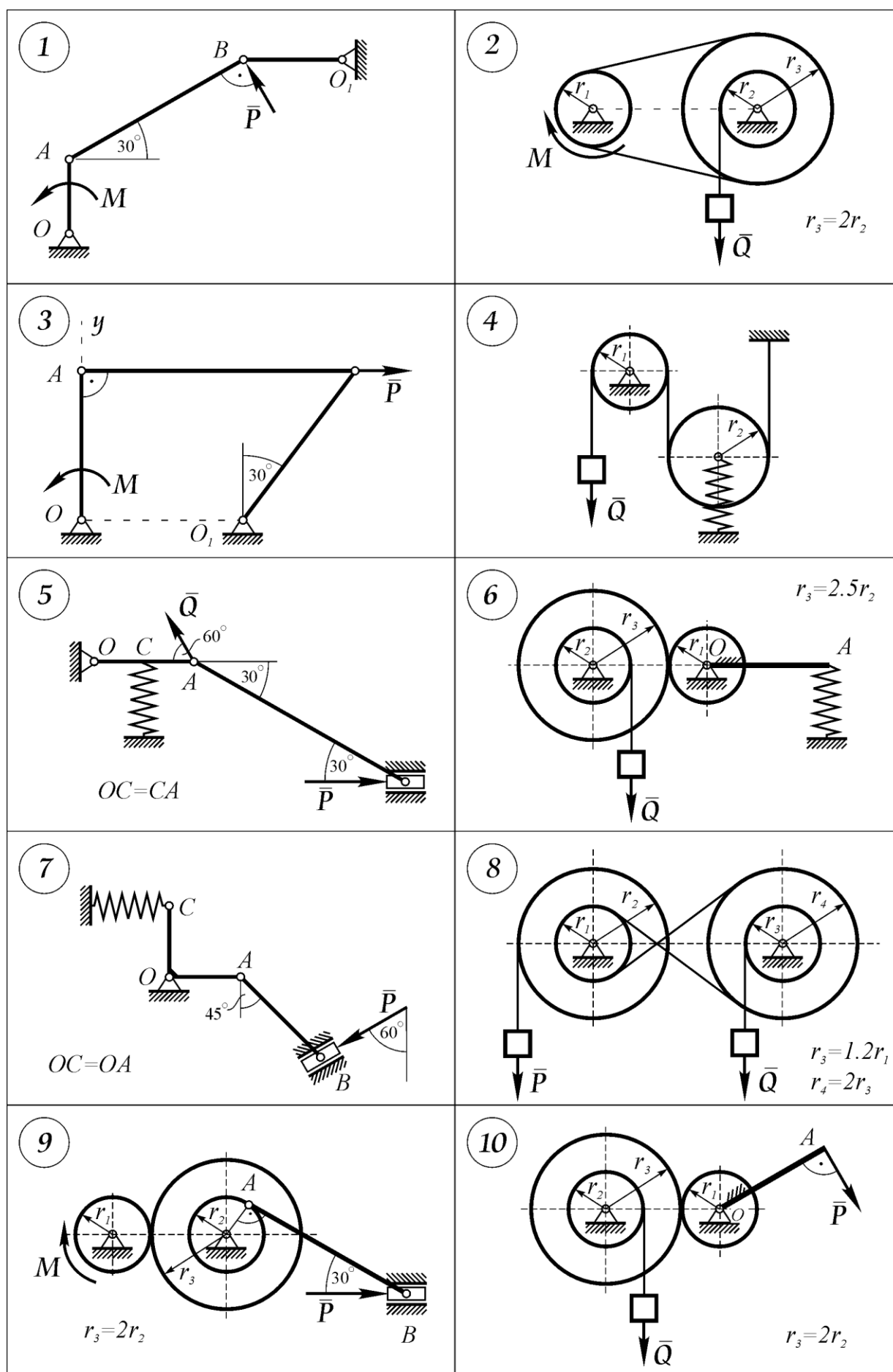


Рисунок А.1 – Розрахункові схеми до задачі № 1

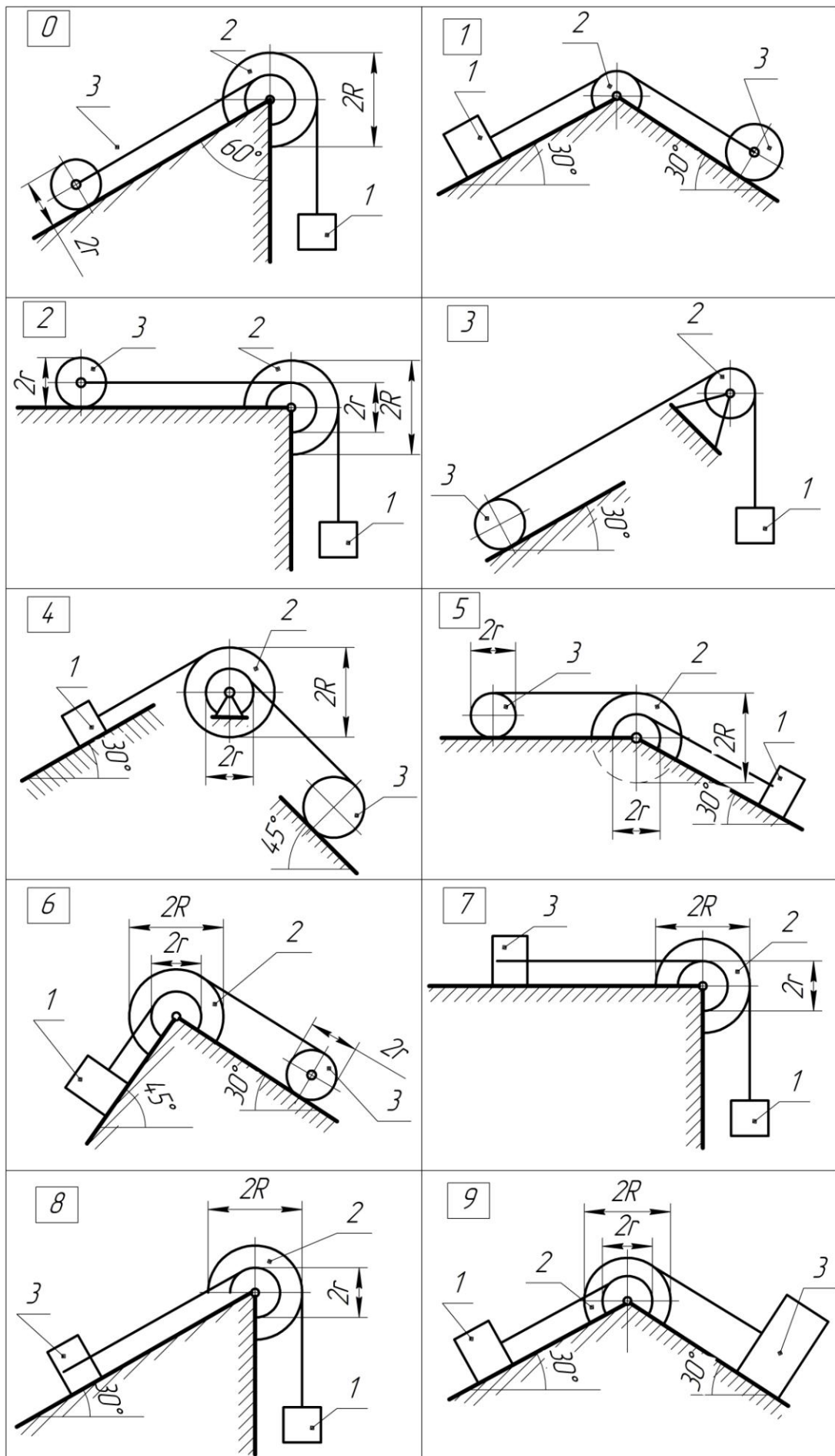


Рисунок А.2 – Розрахункові схеми до задачі № 2

ЕЛЕКТРОННЕ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНЕ ВИДАННЯ

Чальцев Михайло Миколайович
Алтухова Тетяна Іванівна
Семененко Ігор Ігорович

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНИХ РОБІТ
І ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ
З ДИСЦИПЛІНИ «ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»
З РОЗДІЛУ «ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ
І ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ»
(ДЛЯ СТУДЕНТІВ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ
6.070106 «АВТОМОБІЛЬНИЙ ТРАНСПОРТ»
ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ)

Підписано до випуску .2012 р. Гарнітура Times New.
Умов. друк. арк. . Зам. № .

Державний вищий навчальний заклад
«Донецький національний технічний університет»
Автомобільно-дорожній інститут
84646, м. Горлівка, вул. Кірова, 51
E-mail: druknf@rambler.ru

Редакційно-видавничий відділ

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 2982 від 21.09.2007 р.