О РАЗРЕШИМОСТИ ВТОРОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Лесина Е.В.

КИИ ДонНТУ, Красноармейск, Украина

В последнее время граничные задачи для линейных эллиптических уравнений и систем изучаются в основном для правильно эллиптического случая. В 1948 году А.В. Бицадзе привел пример уравнения $\dfrac{d^2u}{d\bar{z}^2}=0$, $z=x_1+ix_2$, однородная задача Дирихле в единичном круге для которого имеет счетное число линейно независимых полиномиальных решений $u_N(z)=(1-z\bar{z})z^N$ (см. [1]). Позже он указал еще один пример уравнения с тем же свойством, но уже с простыми нулями символа дифференциального оператора [2]. В статье [2] показано, кроме того, что задача Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon}=t\frac{\partial u}{\partial t}+\bar{t}\,\frac{\partial u}{\partial \bar{t}}=0, \quad t=e^{i\theta},$$

в круге K, как и задача Дирихле, имеет счетное множество линейно независимых решений вида

$$u(z)=\psi(z)-\frac{z}{\bar{z}}\int_0^z \tau^2\psi(\tau)d\tau,$$

где $\psi(z)$ – произвольная в круге K аналитическая функция, которая непрерывна в $\overline{K}$ вместе с первой производной.

Настоящая работа посвящена изучению проблемы разрешимости неоднородной задачи Неймана

$$u'_{\upsilon^*}\big|_{\partial K}=\kappa \tag{1}$$

в ограниченной области для скалярного неправильно эллиптического дифференциального уравнения второго порядка с комплексными коэффициентами:

$$Lu\equiv\left(\sin\varphi_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cos\varphi_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\times \tag{2}$$

$$\times\left(\sin\varphi_2\frac{\partial}{\partial x_1}+\cos\varphi_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u=0\,.$$

Рассмотрен модельный случай, когда в качестве области выбран единичный круг K, а уравнение (2) не содержит младшие члены. Решен вопрос характеризации классов граничных данных, для которых задача (1), (2) имеет единственное решение в обычном пространстве Соболева. Такими классами в типичном случае оказались пространства функций с экспоненциальным убыванием коэффициентов Фурье.

В приведенной ниже теореме содержатся результаты исследования двух ситуаций – в зависимости от теоретико-числовых свойств числа $\varphi_0=\varphi_2-\varphi_1$, называемого углом между характеристиками уравнения (2). Влияние угла между характеристиками на показатель гладкости решения второй краевой задачи проявляется подобно эффекту, возникающему при рассмотрении задачи Дирихле для того же уравнения [3].

Теорема. *Если число* φ_0 *вещественное и* π*-иррациональное, причем*

$$\forall n\in N \Rightarrow \left|\sin n\varphi_0\right| > Const\cdot n^{-\mu},$$

а правая часть граничного условия $\kappa\in H_\rho^{s-3/2}(\partial K)$, *где*

$$H_\rho^m(\partial K)=\left\{\alpha(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha_n^C\cos n\tau+\alpha_n^S\sin n\tau\right)\right.$$

$$\left.\in L_2(\partial K):\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left|\alpha_n^C\right|^2+\left|\alpha_n^S\right|^2\right)\rho^2(1+n^2)^m<\infty\right\} -$$

весовое пространство Соболева с экспоненциальным весом $\rho=e^{n\left(\left|\mathrm{Im}(\varphi_1+\varphi_2)\right|-\left|\mathrm{Im}(\varphi_2-\varphi_1)\right|\right)}$, *то решение задачи (1), (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству* $H^{s-\mu}(K)$. *Если же число* φ_0 *комплексное и по-прежнему* $\kappa\in H_\rho^{s-3/2}(\partial K)$, *то решение задачи (1), (2) существует, единственно (с точностью до аддитивной постоянной) и принадлежит пространству* $H^s(K)$.

Метод исследования и доказательство основного результата основаны на связи исходной задачи с порождаемой ею обобщенной проблемой моментов, свойства которой определяют свойства граничной задачи (см. [3,4,5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бицадзе А.В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – Т. 3, №6. – С. 211-212.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы дифференциальных уравнений с частными производными. – М.: Наука. – 1981. – 448 с.
3. Бурский В.П., Кириченко Е.В. О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения // УМЖ. – 2011. – Т. 63, №2. – С. 156-164.
4. Бурский В.П. О краевых задачах для эллиптического уравнения с комплексными коэффициентами и одной проблеме моментов // УМЖ. – 1993. – Т. 45, № 11. – С. 1476-1483.
5. Бурский В.П., Лесина Е.В. Задача Неймана и одна задача с косой производной для неправильно эллиптического уравнения // УМЖ. – 2012. – Т. 64, №4. – С. 451-462.